Walter Pérez Terrel

FÍSICA

Teoría y práctica

- Exámenes UNI desarrollados por temas y con claves
- Actualizado según últimos prospectos
- Desarrollo completo de todo el curso
- Nuevos problemas resueltos y propuestos tipo UNI
- Claves para todos los problemas propuestos

COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS

Editorial San Marcos

FÍSICA

Teoría y práctica

FÍSICA

Teoría y práctica

COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS

Física: Teoría y práctica
Colección Uniciencia Sapiens
Walter Pérez Terrel

Asesoría académica: Salvador Timoteo V.

Jr. Dávalos Lissón 135, Lima, Lima
Teléfono: 331-1522
RUC: 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Diseño de portada: Gustavo Tuppia
Composición de interiores: Jhordy Leguía
Responsable de edición: Alex Cubas

Primera edición: 2007
Segunda edición: 2012
Tercera edición: 2014
Cuarta edición: diciembre 2015
Tiraje: 2000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2015-17920
ISBN: 978-612-315-279-6
Registro de proyecto editorial N.° 31501001501403

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Teléfono: 433-7611
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344
Marzo 2016

ÍNDICE

CAPÍTULO 04: ESTÁTICA

CAPÍTULO 05: DINÁMICA

CAPÍTULO 06: TRABAJO Y POTENCIA

CAPÍTULO 07: ENERGÍA

CAPÍTULO 08: CANTIDAD DE MOVIMIENTO

CAPÍTULO 09: CHOQUES

CAPÍTULO 10: ESTÁTICA DE FLUIDOS

CAPÍTULO 11: MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

CAPÍTULO 12: GRAVITACIÓN UNIVERSAL

CAPÍTULO 13: CALOR

CAPÍTULO 14: TERMODINÁMICA

CAPÍTULO 15: ELECTROSTÁTICA

CAPÍTULO 16: ELECTRODINÁMICA

CAPÍTULO 17: MAGNETISMO

CAPÍTULO 18: ELECTROMAGNETISMO

CAPÍTULO 19: ÓPTICA

CAPÍTULO 20: FÍSICA MODERNA

PRESENTACIÓN

La presente obra: *Física* de la Colección Uniciencia Sapiens, comprende los temas exigidos en los prospectos de admisión de las principales universidades del país, en especial el de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), y el desarrollo de temas selectos tratados al final del libro. Esta obra va dirigida a los estudiantes que se inician en el estudio de la Física fundamental, en los colegios preuniversitarios y centros preuniversitarios. El objetivo de la obra es la comprensión de las leyes de la Física fundamental y utilizarlas en los diferentes problemas.

En cada capítulo se ha puesto énfasis en realizar una amplia teoría, ejemplos básicos de cada concepto, problemas resueltos, problemas de examen de admisión UNI, problemas propuestos con sus respectivas claves; basados según su dificultad, utilizando estrategias adecuadas para la fácil comprensión de los estudiantes que se preparan en el nivel preuniversitario. Además, pretende una comunicación directa con el lector, y garantiza un aprendizaje progresivo, revisando exhaustivamente los problemas

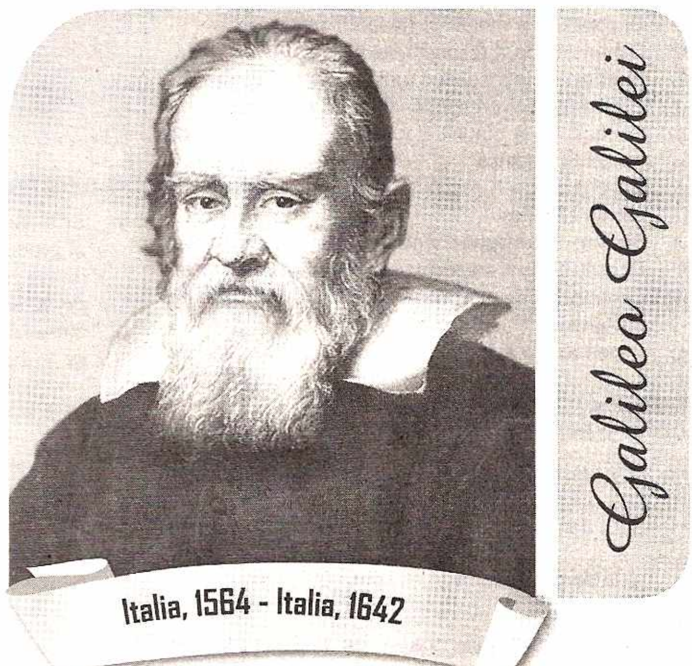
Lo que pretende este libro es que los alumnos aprendan a analizar, recopilar datos y elaborar estrategias adecuadas para solucionar cualquier tipo de problema. La constancia en su preparación es importante para obtener buenos resultados.

El Editor

Análisis dimensional

capítulo 01

Galileo Galilei (Pisa, 15 de febrero de 1564-Arcetri, 8 de enero de 1642) fue un astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano, relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen la mejora del telescopio, gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante al copernicanismo. Ha sido considerado como el «padre de la astronomía moderna», el «padre de la física moderna» y el «padre de la ciencia», estudió el movimiento de los cuerpos en una época en que la Física estaba muy atrasada y lo pudo traducir en expresiones matemáticas a través del análisis dimensional.



Su trabajo experimental es considerado complementario a los escritos de Francis Bacon en el establecimiento del moderno método científico, a la vez que su carrera científica es complementaria a la de Johannes Kepler. Su trabajo se considera una ruptura de las teorías asentadas de la física aristotélica y su enfrentamiento con la Inquisición romana de la Iglesia católica suele presentarse como el mejor ejemplo de conflicto entre religión y ciencia en la sociedad occidental.

Fuente: Wikipedia

ECUACIÓN O FÓRMULA DIMENSIONAL

La dependencia entre una magnitud (unidad) derivada y las magnitudes (unidades) fundamentales se determina por la ecuación o fórmula dimensional (o brevemente dimensiones), que representa un monomio formado por el producto de los símbolos de las magnitudes (unidades) fundamentales elevados a diversas potencias denominados dimensiones.

Así, la ecuación o fórmula dimensional de la magnitud (unidad) X tendrá la forma:

$$\boxed{[X] = L^a M^b T^c \theta^d I^e J^f N^g} \qquad ...(1.1)$$

X: Símbolo de la magnitud (unidad) X.
[X]: Dimensiones de la magnitud (unidad) X.
L: Símbolo de la magnitud (unidad) de longitud.
a: Dimensión de X respecto de la longitud.
M: Símbolo de la magnitud (unidad) de masa.
b: Dimensión de X respecto de la masa.
T: Símbolo de la magnitud (unidad) de tiempo.
c: Dimensión de X respecto del tiempo.
θ: Símbolo de la magnitud (unidad) de temperatura.
d: Dimensión de X respecto de la temperatura.
I: Símbolo de la magnitud (unidad) de intensidad de corriente eléctrica.
e: Dimensión de X respecto de la intensidad de corriente eléctrica.
J: Símbolo de la magnitud (unidad) de intensidad luminosa.
f: Dimensión de X respecto de la intensidad luminosa.
N: Símbolo de la magnitud (unidad) de cantidad de sustancia.
g: Dimensión de X respecto de la cantidad de sustancia.

Ejemplos:

- Si A: área $\Rightarrow [A] = L^2 \Rightarrow$ el área se mide en m^2
- Si V: volumen $\Rightarrow [V] = L^3 \Rightarrow$ el volumen se mide en m^3
- Si D: densidad $= \dfrac{\text{masa}}{\text{volumen}} \Rightarrow [D] = \dfrac{M}{L^3} = ML^{-3}$

  $\Rightarrow$ la densidad se mide en kgm^{-3} o kg/m^3

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

MAGNITUD FUNDAMENTAL	SÍMBOLO	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Temperatura	θ	kelvin	k
Intensidad de corriente eléctrica	I	amperio	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd
Cantidad de sustancia	N	mol	mol

MAGNITUD AUXILIAR	UNIDAD	SÍMBOLO
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

En toda igualdad matemática o fórmula física que expresa la relación entre las diferentes magnitudes físicas, las dimensiones en el primer y segundo miembros, deben ser iguales.

Sea la fórmula física: $A = B^2 + C \Rightarrow [A] = [B^2] = [C]$

Ejemplo: Analicemos la fórmula para determinar el recorrido de un móvil, en línea recta, con velocidad constante.

$$d = vt$$

d: distancia recorrida, en m
v: velocidad constante, en m/s
t: tiempo empleado, en s

$$\Rightarrow [d] = [vt] = [\text{longitud}] = L$$

Recuerda:

"Si una fórmula física es correcta, todos los términos de la fórmula son dimensionalmente iguales".

Si: $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, entonces se cumple que:

$[d] = [v_0t] = [\frac{1}{2}at^2]$

REGLAS DIMENSIONALES

1. Si el valor numérico de la magnitud X es igual al producto (cociente) de los valores numéricos de las magnitudes A y B, entonces, la dimensión de X será igual al producto (cociente) de las dimensiones de A y B.

   Si: $X = AB \Rightarrow \boxed{[X] = [A][B]}$ ...(1.2)

   Si: $X = \dfrac{A}{B} \Rightarrow \boxed{[X] = [A][B]^{-1}}$ ...(1.3)

2. Si el valor numérico de la magnitud X es igual a la potencia n/m del valor numérico de la magnitud A, entonces la dimensión de X es igual a la potencia n/m de la dimensión de A.

   Si: $X = A^{n/m} \Rightarrow \boxed{[X] = [A]^{n/m}}$ ...(1.4)

   Si: $X = A^n \Rightarrow \boxed{[X] = [A]^n}$ ...(1.5)

   Si: $X = A^{1/m} \Rightarrow \boxed{[X] = [A]^{1/m}}$ ...(1.6)

3. Si el valor numérico de la magnitud X es un coeficiente constante (número, ángulo en radianes, función trigonométrica, función logarítmica, etc.) que es independiente de la dimensión de las magnitudes (unidades) fundamentales, entonces la dimensión de X es nula, y X es denominada "adimensional".

   Si: X = número $\Rightarrow [X] = 1$
   Si: $X = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow [X] = 1$
   Si: $X = \log_b N \Rightarrow [X] = 1$
   Si: X = constante numérica (adimensional)

   $\Rightarrow \boxed{[X] = L^0M^0T^0\theta^0I^0J^0N^0 = 1}$ ...(1.7)

Ejemplos:

Los ángulos, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas y en general cualquier número son adimensionales. Convencionalmente la dimensión de un número es igual a la unidad.

$[\text{sen}30°] = 1$; $[\log 100] = 1$; $[\sqrt{3}] = 1$; $[2\pi] = 1$; $[2{,}5] = 1$

4. Si: $X = a^b \Rightarrow [b] = 1$
   En toda fórmula física los exponentes son cantidades adimensionales.
5. Si: $X = a\,\text{sen}\alpha \Rightarrow [\alpha] = 1$
   En toda fórmula física los ángulos son cantidades adimensionales.

FINES Y OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

1. Expresar las magnitudes derivadas en función de las magnitudes fundamentales.
2. Comprobar la veracidad de las fórmulas físicas mediante el principio de homogeneidad dimensional.
3. Determinar fórmulas físicas empíricas a partir de datos experimentales obtenidos en el laboratorio.

FÓRMULAS DIMENSIONALES BÁSICAS

1. [desplazamiento lineal] = [longitud] = L
2. [desplazamiento angular] = [ángulo] = 1
3. [área] = [base][altura] = L L = L^2
4. [volumen] = [área][altura]= L^2 L = L^3
5. [velocidad lineal] $= \dfrac{[\text{desplazamiento}]}{[\text{tiempo}]} = \dfrac{L}{T} = LT^{-1}$
6. [velocidad angular] $= \dfrac{[\text{ángulo}]}{[\text{tiempo}]} = \dfrac{1}{T} = T^{-1}$
7. [aceleración lineal] $= \dfrac{[\text{velocidad}]}{[\text{tiempo}]} = \dfrac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$
8. [frecuencia] $= \dfrac{[\text{revoluciones}]}{[\text{tiempo}]} = \dfrac{1}{T} = T^{-1}$
9. [fuerza] = [masa] [aceleración] = MLT^{-2}
10. [trabajo] = [fuerza] [distancia] = $MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$

¡Cuidado!

- [trabajo] = [energía]
- El trabajo y la energía en todas sus formas tienen igual dimensión.
- La energía calorífica, energía luminosa, energía nuclear, etc., tienen igual dimensión.
  [energía calorífica] = L^2MT^{-2}
  [energía nuclear] = L^2MT^{-2}
  [energía química] = L^2MT^{-2}

11. [potencia] $= \dfrac{[\text{trabajo}]}{[\text{tiempo}]} = \dfrac{L^2MT^{-2}}{T} = L^2MT^{-3}$
12. [energía cinética] $= \left[\dfrac{1}{2}\right]$ [masa][velocidad]^2
    $= 1M(LT^{-1})^2 = L^2MT^{-2}$
13. [energía potencial gravitatoria] = [m][g][h]
    $= MLT^{-2}L = L^2MT^{-2}$
14. [presión] $= \dfrac{[\text{fuerza}]}{[\text{área}]} = \dfrac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$
15. [densidad] $= \dfrac{[\text{masa}]}{[\text{volumen}]} = ML^{-3}$
16. [cantidad de movimiento] = [masa][velocidad] = MLT^{-1}
17. [impulso] = [fuerza][tiempo] = $MLT^{-2}T = MLT^{-1}$

¡Importante!:
[energía cinética] = ML^2T^{-2}
[energía potencial] = ML^2T^{-2}
[trabajo] = ML^2T^{-2}
"El trabajo y la energía son dimensionalmente iguales".
Observación:
"La cantidad de movimiento e impulso tienen igual dimensión".

DIMENSIONES. CANTIDADES FÍSICAS DERIVADAS

Las unidades derivadas del SI se definen por expresiones algebraicas bajo la forma de productos de potencias de las unidades SI básicas o suplementarias, con coeficiente igual a la unidad.

Hemos de tener en cuenta también que un mismo nombre de unidad SI puede corresponder a varias magnitudes diferentes y una misma unidad SI derivada puede expresarse de forma diferente utilizando nombres de unidades básicas y nombres de unidades derivadas. Conviene indicar que si una unidad derivada es expresable de formas diferentes, se admite el empleo preferencial de ciertos nombres especiales con objeto de facilitar la distinción entre magnitudes que tengan las mismas dimensiones.

Así, para la frecuencia se prefiere el hertz antes que s^{-1}, o para el trabajo de una fuerza se prefiere el *newton* metro al *joule*, o para las radiaciones ionizantes se prefiere el becquerel al s^{-1}, etc.

Ejemplos de unidades derivadas del SI definidas a partir de las unidades básicas y suplementarias:

- Superficie: la unidad es el metro cuadrado, que corresponde a un cuadrado de un metro de lado.
- Volumen: la unidad es el metro cúbico, que es el volumen de un cubo de un metro de arista.
- Velocidad: su unidad es el metro por segundo, que es la velocidad de un cuerpo que, con movimiento uniforme, recorre un metro en un segundo.
- Aceleración: tiene por unidad el metro por segundo al cuadrado, que es la aceleración de un objeto en movimiento uniformemente variado, cuya velocidad varía, cada segundo, 1 m/s.
- N.° de ondas: la unidad es el metro a la potencia menos uno (m^{-1}), y es el N.° de ondas de una radiación monocromática cuya longitud de onda es igual a un metro.

- Masa en volumen: su unidad es el kilogramo por metro cúbico, que es la masa en volumen de un cuerpo homogéneo cuya masa es de 1 kilogramo y cuyo volumen es de 1 metro cúbico.
- Caudal en volumen: la unidad de medida es el metro cúbico por segundo, que es el caudal en volumen de una corriente uniforme tal que una sustancia de 1 metro cúbico de volumen atraviesa una sección determinada en 1 segundo.
- Caudal másico: unidad, el kilogramo por segundo, que es el caudal másico de una corriente uniforme tal que una sustancia de 1 kilogramo de masa atraviesa una sección determinada en 1 segundo.
- Velocidad angular: aquí la unidad es el radián por segundo, que es la velocidad angular de un cuerpo que, en rotación uniforme alrededor de un eje fijo, gira 1 radián en 1 segundo.
- Aceleración angular: tiene por unidad el radián por segundo cuadrado, que es la aceleración angular de un cuerpo animado de rotación uniformemente variada alrededor de un eje fijo, cuya velocidad angular varía cada segundo 1 radián por segundo.

CASOS ESPECIALES

Fórmulas empíricas.

Son aquellas fórmulas físicas que se obtienen a partir de datos experimentales conseguidos de la vida cotidiana o en el laboratorio de ciencias.

Ejemplo:

La velocidad v del sonido en un gas depende de la presión P y de la densidad D del mismo gas, y tiene la siguiente forma: $v = P^xD^y$

Hallar la fórmula física para determinar la velocidad del sonido en cualquier gas.

Resolución:

Aplicando el principio de homogeneidad dimensional:

$[v] = [P^x][D^y] \Rightarrow LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^y$

$\Rightarrow LT^{-1} = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{-3y}$

$\Rightarrow M^0L^1T^{-1} = M^{x+y}L^{-x-3y}T^{-2x}$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

T: $-1 = -2x \Rightarrow x = 1/2$;

M: $0 = x + y \Rightarrow y = -1/2$

Reemplazando: $v = P^{1/2}D^{-1/2}$

Luego: $v = \sqrt{\dfrac{P}{D}}$

Propiedades de los exponentes

Los exponentes son siempre números, por consiguiente la dimensión de los exponentes es igual a la unidad.

Ejemplo:

En la siguiente fórmula física, hallar la dimensión de Z: $Z = ke^{kt}$; donde; e: número; t: tiempo.

Resolución:

a) La dimensión del exponente es igual a la unidad:
$[k][t] = 1 \Rightarrow [k] = T^{-1}$

b) Principio de homogeneidad dimensional:
$$[Z] = \underbrace{[k]}_{T^{-1}}\underbrace{[e^{kt}]}_{1} \Rightarrow [Z] = T^{-1}$$

Propiedad de los ángulos

Las funciones trigonométricas se aplican a los ángulos, pero estos son números, por consiguiente la dimensión de los ángulos es igual a la unidad.

Ejemplo:

En la siguiente fórmula física, indique la dimensión de x: $x = wA\text{sen}(wt)$, donde; A: longitud; t: tiempo.

Resolución:

a) La dimensión del ángulo es igual a la unidad:
$[w][t] = 1 \Rightarrow [w]T = 1$
$[w] = T^{-1}$

b) La dimensión de la función seno es igual a la unidad: $[\text{sen}(wt)] = 1$

c) Analizando la fórmula tenemos:
$$[x] = \underbrace{[w]}_{T^{-1}}\underbrace{[A]}_{L}\underbrace{[\text{sen}(wt)]}_{1}$$
Luego: $[x] = LT^{-1}$

Propiedad de la suma y la resta

En las operaciones dimensionales no se cumplen las reglas de la adición y sustracción.

$L + L + L = L$

$M - M = M$

Ejemplo:

Hallar la dimensión de K en la siguiente fórmula física: $K = (x + a + b^2)(a^2 - y)$; donde; x: longitud.

Resolución:

a) Principio de homogeneidad dimensional:
$[x] = [a] = [b^2] = L \Rightarrow [a^2] = [y] = L^2$

b) Analizando la fórmula física:
$[K] = [x + a + b^2]\,[a^2 - y]$
$$[K] = \underbrace{[L + L + L]}_{L}\underbrace{[L^2 - L^2]}_{L^2}$$
$[K] = LL^2 = L^3$
Luego, K representa el volumen.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar la dimensión de las principales magnitudes físicas derivadas.

Resolución:

1. $[\text{área}] = L^2$
2. $[\text{volumen}] = [Ah] = L^3$
3. $[\text{densidad}] = [m/V] = ML^{-3}$
4. $[\text{velocidad}] = [d/t] = LT^{-1}$
5. $[\text{aceleración}] = [\Delta v/t] = LT^{-2}$
6. $[\text{fuerza}] = [ma] = MLT^{-2}$
7. $[\text{trabajo}] = [Fd] = ML^2T^{-2}$
8. $[\text{potencia}] = [W/t] = ML^2T^{-3}$
9. $[\text{energía}] = [mc^2] = ML^2T^{-2}$
10. $[\text{presión}] = [F/A] = ML^{-1}T^{-2}$
11. $[\text{velocidad angular}] = [\theta/t] = T^{-1}$
12. $[\text{periodo}] = [t] = T$
13. $[\text{frecuencia}] = T^{-1}$

2. La siguiente es una fórmula física correcta: $KF = mv$; donde, m: masa; F: fuerza; v: velocidad. Determinar qué magnitud representa K.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[KF] = [mv]$

$[K][F] = [m][v]$

$[K]LMT^{-2} = MLT^{-1}$

$\therefore [K] = T$

Luego, K representa el tiempo.

3. La siguiente es una fórmula física correcta: $Kv = Ft$, donde, v: velocidad; F: fuerza; t: tiempo. ¿Qué magnitud representa K?

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[K][v] = [F][t]$

$[K]LT^{-1} = MLT^{-2}T \quad \therefore [K] = M$

Luego, K representa la masa.

4. La siguiente expresión es dimensionalmente correcta y homogénea: $KF = mv^2$, donde, F: fuerza; m: masa; v: velocidad. ¿Qué magnitud representa K?

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[K.F] = [mv^2]$

$[K]\,[F] = [m][v^2]$

$[K]LMT^{-2} = ML^2T^{-2} \quad \therefore [K] = L$

Luego, K representa la longitud.

5. Determinar las unidades de E en el SI: $E = \dfrac{Dv^2}{g}$, donde, D: densidad; v: velocidad lineal; g: aceleración de la gravedad.

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$[E] = \frac{[D][v^2]}{[g]} = \frac{ML^{-3}L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = ML^{-2}$$

Luego, E se mide en kgm^{-2}.

6. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determine las dimensiones de X:
$X = wA\cos(wt + \delta)$ donde, A: longitud; t: tiempo.

Resolución:

Analizando el ángulo:

$[wt] = 1 \Rightarrow [w] = T^{-1}$

La dimensión del coseno: $[\cos(wt + \delta)] = 1$

Principio de homogeneidad dimensional:

$[X] = [w][A][\cos(wt + \delta)]$

$[X] = T^{-1}L(1) \quad \therefore [X] = LT^{-1}$

7. La iluminación y en un punto es directamente proporcional a la intensidad luminosa I e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d. Hallar la dimensión de la iluminación y.

$$y = \frac{I}{d^2}\cos\theta$$

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$[y] = \frac{[I]}{[d^2]}[\cos\theta] = \frac{J}{L^2}1 \Rightarrow [y] = L^{-2}J$$

La unidad de la iluminación es el lux, según esto:
1 lux = 1 $cdsr/m^2$.

8. En la siguiente fórmula física, determinar la unidad de B, si: $A^{0,5}h^{\text{sen}30°} = B\cos60°$ donde, A: aceleración; h: altura.

Resolución:

La dimensión de la aceleración es: $A = LT^{-2}$

La dimensión de la altura es: $h = L$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[A^{1/2}][h^{1/2}] = [B][\cos60°]$

$L^{1/2}T^{-1}L^{1/2} = [B]1 \Rightarrow B = LT^{-1}$

Por lo tanto, B se mide en m/s.

9. En la siguiente fórmula física, indicar las dimensiones de ab, si: $a = Ae^{bw}\text{sen}(wt)$ donde, A: longitud; t: tiempo; c: constante numérica.

Resolución:

La medida del ángulo es adimensional:

$[wt] = 1 \Rightarrow [w] = T^{-1}$

Los exponentes son adimensionales:

$[bw] = 1 \Rightarrow [b] = T$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[a] = [A][e^{bw}][\text{sen}(wt)]$

$[a] = L(1)(1) \Rightarrow [a] = L$

Luego, $[ab] = LT$

10. La siguiente fórmula es dimensionalmente correcta: $V^3 = \frac{A+F^2}{B}$ donde, V: volumen; F: fuerza. Hallar la dimensión de A, B y A/B.

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[A] = [F^2] \Rightarrow [A] = M^2L^2T^{-4}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[V^3] = \frac{[F^2]}{[B]} \Rightarrow [B] = \frac{[F^2]}{[V^3]} = \frac{M^2L^2T^{-4}}{L^9}$

$\Rightarrow [B] = M^2L^{-7}T^{-4}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$\left[\frac{A}{B}\right] = [V^3] = L^9$

11. En la siguiente fórmula física, ¿qué magnitud física representa R?

$$R = [\sqrt{z(h+z)}]\left[\frac{y}{z} - \log x\right][y+A]$$

donde, h: altura

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[h] = [z] = L \Rightarrow [\sqrt{z(h+z)}] = L$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$\left[\frac{y}{z}\right] = [\log x] = 1 \Rightarrow [y] = [z] = L \Rightarrow \left[\frac{y}{z} - \log x\right] = 1$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[y + A] = L$

Analizando el conjunto:
$[R] = [\sqrt{z(h+z)}]\left[\frac{y}{z} - \log x\right][y+A]$

$\Rightarrow [R] = L(1)L = L^2$

Por lo tanto, R representa el área.

12. En la siguiente fórmula física: $P = D^xQ^yh^zg$, donde; P: potencia; D: densidad; h: altura; Q: caudal (m^3/s); g: aceleración de la gravedad. Hallar: $x + y + z$

Resolución:

Dimensión de la potencia: $[P] = ML^2T^{-3}$
Dimensión de la densidad: $[D] = ML^{-3}$
Dimensión de la aceleración: $[g] = LT^{-2}$
Dimensión de la altura: $[h] = L$
Dimensión del caudal: $[Q] = L^3T^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[P] = [D^x][Q^y][h^z][g]$
$ML^2T^{-3} = [M^xL^{-3x}][L^{3y}T^{-y}][L^z][L^1T^{-2}]$
$M^1L^2T^{-3} = M^xL^{-3x+3y+z+1}T^{-y-2}$

Analizando los exponentes tenemos:
M: $1 = x \Rightarrow x = 1$
T: $-3 = -y - 2 \Rightarrow y = 1$
L: $2 = -3x + 3y + z + 1 \Rightarrow z = 1$
$\therefore x + y + z = 3$

13. En la siguiente fórmula física: $K = \sqrt[3]{\frac{\sigma Q}{m}}$, donde; γ: tensión superficial (N/m); Q: caudal (m^3/s); m: masa. ¿Qué magnitud física representa K?

Resolución:

La dimensión de la tensión superficial es: $[\sigma] = MT^{-2}$
La dimensión del caudal es: $[Q] = L^3T^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[K] = \left[\frac{\sigma Q}{m}\right]^{1/3} = \left[\frac{MT^{-2}L^3T^{-1}}{M}\right]^{1/3} = LT^{-1}$

Por lo tanto, K representa la velocidad.

14. La siguiente fórmula física es dimensionalmente correcta: $Q = KA\sqrt{2gh}$, donde, Q: caudal (m^3/s); A: área; g: aceleración; h: altura. Hallar la unidad de la magnitud K.

Resolución:

La dimensión de $\sqrt{2gh}$ es: $[2gh]^{1/2} = [LT^{-2}L]^{1/2} = LT^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[Q] = [K][A][\sqrt{2gh}]$
$L^3T^{-1} = [K]L^2LT^{-1} \Rightarrow [K] = 1$

Por lo tanto, K es adimensional, no tiene unidades.

15. La presión (P) que ejerce el flujo de agua sobre una placa vertical viene dada por la siguiente fórmula empírica: $P = \lambda Q^xd^yA^z$, siendo, λ: constante; A: área de la placa; d: densidad; Q: caudal (m^3/s). Determinar la expresión final de la fórmula.

Resolución:

Dimensión del área: $[A] = L^2$
Dimensión de la densidad: $[d] = ML^{-3}$
Dimensión del caudal: $[Q] = L^3T^{-1}$
Dimensión de la presión: $[P] = ML^{-1}T^{-2}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[P] = [\lambda][Q^x][d^y][A^z]$
$ML^{-1}T^{-2} = (1)[L^{3x}T^{-x}][M^yL^{-3y}][L^{2z}]$
$M^1L^{-1}T^{-2} = M^yL^{3x-3y+2z}T^{-x}$

Analizando los exponentes tenemos que:
T: $-2 = -x \Rightarrow x = 2$
M: $1 = y \Rightarrow y = 1$
L: $3x - 3y + 2z = -1 \Rightarrow z = -2$

$\therefore P = \lambda\frac{Q^2d}{A^2}$

16. La siguiente es la ecuación universal de los gases ideales: $PV = nRT$, P: presión (Nm^{-2}); V: volumen (m^3); n: cantidad de sustancia (mol); T: temperatura absoluta (K). Hallar la dimensión de la constante universal de los gases R.

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[P][V] = [n][R][T]$
$ML^{-1}T^{-2}L^3 = N[R]\theta$
Despejando: $[R] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$
Luego, R se mide en: $Jmol^{-1}K^{-1}$

17. La energía interna, por mol, de un gas ideal depende únicamente de la temperatura absoluta, como indica la siguiente fórmula: $U = 3/2RT$, donde, R: constante

universal de los gases; T: temperatura absoluta. Determinar la dimensión de la energía interna U.

Resolución:

La dimensión de R es: $[R] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$[U] = \left[\frac{3}{2}\right][R][T] = (1)ML^2T^{-2}\theta^{-1}N^{-1}\theta = ML^2T^{-2}N^{-1}$$

Luego, U se mide en: $Jmol^{-1}$

18. Si la intensidad de corriente eléctrica se define por la siguiente relación: i = Q/t, donde, Q: carga eléctrica; t: tiempo, hallar la ecuación dimensional de la carga eléctrica Q.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$$[i] = \frac{[Q]}{[t]};\ I = \frac{[Q]}{T} \Rightarrow [Q] = IT$$

La unidad de carga eléctrica es el *coulomb* (C) en honor a Charles A. de Coulomb (1736-1806) que fue el primero que midió las fuerzas eléctricas y magnéticas, según esto: 1 C = 1 A.s

19. Si el potencial eléctrico V se define por la siguiente relación: V = W/q; donde, W: trabajo; q: carga eléctrica, hallar la dimensión del potencial eléctrico V.

Resolución:

La dimensión de la carga eléctrica es: [q] = IT

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$[V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{IT} = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

La unidad del potencial eléctrico es el voltio (V) en honor al científico italiano Alessandro Volta (1745-1827), según esto: $1\ V = 1\ kgm^2s^{-3}A^{-1}$

20. Si la capacidad eléctrica C de un conductor se define matemáticamente como: C = Q/V, donde, Q: carga eléctrica; V: potencial eléctrico, hallar la dimensión de la capacidad eléctrica C.

Resolución:

La dimensión del potencial eléctrico es:

$[V] = L^2MT^{-3}I^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{IT}{L^2MT^{-3}I^{-1}} \Rightarrow [C] = L^{-2}M^{-1}T^4I^2$$

La capacidad eléctrica se mide en *faradios* (F) en honor al físico inglés Michael Faraday (1791-1867). Según esto: $1\ F = m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$

21. La ley de Ohm se expresa matemáticamente por la siguiente relación: ΔV = IR, donde, ΔV: diferencia de potencial; I: intensidad de corriente eléctrica; R: resistencia eléctrica. Hallar la ecuación dimensional de la resistencia eléctrica R.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[\Delta V] = [I][R]$

$L^2MT^{-3}I^{-1} = I[R]$

$[R] = L^2MT^{-3}I^{-2}$

Para la ecuación dimensional del potencial eléctrico V se ha utilizado el resultado anterior. La unidad de resistencia eléctrica es el *ohm* (Ω) en honor a Georg Simon Ohm (1789-1854), quien formuló la ley que lleva su nombre. Según esto: $1\ \Omega = 1\ m^2kgs^{-3}A^{-2}$

22. La fuerza F que actúa sobre un alambre, por el cual circula una corriente I, está dada por la siguiente relación: F = ILB, donde, L: longitud del alambre; B: densidad de flujo magnético externo o inducción magnética. Hallar la ecuación dimensional de B.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[F] = [I][L][B]$

$LMT^{-2} = IL[B]$

$\therefore\ [B] = MT^{-2}I^{-1}$

La unidad de densidad de flujo magnético es el tesla (T) en honor a Nikola Tesla (1856-1943), quien demostró el valor de la corriente alterna. Según esto: $1\ T = 1\ kgs^{-2}A^{-1}$

23. Si el flujo magnético Φ se define matemáticamente por la siguiente relación: Φ = BAcosθ, donde, B: intensidad del campo magnético; A: área. Hallar la dimensión del flujo magnético Φ.

Resolución:

La dimensión de la intensidad del campo magnético es: $[B] = MT^{-2}I^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[\Phi] = [B][A][\cos\theta]$

$[\Phi] = MT^{-2}I^{-1}L^2(1)$

$[\Phi] = ML^2T^{-2}I^{-1}$

La unidad de flujo magnético es el *weber* (Wb) en honor al físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891). Según esto: $1\ Wb = 1\ kgm^2s^{-2}A^{-1}$

24. La densidad de flujo magnético B, originado por una corriente rectilínea I, a una distancia radial r, está dada por la siguiente relación: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{r}\right)$

Hallar la unidad de permeabilidad magnética μ_0.

1 henry (H) = $1\ m^2kgs^{-2}A^{-2}$

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$$[B] = [\mu_0]\frac{[I]}{[r]} \Rightarrow MT^{-2}I^{-1} = [\mu_0]\frac{I}{L} \Rightarrow [\mu_0] = LMT^{-2}I^{-2}$$

Según esto, la unidad de permeabilidad magnética es: $mkgs^{-2}A^{-2}$

Pero por definición: $1\ H = m^2kgs^{-2}A^{-2}$

Entonces, la unidad μ_0 es: 1 H/m.

25. La velocidad de la luz c en el vacío depende de la permitividad eléctrica ε_0 y la permeabilidad magnética μ_0, como indica la siguiente relación: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Si un faradio es: $1\ F = m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$, hallar la dimensión de la permitividad eléctrica ε_0

Resolución:

La dimensión de la permeabilidad magnética es:
$[\mu_0] = LMT^{-2}I^{-2}$

Despejando la permitividad eléctrica ε_0: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{[LMT^{-2}I^{-2}][L^2T^{-2}]} \Rightarrow \varepsilon_0 = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$$

Según esto la unidad de permitividad eléctrica es: $kg^{-1}m^{-3}s^4A^2$

Pero por definición: $1\ F = kg^{-1}m^{-2}s^4A^2$

Entonces, la unidad de ε_0 es: 1 F/m

26. Si la inductancia de una bobina está dada por la siguiente relación: $L = \dfrac{N\phi}{I}$, donde, N: número de vueltas del enrrollamiento; ϕ: flujo magnético; I: intensidad de corriente. Hallar la ecuación dimensional de la inductancia L.

Resolución:

Por principio de homogeneidad:

$$[L] = \frac{[N]\ [\phi]}{[I]} = \frac{L^2MT^{-2}I^{-1}}{I} \Rightarrow [L] = L^2MT^{-2}I^{-2}$$

Hay que hacer notar que el número de vueltas N es adimensional y la dimensión del flujo magnético ϕ se ha tomado del problema anterior.

La unidad de inductancia es el henry (H) en honor a Joseph Henry (1797-1898), que realizó experimentos que condujeron al telégrafo eléctrico. Según esto:

$1\ H = 1\ m^2kgs^{-2}A^{-2}$

27. La energía W que almacena una bobina en forma de campo magnético tiene la siguiente forma:
$W = \dfrac{1}{x}I^xL^y$, donde, I: intensidad de la corriente; L: inductancia de la bobina. Hallar: $x + y$

Resolución:

Todos los exponentes son adimensionales, $[X] = 1$

La dimensión de la inductancia es:
$[L] = L^2MT^{-2}I^{-2}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[W] = [I^x][L^y]$
$ML^2T^{-2} = I^xL^{2y}M^yT^{-2y}I^{-2y}$
$I^0M^1L^2T^{-2} = M^yL^{2y}T^{-2y}I^{x-2y}$

Analizando los exponentes tenemos:
M: $1 = y$
I: $0 = x - 2y \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x + y = 3$

Por lo tanto, la fórmula es: $W = 1/2\ I^2L$

28. La intensidad del campo eléctrico E está definida matemáticamente por la siguiente relación: $E = F/q$, donde, F: fuerza eléctrica; q: carga eléctrica de prueba. Hallar la unidad de E,1 voltio (V) = $m^2kgs^{-3}A^{-1}$.

Resolución:

Por principio de homogeneidad:

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} \Rightarrow [E] = \frac{LMT^{-2}}{IT} \Rightarrow [E] = LMT^{-3}I^{-1}$$

Según esto la unidad de intensidad de campo eléctrico es: $mkgs^{-3}A^{-1}$

Pero por definición: $1\ V = 1\ m^2kgs^{-3}A^{-1}$

Entonces, la unidad de E es: V/m

29. La fuerza de Lorentz, que es la fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve con una velocidad v en una región donde existe un campo eléctrico E y un campo magnético B, está dada por la siguiente relación: $F = xE + yvB$, hallar las unidades de x e y, sabiendo que: 1 C = 1 As

Resolución:

La dimensión del campo eléctrico E es:
$[E] = LMT^{-3}I^{-1}$

La dimensión del campo magnético B es:
$[B] = MT^{-2}I^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[F] = [x][E] \Rightarrow MLT^{-2} = [x]LMT^{-3}I^{-1}$
$\Rightarrow [x] = IT$

Del principio de homogeneidad dimensional:
$[F] = [y][v][B] \Rightarrow MLT^{-2} = [y][LT^{-1}]MT^{-2}I^{-1}$
$\Rightarrow [y] = IT$

Por lo tanto, x e y tienen unidad de carga eléctrica C (*coulomb*).

30. Dada la ecuación: $F = n^xr^yv^z$, donde, F: fuerza; n: viscosidad (kg/ms); r: radio (longitud); v: velocidad Hallar: $x + y + z$

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:
$[F] = [n]^x[r]^y[v]^z$
$LMT^{-2} = [ML^{-1}T^{-1}]^x[L]^y[LT^{-1}]^z$
$L^1M^1T^{-2} = L^{-x+y+z}M^xT^{-x-z}$

De donde:
L: $-x + y + z = 1$
M: $x = 1$
T: $-x - z = -2$

Resolviendo: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$

Entonces: $x + y + z = 3$

31. En la siguiente fórmula física:
$1/2\ Kx^2 = Ad + (1/2)BP^2$, donde, K: constante física (MT^{-2}); x: longitud; d: longitud; P: *momentum* lineal (MLT^{-1}) Hallar qué magnitud representa: AB

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$\left[\frac{1}{2}\right][K][x^2] = [A][d]$$

$(1)MT^{-2}L^2 = [A]L \Rightarrow [A] = MLT^{-2}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$$\left[\frac{1}{2}\right][K][x^2] = \left[\frac{1}{2}\right][B][P^2]$$

$\Rightarrow (1)MT^{-2}L^2 = (1)[B]M^2L^2T^{-2} \Rightarrow [B] = M^{-1}$

Luego: $[AB] = LT^{-2}$

Por lo tanto, AB representa a la aceleración.

32. En la siguiente fórmula física: $E = Av^2 + BP$, donde, E: energía; v: velocidad; P: presión. Determinar qué magnitud representa: A/B

Resolución:

Por principio de homogeneidad: $[E] = [Av^2] = [BP]$

$$L^2MT^{-2} = [A]L^2T^{-2} = [B]L^{-1}MT^{-2}$$

(1)

(2)

De (1): $[A] = M$

De (2): $[B] = L^3$

De donde: $\left[\dfrac{A}{B}\right] = ML^{-3}$

Entonces, A/B representa la densidad.

33. Sabiendo que el impulso es $I = Ft$, encontrar las dimensiones de z para que la siguiente ecuación sea dimensionalmente correcta: $I = W/z + Mz$, donde, W: trabajo; F: fuerza; m: masa; t: tiempo.

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[I] = [F][t]$

$[I] = MLT^{-2}T = MLT^{-1}$

De la ecuación dimensional:

$[I] = \dfrac{[W]}{[z]} = M[z]$

Reemplazando: $MLT^{-1} = M[z]$

Luego: $[z] = LT^{-1}$

Compruebe Ud el mismo resultado con la otra igualdad.

34. En la siguiente fórmula física, determinar la dimensión de U si: $UNI = \text{sen}(It)$, donde, N: ángulo plano (radián); t: tiempo (segundo).

Resolución:

La dimensión del ángulo es igual a la unidad:

$[I][t] = 1$

$[I]T = 1 \Rightarrow [I] = T^{-1}$

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[U][N][I] = [\text{sen}(It)]$

$[U](1)T^{-1} = 1 \Rightarrow [U] = T$

Por lo tanto, U representa el tiempo.

35. Dimensionalmente, la siguiente expresión es correcta y su respectiva ecuación dimensional es la unidad: $[UNA^{UNI}] = 1$, donde: $U = mc^2$; m: masa de un fotón; c: velocidad de la luz; I: radio de la Tierra Hallar la dimensión de N.

Resolución:

Cálculo de la dimensión de U:

$[U] = [m][c^2]$

$[U] = ML^2T^{-2}$

La dimensión de un exponente siempre es igual a la unidad: $[U][N][I] = 1$

$ML^2T^{-2}[N]L = 1$

$\therefore\ [N] = M^{-1}L^{-3}T^2$

36. Determinar las unidades de h en el sistema internacional: $hf = mc^2$, donde, m: masa (kg); f: frecuencia (s^{-1}); c: velocidad de la luz (ms^{-1})

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[h][f] = [m][c^2]$

$[h]T^{-1} = ML^2T^{-2}$

$[h] = ML^2T^{-1}$

Luego, h se mide en: kgm^2s^{-1}

37. El periodo de oscilación de un péndulo depende de la longitud (L) de la cuerda y de la aceleración de la gravedad (g), tiene la siguiente forma: $t = \dfrac{\pi}{x}L^xg^y$ Hallar la fórmula física correcta.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[t] = [L^x][g^y] \Rightarrow T = L^xL^yT^{-2y} \Rightarrow L^0T^1 = L^{x+y}T^{-2y}$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

L: $0 = x + y$ T: $1 = -2y$

Resolviendo: $x = 1/2$ e $y = -1/2$

Reemplazando en la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

38. En la siguiente expresión: $V = \dfrac{a}{t^3} + \dfrac{b+h}{c}$, donde; V: volumen ($m^3$); t: tiempo (s); h: altura (m); determinar las dimensiones de: $\dfrac{b}{ac}$

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[b] = [h] = L$ ...(1)

$[V] = \dfrac{[a]}{[t^3]} \Rightarrow L^3 = \dfrac{[a]}{T^3} \Rightarrow [a] = L^3T^3$ ...(2)

$[V] = \dfrac{[b+h]}{c} \Rightarrow L^3 = \dfrac{L}{[c]} \Rightarrow [c] = L^{-2}$ ...(3)

Reemplazando de (1); (2) y (3):

$\left[\dfrac{b}{ac}\right] = T^{-3}$

39. La velocidad v del sonido en un gas depende de la presión P del gas y de la densidad D del mismo gas, y tiene la siguiente forma: $v = P^xD^y$ Hallar la fórmula física para determinar la velocidad del sonido en cualquier gas.

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[v] = [P^x][D^y]$

$LT^{-1} = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{-3y}$

$M^0L^1T^{-1} = M^{x+y}L^{-x-3y}T^{-2x}$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

T: $-1 = -2x \Rightarrow x = 1/2$

M: $0 = x + y \Rightarrow y = -1/2$

Reemplazando: $v = P^{1/2}D^{-1/2} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{P}{D}}$

40. Un chorro de agua con densidad (D) y velocidad (v), choca contra un área (A). La fuerza que ejerce el chorro de agua contra la superficie tiene la siguiente forma: $F = \sqrt{2}\,v^xA^yD^z$. Hallar la fórmula física correcta.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[F] = [v^x][A^y][D^z] \Rightarrow LMT^{-2} = L^xT^{-x}L^{2y}M^zL^{-3z}$

$L^1M^1T^{-2} = L^{x+2y-3z}M^zT^{-x}$

A bases iguales le corresponden exponentes iguales:

L: $1 = x + 2y - 3z$ M: $1 = z$; T: $-2 = -x$

Resolviendo: $x = 2$; $y = z = 1$

$\therefore F = \sqrt{2}\,v^2AD$

41. La fórmula para hallar la rigidez de una cuerda es: $S = \left(a\dfrac{Q}{R} + b\right)d^2$, donde, Q: carga (*newtons*); R: radio (metros); d: diámetro (metros); S: rigidez (newtons) Hallar las ecuaciones dimensionales de las magnitudes a y b.

Resolución:

Desarrollando: $S = ad^2\dfrac{Q}{R} + bd^2$

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[S] = [a]\left[d^2\dfrac{Q}{R}\right] = [bd^2]$

$LMT^{-2} = [a]L^2MT^{-2} = [b]L^2$

(1)

(2)

De (1): $[a] = L^{-1}$

De (2): $[b] = L^{-1}MT^{-2}$

42. En la siguiente fórmula física, hallar las unidades de la magnitud b en el sistema internacional.

$$F = av\left(b + \frac{c}{v}\right) + c$$

F: fuerza ($kg.m.s^{-2}$); v: velocidad ($m.s^{-1}$)

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[c] = [F] = MLT^{-2}$

$[b] = \dfrac{[c]}{[v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} \Rightarrow [b] = MT^{-1}$

Luego, b se mide en: $kg.s^{-1}$

43. Si la longitud final L de una varilla al dilatarse está dada para la siguiente relación: $L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$, donde, ΔT: variación de la temperatura (°C) Determinar la dimensión del coeficiente de dilatación α

Resolución:

Del principio de homogeneidad dimensional:

$[1] = [\alpha][\Delta T]$

$1 = [\alpha]\theta \Rightarrow [\alpha] = \theta^{-1}$

Luego, α se mide en: $°C^{-1}$

44. Dada la siguiente fórmula física, dimensionalmente correcta y homogénea: $Q = mC_e\Delta T$, donde, Q: cantidad de calor; m: masa; ΔT: variación de la temperatura Hallar la ecuación dimensional del calor específico C_e

Resolución:

$[Q] = [m][C_e][\Delta T] \Rightarrow L^2MT^{-2} = M[C_e]\theta$

$\therefore [C_e] = L^2T^{-2}\theta^{-1}$

Hay que señalar que el calor Q es una forma de energía.

45. La cantidad de calor Q que atraviesa una lámina de área A y espesor b, desde una temperatura T_1 hacia una temperatura T_2, en un tiempo t, está dada por la siguiente fórmula: $Q = KA\dfrac{(T_2 - T_1)}{b}t$, donde, K: conductividad térmica del material Hallar la ecuación dimensional de K

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[Q] = [K][A]\dfrac{[\Delta T]}{[b]}[t]$

$\Rightarrow L^2MT^{-2} = [K]L^2\dfrac{\theta}{L}T \quad \therefore [K] = LMT^{-3}\theta^{-1}$

46. La entropía S de un gas se define matemáticamente por la siguiente relación: $\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T}$, donde, ΔS: incremento de entropía ($S_F - S_0$); ΔQ: cantidad de calor absorbido; T: temperatura Hallar la ecuación dimensional de la entropía S.

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[\Delta S] = \dfrac{[\Delta Q]}{[T]} \Rightarrow [S] = \dfrac{L^2MT^{-2}}{\theta} \quad \therefore [S] = L^2MT^{-2}\theta^{-1}$

47. La siguiente fórmula es dimensionalmente correcta y homogénea: $E = Aw^2 + Bv^2 + CP$, donde, E: energía; w: velocidad angular; v: velocidad lineal; P: presión Hallar: $\left[\dfrac{BC}{A}\right]$

Resolución:

Por principio de homogeneidad dimensional:

$[E] = [Aw^2] = [Bv^2] = [CP]$

$L^2MT^{-2} = [A]T^{-2} = [B]L^2T^{-2} = [C]L^{-1}MT^{-2}$

(1)

(2)

(3)

De (1): $[A] = L^2M$

De (2): $[B] = M$

De (3): $[C] = L^3$

Entonces: $\left[\dfrac{BC}{A}\right] = L$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - I)

Determine la dimensión de S en la siguiente expresión:

$$S = \sqrt{\left(\frac{2E}{m}\right) - 2ah}$$

donde: E: energía, a: aceleración, h: altura, m: masa.

A) densidad de masa B) velocidad
C) presión D) frecuencia
E) aceleración

Resolución:

$$S = \sqrt{\left(\frac{2E}{m}\right) - 2ah} \quad \ldots(\text{I})$$

De (I): $S^2 = \left(\frac{2E}{m}\right) - 2ah$

Por principio de homogeneidad, tenemos:

$[S]^2 = \left[\frac{2E}{m}\right] = [2ah] \Rightarrow [S]^2 = \left[\frac{2E}{m}\right] \Rightarrow [S]^2 = \frac{ML^2T^{-2}}{M}$

$[S] = LT^{-1} = [\text{velocidad}]$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

En la ecuación: $y = \frac{x^2(x-a)}{f\cos\alpha}$, "a" es una aceleración y "f" es una frecuencia. La dimensión de "y" es:

A) L^3T^{-3} B) L^3T^{-5} C) L^2T^{-6}
D) LT^{-6} E) LT^{-7}

Resolución:

Por el principio de homogeneidad:

$[x] = [a] = LT^{-2}$

$\Rightarrow [y] = \left[\frac{x^2(x-a)}{f\cos\alpha}\right] = \frac{(LT^{-2})^2(LT^{-2})}{T^{-1}} \qquad \therefore [y] = L^3T^{-5}$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Se ha determinado que la velocidad de un fluido se puede expresar por la ecuación $v = \left[\frac{2P_m}{A} + 2BY\right]^{1/2}$ donde P_m es la presión manométrica del fluido e "Y" es la altura del nivel del fluido. Si la ecuación es dimensionalmente correcta, las magnitudes físicas de A y B, respectivamente, son:

A) densidad y aceleración B) densidad y velocidad
C) presión y aceleración D) fuerza y densidad
E) presión y fuerza

Resolución:

Por el principio de homogeneidad:

$[v]^2 = \left[\frac{2P_m}{A}\right]; [A] = \left[\frac{P_m}{v^2}\right]$

Las cantidades adimensionales se sustituyen por la unidad.

$[A] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{L^2T^{-2}} = ML^{-3} \qquad \text{(Densidad)}$

También: $[v^2] = [2BY] \Rightarrow [B] = \left[\frac{v^2}{Y}\right]$

$$[B] = \frac{L^2T^{-2}}{L} = LT^{-2} \text{ (Aceleración)}$$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

La ecuación del movimiento de una partícula es:
$ma + bv + kx = 0$

Sea: $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $2\delta = \frac{b}{m}$, donde:

m: masa, a: aceleración, x: posición, v: velocidad

Determine la dimensión de: $\frac{\delta}{w}$

A) L B) LT^{-1} C) adimensional
D) T^{-1} E) T

Resolución:

Dato: $ma + bv + kx = 0$

Por el principio de homogeneidad.

$$\underset{\text{I}}{[ma]} = \underset{\text{II}}{[bv]} = \underset{\text{III}}{[kx]}$$

(I) y (III): $[kx] = [ma] \Rightarrow [k]L = MLT^{-2} \Rightarrow [k] = MT^{-2}$

$\Rightarrow [w] = \sqrt{\left[\frac{k}{m}\right]} \Rightarrow [w] = \sqrt{\left[\frac{MT^{-2}}{M}\right]} \Rightarrow [w] = T^{-1} \quad \ldots(1)$

(I) y (II): $[bv] = [ma] \Rightarrow [b]LT^{-1} = MLT^{-2} \Rightarrow [b] = MT^{-1}$

De donde: $[2\delta] = \left[\frac{b}{m}\right] \Rightarrow \delta = T^{-1} \quad \ldots(2)$

Nos piden: $\left[\frac{\delta}{w}\right] = 1 \qquad \therefore \left[\frac{\delta}{w}\right]$: es adimensional

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

Sea: $f = A\tan[kx - \omega t\ln(\delta t)] + B$, una ecuación dimensionalmente correcta.

Dadas las siguientes proposiciones:

I. f, A y B tienen las mismas dimensiones.
II. Si f es la magnitud de una fuerza y t es el tiempo, las dimensiones de $\delta tB\omega$ son MLT^{-2}.
III. Si x es el desplazamiento, las dimensiones del producto kxA son MLT^{-2}, donde A es la magnitud de una fuerza.

Son correctas:

A) Solo I B) Solo III C) I y II
D) I y III E) II y III

Resolución:

$f = A\tan[kx - \omega t\ln(\delta t)] + B$

Del principio de homogeneidad:

I. $[f] = [A] = [B] = MLT^{-2} \quad \ldots(V)$
II. De la ecuación: $[\delta t] = 1 \Rightarrow [\omega t] = 1 \Rightarrow [\omega] = T^{-1}$
$\Rightarrow [\delta tB\omega] = (1)MLT^{-2}T^{-1} = MLT^{-3} \quad \ldots(F)$
III. $[kxA] = (1)MLT^{-2} \quad \ldots(V)$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la siguiente expresión:

$$\tan\alpha AB^{\cos\alpha} = \sqrt[3]{A^2 - B^3} - F$$

donde: F = fuerza

Hallar el ángulo α para que sea dimensionalmente correcta.

A) 60° B) 0° C) 180°
D) 120° E) 143°

2. En la expresión: $x = Ve^{\alpha\theta - 5\beta\theta^2}$, si es homogénea, entonces:

I. $[\alpha\theta] = 1$
II. $[\alpha\theta] = [5\beta\theta^2]$
III. $[x] = [V]$

¿Qué afirmaciones son verdaderas?

A) Todas B) I y III C) Ninguna
D) Solo I E) I y II

3. El periodo (T) de un planeta que gira en una órbita circular depende del radio de la órbita (R), de la masa de la estrella (M) y de la constante de gravitación universal (G). Sabiendo que $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$. Hallar el periodo de dicho planeta. (K: coeficiente numérico).

A) $T = KR\sqrt{\dfrac{M}{RG}}$ B) $T = K\sqrt{\dfrac{M}{RG}}$
C) $T = K\sqrt{\dfrac{R}{MG}}$ D) $T = KR\sqrt{GM}$
E) $T = KR\sqrt{\dfrac{R}{MG}}$

4. Alicia, una eficiente tutora, ha observado que la potencia (P) con que aplica una inyección depende de la densidad (D) del líquido encerrado, de la velocidad (v) del émbolo al expulsar el líquido y del tiempo de aplicación (t). Jorge un profesor de academia le ha conseguido una fórmula con los datos que ella le ha proporcionado, si $\rho = 0{,}8\ g/cm^3$; $v = 5$ cm/s y $t = 2$ s; entonces $P = 0{,}9$ watt. ¿Cuál sería la fórmula descubierta en unidades del Sistema Internacional?

A) $P = 300\rho vt^3$ B) $P = 400\rho v^2t^5$
C) $P = 600\rho^2v^5t^3$ D) $P = 900\rho v^5t^2$
E) $P = 250\rho v^4t^3$

5. Si la siguiente expresión contiene n términos y es correcta en sus dimensiones:

$a = K_0v_0 + K_1v_1/x_1 + K_2v_2^2 / x_2^2 + k_3v_3^3 / x_3^3 + \ldots$

Donde:
a: aceleración; x_i: longitud;
v_i: velocidad; K_i: constante física

Hallar el producto de las dimensiones de K_5 y K_7.

A) T^2 B) LT^{-2} C) LT^{-1}
D) T^5 E) T^8L^2

6. En qué unidades puede expresarse x para que la siguiente ecuación sea dimensionalmente correcta:

$$P = ygd + \frac{xv^2}{2}$$

Donde:
P: presión; g: aceleración de la gravedad;
d: densidad; v: velocidad

A) kg B) g/cm^2 C) newton
D) joule E) kg/m^3

7. Si la siguiente ecuación $Ax^2 + By^3 = C$ es dimensionalmente homogénea, hallar [x/y] si: A es una velocidad; B es una fuerza; C es una aceleración.

A) $M^{1/3}T^{-1/2}$ B) $M^{2/3}T^2$ C) $M^{-2/3}T^{-2}$
D) $M^{1/2}T^2$ E) $M^{1/3}T^2$

8. La ecuación es homogénea sabiendo que:
E: fuerza; P: presión y D: densidad. Hallar las unidades de A en el SI.

$$E = \frac{AP}{D} + BC^3$$

A) $kg.m^{-1}$ B) kg.m C) kg.m.s
D) $kg.m^2$ E) $kg.m^{-2}$

9. La velocidad de propagación de una onda en una cuerda depende de la tensión de la cuerda (F), su masa (m) y longitud (L). Hallar la fórmula empírica para la velocidad.

A) $v = K\sqrt{\dfrac{FL}{m}}$ B) $v = K\sqrt{FLm}$ C) $v = K\sqrt{\dfrac{m}{FL}}$
D) $v = K\sqrt{\dfrac{L}{Fm}}$ E) $v = KFLm$

10. Si se cumple que la ecuación es dimensionalmente correcta:
UNA + UNI = IPEN
Si: U: energía y R: radio
calcular: [PERU]

A) $M^2L^5T^{-4}$ B) ML^5T^{-6} C) $ML^{-3}T^{-6}$
D) MLT^{-3} E) MLT^{-2}

11. Sabiendo que la siguiente expresión:

$$\sqrt[n]{\frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_n}{A^n + B^{n+1} + C^{n+2} + V}}$$

tiene como unidades segundos. Determinar las unidades que puede tener.

$$\sqrt[\frac{7n}{12}]{\frac{AB}{C}}$$

Siendo: E_i: energía / i = 1, 2, 3, 4, ..., n
V: potencia

A) Unidad de potencia
B) Unidad de energía
C) Unidad de potencia elevada al cuadrado

D) No se puede determinar
E) Unidad de energía elevada al cuadrado

12. Hallar la dimensión de V en la siguiente ecuación dimensional y correcta:

$$V = \frac{(a+bc)E}{F\log x} + \frac{mR}{c}$$

Donde:
m: masa; a: aceleración;
R: longitud; b: constante numérica; F: fuerza

A) 1 B) MT C) MT^2
D) MT^{-1} E) M^{-2}

13. En un experimento de Física se comprobó que la relación: $QPF = (FAV)^{UNA}$ es dimensionalmente correcta siendo:
P: presión; F: fuerza; A: área;
V: volumen; U: energía.
¿Cuáles son las dimensiones de N?

A) $L^{-4}M^{-1}T^{-2}$ B) LMT C) $L^{-2}M^{-2}T^{-1}$
D) $L^2M^{-1}T^{-3}$ E) L^3MT^{-1}

14. Hallar las dimensiones de y para que la expresión:

$$y = BPe^{\frac{5mB}{v}}$$

sea dimensionalmente correcta siendo:
P = presión; m = masa; v = velocidad; e = 2,73

A) T^{-3} B) T^{-2} C) T^{-1}
D) MT E) MT^{-2}

15. La siguiente ecuación nos define la velocidad en función del tiempo (t) de un cuerpo que se desplaza sobre una superficie horizontal: $v = AW\cos(Wt)$. De las siguientes proposiciones, podemos afirmar que son verdaderas:
I. $[W] = T^{-1}$
II. $[A] = L$
III. $[v] = LT^{-1}$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) Todas

16. La fuerza de rozamiento que sufre una esfera dentro de un líquido está dada por la fórmula empírica: $F = Kn^xr^yv^z$
siendo:
K: constante numérica
n: viscosidad $= \dfrac{\text{masa}}{\text{Longitud (tiempo)}}$
r: radio
v: velocidad
Hallar el valor de: $x + y + z$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 3

17. Hallar la ecuación dimensional del potencial eléctrico (V)

$$V = \frac{\text{Trabajo}}{\text{Carga eléctrica}}$$

A) $ML^2T^{-3}I^{-1}$ B) $MLTI^{-1}$ C) $ML^{-2}TI^{-2}$
D) ML^2TI^{-3} E) ML^2TI^{-2}

18. La magnitud y tiene por unidades kgm^3s^{-2}. Si h es la constante de Planck y c es la rapidez de la luz, ¿cuál de las siguientes alternativas es una ecuación dimensionalmente correcta?

A) $y = hc$ B) $y = hc^2$ C) $y = hc^{-1}$
D) $y = h^2c$ E) $y = h^{-1}c^2$

19. Si la ecuación de estado para algunos gases reales es:
$\left(p + \dfrac{a}{V^2}\right)(V - b) = \dfrac{k}{273}$; determine [a]/[b]:
P: presión, V: volumen, k: temperatura

A) ML^5T^{-2} B) $M^2L^5T^2$ C) ML^2T^3
D) MLT E) ML^2T^{-2}

20. En $b = \dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{3}{2}kT}$; halle la ecuación dimensional de k, si:
b es adimensional, m: masa, v: rapidez, T: temperatura.

A) $MLT^2\theta$ B) $ML^2T^{-2}\theta^{-1}$ C) $MLT^{-1}\theta^{-1}$
D) $ML^{-1}T^2\theta$ E) $ML^2T^2\theta^{-2}$

21. La ecuación de una onda mecánica amortiguada está dada por la siguiente expresión: $\vec{y} = ae^{bt}\text{sen}(ct + \alpha)$ donde t es tiempo; $\vec{y}$ es posición, e es base de logaritmos neperianos y α es un ángulo. Determine la magnitud que posee la siguiente ecuación dimensional: $\dfrac{[a][b]^2}{[c]}$

A) velocidad B) aceleración C) tiempo
D) frecuencia E) longitud

22. Cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido, su rapidez varía de acuerdo a la siguiente expresión:
$v = \dfrac{F}{kn}\left[1 - e^{-\frac{(kn)}{A}t}\right]$
Donde: v: rapidez, F: fuerza, t: tiempo
Determine la ecuación dimensional de [knA].

A) MT B) $M^{-1}T^2$ C) M
D) M^2T^{-1} E) MT^{-2}

23. Los líquidos ofrecen resistencia al movimiento de los cuerpos (viscosidad), la fuerza debido a la viscosidad es proporcional a la rapidez del cuerpo ($F_{visc.} = Kv$), donde para el caso de un cuerpo en forma de esfera $K = 6\pi Rn$; R; radio. Determine [n].

A) $MT^{-1}L^{-1}$ B) $MT^{-2}L^{-1}$ C) $M^{-1}TL^{-1}$
D) $MT^{-2}L^{-2}$ E) $MT^{-2}L$

24. Si la ecuación es dimensionalmente correcta:

$$E = \frac{\rho f\log\sqrt{\mu}}{(M\sqrt{a} - Kv)^{\csc 30^\circ}}$$

Donde:
μ: coeficiente de fricción
M: momento de una fuerza
f: frecuencia de oscilación
ρ: densidad
a: aceleración
v: rapidez
Hallar la ecuación dimensional de E.

A) $L^{-8}MT^{-3}$ B) $L^{-8}M^{-1}T^{5}$ C) $L^{-8}M^{-1}T^{3}$
D) $L^{-6}MT^{2}$ E) $L^{-5}MT^{3}$

25. Determine la ecuación dimensional de Z, para que la expresión de P sea dimensionalmente correcta.
$P = EV^{n}\text{sen}\theta + Xgv_0 - VSy$
Siendo:
P: presión
g: aceleración de la gravedad
E: energía mecánica
v_0: velocidad inicial
V: volumen
S: superficie
$R = Z - X^{n}V^{2n}$

A) $M^{-3}L^{9}T^{3}$ B) $M^{-1}L^{3}T^{3}$ C) $M^{-2}L^{3}T^{3}$
D) $M^{3}L^{-9}T^{-3}$ E) $M^{-1}L^{-3}T^{-1}$

26. Hallar la dimensión de (ab) si:
$$S = \left(\frac{aQ}{R} + b\right)d^2$$
S y Q: fuerzas
R y d: longitudes

A) $ML^{-2}T^{-2}$ B) $ML^{-3}T^{-1}$ C) MLT
D) $ML^{2}T^{-3}$ E) MLT^{-3}

27. En la siguiente expresión: $F = av\left(b - \frac{c}{v}\right) + c$
donde: F: fuerza; v: velocidad
Hallar la dimensión de b.

A) $M^{-1}T$ B) MT C) MT^{-1}
D) LT E) MT^{2}

28. Se ha experimentado que la velocidad del sonido v en un gas es solo función de la densidad d del gas y de su coeficiente de comprensibilidad B. ¿Cuál es la fórmula que expresa la velocidad del sonido en función de las características del gas, si el módulo de comprensibilidad tiene dimensiones de presión? ([K] = 1).

A) $v = K$ B) $v = K\sqrt{\frac{d}{B}}$ C) $v = K\sqrt{\frac{B}{d}}$
D) $v = K\sqrt{dB}$ E) $v = K^2\sqrt{\frac{d}{B}}$

29. El valor de la velocidad tangencial (v) de un satélite artificial terrestre está dado por la siguiente expresión: $v = Ar^{a}g^{b}$
donde: A: es un número
R: radio de curvatura
g: aceleración de la gravedad
hallar el valor de a y b

A) $-1/2; -1/2$ B) $1/2; 1/2$ C) 1; 1
D) $-1; -1$ E) 2; 2

30. Se sabe que el periodo (P) de revolución de un satélite alrededor de un planeta depende del radio de la órbita (R) de la constante de gravitación universal (G) y de la masa del planeta alrededor del cual orbita. Hallar una expresión para la masa del planeta si la constante de gravitación universal es
$$(G) = \frac{(\text{FUERZA})(\text{ÁREA})}{\text{MASA}^2}$$
(K: constante de proporcionalidad)

A) $K\frac{R^3}{GP^2}$ B) $K\frac{R^2}{GP^2}$ C) $K\frac{R^3}{GP^3}$
D) $K\frac{R}{GP^3}$ E) N. A.

31. En la siguiente fórmula física, encontrar las dimensiones de E.
$$E = \frac{v^2\tan(wt)}{aD\log\pi}$$
Donde:
a: aceleración; D: densidad; v: velocidad

A) $M^{-2}L^{-2}$ B) ML^{-4} C) $M^{-1}L^{4}$
D) $M^{2}L^{2}$ E) $M^{-1}L^{3}$

32. En la siguiente fórmula física, calcular las dimensiones de K.
$$E = \frac{1}{2}KL^2$$
Donde:
E: energía; L: longitud

A) $ML^{2}T$ B) MT^{-2} C) ML
D) $MT^{2}L$ E) $M^{-1}L^{-2}$

33. En la siguiente fórmula física, calcular [C]
$$Q = AB + PC$$
Donde:
Q: calor; P: potencia

A) TL B) T C) T^{3}
D) T^{2} E) T^{-1}

34. Si en vez de la masa m, el trabajo W fuera considerado como magnitud fundamental, la ecuación dimensional de la densidad será:

A) $L^{-5}WT$ B) $L^{-3}WT^{-2}$ C) $L^{-5}WT^{2}$
D) LWT^{2} E) $L^{2}W^{-1}T$

35. Se ha creado un nuevo sistema de unidades en el que se consideran las siguientes magnitudes fundamentales: aceleración a; frecuencia f y potencia P. Determinar la fórmula dimensional de la densidad en dicho sistema.

A) $a^{-5}fP^{7}$ B) $a^{5}f^{-7}P$ C) $a^{7}f^{5}P^{-2}$
D) $a^{-5}f^{7}P$ E) $af^{5}P^{-7}$

36. En la siguiente expresión: $B\tan\theta = An\log\left(\frac{an}{v}\right)$
calcular [B].

Donde: A: área; a: aceleración; v: velocidad

A) LT B) L^2T C) L^2T^{-1}
D) LT^2 E) L^3T^{-1}

37. En la siguiente fórmula física, calcular [CDE], si:
d: distancia; t: tiempo
$d = C\tan(2\pi Dt + E)$

A) ML^2T^{-2} B) ML^2T C) ML^2T^{-3}
D) MLT^{-4} E) LT^{-1}

38. El periodo de un péndulo depende de la longitud del mismo y la aceleración de la gravedad, entonces su ecuación será:

$$T = 2\pi L^x g^y$$

Calcular: xy

A) 1/2 B) −1/2 C) −1/4
D) 1/4 E) 2

39. En la siguiente fórmula física, calcular n.

$$Da = \cos\theta v^n$$

Donde:
D: diámetro; a: aceleración;
v: velocidad

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

40. En la siguiente fórmula física, calcular las dimensiones de [x].

$$A = v(\theta + \pi^{Ex})$$

v: velocidad;
E: empuje hidrostático

A) $M^{-1}L^2T^2$ B) $M^{-1}L^{-1}T^2$ C) $M^{-2}LT^2$
D) $ML^{-2}T^2$ E) MLT^2

41. En la siguiente fórmula física, calcular

$$[B]: B = f\sqrt{A^2 - d^2}$$

Donde:
f: frecuencia; d: distancia

A) LT B) LT^{-1} C) T^{-1}
D) L^2 E) $L^{-2}T^{-1}$

42. En la siguiente fórmula física, calcular las dimensiones de B.

$$A^2 + n = \left(\frac{B}{v} + A\right)^2$$

Donde: v: velocidad; n: constante numérica

A) L B) LT^{-2} C) LT
D) LT^{-1} E) T

43. En la siguiente expresión, calcular [x]. $\cot\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = E$
Donde a: aceleración

A) LT B) L^2T C) LT^{-1}
D) LT^{-2} E) L

44. En la siguiente fórmula física, calcular [Q].

$$\sqrt{P - Q} = \frac{a}{H + F}$$

Donde:
F: fuerza; a: aceleración

A) M B) M^{-1} C) M^{-2}
D) M^2 E) M^3

45. Se da la siguiente fórmula física:

$$V = \frac{3a}{t^3} + \frac{h - b}{c}$$

Donde:
V: volumen; t: tiempo; h: altura
Determinar [E], si $E = \frac{b}{ac}$

A) T^{-3} B) T^2 C) T^{-1}
D) M^2L^3 E) MT^{-3}

46. La intensidad de campo eléctrico E es la fuerza eléctrica F por unidad de carga q. Calcule [E].

A) MLT^{-2} B) $LMT^{-3}I^{-1}$ C) $LM^{-2}T^{-2}$
D) $LMTI^1$ E) LMT^3I

47. En la siguiente fórmula física, hallar [B], $P = \frac{Ax^2 + Bx + C}{At^2 + Bt + C}$
Donde: A: velocidad; t: tiempo

A) L B) L^{-1} C) T
D) T^{-1} E) LT

48. En la siguiente fórmula física: $t^2F = \text{sen}\alpha m^{x+y}LD^z$
calcular: x + y + z
Donde:
F: fuerza; m: masa;
L: longitud D: densidad;
t: tiempo

A) 2 B) 1 C) 4
D) 3 E) −2

49. En la siguiente fórmula física, calcular: $Z^{y/x}$

$$F = t^x D^y v^z$$

Donde: F: fuerza; t: tiempo;
D: densidad; v: velocidad

A) 1 B) −1 C) 4
D) 2 E) 6

50. Un cuerpo cae libremente durante un tiempo t partiendo del reposo. Deducir mediante el análisis dimensional una ecuación para la velocidad.
(k: constante numérica)

A) kgt^2 B) kgt^3 C) kg^2t
D) kgt E) $k\sqrt{gt}$

51. Indicar verdadero (V) o falso (F):
I. El trabajo y la energía poseen las mismas dimensiones.
II. Las razones trigonométricas son adimensionales.
III. En el Sistema Internacional, las unidades de la velocidad y la aceleración son m/s y m/s^2, respectivamente.

A) VVF B) VVV C) VFF
D) FFF E) FFV

52. Relacionar:

I. Fuerza	A. ML^{-2}
II. Energía	B. $ML^{-1}T^{-2}$
III. Densidad	C. MLT^{-2}
IV. Presión	D. ML^{-3}
	E. $ML^{2}T^{-2}$

A) IE; IIC; IIID; IVB B) ID; IIE; IIIC; IVB
C) IA; IIB; IIIC; IVD D) IC; IIE; IIID; IVB
E) IB; IIA; IIIC; IVD

53. Se sabe que el periodo de un oscilador armónico simple T está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde m es la masa del oscilador. Hallar las dimensiones de k.

A) MT^2 B) MT C) MT^{-3}
D) MT^{-1} E) MT^{-2}

54. En la siguiente expresión:

$$F = av\left(b - \frac{c}{v}\right) + c$$

donde:
F: fuerza
v: velocidad
Hallar las dimensiones de b.

A) $M^{-1}T$ B) MT C) MT^{-1}
D) LT E) MT^2

55. Indique verdadero (V) o falso (F) con respecto a la siguiente cantidad física: 1 kg.m/s^2
I. Se lee kilogramo por metro sobre segundo cuadrado.
II. Se lee kilogramo metro por segundo.
III. Se lee kilogramo metro por segundo cuadrado.

A) FFF B) FVV C) VFV
D) FFV E) VVF

56. Respecto al uso correcto del Sistema Internacional de Unidades, indique verdadero (V) o falso (F):
I. Un móvil recorre la distancia de 5 m.
II. La frecuencia de un oscilador es 400 hertz
III. Si N: newtons, entonces: N = kg.m/s^2

A) FFF B) VFV C) FFV
D) VVF E) FVV

57. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determine las dimensiones de X y B.

$$P = \frac{F}{X} + Bv$$

Se sabe que:
P: potencia; F: fuerza; v: velocidad

A) LT^{-1}; MLT^{-1} B) $L^{-1}T$; MLT^2
C) LT^{-1}; MLT^{-2} D) LT; MLT
E) $L^{-1}T$; MLT^{-2}

58. Se sabe que la deformación longitudinal que experimenta una barra homogénea está dada por:

$$d = \frac{FL}{AE}$$

Donde:
F: fuerza; L: longitud; A: área
Hallar las dimensiones de E.

A) MLT^{-2} B) MLT^2 C) $ML^{-1}T^{-1}$
D) ML^2T^2 E) $ML^{-1}T^{-2}$

59. Si la ecuación es dimensionalmente homogénea, hallar las dimensiones de K.

$$A\tan\alpha = \frac{KE^2}{\sqrt{Q}}$$

Donde:
A = 10 m/s; E = 8 m^3/s; Q = 4 m^2
Son los valores en el Sistema Internacional.

A) $L^{-4}T^2$ B) $L^{-4}T$ C) $L^{-4}T^3$
D) $L^{-4}T^{-1}$ E) $L^{-4}T^{-2}$

60. La ecuación mostrada es dimensionalmente homogénea: $daA + B = \frac{DC^2}{2} + E$

donde D: densidad
a: aceleración
E: energía/volumen

Determine las dimensiones de A y C.

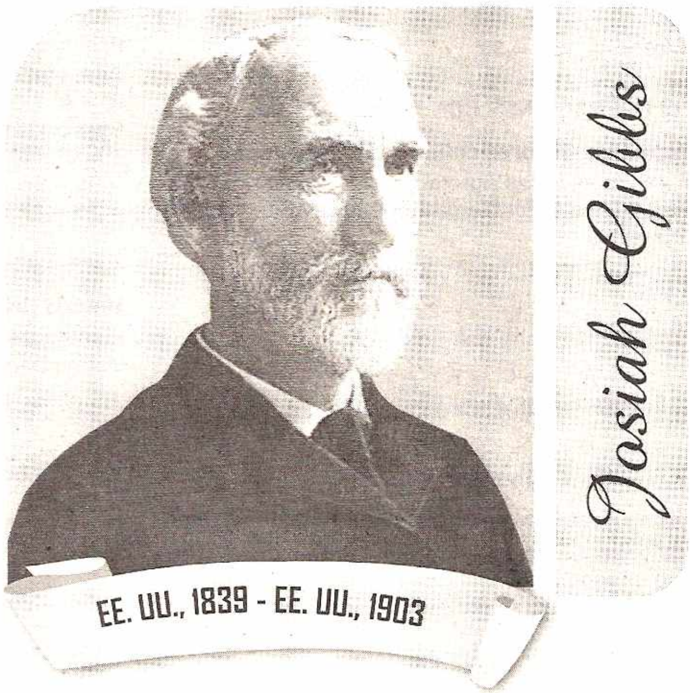
A) L^2; LT^{-2} B) L; LT^{-1} C) L; T^{-2}
D) L^2; L^2T E) L; LT^3

CLAVES

1. D	9. A	17. A	25. E	33. B	41. B	49. D	57. E
2. E	10. A	18. A	26. A	34. C	42. D	50. D	58. E
3. E	11. C	19. E	27. C	35. D	43. D	51. B	59. B
4. D	12. C	20. C	28. C	36. B	44. C	52. D	60. B
5. E	13. A	21. A	29. B	37. E	45. A	53. E	
6. E	14. A	22. D	30. A	38. C	46. B	54. C	
7. A	15. E	23. A	31. C	39. B	47. A	55. D	
8. A	16. E	24. B	32. B	40. B	48. B	56. C	

Análisis vectorial

02 capítulo



Josiah Willard Gibbs (Connecticut, 11 de febrero de 1839-Connecticut, 28 de abril de 1903) fue un físico estadounidense que contribuyó de forma destacada a la fundación teórica de la termodinámica. Estudió en la Universidad de Yale, donde obtuvo un doctorado en Ingeniería Mecánica, en 1863, con una tesis acerca del diseño de engranajes por métodos geométricos. Cabe destacar que fue el primer estadounidense al que se le confirió un doctorado en Ingeniería.

En 1886 fue a vivir a Europa, donde permaneció tres años: París, Berlín y Heidelberg. En 1871 fue nombrado profesor de Física Matemática en la Universidad de Yale. Enfocó su trabajo al estudio de la Termodinámica y profundizó, asimismo, la teoría del cálculo vectorial, donde paralelamente a Oliver Heaviside opera separando la parte real y la parte vectorial del producto de dos cuaternios puros, con la idea de su empleo en física; en la actualidad, es en ambos campos considerado un pionero. Por otro lado, Gibbs dedujo la regla de las fases, que permite determinar los grados de libertad de un sistema fisicoquímico en función del número de componentes del sistema y del número de fases en que se presenta la materia involucrada. Son también muy valiosas sus investigaciones sobre la mecánica estadística.

Fuente: Wikipedia

VECTOR

Se representa mediante un segmento de recta orientado dentro del espacio euclidiano tridimensional.

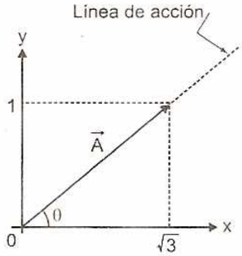


Fig. 2.1

$\vec{A}$: vector A; $|\vec{A}|$ = módulo del vector A

Respecto de la figura 2.1:

Módulo. $|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

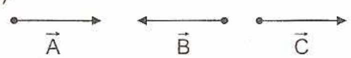
Dirección: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$; $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30°$

OPERACIONES CON VECTORES

Suma de vectores colineales y paralelos

La suma se realiza algebraicamente, teniendo en consideración los signos (sentido hacia la derecha o hacia la izquierda).



Donde: $|\vec{A}| = 4$; $|\vec{B}| = 3$; $|\vec{C}| = 2$

- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{R} = 4 + (-3) + 2$
  $\Rightarrow \vec{R} = +3$ (hacia la derecha)
- $\vec{Q} = \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{Q} = (-3) + 2$
  $\Rightarrow \vec{Q} = -1$ (hacia la izquierda)

Suma de dos vectores (método del paralelogramo)

Se construye un paralelogramo, trazando por el extremo de cada vector una paralela al otro. El módulo del vector resultante se obtiene trazando la diagonal desde el origen de los vectores.

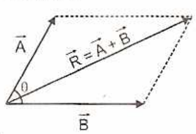


Fig. 2.2

El módulo del vector resultante R se determina con la fórmula:

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}} \quad \ldots(2.1)$$

Donde:

- A y B representan el tamaño de los vectores.
- R es el tamaño del vector resultante.
- θ es el ángulo que forman los vectores.

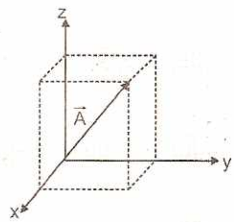
En el espacio:

Vector en el espacio euclidiano tridimensional:

$\vec{A} = (x; y; z)$

$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

"El vector es un ente matemático, al igual que el punto, la recta y el plano".

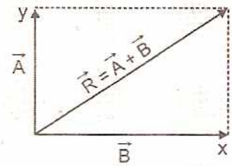


Caso particular:

Cuando dos vectores forman ángulo recto (90°).

De la ecuación (2.1)

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$



Ejemplo:

¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de 3 N y 5 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 7 N?

Resolución:

De la ecuación (2.1), elevando al cuadrado:

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

Reemplazando los datos:

$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos\theta$

$\Rightarrow 49 = 9 + 25 + 30\cos\theta$

$\Rightarrow 15 = 30\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

Luego, las fuerzas deben formar un ángulo: $\theta = 60°$

Método del triángulo para sumar dos vectores

El vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del segundo vector.

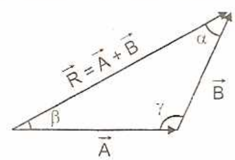


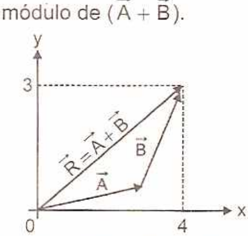
Fig. 2.3

Aplicando la ley de senos, se obtiene:

$$\boxed{\frac{A}{\text{sen}\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\beta} = \frac{R}{\text{sen}\gamma}} \quad \ldots(2.2)$$

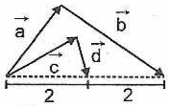
Ejemplos:

1. Hallar el módulo de $(\vec{A} + \vec{B})$.



Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene el módulo del vector resultante: $|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = 5$

2. Hallar el módulo del vector resultante.



$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d})$ propiedad asociativa

$|\vec{R}| = |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c} + \vec{d}|$ vectores colineales

$|\vec{R}| = 4 + 2 = 6$

Método del polígono para sumar dos o más vectores

El vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector.

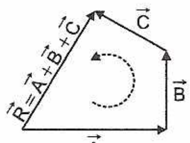
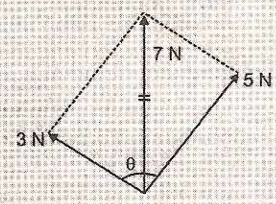


Fig. 2.4

Gráfica del vector resultante:

A = 3 N; B = 5 N y R = 7 N.

$\therefore\ \theta = 60°$

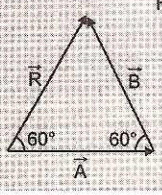


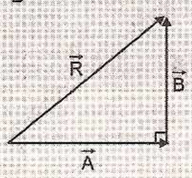
Analizando:

De la ecuación (2.2), si $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, entonces el triángulo es equilátero. $|\vec{R}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$, también: $|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}|$

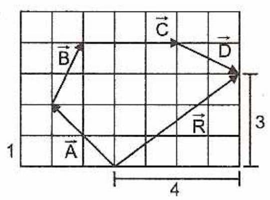
De la ecuación (2.2), si $\gamma = 90°$, entonces el triángulo es rectángulo, por consiguiente se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el módulo del vector resultante:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$





Ejemplo:



Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene el módulo del vector resultante: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

$$|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}|$$

Sustracción de vectores

Se obtiene uniendo los extremos de los vectores. El vector diferencia $\vec{D}$ indica al vector minuendo $\vec{A}$.

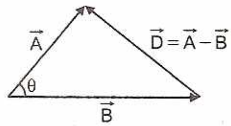


Fig. 2.5

Del método del polígono: $\vec{B} + \vec{D} = \vec{A}$

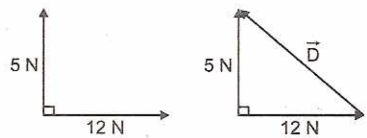
Luego: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

El módulo del vector diferencia se determina aplicando la ley de cosenos:

$$\boxed{D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \qquad \ldots(2.3)$$

Ejemplo:

Si dos vectores de módulos 5 N y 12 N forman entre sí un ángulo de 90°, determinar el módulo del vector diferencia.



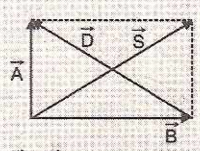
Reemplazando valores en la ecuación (2.3):

$D = \sqrt{5^2 + 12^2 - 2(5)(12)\cos 90°}$

$D = \sqrt{25 - 144 - 0} = \sqrt{169} \qquad \therefore\ D = 13\ N$

Observación

Cuando dos vectores forman un ángulo de 90°, entonces el vector suma y el vector diferencia son iguales en módulo.



$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$; $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

Propiedad del rectángulo: $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

Descomposición rectangular

Consiste en escribir un vector en función de dos componentes que forman entre sí un ángulo recto.

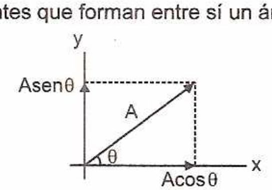


Fig. 2.6

- Componente del vector $\vec{A}$ en el eje X: $A_x = A\cos\theta$
- Componente del vector $\vec{A}$ en el eje Y: $A_y = A\text{sen}\theta$

Para determinar la resultante de un sistema de vectores, por este método, se sigue los pasos:

I. Cada vector se descompone rectangularmente, respecto de un sistema de ejes coordenados arbitrariamente elegido.

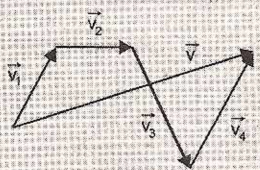
II. Se determina la resultante en cada eje cartesiano:
R_x: resultante en el eje X
R_y: resultante en el eje Y

III. El módulo del vector resultante se halla aplicando el teorema de Pitágoras: $\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$ ...(2.4)

IV. La dirección del vector resultante, respecto del eje X, se determina mediante la función tangente:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}} \qquad \text{...(2.5)}$$

Atención:
Los vectores coplanarios pueden cortarse.



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}$$

El diagrama muestra la resultante de varios vectores, obtenida al unir el origen del primer vector con la extremidad del último.

Ejemplo:
Hallar el módulo del vector resultante.

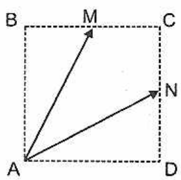


Fig. 2.6.1

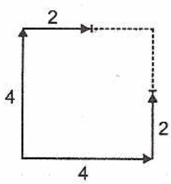


Fig. 2.6.2

Resolución:
La figura (2.6.1) muestra un cuadrado ABCD de lado 4 m, donde M y N son puntos medios de BC y CD, respectivamente.

La figura (2.6.2) muestra la descomposición rectangular de los vectores AM y AN.

La resultante en los ejes X e Y son:
$R_x = 4 + 2 = 6$
$R_y = 2 + 4 = 6$
Luego, de la ecuación (2.4) tenemos: $R = \sqrt{6^2 + 6^2}$
$\Rightarrow R = 6\sqrt{2}$

Observaciones

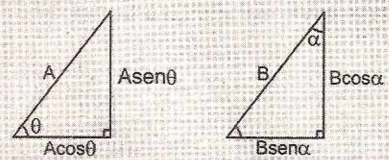
I. Si la resultante de un sistema de vectores es vertical, entonces la componente horizontal es nula.

$$\boxed{\Sigma\text{vectores (eje X)} = 0}$$

II. Si la resultante de un sistema de vectores es horizontal, entonces la componente vertical es nula.

$$\boxed{\Sigma\text{vectores (eje Y)} = 0}$$

Propiedad



Vectores unitarios cartesianos

Son aquellos vectores cuyo módulo es la unidad de medida y se encuentran en los ejes coordenados cartesianos X e Y.

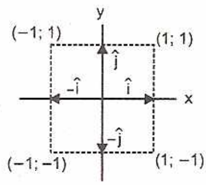
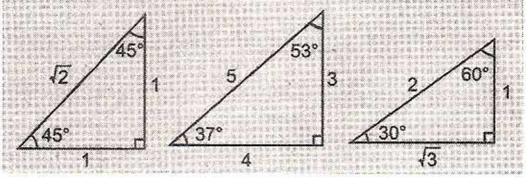


Fig. 2.7

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1, \ \hat{i} \perp \hat{j}$
$\hat{i}$: vector unitario en el eje X
$\hat{j}$: vector unitario en el eje Y

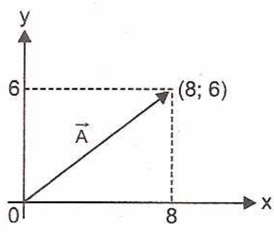
Recuerda:



Los vectores se pueden escribir en función de los vectores unitarios cartesianos.

Ejemplos:

1.

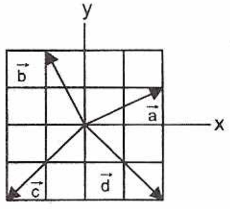


$\vec{A} = (8; 6) = 8\hat{i} + 6\hat{j}$

En general, si $\vec{A} = (x; y)$, entonces en función de los vectores unitarios se escribirá del siguiente modo:

$$\boxed{\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j}}$$

2. Determinar el módulo del vector resultante. El lado de cada cuadrado es la unidad.



Resolución:

Escribimos los vectores en función de los vectores unitarios.

$\vec{a} = (2; 1) = 2\hat{i} + 1\hat{j}$

$\vec{b} = (-1; 2) = -1\hat{i} + 2\hat{j}$

$\vec{c} = (-2; -2) = -2\hat{i} - 2\hat{j}$

$\vec{d} = (2; -2) = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

Sumando: $\vec{R} = (1; -1) = 1\hat{i} - 1\hat{j}$

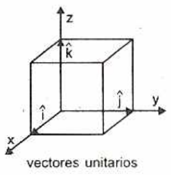
De la ecuación (2.4): $\vec{R} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore\ R = \sqrt{2}$

Vectores unitarios cartesianos en el espacio

El vector unitario es aquel que tiene como módulo o tamaño la unidad de medida. Los vectores cartesianos son:

$\hat{i}$: tiene dirección del eje X positivo.
$-\hat{i}$: tiene dirección del eje X negativo.
$\hat{j}$: tiene dirección del eje Y positivo.
$-\hat{j}$: tiene dirección del eje Y negativo.
$\hat{k}$: tiene dirección del eje Z positivo.
$-\hat{k}$: tiene dirección del eje Z negativo.

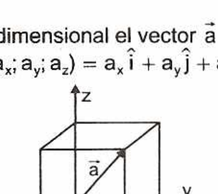


vectores unitarios

El módulo de cada vector unitario es igual a la unidad de medida: $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

Los tres vectores unitarios son mutuamente perpendiculares: $\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$

En el espacio tridimensional el vector $\vec{a}$ tiene tres componentes: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$



vector en el espacio

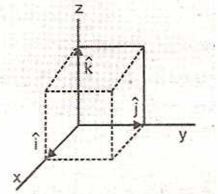
En el espacio euclidiano tridimensional:

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$

Si: $\vec{A} = (x; y; z)$

$\Rightarrow \vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



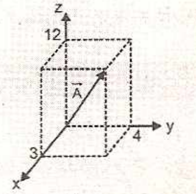
Representación de un vector en el espacio tridimensional con vectores unitarios:

$\vec{A} = (3; 4; 12)$

$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$

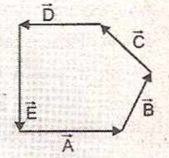
$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$

$|\vec{A}| = 13$



Recuerda:

En un sistema de vectores ordenados que forman un polígono cerrado, se cumple que la resultante es igual a cero.



$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{0}$

Ejemplo:

Se tiene un vector: $\vec{a} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$

Determinar el módulo del vector.

Resolución:

Si graficamos el vector obtenemos un paralelepípedo, entonces el módulo del vector es igual al tamaño de la diagonal.

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = 13$

Vector unitario direccional

Cada vector tiene su respectivo vector unitario. El vector unitario es paralelo a su respectivo vector de origen.

$$\hat{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}|\hat{u}$$

En general se puede obtener un vector unitario en una dirección determinada, relacionando dos o más vectores.

Ejemplo:

Determine el vector unitario del vector:

$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$

Resolución:

El vector unitario se define como:

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}}{13}$$

El vector unitario es: $\hat{u} = \frac{3}{13}\hat{i} + \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}$

Producto escalar

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto escalar o interno se representa por $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y se define como el producto de

sus módulos por el coseno del ángulo θ que forman, esto es:

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=|\vec{B}||\vec{A}|\cos\theta$$

donde: $0\leq\theta\leq\pi$

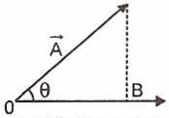
Debemos enfatizar que $\vec{A}.\vec{B}$ es un número real (positivo, negativo o nulo) y no un vector.

Dados los vectores:

$\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

$\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\vec{A}.\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$



producto escalar

Propiedades

1. Propiedad conmutativa: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$
2. Propiedad distributiva: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$
3. Vectores paralelos: $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$
4. Vectores ortogonales: $\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{i}.\hat{k}=0$
5. $\vec{A}.\vec{A}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
6. $\vec{B}.\vec{B}=b_1^2+b_2^2+b_3^2$
7. Cuadrado del módulo: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$
8. Si $\vec{A}.\vec{B}=0$ y ninguno de los vectores es nulo, entonces ambos vectores son perpendiculares.

Ejemplo:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 120°. Sabiendo que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=4$. Calcular: $\vec{a}.\vec{b}$

Resolución:

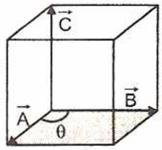
De la definición:

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=(3)(4)\cos 120°=-6$

Producto vectorial

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto vectorial o externo se representa por otro vector $\vec{C}$, que se denota como $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$. Su módulo se define como el producto de sus módulos por el seno del ángulo θ que forman entre sí, esto es:

$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{sen}\theta$, donde $0\leq\theta\leq\pi$



producto vectorial

Debemos enfatizar que $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Regla de la mano derecha: los dedos giran desde la dirección del vector A hacia la dirección del vector B y el dedo pulgar coincide con el vector C. En la figura el ángulo θ gira en el sentido desde A hacia B.

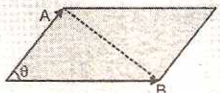
Propiedades

1. Si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$, entonces los vectores tienen la misma dirección o son paralelos.
2. Anticonmutativo: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$
3. Propiedad distributiva: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
4. Vectores paralelos: $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$
5. Vectores ortogonales:
$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k};\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i};\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$
6. Dado los vectores:
$\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k};\qquad \vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

entonces se cumple que: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$

El área del paralelogramo formado por los vectores concurrentes $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

Área del paralelogramo $=|\vec{A}\times\vec{B}|$



área del paralelogramo

El área de la región triangular formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

Área del triángulo $=\dfrac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{2}$

Ejemplo:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman entre sí un ángulo de 30°. Sabiendo que $|\vec{a}|=6$ y $|\vec{b}|=5$, calcular: $|\vec{a}\times\vec{b}|$

Resolución:

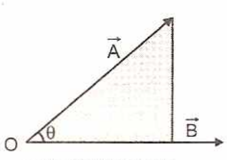
De la definición:

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta=(6)(5)\operatorname{sen}30°=15$

Proyección de un vector

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$, es otro vector paralelo al vector $\vec{B}$ que se denota del siguiente modo:

$$\text{Proyec}_{\vec{B}}\vec{A}=\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$



proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

Al módulo de la proyección del vector A sobre el vector se le denomina componente del vector A sobre el vector B.

$$\text{Comp}_{\vec{B}}\vec{A}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\Rightarrow \text{Proyec}_{\vec{B}}\vec{A}=(\text{Comp}_{\vec{B}}\vec{A})\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\text{Proyec}_{\vec{B}}\vec{A}=(\text{Comp}_{\vec{B}}\vec{A})\hat{u}_B$$

Ejemplo:

Determinar los componentes rectangulares del vector $\vec{m}$, sabiendo que es perpendicular a los vectores $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 1\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = 1\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, además satisface a la condición: $\vec{m}.(1\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) = 10$

Resolución:

Sea: $\vec{m} = q(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)$

pero $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 5\hat{j} - 1\hat{k}$

La condición: $q(-7; -5; -1).(1; 2; -7) = 10$

Resolviendo la ecuación tenemos que: $q = -1$

Respuesta: $\vec{m} = (-1)(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 1\hat{k}$

$\text{Proyec}_{\hat{x}}\vec{m} = 7\hat{i}$; $\text{Proyec}_{\hat{y}}\vec{m} = 5\hat{j}$; $\text{Proyec}_{\hat{z}}\vec{m} = 1\hat{k}$

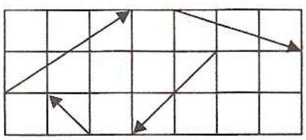
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Empleando pares ordenados: $\vec{a} = (-2; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$, ¿cuál será el módulo del vector: $\vec{a} + 2\vec{b}$?

Resolución:

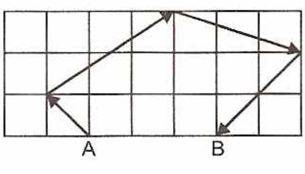
Duplicando las componentes del vector $\vec{b}$:
$\vec{a} = (-2; 2)$ y $2\vec{b} = (8; 6)$. Sumando las componentes algebraicamente, es decir, considerando los signos:
$\vec{a} + 2\vec{b} = (6; 8)$. Cálculo del módulo, mediante el teorema de Pitágoras: $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 10$

2. En la figura mostrada, determinar el módulo del vector resultante. El cuadriculado tiene como lado la unidad.



Resolución:

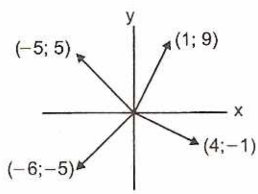
Aplicando el método del polígono, para sumar varios vectores:



El vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector.

$\overrightarrow{AB} = \vec{R} = 3\hat{i} \quad \therefore R = 3$

3. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura.

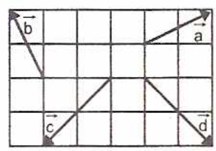


Resolución:

Expresemos cada uno de los vectores en forma de par ordenado:
$\vec{A} = (1; 9)$; $\vec{B} = (-5; 5)$; $\vec{C} = (-6; -5)$; $\vec{D} = (4; -1)$
Cálculo de la resultante:
$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} \Rightarrow \vec{R} = (-6; 8)$

Aplicando el teorema de Pitágoras:
$R = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \quad \therefore R = 10$

4. En el sistema vectorial mostrado, determinar el módulo del vector resultante. El cuadriculado tiene como lado la unidad.



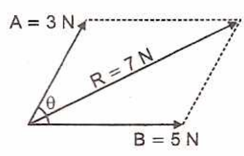
Resolución:

Escribimos los vectores en función de los vectores unitarios cartesianos:
$\vec{a} = 2\hat{i} + 1\hat{j}$; $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j}$; $\vec{c} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$;
$\vec{d} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

Sumando: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \Rightarrow \vec{R} = 1\hat{i} - 1\hat{j}$
$\Rightarrow R = \sqrt{2}$

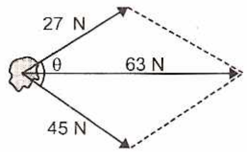
5. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de 3 N y 5 N, para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 7 N?

Resolución:



Aplicando el método del paralelogramo:
$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$
$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2(3)(5)(\cos\theta)$
$\Rightarrow \cos\theta = 1/2$
Luego, las fuerzas forman un ángulo: $\theta = 60°$

6. ¿Qué ángulo deben formar dos fuerzas de 27 N y 45 N para que actúen sobre un cuerpo como una sola fuerza de 63 N?



Resolución:

Método del paralelogramo:

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$63^2 = 27^2 + 45^2 + 2(27)(45)(\cos\theta)$

$9^2(7^2) = 9^2(3^2) + 9^2(5^2) + 2(9 \times 3)(9 \times 5)\cos\theta$

$49 = 9 + 25 + 30\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = 1/2$

Luego, las fuerzas forman un ángulo: $\theta = 60°$

7. Hallar el módulo del vector resultante de dos vectores de 15 N y 7 N que forman entre sí un ángulo de 53°.

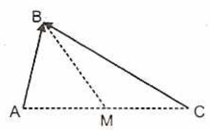
Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo:

$R = \sqrt{15^2 + 7^2 + 2(15)(7)\cos 53°}$

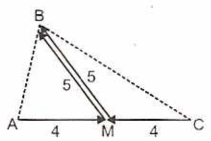
$\therefore R = 20$ N

8. Dado el siguiente conjunto de vectores, se pide encontrar el módulo de la resultante, si se sabe que: AM = MC = 4 y MB = 5



Resolución:

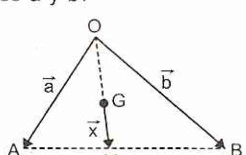
Descomponiendo los vectores poligonalmente.



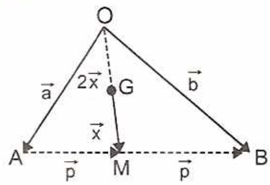
De la figura es fácil darse cuenta que los vectores horizontales se anulan y, en consecuencia, la resultante del conjunto de vectores es: R = 5 + 5.

$\therefore R = 10$

9. Si G es el baricentro del triángulo AOB y M es punto medio de $\overline{AB}$, escribir el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:



Aplicando el método del polígono:

Sea, $\vec{p}$ un vector auxiliar: $\triangle OAB$: $\vec{a} + 2\vec{p} = \vec{b}$

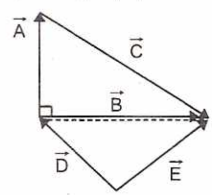
$\Rightarrow \vec{p} = \dfrac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$ ...(1)

$\triangle OAM$: $3\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $\vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{6}$

10. En el sistema vectorial mostrado, determinar el módulo del vector $\vec{R}$, donde: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D} + \vec{E}$.

Además: $|\vec{A}| = 3$ y $|\vec{B}| = 8$



Resolución:

Haciendo uso del método del polígono cerrado, resultante igual a cero:

$\vec{A} + \vec{C} - \vec{E} + \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{A} = -\vec{C} - \vec{D} + \vec{E}$ ...(1)

Reemplazando (1) en:

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + (-\vec{C} - \vec{D} + \vec{E})$

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{A} = 2\vec{A} + \vec{B}$

Cálculo del módulo del vector $\vec{R}$ mediante el teorema de Pitágoras: $R^2 = (2A)^2 + B^2 = 6^2 + 8^2$

$\therefore R = 10$

11. Si el módulo de la suma de dos vectores de igual módulo es dos veces el módulo de su diferencia, hallar la medida del ángulo comprendido entre dichos vectores.

Resolución:

Sea: A = B = x

Cálculo de la suma: S

$S^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta \Rightarrow S^2 = 2x^2 + 2x^2\cos\theta$ ...(1)

Cálculo de la diferencia: D

$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \Rightarrow D^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\theta$ ...(2)

Pero: $S = 2D \Rightarrow S^2 = 4D^2$ ...(3)

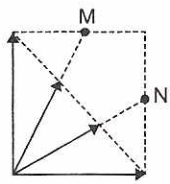
Reemplazando en (3):

$2x^2 + 2x^2\cos\theta = 4(2x^2 - 2x^2\cos\theta)$

$1 + \cos\theta = 4(1 - \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 3/5$

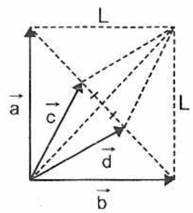
$\therefore \theta = 53°$

12. La figura muestra un cuadrado de lado L, donde M y N son puntos medios de sus respectivos lados. Hallar el módulo del vector resultante.



Resolución:

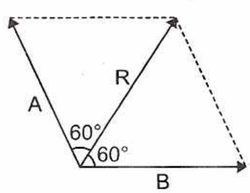
Aplicando el método del paralelogramo, el módulo del vector resultante es dos veces la diagonal del cuadrado.



$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) \Rightarrow |\vec{R}| = L\sqrt{2} + L\sqrt{2}$

$\therefore\ |\vec{R}| = 2L\sqrt{2}$

13. Hallar el ángulo que forman dos vectores de igual módulo, si su vector resultante tiene el mismo módulo que los vectores componentes.



Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo:

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

De la condición del problema: $A = B = R$

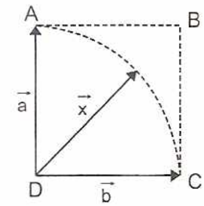
$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2\cos\theta}$

$\Rightarrow A^2 = 2A^2 + 2A^2\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$

Por lo tanto, si dos vectores de igual módulo forman entre sí un ángulo de 120°, el módulo del vector resultante es igual al módulo de uno de los vectores componentes. Además $\vec{R}$ es bisectriz del ángulo 120°.

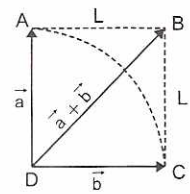
14. Los puntos A; B; C y D determinan un cuadrado. Escribir el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

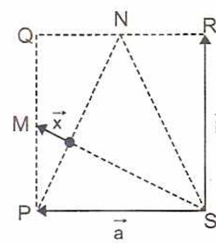
Método del paralelogramo:

Comparando los gráficos el vector $\vec{x}$ es colineal con el vector suma $(\vec{a} + \vec{b})$.



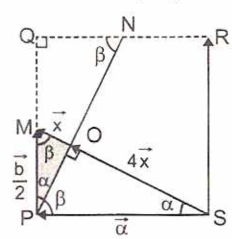
$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} \Rightarrow \frac{\vec{x}}{L} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{L\sqrt{2}} \quad \therefore\ \vec{x} = (\vec{a} + \vec{b})\frac{\sqrt{2}}{2}$$

15. Los puntos P; Q; R y S determinan un cuadrado, donde M y N son puntos medios de PQ y QR, respectivamente. Relacionar el vector $\vec{x}$ con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

Aplicando el método del polígono:



Los triángulos SPM y PQN son congruentes.

Luego: $\alpha + \beta = 90°$

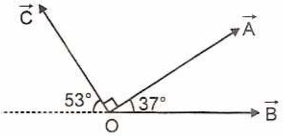
Los triángulos rectángulos POM y POS son semejantes, cuyos lados están en la razón de 1 a 2.

Luego: $\overrightarrow{SO} = 4\vec{x}$

Método del polígono, en el triángulo SPM:

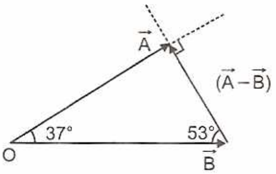
$5\vec{x} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2} \quad \therefore\ \vec{x} = \dfrac{(2\vec{a} + \vec{b})}{10}$

16. Hallar el módulo del vector resultante de los vectores mostrados, sabiendo que el vector $\vec{A} - \vec{B}$ es de módulo mínimo. $|\vec{B}| = 50$ y $|\vec{C}| = 30$

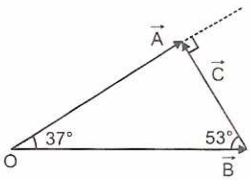


Resolución:

El vector $\vec{A}-\vec{B}$ es de módulo mínimo cuando su dirección es perpendicular al vector $\vec{A}$.



De donde se deduce que $|\vec{A}| = 40$ y $(\vec{A}-\vec{B})$ es paralela con el vector $\vec{C}$. Entonces el nuevo sistema será:

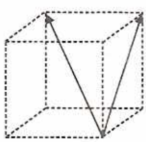


Nos piden: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

De la figura: $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$

Luego: $\vec{R} = 2\vec{A}$ $\quad \therefore\ R = 80$

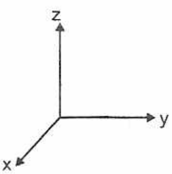
17. La figura muestra un cubo de arista "a". Determinar el módulo del vector resultante.

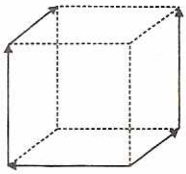


Resolución:

Descomponiendo los vectores, teniendo como componentes las aristas, calculamos la resultante en cada eje cartesiano:

$R_x = -2a;\ R_y = -a;\ R_z = +2a$



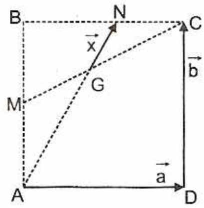


Cálculo del módulo del vector resultante R.

$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$

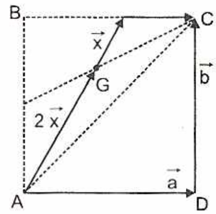
$R^2 = (-2a)^2 + (-a)^2 + (2a)^2 \quad \therefore\ R = 3a$

18. La figura muestra un cuadrado ABCD, donde M y N son puntos medios. Expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

El punto G es el baricentro del triángulo ABC



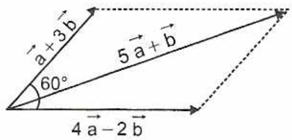
$\overrightarrow{NC} = \vec{a}/2$

Aplicando el método del polígono:

$$2\vec{x} + \vec{x} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{6}$$

19. Los vectores $(\vec{a} + 3\vec{b})$ y $(2\vec{a} - \vec{b})$ forman entre sí un ángulo de 60°. Sabiendo que:

$|\vec{a} + 3\vec{b}| = 6 \ \wedge\ |2\vec{a} - \vec{b}| = 5$, hallar: $|5\vec{a} + \vec{b}|$



Resolución:

Duplicando el módulo del vector $(2\vec{a} - \vec{b})$ convenientemente, tenemos:

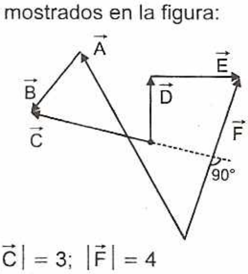
$|\vec{a} + 3\vec{b}| = 6 \ \wedge\ |4\vec{a} - 2\vec{b}| = 10$

Aplicando el método del paralelogramo:

$|5\vec{a} + \vec{b}|^2 = 6^2 + 10^2 + 2(6)(10)(\cos 60°)$

$\Rightarrow |5\vec{a} + \vec{b}| = 14$

20. Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura:



Donde: $|\vec{C}| = 3;\ |\vec{F}| = 4$

Resolución:

De la figura, obtenemos la siguiente relación vectorial:

$\vec{A} + \vec{B} + (-\vec{C}) + \vec{D} + \vec{E} + (-\vec{F}) = 0$

$\Rightarrow \vec{A} + \vec{B} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{C} + \vec{F} \qquad \ldots(1)$

Nos piden:

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F}$

$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} + \vec{E}) + (\vec{C} + \vec{F}) \qquad ...(2)$

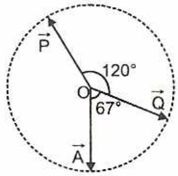
Reemplazando (1) en (2):

$\vec{R} = 2(\vec{C} + \vec{F})$

Cálculo de la resultante:

$|\vec{R}| = 2|\vec{C} + \vec{F}| \Rightarrow R = 2\sqrt{C^2 + F^2} \qquad \therefore\ R = 10$

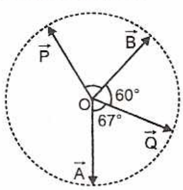
21. En la figura, determinar el módulo del vector resultante del conjunto de vectores mostrados, si el radio de la circunferencia es de $\sqrt{5}$ unidades y O es su centro.



Resolución:

Utilizando la conclusión del problema 13, resuelto anteriormente, deducimos que la resultante de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ es el vector $\vec{B}$ de módulo $\sqrt{5}$ y forma 60° con el vector $\vec{Q}$. Ahora el problema se reduce a determinar la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Aplicando el método del paralelogramo:

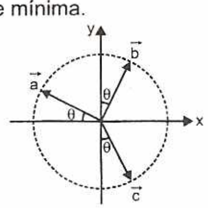


$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$R^2 = 2\sqrt{5}^2 + 2(\sqrt{5})^2\cos 127$

$R^2 = 10 + 10\left(-\dfrac{3}{5}\right) \quad \therefore\ R = 2$

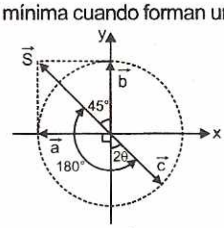
22. La figura muestra tres vectores de módulos iguales. Hallar la medida del ángulo θ para obtener la resultante mínima.



Resolución:

El módulo de la resultante no se altera, si giramos los vectores un ángulo θ en sentido antihorario.

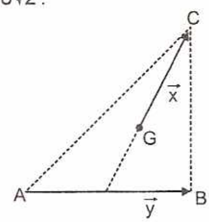
Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se pueden reemplazar por el vector $\vec{S}$. La resultante de sumar los vectores $\vec{C}$ y $\vec{S}$ será mínima cuando forman un ángulo de 180°:



$45° + 90° + 2\theta = 180°$

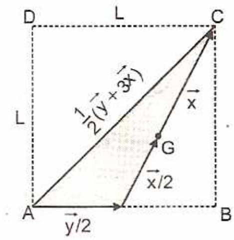
$\therefore\ \theta = 22{,}5°$

23. La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles ABC, donde el punto G es el baricentro. Hallar el módulo del vector $\vec{y}$, sabiendo que se cumple: $|\vec{y} + 3\vec{x}| = 8\sqrt{2}$.



Resolución:

Aplicando el método del polígono, de la figura:

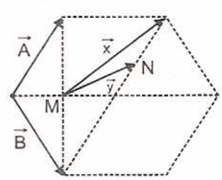


$1/2|\vec{y} + 3\vec{x}| = L\sqrt{2}$

Comparando con la condición del problema:

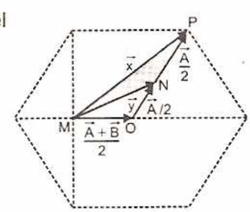
$|\vec{y}| = L = 4$ cm

24. La figura muestra un hexágono regular, donde M y N son puntos medios. Hallar $(\vec{x} + \vec{y})$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Resolución:

Aplicando el método del polígono.



En el triángulo MOP:

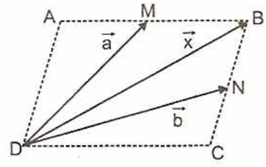
$\vec{x} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{2} + \vec{A} \quad ...(1)$

En el triángulo MON:

$\vec{y} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{2} + \dfrac{\vec{A}}{2} \quad ...(2)$

Sumando (1) y (2): $(\vec{x} + \vec{y}) = \dfrac{5\vec{A} + 2\vec{B}}{2}$

25. Expresar el vector $\vec{x}$ en términos del vector $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que ABCD es un paralelogramo, además M y N son puntos medios de AB y BC, respectivamente.

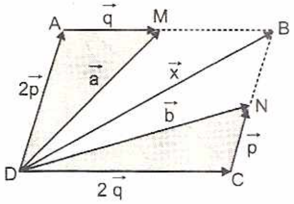


Resolución:
Sean $\vec{p}$ y $\vec{q}$ los vectores auxiliares, por método del paralelogramo:

$\vec{x} = 2(\vec{p} + \vec{q})$ ...(1)

Del $\triangle$DAM: $2\vec{p} + \vec{q} = \vec{a}$ ...(2)

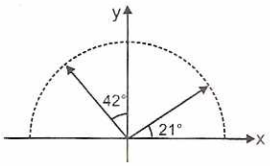
Del $\triangle$DCN: $2\vec{q} + \vec{p} = \vec{b}$ ...(3)



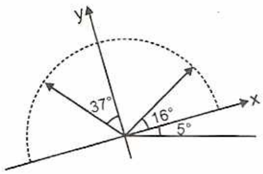
Sumando: $\vec{p} + \vec{q} = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b})}{3}$

Reemplazando en (1): $\vec{x} = \dfrac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

26. Dados los vectores mostrados en la figura, determinar el módulo de su vector resultante. El radio de la circunferencia es de 25 unidades.

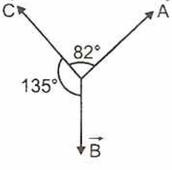


Resolución:
Para utilizar el método de los componentes rectangulares y trabajar con ángulos notables, efectuemos una rotación antihoraria al sistema de ejes coordenados en un ángulo de 5°.
Cálculo de los componentes rectangulares:
$R_x = 25\cos16° - 25\text{sen}37° = 9$
$R_y = 25\text{sen}16° + 25\cos37° = 27$

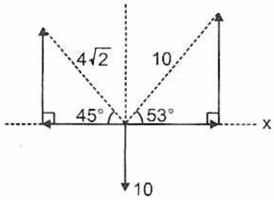


Aplicando el teorema de Pitágoras:
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 9\sqrt{10}$

27. Determinar el módulo de la resultante de los tres vectores mostrados en la figura, si: A = 10; B = 10; C = $4\sqrt{2}$

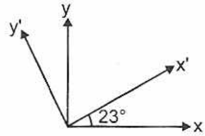


Resolución:
Tomemos un sistema de coordenadas adecuado y utilicemos el procedimiento para determinar la resultante analíticamente.



$R_x = 10\cos53° - 4\sqrt{2}\,\text{sen}45° \Rightarrow R_x = 2$
$R_y = 10\text{sen}53° + 4\sqrt{2}\cos45° - 10 \Rightarrow R_y = 2$
Cálculo de la resultante: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

28. Si las componentes rectangulares de un vector F en el sistema de coordenadas x e y son: $F_x = 5$; $F_y = 5\sqrt{3}$, hallar las componentes del vector en el sistema de coordenadas x' e y', que con respecto al primero ha sido rotado un ángulo de 23°.



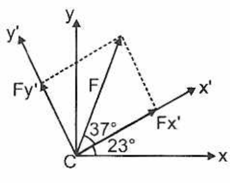
Resolución:

Cálculo del módulo del vector F:

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10$

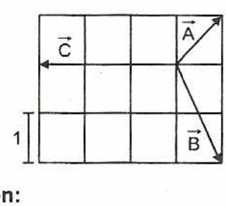
Cálculo del ángulo θ que forma el vector $\vec{F}$ con el eje X: $\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \theta = 60°$



El vector $\vec{F}$ forma un ángulo de 37° con el eje x'.
$F_{x'} = F\cos37° = 10(4/5) \Rightarrow F_{x'} = 8$
Cálculo de las componentes en el sistema x' e y':
$F_{y'} = F\text{sen}37° = 10(3/5) \Rightarrow F_{y'} = 6$

29. Si dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ mostrados en la figura se cumple que: $m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C} = \vec{0}$
Donde m, n y p son números reales, hallar el valor numérico de la siguiente expresión: $E = \dfrac{p^2}{mn}$.



Resolución:
Expresando cada vector como par ordenado:

$\vec{A} = (1; 1)$; $\vec{B} = (1; -2)$; $\vec{C} = (-3; 0)$

Reemplazando en la condición:

$(m; m) + (n; -2n) + (-3p; 0) = (0; 0)$

$\Rightarrow (m + n - 3p; m - 2n) = (0; 0)$

Igualando a cero cada componente:

y: $m = 2n$ ...(1)

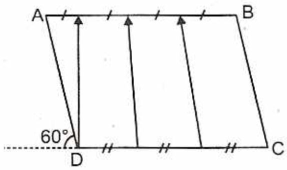
x: $m + n = 3p$ ...(2)

(1) en (2): $n = p$ ...(3)

Reemplazando en la expresión:

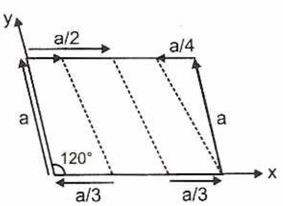
$$E = \frac{p^2}{mn} = \frac{n^2}{(2n)n} \quad \therefore E = 0{,}5$$

30. La figura muestra un rombo ABCD de lado 2 cm, determinar el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



Resolución:

Descomponiendo los vectores respecto de los ejes coordenados x e y que forman entre sí un ángulo de 120°. Consideremos el rombo de lado "a".



Cálculo de la resultante en cada eje:

$R_x = \frac{1}{2}a$; $R_y = 3a$

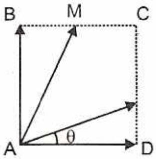
Aplicando el método del paralelogramo:

$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + 2R_xR_y\cos 120°$

Reemplazando, tenemos: $R = \frac{a}{2}\sqrt{31}$

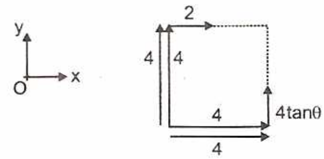
Pero: $a = 2$ cm $\Rightarrow R = \sqrt{31}$ cm

31. La figura muestra un cuadrado ABCD de 4 cm de lado, donde M es el punto medio del segmento BC. Determinar el valor del ángulo θ, tal que el módulo de la resultante vectorial sea igual a $\sqrt{221}$ cm.



Resolución:

Descomponiendo los vectores rectangularmente:



Cálculo de la resultante en los ejes x e y:

$R_x = 10$; $R_y = 8 + 4\tan\theta$

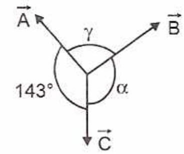
Pero: $R^2 = R_x^2 + R_y^2 \Rightarrow 221 = 100 + (8 + 4\tan\theta)^2$

$121 = (8 + 4\tan\theta)^2 \Rightarrow \tan\theta = 3/4 \quad \therefore \theta = 37°$

32. En el sistema vectorial mostrado se cumple que:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

Donde: A = 7; B = 15; C = 20. Hallar la medida de los ángulos α y γ, sabiendo que α es obtuso y γ es agudo.



Resolución:

Siempre que la resultante de tres vectores es cero, se cumple que el módulo de cada uno de ellos es directamente proporcional al seno de su ángulo opuesto, según esto:

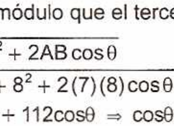
$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}143°} = \frac{C}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow \frac{7}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{15}{3/5} = \frac{20}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Despejando: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25} \Rightarrow \alpha = 164°$

$\operatorname{sen}\gamma = 4/5 \Rightarrow \gamma = 53°$

33. Si la resultante de los tres vectores coplanarios es igual a cero, hallar la medida del ángulo θ comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Siendo: $|\vec{A}| = 7$; $|\vec{B}| = 8$; $|\vec{C}| = 13$.



Resolución:

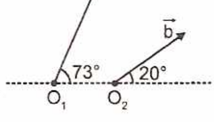
Si la resultante de los tres vectores mostrados es cero, el módulo de la resultante de dos de ellos tendrá igual módulo que el tercero. Según esto:

$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

$\Rightarrow 13 = \sqrt{7^2 + 8^2 + 2(7)(8)\cos\theta}$

$\Rightarrow 169 = 113 + 112\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1/2 \quad \therefore \theta = 60°$

34. Dados los vectores: $\vec{a} = 5$; $\theta_1 = 73°$ y $\vec{b} = 6$; $\theta_{2 = 20°}$, calcular: $|\vec{a} - \vec{b}|$.



Resolución:

Llevamos los orígenes a un punto común O, el ángulo que forman los vectores es 53°.

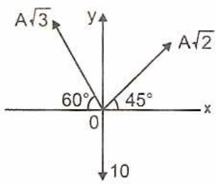
Cálculo del vector diferencia: $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$

$\Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 - 2(a)(b)\cos 53°$

$\Rightarrow D^2 = 25 + 36 - 2(5)(6)(3/5)$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = D = 5$

35. En el gráfico mostrado, hallar el valor de A para que el vector resultante de los tres vectores indicados esté sobre el eje horizontal (eje x).



Resolución:

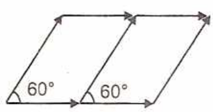
De la condición del problema: $R_y = \Sigma V_y = 0$

$\Rightarrow A\sqrt{3}\,\text{sen}60° + A\sqrt{2}\,\text{sen}45° - 10 = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2}A + A = 10$

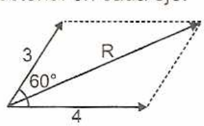
Resolviendo obtenemos: A = 4

36. ¿Qué módulo tendrá el vector resultante del sistema mostrado sabiendo que cada vector es de módulo 1 m?



Resolución:

Fijamos un sistema coordenado cuyos ejes forman entre sí un ángulo de 60°. Luego determinamos la resultante vectorial en cada eje.

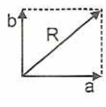


Cálculo de la resultante mediante el método del paralelogramo:

$R^2 = 3^2 + 4^2 + 2(3)(4)\cos 60°$

Luego: $R = \sqrt{37}$ m

37. La resultante de dos vectores de módulo constante, varía al hacer girar uno de ellos. El mínimo módulo de la resultante es 2 y el máximo, 14. Determinar el módulo de la resultante cuando los vectores forman un ángulo recto.



Resolución:

Resultante mínima: a − b = 2 ...(1)

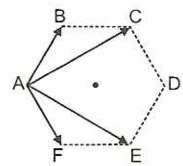
Resultante máxima: a + b = 14 ...(2)

Sumando (1) y (2): a = 8 y b = 6

Cuando forman ángulo recto:

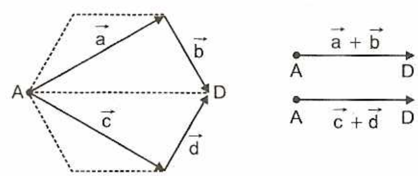
$R^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow R^2 = 64 + 36 \quad \therefore R = 10$

38. En la figura, los puntos A, B, C, D, E y F determinan un hexágono regular de lado 2. Hallar el módulo del vector resultante en el sistema vectorial mostrado.



Resolución:

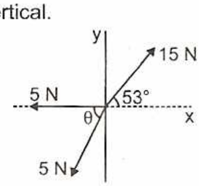
Trasladamos los vectores manteniendo constante su módulo, dirección y sentido. El vector AF ocupa la posición CD y el vector AB ocupa la posición ED.



Pero: AD = 4

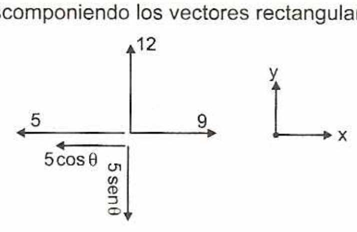
Luego: $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}| = 8$

39. En el sistema vectorial mostrado, determinar el módulo del vector resultante, sabiendo que tiene dirección vertical.



Resolución:

Descomponiendo los vectores rectangularmente:



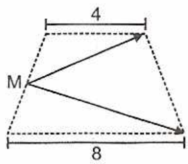
De la condición del problema, la resultante de los componentes en el eje x es igual a cero:

$R_x = 0 \Rightarrow 5 + 5\cos\theta = 9 \Rightarrow \cos\theta = 4/5 \Rightarrow \theta = 37°$

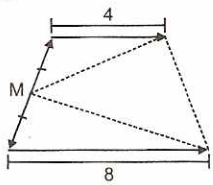
El módulo del vector resultante es igual a la resultante de las componentes en el eje y:

$R = R_y \Rightarrow R = 12 - 5\text{sen}\theta \Rightarrow R = 12 - 5(3/5)$
$\therefore R = 9$

40. Si en el trapecio mostrado en la figura, M es punto medio de su respectivo lado, hallar el módulo de la resultante de los dos vectores mostrados en la figura.

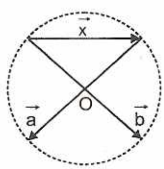


Resolución:

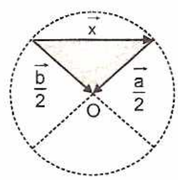


Descomponiendo cada uno de los vectores en las direcciones indicadas:
De la figura es fácil darse cuenta que los vectores oblicuos se anulan y, en consecuencia, el módulo de la resultante del conjunto de vectores es:
$R = 4 + 8 \Rightarrow R = 12$

41. La figura muestra una circunferencia de centro O. Escribir el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

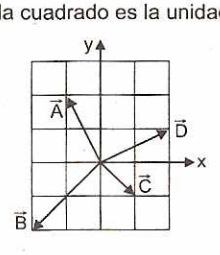


Resolución:
El punto O es punto medio del módulo de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Del método del polígono:



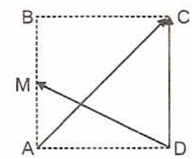
$\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{\vec{b}}{2} \quad \therefore \; \vec{x} = \frac{(\vec{b} - \vec{a})}{2}$

42. Determinar el módulo del vector resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura. El lado de cada cuadrado es la unidad.

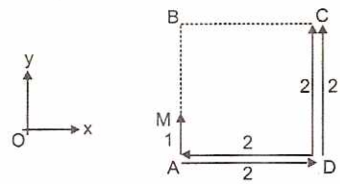


Resolución:
Escribimos los vectores en función de los vectores unitarios.
$\vec{A} = (-1; 2) = -\hat{i} + 2\hat{j}$; $\vec{B} = (-2;-2) = -2\hat{i} - 2\hat{j}$;
$\vec{C} = (1 ; -1) = \hat{i} - \hat{j}$; $\vec{D} = (2; 1) = 2\hat{i} + \hat{j}$
Sumando: $\vec{R} = (0; 0) = 0\hat{i} + 0\hat{j}$
$\therefore \vec{R}$ = vector nulo; $R = 0$
Módulo de la resultante igual a cero.

43. Los puntos A; B; C y D determinan un cuadrado de lado 2 m, donde M es punto medio del segmento AB. Determinar el módulo del vector resultante.

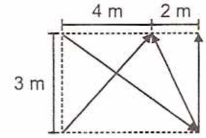


Resolución:
Descomponiendo rectangularmente los vectores AC y DM.

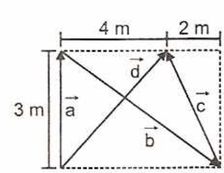


Cálculo de la resultante en cada eje:
$R_x = 2 - 2 = 0$
$R_y = 1 + 2 + 2 = 5$
Luego, el módulo de la resultante será: $R = 5$

44. Hallar el módulo de la resultante de los vectores mostrados en la figura.

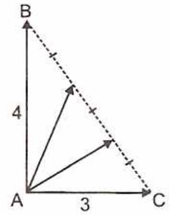


Resolución:
Trasladamos el vector vertical al extremo izquierdo, luego aplicamos el método del polígono.
Cálculo del vector resultante:



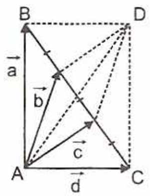
$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{d} = \vec{d} + \vec{d}$
$|\vec{R}| = 5 + 5 \quad \therefore R = 10\text{ m}$

45. Si el lado BC del triángulo mostrado está dividido en tres partes iguales y además AB = 4 y AC = 3, hallar el módulo del vector resultante. El triángulo ABC es recto en A.



Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo, el módulo del vector resultante es dos veces la diagonal del rectángulo.



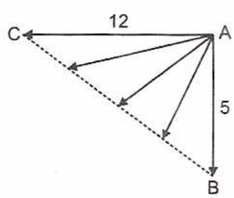
$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{d}) + (\vec{b} + \vec{c})$ ...(1)

Donde: $\vec{a} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$ y $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD}$

Reemplazando en (1): $\vec{R} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{R}| = 2|\overrightarrow{AD}|$

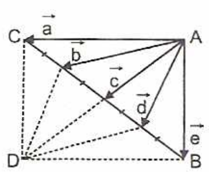
pero: $|\overrightarrow{AD}| = 5 \Rightarrow |\vec{R}| = 2(5) = 10 \Rightarrow |\vec{R}| = 10$

46. El triángulo ABC es recto en A. Si el lado BC está dividido en cuatro partes iguales y además AB = 5 y AC = 12, hallar el módulo del vector resultante.



Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo, el módulo del vector resultante es 2,5 veces la diagonal del rectángulo.



$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = (\vec{a} + \vec{e}) + (\vec{b} + \vec{d}) + \vec{c}$ ...(1)

Donde: $\vec{a} + \vec{e} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{b} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{c} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{2}$

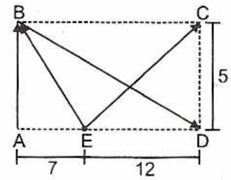
Reemplazando en (1):

$$\vec{R} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = 2{,}5(\overrightarrow{AD})$$

$$\Rightarrow \vec{R} = 2{,}5(\overrightarrow{AD}) \Rightarrow |\vec{R}| = 2{,}5|\overrightarrow{AD}|$$

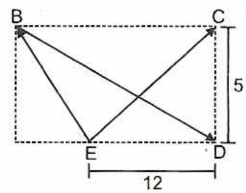
Pero: $|\overrightarrow{AD}| = 13 \Rightarrow |\vec{R}| = 2{,}5(13) = 32{,}5 \Rightarrow |\vec{R}| = 32{,}5$

47. La figura muestra un rectángulo de vértices A, B, C y D. Determinar el módulo del vector resultante.



Resolución:

Trasladamos paralelamente el vector vertical al extremo derecho, luego aplicamos el método del polígono para sumar vectores.



Cálculo del vector resultante:

$\vec{R} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EC}$ ...(1)

Aplicando el método del polígono obtenemos la siguiente relación: $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

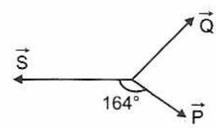
$\vec{R} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{EC}) + \overrightarrow{EC}$

$\vec{R} = 2(\overrightarrow{EC}) \Rightarrow |\vec{R}| = 2|\overrightarrow{EC}|$ ...(3)

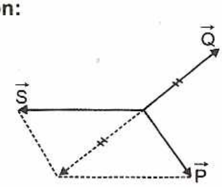
Pero: $|\overrightarrow{EC}| = 13$, del teorema de Pitágoras.

entonces en (3): $|\vec{R}| = 2(13) \Rightarrow |\vec{R}| = 26$

48. Si la resultante de los tres vectores coplanarios mostrados es cero, hallar el módulo del vector $\vec{Q}$. Donde: $|\vec{P}| = 15$; $|\vec{S}| = 20$. Dato: $\cos 16° = \dfrac{24}{25}$



Resolución:



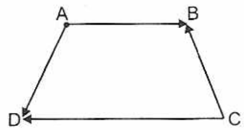
Si la resultante de los tres vectores es cero, el módulo de la resultante de dos de ellos tendrá igual módulo que el tercero. Según esto: $|\vec{Q}| = |\vec{S} + \vec{P}|$

$$Q = \sqrt{S^2 + P^2 + 2SP\cos 164°}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{400 + 225 + 2(20)(15)\left(-\frac{24}{25}\right)} = \sqrt{49}$$

Donde: $\cos 164° = -\cos 16° = -\dfrac{24}{25} \Rightarrow Q = 7$

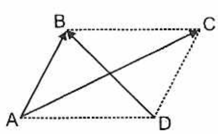
49. Determinar el módulo del vector resultante, sabiendo que ABCD es un paralelogramo, donde: AB = 14 y DC = 22.



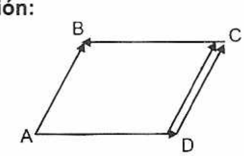
Resolución:

- Aplicamos la propiedad del polígono vectorial cerrado:
  $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{AD}) = \vec{0}$
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ ...(1)
- Nos piden el vector resultante:
  $\vec{R} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$
  Ordenando los vectores convenientemente:
  $\vec{R} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$ ...(2)
- Reemplazando (1) en (2):
  $\vec{R} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$
  Entonces: $|\vec{R}| = 2|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$ ...(3)
- Pero los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos:
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 14\hat{i} - 22\hat{i} = -8\hat{i}$
  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 8$, reemplazando en (3):
  $|\vec{R}| = 2|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 2(8) \Rightarrow |\vec{R}| = 16$

50. Dado el paralelogramo ABCD, hallar el módulo del vector resultante, donde: AB = 4 y BC = 6.

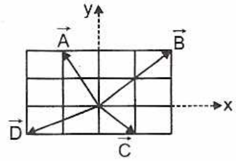


Resolución:



Descomponiendo el vector:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$
Los vectores horizontales se cancelan: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0$
La resultante es tres veces el vector $\overrightarrow{AB}$: $\vec{R} = 3(\overrightarrow{AB})$
$\Rightarrow |\vec{R}| = 3|\overrightarrow{AB}|$
Pero: $|\overrightarrow{AB}| = 4 \Rightarrow |\vec{R}| = 3(4) = 12 \Rightarrow |\vec{R}| = 12$

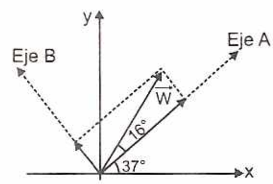
51. Dado el conjunto de vectores, determinar el módulo del vector: $\vec{E} = 2\vec{A} - \vec{B} + 4\vec{C} - 2\vec{D}$



Resolución:

Expresando los vectores como pares ordenados:
$\vec{A} = (-1; 2) \Rightarrow 2\vec{A} = (-2; 4)$
$\vec{C} = (1; -1) \Rightarrow 4\vec{C} = (4; -4)$
$\vec{B} = (2; 2) \Rightarrow -\vec{B} = (-2; -2)$
$\vec{D} = (-2; -1) \Rightarrow -2\vec{D} = (4; 2)$
Reemplazando en la expresión inicial:
$\vec{E} = (-2; 4) + (-2; -2) + (4; -4) + (4; 2)$
$\vec{E} = (4; 0) \Rightarrow \vec{E} = 4\hat{i}$; es horizontal $\Rightarrow |\vec{E}| = 4$

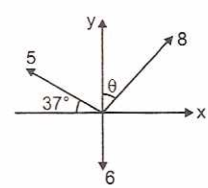
52. Determinar los componentes rectangulares del vector $\vec{W} = (15; 20)$, paralelo a los vectores:
$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$.
Considere: $\tan 16° = \dfrac{7}{24}$



Resolución:

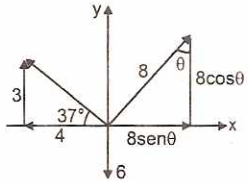
Cálculo del módulo del vector $\vec{W}$:
$|\vec{W}| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$
De la propiedad del triángulo rectángulo de 37° y 53° se deduce que el vector $\vec{W}$ forma un ángulo de 53° con el eje X. Además los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, se puede comprobar gráficamente. El vector $\vec{A}$ forma 37° con el eje X, entonces el vector $\vec{W}$ forma 16° con el vector $\vec{A}$.
Cálculo de las componentes del vector $\vec{W}$ en el sistema de ejes A y B:
eje A: $W_A = W\cos 16° = 25\left(\dfrac{24}{25}\right) = 24$
eje B: $W_B = W\operatorname{sen} 16° = 25\left(\dfrac{7}{25}\right) = 7$
Luego: $\vec{W}$ = (comp.A; comp.B)
$\vec{W} = (24; 7)$

53. Si el vector resultante del conjunto mostrado está en el eje y, hallar la medida del ángulo θ.

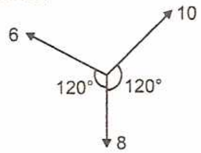


Resolución:

Si la resultante está en el eje y, entonces la componente de la resultante en el eje x es nula.
De la condición: $R_x = 0$
$\Rightarrow -4 + 8\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 30°$

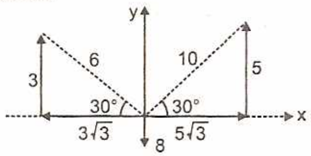


54. La figura muestra tres vectores coplanarios, de módulos 6 N; 10 N y 8 N. Determinar el módulo del vector resultante.



Resolución:

Elegimos un sistema coordenado x e y en forma arbitraria para luego descomponer rectangularmente los vectores:



Cálculo de la resultante en el eje x:

$R_x = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

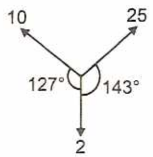
Cálculo de la resultante en el eje y:

$R_y = 3 + 5 - 8 = 0$

Si la resultante en el eje y es cero, entonces el vector resultante es horizontal:

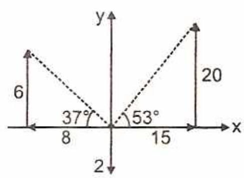
$R = R_x = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$

55. Determinar el módulo de la resultante de los tres vectores coplanarios.



Resolución:

Tomemos un sistema de referencia x e y convenientemente y utilicemos el procedimiento para descomponer los vectores respecto del sistema de coordenadas.



Cálculo de la resultante en el eje x:

$R_x = 15 - 8 = 7$

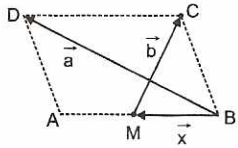
Cálculo de la resultante en el eje y:

$R_y = 6 + 20 - 2 = 24$

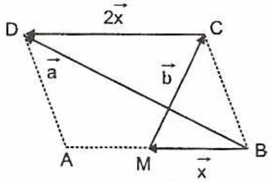
Cálculo del módulo del vector resultante:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \Rightarrow R = 25$

56. La figura muestra un paralelogramo ABCD, donde "m" es punto medio del segmento AB. Escribe el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

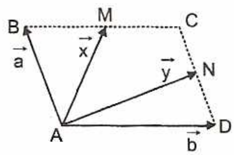


El vector $\overrightarrow{CD}$ es el doble del vector $\vec{x}$. Aplicamos el método del polígono para sumar varios vectores.

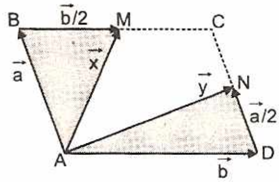
Del gráfico, se deduce que: $\vec{x} + \vec{b} + 2\vec{x} = \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{x} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$

57. En el paralelogramo ABCD mostrado, M y N son puntos medios de sus respectivos lados. Hallar el vector $(\vec{x} + \vec{y})$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:



Sabiendo que M y N son puntos medios, podemos afirmar que: $\overrightarrow{BM} = \dfrac{\vec{b}}{2} \wedge \overrightarrow{DN} = \dfrac{\vec{a}}{2}$

Aplicando el método del triángulo para sumar vectores:

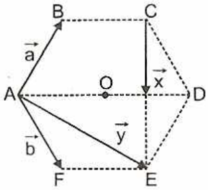
$\triangle ABM$: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}/2$ ...(1)

$\triangle ADN$: $\vec{y} = \vec{b} + \vec{a}/2$ ...(2)

Sumando (1) y (2), tenemos:

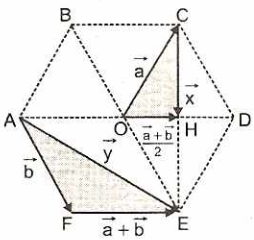
$\vec{x} + \vec{y} = \dfrac{3\vec{a}}{2} + \dfrac{3\vec{b}}{2} \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) = \dfrac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

58. La figura muestra un hexágono regular. Hallar $(\vec{x} + \vec{y})$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

Cuando trazamos todas las diagonales de un hexágono regular se obtienen 6 triángulos equiláteros. La resultante de $(\vec{a} + \vec{b})$ es igual al vector $\overrightarrow{AB}$.



Además $\overrightarrow{OH}$ es la mitad de $\overrightarrow{AO}$.

Aplicando el método del triángulo para sumar vectores:

$\triangle OHC$: $\vec{a} + \vec{x} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \Rightarrow \vec{x} = \dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ ...(1)

$\triangle AFE$: $\vec{y} = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{y} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ...(2)

Sumando (1) y (2), tenemos: $\vec{x} + \vec{y} = \dfrac{\vec{a} + 5\vec{b}}{2}$

59. Se tienen dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$|\vec{P}| = |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 25$ y $|\vec{Q}| = |3\vec{a} + 2\vec{b}| = 30$

Si $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ forman entre sí un ángulo de 60°, hallar el módulo del vector $\vec{E} = 7\vec{a} - 4\vec{b}$

Resolución:

El vector $\vec{E}$ se puede expresar en función de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

$\vec{E} = 2\vec{P} + \vec{Q} = 2(2\vec{a} - 3\vec{b}) + (3\vec{a} + 2\vec{b}) = 7\vec{a} - 4\vec{b}$

Cálculo del módulo del vector $\vec{E}$:

$|\vec{E}| = \sqrt{(2P)^2 + Q^2 + 2(2P)(Q)\cos 60°}$

Donde $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ representan los módulos de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$

$|\vec{E}| = \sqrt{2500 + 900 + 2(50)(30)\left(\dfrac{1}{2}\right)} \Rightarrow |\vec{E}| = 70$

60. Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en forma de par ordenado: $\vec{A} = (1; 2)$; $\vec{B} = (1; -1)$; $\vec{C} = (-3; 0)$, se cumple que: $m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C} = \vec{0}$, donde m, n y p son números reales. Hallar: $W = \dfrac{p^2}{mn}$

Resolución:

Reemplazando los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en la condición: $m(1; 2) + n(1; -1) + p(-3; 0) = (0; 0)$

$(m + n - 3p; 2m - n) = (0; 0)$

Igualando a cero las componentes en x e y:

En x: $m + n - 3p = 0$ ...(1)

En y: $2m - n = 0$ ...(2)

De (2): $n = 2m$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1): $m + 2m - 3p = 0$

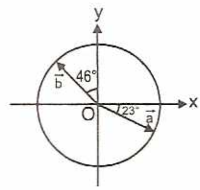
$\Rightarrow 3m - 3p = 0$

$\Rightarrow m = p$ ...(4)

Reemplazando (3) y (4) en W:

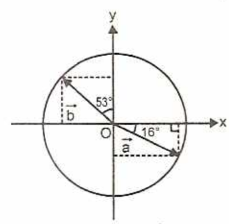
$W = \dfrac{p^2}{mn} = \dfrac{m^2}{m(2m)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow W = \dfrac{1}{2}$

61. En el sistema vectorial mostrado, hallar el módulo del vector resultante, sabiendo que la circunferencia tiene un radio de $25\sqrt{5}$ cm.



Resolución:

Conviene en este caso girar cada vector un ángulo de 7° en sentido antihorario para obtener ángulos notables. Es necesario aclarar que el módulo del vector resultante no varía en este proceso.



Cálculo de la resultante en el eje x:

$R_x = a\cos 16° - b\,\text{sen}\,53° = 25\sqrt{5}\left(\dfrac{24}{25}\right) - 25\sqrt{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)$

$R_x = 4\sqrt{5}$

Cálculo de la resultante en el eje y:

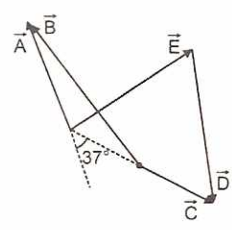
$R_y = -a\,\text{sen}\,16° + b\cos 53° = -25\sqrt{5}\left(\dfrac{7}{25}\right) + 25\sqrt{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$R_y = 8\sqrt{5}$

Cálculo del módulo del vector resultante:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{80 + 320} = \sqrt{400} \Rightarrow R = 20$

62. Hallar el módulo del vector resultante del conjunto de vectores mostrados, donde: $|\vec{A}| = 5$ y $|\vec{C}| = 8$.



Resolución:

De la propiedad del polígono vectorial cerrado, obtenemos la siguiente relación:

$\vec{E} + \vec{D} - \vec{C} + \vec{B} - \vec{A} = \vec{0}$ ...(1)

Nuestro objetivo es hallar el vector resultante:

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

Ordenando convenientemente, propiedad asociativa: $\vec{R} = (\vec{A} + \vec{C}) + (\vec{E} + \vec{D} + \vec{B})$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{C}) + (\vec{A} + \vec{C}) = 2(\vec{A} + \vec{C})$

El módulo es: $|\vec{R}| = 2|\vec{A} + \vec{C}|$ ...(3)

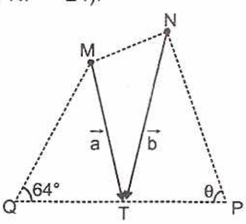
$|\vec{A} + \vec{C}| = \sqrt{A^2 + C^2 + 2AC\cos 143°}$ ...(4)

$|\vec{A} + \vec{C}| = \sqrt{25 + 64 + 2(5)(8)\left(-\frac{4}{5}\right)} = 5$

Reemplazando en (3): $|\vec{R}| = 2(5) = 10$

(4) Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$ forman entre sí un ángulo de 143°.

63. En el cuadrilátero MNPQ, determinar la medida del ángulo θ, tal que la resultante de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea 25 unidades, donde T es punto medio de PQ. (MQ = 7 y NP = 24).



Resolución:

En este caso descomponemos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$\vec{a} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QT}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PT}$

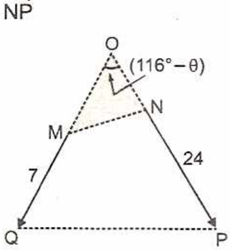
Cálculo del vector resultante:

$R = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{R} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PT}$ ...(1)

pero: $\overrightarrow{QT} + \overrightarrow{PT} = \vec{0}$ (vectores opuestos) ...(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$\vec{R} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP}$ ...(3)



El problema se reduce a resolver la ecuación (3), aplicando el método del paralelogramo, donde R = 25.

$R^2 = (\overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{NP})^2 + 2(\overrightarrow{MQ})(\overrightarrow{NP})\cos(116° - \theta)$

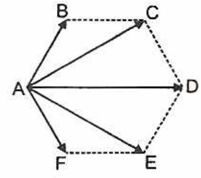
$\Rightarrow 625 = 49 + 576 + 2(7)(24)\cos(116° - \theta)$

$\Rightarrow \cos(116° - \theta) = 0$

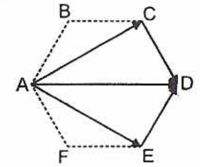
Si el coseno de cierto ángulo es cero, entonces el ángulo es 90°.

$116° - \theta = 90° \Rightarrow \theta = 26°$

64. En la figura, los puntos A, B, C, D, E y F determinan un hexágono regular. Hallar el módulo del vector resultante, sabiendo que el lado del hexágono mide 5 cm.



Resolución:



En esta configuración conviene trasladar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$ paralelamente, ocupando las posiciones $\overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{CD}$, respectivamente.

El problema se reduce a sumar los siguientes vectores:

$\vec{R} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$

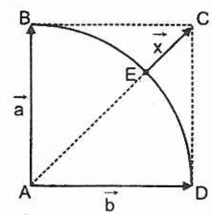
$\vec{R} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED})$

$\vec{R} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{AD})$

$|\vec{R}| = 3|\overrightarrow{AD}|$, pero: $|\overrightarrow{AD}| = 10$ cm

$|\vec{R}| = 3(10) \Rightarrow |\vec{R}| = 30$ cm

65. Los puntos A, B, C y D determinan un cuadrado de lado 2 cm, escribir el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Resolución:

El vector $\overrightarrow{AC} = (\vec{a} + \vec{b})$ y el vector $\vec{x}$ son colineales de igual sentido, entonces tienen el mismo vector unitario $\hat{\mu}$.

$$\hat{\mu} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} \quad ...(1)$$

Cálculo del módulo de $\vec{x}$:

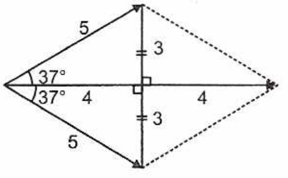
$|\vec{x}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

Cálculo del módulo de $\vec{a} + \vec{b}$:

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$

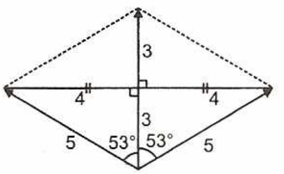
$$\frac{\vec{x}}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{x} = 0{,}2929(\vec{a} + \vec{b})$$

66. Dos vectores de igual módulo, formando un ángulo de 74° entre sí, dan una resultante de módulo 8. Si los vectores forman un ángulo de 106° entre sí, ¿cuál es el módulo de la resultante?



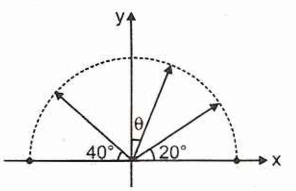
Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo se obtiene un rombo donde la diagonal (resultante) es bisectriz del ángulo de 74°. Sabiendo que las diagonales se cortan en su punto medio, se deduce que el módulo de cada vector es 5.



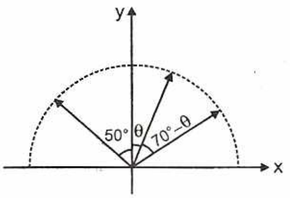
En el segundo caso, los vectores de módulo 5, cada uno, forman un ángulo de 106° entre sí. Aplicando la propiedad del triángulo rectángulo de 37° y 53° se deduce que el módulo de la resultante es igual a 6. Es importante advertir que en el rombo todos sus lados son iguales y las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio. $R = 6$

67. En el conjunto de vectores mostrados, hallar la medida del ángulo θ para obtener la resultante máxima.



Resolución:

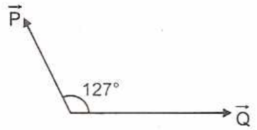
En este caso particular los tres vectores tienen igual módulo. Al sumar los dos vectores extremos aplicando el método del paralelogramo se obtiene un rombo, entonces la resultante será máxima cuando el tercer vector sea colineal con la diagonal del rombo.



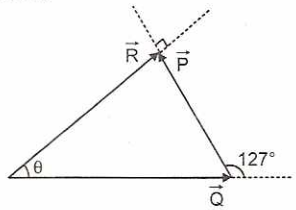
Analizando geométricamente se concluye que la resultante será máxima cuando el tercer vector sea bisectriz del ángulo formado por los vectores extremos. Del gráfico:

$50° + \theta = 70° - \theta \Rightarrow 2\theta = 20° \Rightarrow \theta = 10°$

68. Determinar el módulo del vector $\vec{P}$, tal que su resultante $(\vec{P} + \vec{Q})$ sea la menor posible, sabiendo que el módulo del vector $\vec{Q}$ es 10.



Resolución:



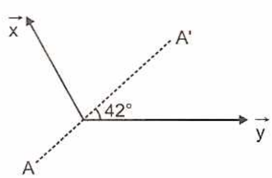
Analizando geométricamente se concluye que: el vector resultante $\vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q})$ más pequeño es aquel perpendicular al vector $\vec{P}$.

Si los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ forman entre sí un ángulo de 127°, el ángulo θ es igual a 37°. Aplicando las propiedades del triángulo rectángulo de 37° y 53° se obtiene que: $|\vec{R}| = 8$ y $|\vec{P}| = 6$.

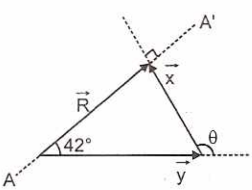
Estando definidas las direcciones de $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, cualquier otro valor de $|\vec{P}| \neq 6$ nos dará una resultante $|\vec{R}| > 8$.

$|\vec{P}| = 6$.

69. ¿Cuál es el ángulo que forma el vector $\vec{x}$ (más pequeño posible) con el vector $\vec{y}$, tal que su resultante $\vec{R} = \vec{x} + \vec{y}$, se ubique en AA'?



Resolución:

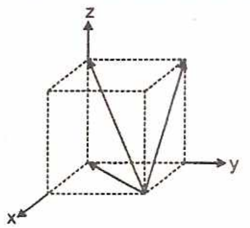


Apliquemos el método del polígono para sumar vectores. El vector $\vec{x}$ más pequeño posible es aquel vector perpendicular a la línea AA'.

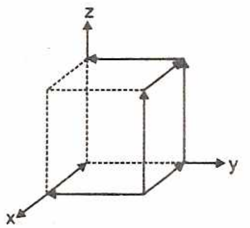
Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ forman entre sí un ángulo θ:

$\theta = 42° + 90° \Rightarrow \theta = 132°$

70. Determinar el módulo del vector resultante de los vectores mostrados. El cubo tiene como lado 1 m.



Resolución:



Se descomponen los vectores en los ejes X, Y, Z; no necesariamente en el mismo orden.

Cálculo de la resultante en los ejes X, Y, Z:

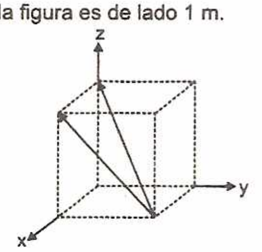
$R_x = -3;\ R_y = -2;\ R_z = 2$

Cálculo del módulo de la resultante:

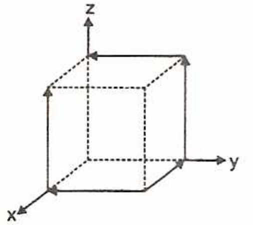
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2}$

$R = \sqrt{17}$ m

71. Hallar el módulo de la suma de los vectores, si el cubo en la figura es de lado 1 m.



Resolución:



Se descomponen los vectores en los ejes X, Y, Z; no necesariamente en el mismo orden.

Cálculo de la resultante en los ejes X, Y, Z:

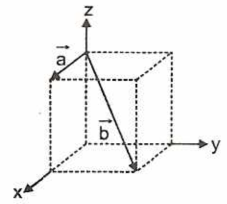
$R_x = -1;\ R_y = -2;\ R_z = 2$

Cálculo del módulo de la resultante:

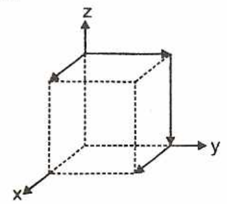
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

$R = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow R = 3$ m

72. Halla el módulo de la suma de los vectores, si el cubo en la figura es de lado 1 cm.



Resolución:



Se descompone el vector $\vec{b}$ en los ejes X, Y, Z; no necesariamente en el mismo orden.

Cálculo de la resultante en los ejes X, Y, Z:

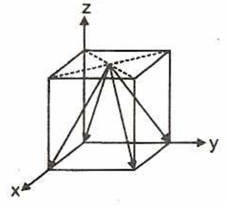
$R_x = 2$ cm; $R_y = 1$ cm; $R_z = -1$ cm

El módulo de la resultante se determina del siguiente modo: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

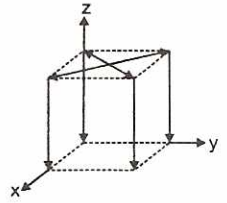
Reemplazando los valores tenemos:

$R = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \Rightarrow R = \sqrt{6}$ cm

73. Determina el módulo del vector resultante de los vectores mostrados. El cubo tiene como lado 1 cm.



Resolución:



Se descomponen los vectores convenientemente. En la cara superior del cubo los vectores componentes se cancelan par a par, por ser de igual módulo y sentidos opuestos.

$\vec{R} = \vec{R}_z = -4\hat{k} \Rightarrow |\vec{R}| = 4$ cm

74. Si el módulo de la suma de dos vectores, de igual módulo, es el triple del módulo de su diferencia, hallar el ángulo comprendido entre dichos vectores.

Resolución:

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los vectores que forman entre sí un ángulo θ, tal que: $A = B = x$

Sea S el módulo del vector suma:

$S^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$S^2 = x^2 + x^2 + 2(x)(x)\cos\theta = 2x^2 + 2x^2\cos\theta \quad ...(1)$

Sea D el módulo del vector diferencia:

$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$D^2 = x^2 + x^2 - 2(x)(x)\cos\theta = 2x^2 - 2x^2\cos\theta \quad ...(2)$

De la condición: $S = 3D \Rightarrow S^2 = 9D^2 \quad ...(3)$

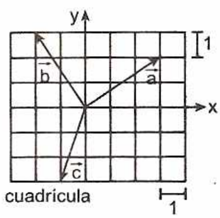
Reemplazando (1) y (2) en (3):

$2x^2 + 2x^2\cos\theta = 9(2x^2 - 2x^2\cos\theta)$

$1 + \cos\theta = 9 - 9\cos\theta$

$10\cos\theta = 8 \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = 37°$

75. Se muestra tres vectores en un plano cartesiano. Determinar el módulo del vector resultante.



Resolución:

Expresamos cada vector como par ordenado:

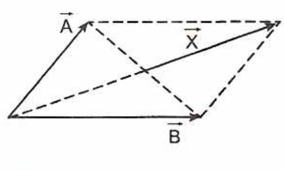
$\vec{a} = (3; 2)$; $\vec{b} = (-2; 3)$; $\vec{c} = (-1; -3)$

Ahora determinamos el vector resultante:

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (0; 2)$

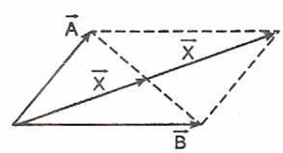
Entonces, el módulo del vector resultante es 2.

76. Se muestra un paralelogramo. Expresar el vector $\vec{X}$ en fusión de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Resolución:

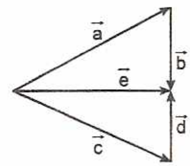
La diagonal del paralelogramo representa a la resultante de sumar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



La diagonal representa la resultante de los vectores: $2\vec{X} = \vec{A} + \vec{B}$

Despejando tenemos que: $\vec{X} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$

77. Se muestra un conjunto de vectores. Determinar el vector resultante.



Resolución:

Nos piden: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$

Agrupamos convenientemente:

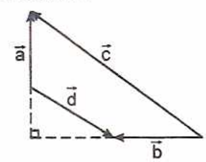
$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) + \vec{e} \quad ...(1)$

Pero de figura sabemos que:

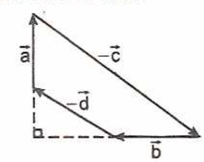
$(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{e} \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1): $\vec{R} = 3\vec{e}$

78. Se muestra un conjunto de vectores (figura 6.7). Sabiendo que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $a = 6$ cm y $b = 8$ cm; determinar el módulo del vector resultante.



Ordenamos los vectores formando un nuevo polígono cuyo módulo es nulo.



$\vec{a} + (-\vec{c}) + \vec{b} + (-\vec{d}) = \vec{0}$

Ordenando tenemos que: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \quad ...(1)$

Nos piden la resultante: $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2): $\vec{R} = 2(\vec{a} + \vec{b})$

Aplicado el teorema de Pitágoras tenemos:

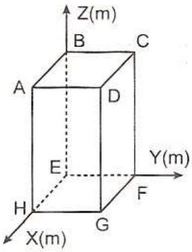
$R = 20$ cm

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2012 - I)

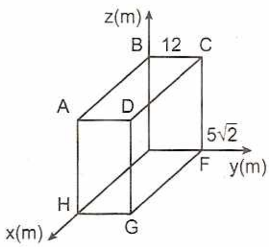
En el gráfico que se muestra, determine el módulo del vector $\vec{T}$ (en m), donde: $\vec{T} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FD}$

$AB = AD = 5\sqrt{2}$ m; $AH = 12$ m



A) 10 B) 17 C) $13\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{97}$ E) 26

Resolución:



$\vec{T} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FD}$

$\vec{T} = E - F + G - E + E - D - D + F$

$\vec{T} = E + G - 2D$

Reemplazando:

$\vec{T} = (0; 0; 0) + (5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}; 0) - 2(5\sqrt{2}; 5\sqrt{12}; 12)$

$\vec{T} = (-5\sqrt{2}; -5\sqrt{2}; -24)$

$|\vec{T}| = \sqrt{5(\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 + (-24)^2} \Rightarrow |\vec{T}| = 26$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

En un instante de tiempo, el producto escalar entre el vector posición y el vector velocidad de una partícula que se mueve en un plano es $\sqrt{3}$ m²/s. Si en ese mismo instante se verifica que el módulo de su productor vectorial es igual a 1 m²/s, calcule el menor ángulo que se forma entre el vector posición y el vector velocidad de la partícula en ese instante.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

Resolución:

Sea $\vec{r}$: vector posición y $\vec{v}$: velocidad

Dato:

Producto escalar: $\vec{r} \cdot \vec{v} = rv\cos\theta = \sqrt{3}$ ...(1)

Producto vectorial: $|\vec{r} \cdot \vec{v}| = rv\,\text{sen}\theta = 1$ ...(2)

(2) ÷ (1): $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_{menor} = 30°$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

Sean los vectores: $\vec{A} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k} \wedge \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$. De las siguientes alternativas, señale cuál es el vector perpendicular a los vectores dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ B) $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ C) $-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
D) $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ E) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

Resolución:

Un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es el vector producto vectorial ($\vec{A} \times \vec{B}$) y todos los vectores paralelos a $\vec{A} \times \vec{B}$.

Cálculo de $\vec{A} \times \vec{B}$:

$\vec{A} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$; $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-18) - \hat{j}(-9) + \hat{k}(-9)$$

$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -18\hat{i} + 9\hat{j} - 9\hat{k}$

Luego, sea $\vec{x}$ el vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$\Rightarrow \vec{x} = m(\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{x} = m(-18\hat{i} + 9\hat{j} - 9\hat{k})$

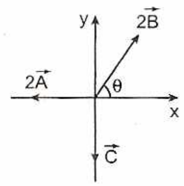
Como se observa, existen infinitos vectores que satisfacen la condición:

Para $m = -\dfrac{1}{9}$ $\therefore \vec{x} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

Clave: D

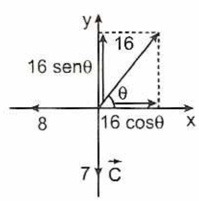
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, donde $|A| = 4$ u, $|B| = 8$ u y $|C| = 7$ u, determine el ángulo θ, si se sabe que el vector resultante de la suma de $2\vec{A}$, $2\vec{B}$ y $\vec{C}$ se encuentra en el eje y.



A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

Resolución:



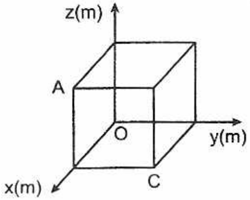
$$16\cos\theta = 8 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 60°$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

Determine un vector unitario que sea perpendicular al plano que contiene a los puntos O, A y C del cubo mostrado, de 3 m de lado.



A) $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

B) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

C) $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})/\sqrt{3}$

D) $(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})/\sqrt{3}$

E) $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})/\sqrt{3}$

Resolución:

Del cubo tenemos los vectores:

$\vec{A} = 3\hat{i}+0\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i}+3\hat{j}+0\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9\hat{i}+9\hat{j}+9\hat{k}$$

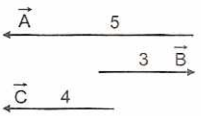
$$\vec{\mu}_{\vec{A}.\vec{B}} = \frac{-9\hat{i}+9\hat{j}+9\hat{k}}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

$\therefore\ (-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})/\sqrt{3}$

Clave: E

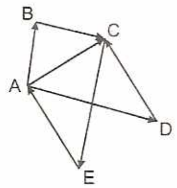
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el sistema de vectores mostrado, calcular: $|2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{C}|$.



A) 3 B) 23 C) 13
D) 2 E) 5

2. Hallar la resultante del conjunto de vectores mostrados.

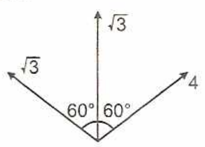


A) $2(\overrightarrow{AC})$ B) $\overrightarrow{AC}$ C) $-\overrightarrow{AC}$
D) $-3(\overrightarrow{AC})$ E) 0

3. Si el módulo de la suma de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de igual módulo, es el triple del módulo de su diferencia, calcular el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

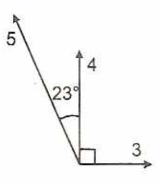
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 90°

4. Determinar el módulo del vector resultante del sistema mostrado.



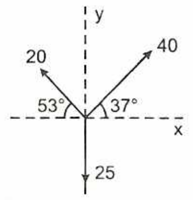
A) $2\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{3}$ C) 5
D) 3 E) 4

5. Dados los vectores, calcular la resultante.



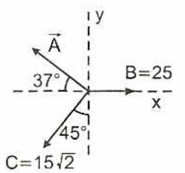
A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) 12
D) 10 E) $10\sqrt{3}$

6. Dado el conjunto de vectores, calcular el módulo de la resultante



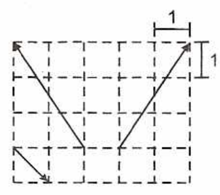
A) 85 B) 60 C) 35
D) 25 E) 15

7. Determinar el módulo de $\vec{A}$ para que la resultante sea horizontal.



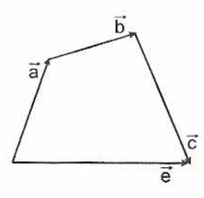
A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

8. Calcular el módulo de la resultante.



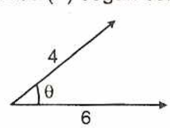
A) $\sqrt{26}$ B) 4 C) $4\sqrt{2}$
D) 5 E) $6\sqrt{2}$

9. Si el módulo de $\vec{e}$ es 5, calcular el módulo de la resultante.



A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

10. Para el sistema de vectores mostrados, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



( ) $R_{máxima} = 10$
( ) $R_{mínima} = 2$
( ) $R_{máxima}$ ocurre cuando $\theta = 180°$
( ) $R_{mínima}$ ocurre cuando $\theta = 0°$
( ) Un valor posible para el módulo del vector resultante es 12

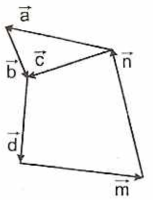
A) VVVFV B) VFVFV C) VVFFV
D) VVFFF E) VVVVV

11. Indicar verdadero (V) o falso (F).

( ) Dos vectores diferentes pueden tener igual módulo.
( ) Para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, se cumple: $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
( ) La resultante de tres vectores no coplanares puede ser cero.

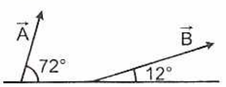
A) VFF B) FFF C) VVF
D) VFV E) VVV

12. En el sistema mostrado, determinar la resultante.



A) $2\vec{c}$ B) $-\vec{c}$ C) $3\vec{c}$
D) $\vec{c}$ E) $\vec{c}+\vec{b}$

13. Calcular el módulo de la resultante de los vectores mostrados, si: $|\vec{A}| = 5$ y $|\vec{B}| = 3$

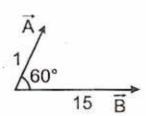


A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

14. En la figura se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

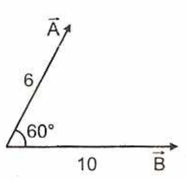
Calcular: $\left|3\vec{A} + \frac{\vec{B}}{3}\right|$

A) 7
B) 14
C) 12
D) 15
E) 25

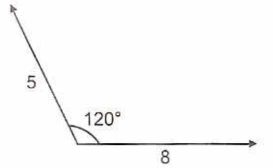


15. Determinar el módulo de la resultante de los vectores A y B.

A) 14
B) 16
C) 4
D) 60
E) 8

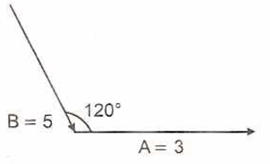


16. Calcular el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



A) 7 B) 13 C) 40
D) 3 E) 15

17. Calcular el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



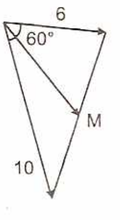
A) 7 B) $\sqrt{22}$ C) $\sqrt{19}$
D) 6 E) 8

18. La máxima resultante de dos vectores es 21 y su mínima es 3. ¿Cuál será la resultante cuando los vectores formen 90°?

A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 18

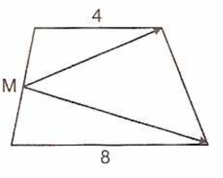
19. Calcular el módulo del vector resultante, siendo M punto medio.

A) 14
B) 7
C) 28
D) 21
E) 30



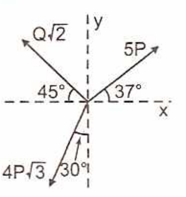
20. Si M es punto medio, calcular el módulo de la resultante.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 15



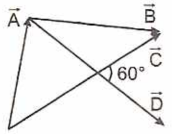
21. Si la resultante del sistema de vectores se encuentra en el eje x, determinar la relación entre P y Q.

A) P = Q
B) P = 3Q
C) P = 6Q
D) Q = 3P
E) Q = 6P

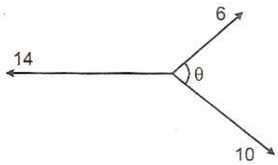


22. Si se conoce los siguientes datos: $|\vec{C}| = 3$ y $|\vec{D}| = 10$, calcular el módulo de la resultante.

A) 13
B) 14
C) 16
D) 26
E) 28

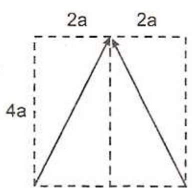


23. Calcular el ángulo θ para que la resultante de los 3 vectores sea cero.



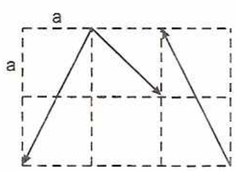
A) 37° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 90°

24. Calcular la resultante.



A) 4a B) 5a C) 10a D) 8a E) 6a

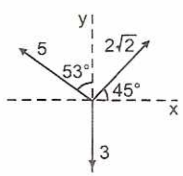
25. Hallar la resultante.



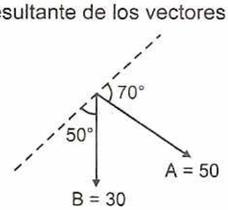
A) $a\sqrt{2}$ B) 2a C) 3a
D) a E) $2a\sqrt{2}$

26. Calcular la resultante del sistema.

A) $4\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{3}$

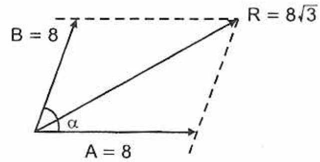


27. Hallar la resultante de los vectores mostrados.



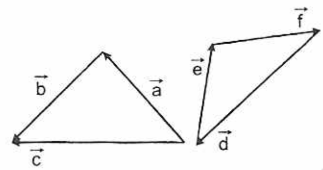
A) 70 B) 40 C) 50
D) 60 E) 80

28. De los vectores mostrados, hallar α.



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

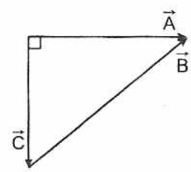
29. Calcule el vector resultante en cada caso, respectivamente.



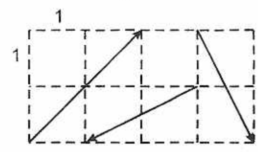
A) $2\vec{a}$; $\vec{0}$ B) $2\vec{c}$; $\vec{0}$ C) $2\vec{c}$; $2\vec{f}$
D) $-2\vec{c}$; $2\vec{d}$ E) $2\vec{b}$; $\vec{0}$

30. En la figura $|\vec{A}| = 3$ y $|\vec{B}| = 5$.
Hallar $|\vec{A} - \vec{B}|$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 8

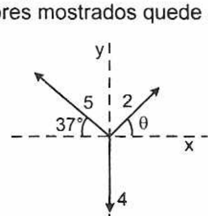


31. Calcular la resultante y su sentido.



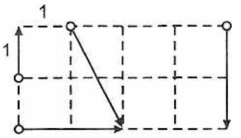
A) $\sqrt{2}$ → B) $\sqrt{2}$ ↖ C) $\sqrt{2}$ ↗
D) $\sqrt{2}$ ← E) $\sqrt{2}$ ↘

32. Calcular el ángulo θ para que la resultante del grupo de vectores mostrados quede en el eje x.



A) 60° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 30°

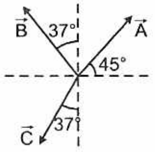
33. Determinar la resultante del sistema.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) 4

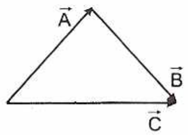
34. Determinar el módulo de la resultante, si $A = 45\sqrt{2}$; $B = 50$; $C = 25$.

A) 0
B) 15
C) 30
D) 45
E) 65



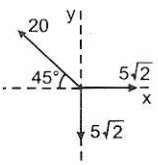
35. Del gráfico mostrado, hallar: $|\vec{C} - \vec{B}|$, si además $|\vec{A}| = 4$; $|\vec{B}| = 6$ y $|\vec{C}| = 7$.

A) 4
B) 8
C) 6
D) 7
E) 12



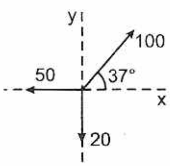
36. Hallar la resultante:

A) 5
B) 10
C) 15
D) 20
E) 25

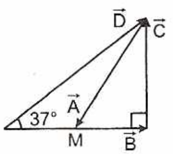


37. Hallar la resultante.

A) 70
B) 50
C) 40
D) 30
E) $50\sqrt{2}$



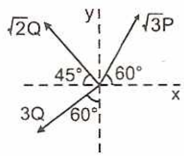
38. Hallar el módulo de la resultante, considerando los siguientes datos: $|\vec{C}| = 6$; M: punto medio del vector B.



A) $\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$
D) $6\sqrt{5}$ E) $9\sqrt{5}$

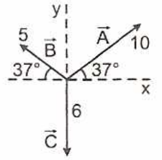
39. Si la resultante del sistema es horizontal, hallar la relación: P/Q.

A) 1
B) 1/2
C) 1/3
D) 1/5
E) 1/6

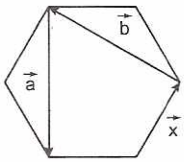


40. Hallar la resultante.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 10



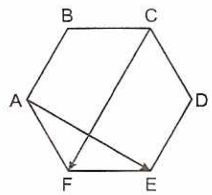
41. En el hexágono regular que se muestra, expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



A) $(\vec{b} - 2\vec{a})/3$ B) $-(\vec{b} + 2\vec{a})/3$
C) $(3\vec{b} - \vec{a})/2$ D) $-(2\vec{b} + \vec{a})/3$
E) $-(3\vec{b} + 2\vec{a})/5$

42. Si el hexágono ABCDEF es regular de lado $\sqrt{19}$, hallar: $\left|\dfrac{\overrightarrow{AE}}{3} + \dfrac{2(\overrightarrow{CF})}{3}\right|$

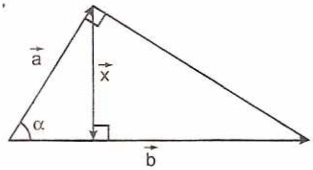
A) $2\sqrt{19}/3$
B) 3,35
C) 19
D) 6,33
E) $\sqrt{3}/3$



43. Sobre los lados de un rectángulo ABCD se han construido los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Expresar, mediante estos 2 vectores dados, el vector $\overrightarrow{MB}$, si M es el punto medio del lado AD.

A) $(2\vec{a} - \vec{b})/2$ B) $(\vec{a} + \vec{b})/3$ C) $(\vec{b} - \vec{a})/2$
D) $(2\vec{a} + \vec{b})/2$ E) $(2\vec{b} + \vec{a})/3$

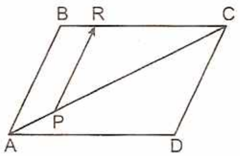
44. En el triángulo rectángulo mostrado, expresar el vector $\vec{x}$ en función $\vec{a}$, $\vec{b}$ y α.



A) $\vec{x} = \vec{b}\,\text{sen}\alpha - \vec{a}\cos\alpha$
B) $\vec{x} = \vec{b}\,\text{sen}^2\alpha - \vec{a}$
C) $\vec{x} = \vec{b}\cos^2\alpha + \vec{a}\,\text{sen}^2\alpha$

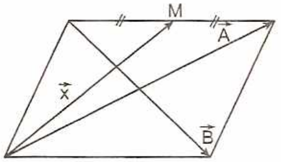
D) $\vec{x} = \vec{b}\cos^2\alpha - \vec{a}$
E) $\vec{x} = \vec{b}\,\text{sen}^2\alpha + \vec{a}\cos^2\alpha$

45. Se tiene un paralelogramo ABCD donde AP = AC/5 y BR = BC/3. Hallar el valor numérico de (r − s), si: $\overrightarrow{PR} = r\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AB}$.



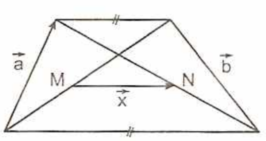
A) 3/4
B) 14/15
C) 1
D) −2/3
E) −14/15

46. En el paralelogramo mostrado, expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Siendo "M" punto medio de lado del paralelogramo.



A) $\dfrac{3\vec{A}-\vec{B}}{4}$ B) $\dfrac{3\vec{A}+\vec{B}}{4}$ C) $\dfrac{3\vec{A}-\vec{B}}{2}$
D) $\dfrac{2\vec{A}+\vec{B}}{3}$ E) $\dfrac{2\vec{A}-\vec{B}}{3}$

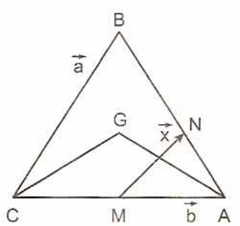
47. En el trapecio mostrado, expresar el vector $\vec{x}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Si M y N son puntos medios de las diagonales.



A) $\dfrac{(\vec{a}-\vec{b})}{2}$ B) $\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})}{2}$ C) $\dfrac{(\vec{a}-3\vec{b})}{4}$
D) $\dfrac{(2\vec{a}-\vec{b})}{3}$ E) $\dfrac{(\vec{a}-\vec{b})}{6}$

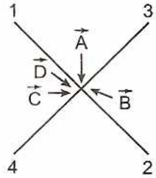
48. El punto G es el baricentro del triángulo ABC que se observa en la figura y M es el punto medio del lado AC. Si el segmento MN es paralelo al segmento CG, expresar el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

A) $\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$
B) $\dfrac{(\vec{a}-\vec{b})}{6}$
C) $\dfrac{(6\vec{a}+\vec{b})}{7}$
D) $\dfrac{1}{12}(\vec{a}+\vec{b})$
E) $\dfrac{1}{4}(\vec{b}+\vec{a})$



49. Las cuatro fuerzas $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de igual módulo F, actúan sobre una masa colocada en 0. $\vec{B}$ y $\vec{D}$ son colineales; $\vec{C}$ y $\vec{A}$ perpendiculares. El módulo y dirección de la fuerza resultante es:

A) $\sqrt{2}$ F, a lo largo de (12)
B) F, a lo largo de (12)
C) 2F, a lo largo de (34)
D) F, a lo largo de (34)
E) $\sqrt{2}$ F, a lo largo de (34)

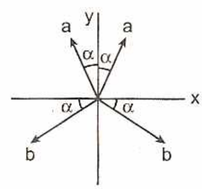


50. Cuatro vectores perpendiculares a las caras de un tetraedro y dirigidos hacia el exterior tienen magnitudes iguales a las áreas de las caras respectivas. Determinar la magnitud de la resultante, si la arista del tetraedro es 2 cm.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 8 D) 0 E) 16

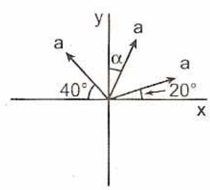
51. En el diagrama mostrado, determinar la magnitud de la resultante, si: tanα = a/b.

A) 0
B) a
C) 2a
D) 3a
E) 4a



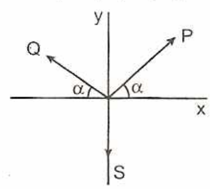
52. En el siguiente sistema, hallar el valor de α para obtener una resultante máxima.

A) 0°
B) 10°
C) 30°
D) 40°
E) 50°



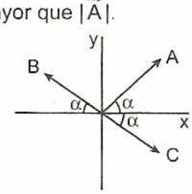
53. Hallar la medida de α para que la resultante del sistema sea igual a cero, si: $|\vec{P}| = |\vec{S}|$.

A) 75°
B) 60°
C) 30°
D) 15°
E) 62,5°



54. En el siguiente sistema, hallar el valor de α para que la resultante sea vertical hacia arriba y cuyo valor sea 20% mayor que $|\vec{A}|$.

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



55. ¿Qué vector se debe sumar al vector A, cuya magnitud es 30 y dirección 60°, para dar como resultante el vector nulo?

A) Valor 30 y dirección 30°
B) Valor 30 y dirección 120°
C) Valor 30 y dirección 150°
D) Valor 30 y dirección 240°
E) No existe tal vector

56. Se tiene los vectores: $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{B} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{C} = a\hat{i} + b\hat{j}$. ¿Cuáles son los valores mínimos y enteros de "a" y "b", de tal forma que $\vec{A} + \vec{B}$ sea paralelo a $\vec{B} + \vec{C}$?

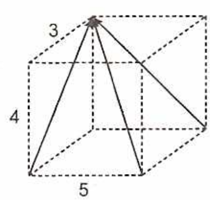
A) 4 y 5 B) 6 y 4 C) 7 y 3
D) 2 y 4 E) 3 y 2

57. Sean los vectores:
$\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{B} = 8\hat{k}$; $\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$
Hallar el vector unitario de: $2\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$.

A) $\frac{1}{\sqrt{301}}(2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k})$ B) $\frac{1}{\sqrt{385}}(15\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k})$
C) $\frac{1}{65}(2\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k})$ D) $\frac{1}{\sqrt{74}}(3\hat{i} - 4\hat{k} + 7\hat{j})$
E) $\frac{1}{\sqrt{29}}(2\hat{i} - 3\hat{k} + 4\hat{j})$

58. Calcular el módulo del vector resultante de los vectores mostrados. La figura es un paralelepípedo.

A) $\sqrt{280}$
B) $\sqrt{230}$
C) $\sqrt{560}$
D) $\sqrt{330}$
E) $\sqrt{177}$



59. Sean los vectores: $\vec{a} = (2; 2; m)$; $\vec{b} = (4; m; p)$ y $\vec{c} = (m; p; 8)$, y su vector resultante se encuentra en la dirección del eje Z. Hallar el vector resultante.

A) (0; 0; 3) B) (0; 0; 4) C) (0; 0; −4)
D) (0; 0; −3) E) (0; 0; 6)

60. Se sabe que: $\vec{A} = (4; 1)$; $\vec{B} = (2; -1)$ y $\vec{C} = (3; 0)$. Entonces:

I. El vector $\vec{A} - \vec{B}$ es paralelo al vector $\vec{C} - \vec{B}$.
II. El módulo $\vec{B} + \vec{C}$ es $\sqrt{26}$
III. El vector unitario de la resultante de dichos vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es $1\hat{i}$.

Luego, podemos afirmar que:

A) Solo I es correcta B) Solo II es correcta
C) Solo III es correcta D) I y II son correctas
E) Todas son correctas

61. La resultante de los vectores: $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{b} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{c} = p\hat{i} + m\hat{j}$, tiene un módulo igual a 12 y es paralelo al eje y de un sistema de coordenadas. Hallar "p" y "m".

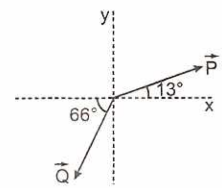
A) p = 4; m = −3 B) p = −3; m = 6
C) p = 2; m = 2 D) p = −2; m = 2
E) p = 2; m = 4

62. Se tienen 3 vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ y $\vec{r}$. Si: $\vec{p} = (6; 4; 7)$; $\vec{q} = (1; 3; 2)$ y $\vec{r} = (a - 2; a; a + 2)$. Calcular "a", sabiendo que $\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{p} + \vec{q}$.

A) −12/7 B) −7/6 C) −4/23
D) −3/5 E) +1/23

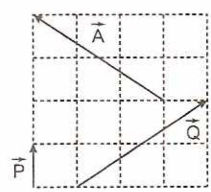
63. El módulo de la resultante de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ es igual al módulo del vector $\vec{C}$. Si $|\vec{P}| = 18$ y $|\vec{Q}| = 30$ y además el vector $\vec{S} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$, hallar el vector $\vec{C}$, si es paralelo a $\vec{S}$ y del mismo sentido.

A) $14{,}4\hat{i} + 19{,}2\hat{j}$
B) $6\hat{i} + 8\hat{j}$
C) $12{,}2\hat{i} + 7{,}2\hat{j}$
D) $6{,}3\hat{i} + 12{,}4\hat{j}$
E) $31{,}2\hat{i} + 28{,}2\hat{j}$



64. Expresar el vector $\vec{A}$ en función de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, o sea $\vec{A} = m\vec{P} + n\vec{Q}$. Dar como respuesta los valores de "m" y "n".

A) 5 y −6
B) 3 y −3
C) 4 y −1
D) 3 y −2
E) 7 y −4

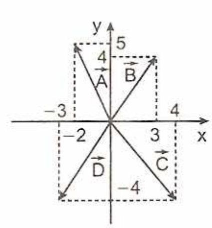


65. Si los vectores: $\vec{A} = (16; -3; 4)$ y $\vec{B} = (4; y; 2)$ son perpendiculares y además el vector $\vec{B}$ es paralelo al vector $\vec{C}$, cuyo módulo es $|\vec{C}| = \sqrt{149}$, hallar el vector $\vec{C}$.

A) $4\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ B) $3\hat{i} - 9\hat{j} - 2\hat{k}$
C) $2\hat{i} + 12\hat{j} + \hat{k}$ D) $8\hat{i} + 12\hat{j} - \hat{k}$
E) $6\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$

66. Hallar: $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$

A) $2\hat{i} + \hat{j}$
B) $2\hat{i} - 5\hat{j}$
C) $3\hat{i} - 4\hat{j}$
D) $3\hat{i} + 2\hat{j}$
E) $5\hat{i} + 3\hat{j}$



67. Sean los vectores:
$\vec{A} = -3\hat{i} + 5\hat{j}$; $\vec{B} = -8\hat{i} + 15\hat{j}$; $\vec{C} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$
Indicar la proposición verdadera:

A) $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son paralelos

B) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares
C) $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son paralelos
D) $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares
E) $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares

68. Los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son vectores unitarios. Calcular $(2\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (3\vec{p} + 4\vec{q})$, si $|\vec{p} + \vec{q}| = \sqrt{7}$.

A) -4 B) 7 C) 3,5
D) $-8,5$ E) 9

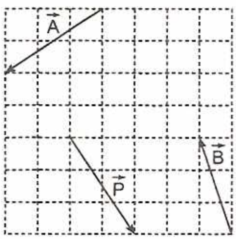
69. Sean los vectores: $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\sqrt{3}\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{B} = 4\hat{i}$. Encontrar: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y $|\vec{A} \times \vec{B}|$.

A) 42; 16 B) 18; 24 C) 13; 27
D) 16; 18 E) 24; 32

70. Se tiene dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si $\vec{B} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ y el módulo del vector $\vec{A}$ es 10 y además $\vec{A} \cdot \vec{B} = 30$, calcular el módulo del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

A) $10\sqrt{3}$ B) $20\sqrt{3}$ C) $30\sqrt{3}$
D) $40\sqrt{3}$ E) $50\sqrt{3}$

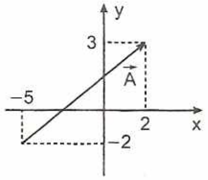
71. En la figura mostrada: $\vec{P} = r\vec{A} + n\vec{B}$. Hallar el valor numérico de "r" y "n". Cada cuadrado es de lado 1 cm.



A) 3/11; 9/11 B) -2; $+3$
C) -7; $+11$ D) $-3/11$; $+22/13$
E) $-3/11$; $-13/11$

72. Hallar el vector $\vec{A}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

A) $2\hat{i} - 2\hat{j}$
B) $4\hat{i} + 3\hat{j}$
C) $4\hat{i} - 5\hat{j}$
D) $7\hat{i} + 12\hat{j}$
E) $7\hat{i} + 5\hat{j}$

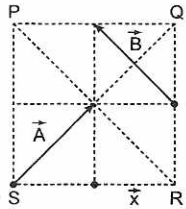


73. Calcular el módulo de la resultante de los vectores $\vec{A} = 6\hat{i} - 2\hat{j} \wedge \vec{B} = 2\hat{i} + 8\hat{j}$

A) 2 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

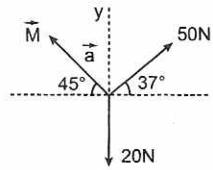
74. Si PQRS es un cuadrado, además $\vec{x} = a\vec{A} + b\vec{B}$, determine a + b.

A) 1
B) 3
C) 2,5
D) 0
E) 2

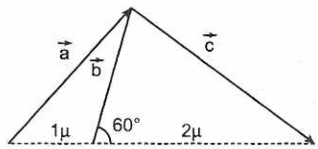


75. Determine el módulo del vector resultante, si este es vertical.

A) 50 N
B) 30 N
C) 20 N
D) 10 N
E) 80 N



76. Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrado. (b = 1 μ).



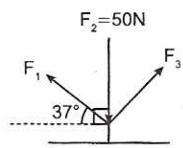
A) $\sqrt{5}\,\mu$ B) $\sqrt{13}\,\mu$ C) $\sqrt{11}\,\mu$
D) $\sqrt{7}\,\mu$ E) $\sqrt{17}\,\mu$

77. Se tiene dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; de los cuales se sabe que su suma máxima es en módulo 8 μ; y que además su suma en módulo cuando están perpendiculares entre sí es $4\sqrt{2}\,\mu$.
Determine el módulo de la menor suma de dichos vectores.

A) 4 μ B) 8 μ C) 0 μ
D) 2 μ E) $2\sqrt{2}\,\mu$

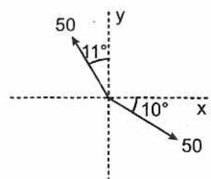
78. Se muestra tres fuerzas aplicadas a un clavo. ¿Cuál es el mínimo valor posible de F_3; de modo que la suma de estas sea nula?

A) 30 N
B) 40 N
C) 20 N
D) 10 N
E) 75 N



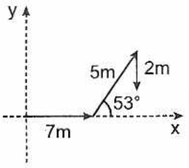
79. En el sistema que se muestra, determinar la magnitud de la resultante.

A) $5\sqrt{10}$
B) $8\sqrt{10}$
C) $10\sqrt{10}$
D) $18\sqrt{10}$
E) $258\sqrt{10}$



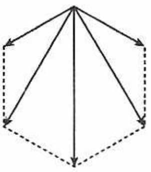
80. En el sistema mostrado, determine el módulo del vector resultante.

A) $2\sqrt{26}$
B) $3\sqrt{26}$
C) $4\sqrt{26}$
D) $\sqrt{26}$
E) $5\sqrt{26}$



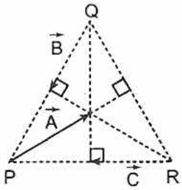
81. Si el lado del hexágono regular es "a", halle el módulo de la resultante de los vectores mostrados.

A) a
B) 2a
C) 4a
D) 6a
E) 8a



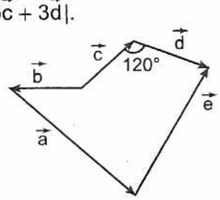
82. La figura PQR es un triángulo equilátero. Determine el módulo de la suma de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$; si $\vec{A} = 2\sqrt{3}\,\hat{i} + 2\hat{j}$

A) 0
B) 6 μ
C) $\sqrt{3}\,\mu$
D) $3\sqrt{3}\,\mu$
E) 2 μ



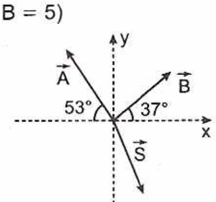
83. Se tiene el siguiente sistema de vectores, donde $|\vec{d}| = 5\ \mu$ y el módulo de la resultante es igual a 14 μ. Determine $|5\vec{c} + 3\vec{d}|$.

A) $5\sqrt{3}\,\mu$
B) 5 μ
C) 15 μ
D) 14 μ
E) $15\sqrt{3}\,\mu$

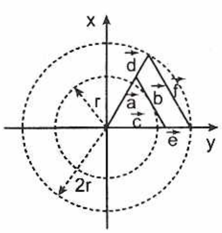


84. Determine $\vec{S}$ para que la resultante del sistema sea nula (A = 10; B = 5)

A) $\hat{i} + \hat{j}$
B) $2\hat{i} - 11\hat{j}$
C) $4\hat{i} + 5\hat{j}$
D) $10\hat{i} - 10\hat{j}$
E) $5\hat{i} - 3\hat{j}$



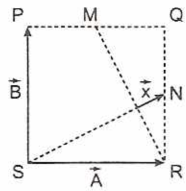
85. Marque la expresión incorrecta considerando que los vectores $\vec{a}$; $\vec{c}$; $\vec{d}$ y $\vec{e}$ parten del origen.



A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{e}$
B) La componente sobre el eje x de $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ es $4|\vec{c}|$
C) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f} = 2\vec{e}$
D) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{e} = -\vec{c}$
E) $\vec{d} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

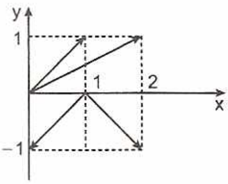
86. En el cuadrado PQRS, M y N son puntos medios. Halle el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $\dfrac{2\vec{A} + \vec{B}}{10}$
B) $2(\vec{A} - \vec{B})$
C) $\dfrac{2(\vec{A}) + \vec{B}}{5}$
D) $\dfrac{\vec{A} + 2\vec{B}}{10}$
E) $\dfrac{\vec{A} + 3\vec{B}}{4}$



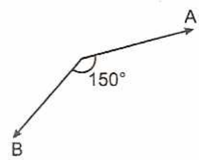
87. En el sistema vectorial mostrado, determine el módulo del vector resultante.

A) 0
B) 1 μ
C) 2 μ
D) 3 μ
E) 4 μ



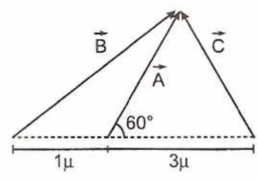
88. Determine el menor módulo que podría tener la resultante de los dos vectores mostrados ($|A| = 4\ \mu$).

A) 1 μ
B) $\sqrt{3}\,\mu$
C) $\sqrt{5}\,\mu$
D) 2 μ
E) $2\sqrt{3}\,\mu$



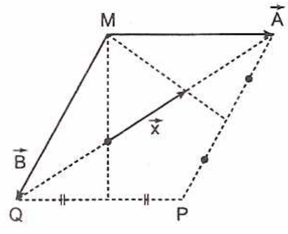
89. De acuerdo al gráfico, determine el módulo de la resultante de los vectores mostrados ($|\vec{A}| = 2\ \mu$).

A) 1 μ
B) $\sqrt{2}\,\mu$
C) $\sqrt{3}\,\mu$
D) $2\sqrt{7}\,\mu$
E) $2\sqrt{3}\,\mu$



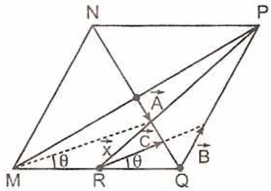
90. Exprese el vector $\vec{x}$ en función de los vectores A y B (MNPQ es un paralelogramo).

A) $\vec{A} - \vec{B}$
B) $\dfrac{\vec{B} - \vec{A}}{6}$
C) $\dfrac{\vec{A} - \vec{B}}{3}$
D) $\dfrac{\vec{A} - \vec{B}}{2}$
E) $\frac{2}{3}(\vec{A} - \vec{B})$

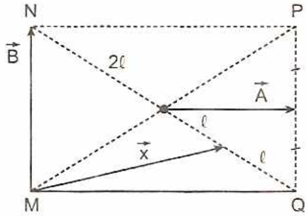


91. MNPQ es un paralelogramo, R es punto medio, se cumple que $m\vec{A} + n\vec{B} = \vec{C}$, halle m + n.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 3/2
E) 0



92. Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{x}$; determine $\vec{x}$ en función de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (MNPQ es un rectángulo).



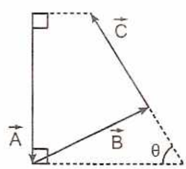
A) $\vec{x} = \dfrac{3(\vec{A})}{2} + \dfrac{\vec{B}}{4}$ B) $\vec{x} = \dfrac{\vec{A}}{4} + \dfrac{3(\vec{B})}{4}$

C) $\vec{x} = \dfrac{\vec{B}}{2} + \vec{A}$ D) $\vec{x} = \vec{A} + \vec{B}$

E) $\vec{x} = \dfrac{\vec{A}}{3} + 2(\vec{B})$

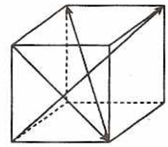
93. El gráfico muestra tres vectores coplanares, sabiendo que la dirección del vector $\vec{C}$ está definida ($45° < \theta < 90°$) y que $|\vec{A}| = |\vec{B}| = a$; determine el módulo de la mayor resultante horizontal que podemos obtener.

A) $a\tan\theta$
B) $a\cot\theta$
C) $\dfrac{a(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}$
D) $\dfrac{a(1+\cos\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)}$
E) $a\tan(\theta/2)$



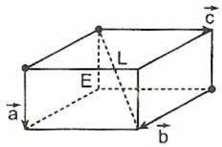
94. Determine el módulo del vector resultante del siguiente sistema de vectores. El cubo tiene una arista de longitud 1 μ.

A) $\sqrt{3}\,\mu$
B) $2\,\mu$
C) $\sqrt{5}\,\mu$
D) $\sqrt{6}\,\mu$
E) $\sqrt{7}\,\mu$



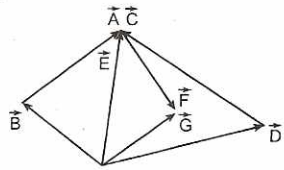
95. Se muestra un conjunto de vectores que se encuentran en las aristas de un paralelepípedo. Si desde el punto E se traza otro vector, de tal manera que su extremo se encuentre en un punto contenido en la recta L, determine el módulo de este último vector sabiendo que tiene el menor módulo.

A) $a + b + c$
B) $a^2 + b^2 - c^2$
C) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
E) $\dfrac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



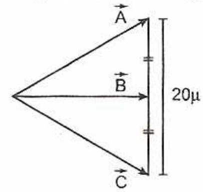
96. Determine la resultante de los vectores que se muestra en la figura.

A) $\vec{E} + \vec{F}$
B) $2\vec{G}$
C) $2\vec{E}$
D) $4\vec{E} + \vec{F}$
E) $2\vec{E} + 2\vec{G}$



97. Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados ($|\vec{A}| = |\vec{C}| = 26\ \mu$).

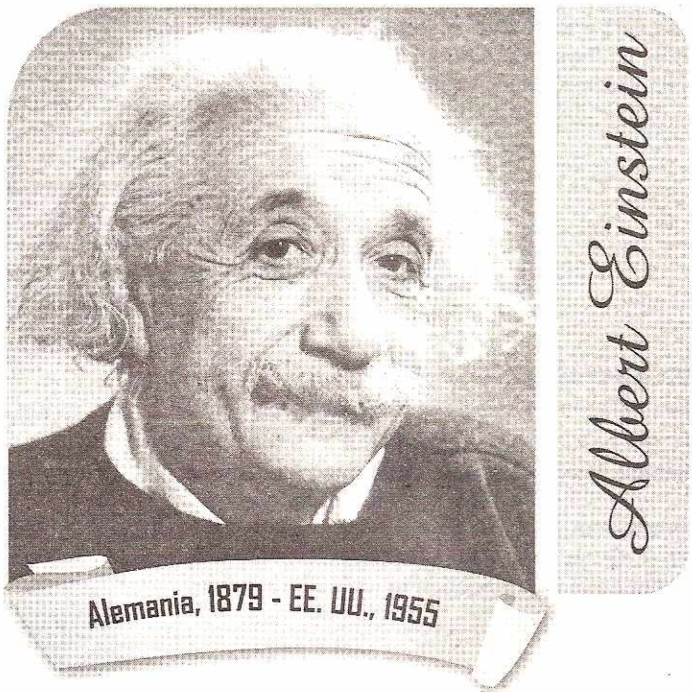
A) 24 μ
B) 48 μ
C) 72 μ
D) 80 μ
E) 84 μ



CLAVES

1. A	14. A	27. A	40. E	53. C	66. A	79. D	92. A
2. A	15. A	28. E	41. B	54. B	67. D	80. A	93. E
3. B	16. A	29. B	42. D	55. D	68. D	81. D	94. D
4. C	17. A	30. C	43. A	56. E	69. E	82. E	95. E
5. B	18. D	31. B	44. D	57. B	70. C	83. E	96. E
6. D	19. D	32. C	45. D	58. A	71. E	84. B	97. C
7. D	20. D	33. C	46. C	59. E	72. E	85. B	
8. A	21. D	34. E	47. B	60. E	73. D	86. A	
9. B	22. B	35. A	48. D	61. E	74. D	87. D	
10. D	23. C	36. A	49. A	62. C	75. A	88. C	
11. C	24. D	37. C	50. D	63. A	76. B	89. D	
12. D	25. A	38. D	51. A	64. C	77. C	90. C	
13. C	26. B	39. C	52. B	65. C	78. B	91. C	

Cinemática | 03 capítulo



Albert Einstein (Ulm, Imperio alemán, 14 de marzo de 1879-Princeton, Estados Unidos, 18 de abril de 1955) fue un físico alemán de origen judío, nacionalizado después suizo y estadounidense. Es considerado el científico más conocido y popular del siglo XX. En 1905, cuando era un joven físico desconocido, publicó su teoría de la relatividad especial;en ella incorporó, en un marco teórico simple fundamentado en postulados físicos sencillos, conceptos y fenómenos estudiados antes por Henri Poincaré y por HendrikLorentz. Como una consecuencia lógica de esta teoría dedujo la ecuación de la física más conocida a nivel popular: la equivalencia masa-energía, $E=mc^2$. Con la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein se inició una nueva etapa, la cinemática relativista, donde el tiempo y el espacio no son absolutos y sí lo es la velocidad de la luz.

En 1915 presentó la teoría de la relatividad general, en la que reformuló por completo el concepto de gravedad. Por sus explicaciones sobre el efecto fotoeléctrico y sus numerosas contribuciones a la física teórica, en 1921 obtuvo el Premio Nobel de Física. Aunque es considerado por algunos el «padre de la bomba atómica», abogó por el federalismo mundial, el internacionalismo, el pacifismo, el sionismo y el socialismo democrático, con una fuerte devoción por la libertad

Estudia el fenómeno del movimiento independientemente de las fuerzas que lo produce. Cuando soltamos una piedra en el aire, diremos que la trayectoria es una línea recta vertical, podemos calcular el tiempo que demora en llegar al piso, la altura que desciende y la aceleración con que cae; no interesa la fuerza aplicada a la piedra ni la masa del cuerpo.

¿Qué es una partícula?

Decimos que un cuerpo es una "partícula" cuando sus dimensiones son muy pequeñas en comparación con las demás dimensiones que participan en el fenómeno. Por ejemplo, un auto de 3 m de longitud es una partícula, comparado con la Tierra que tiene un radio de curvatura de 6400 km.

Sistema de referencia

Es aquel cuerpo en el espacio euclidiano tridimensional en donde se ubica imaginariamente un observador, asociado a él un sistema coordenado cartesiano y un reloj. La trayectoria que sigue una partícula depende del sistema de referencia que se elige.

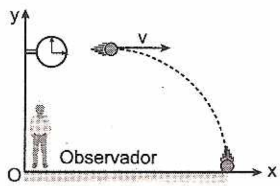


Fig. 3.1

Desplazamiento

Se define como el cambio de posición que experimenta un cuerpo o partícula con respecto a un sistema de referencia. El desplazamiento es una magnitud vectorial.

Movimiento mecánico

Es el cambio de posición que experimenta un cuerpo con respecto a un sistema de referencia en el tiempo.

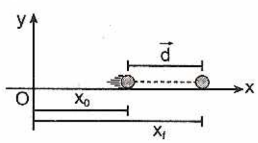


Fig. 3.2

x_0: posición inicial (t = 0)

x_f: posición final

$\vec{d}$: desplazamiento (cambio de posición)

$$\boxed{d = x_f - x_0} \qquad ...(3.1)$$

d (+): desplazamiento hacia la derecha.

d (−): desplazamiento hacia la izquierda.

Recuerda:

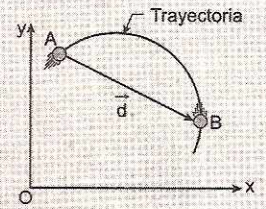
"Entender el movimiento es entender la naturaleza".

Leonardo da Vinci

Desplazamiento: $\vec{d}$

A: posición inicial

B: posición final



"No depende de la trayectoria que sigue la partícula, solo es necesario conocer la posición inicial y final".

Elementos del movimiento

Móvil. Es el cuerpo o partícula en movimiento respecto de un sistema de referencia.

Trayectoria. Es aquella línea recta o curva que se consigue al unir los diferentes puntos por donde el móvil ha pasado.

Distancia (d). Se define como el módulo del vector desplazamiento. Su valor no depende de la trayectoria que sigue el móvil, solo es necesario conocer la posición inicial y final.

Recorrido (e). Es la longitud de la trayectoria entre dos puntos considerados.

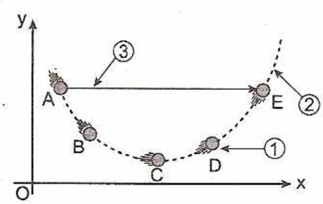
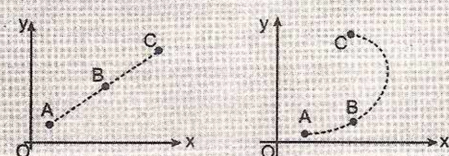
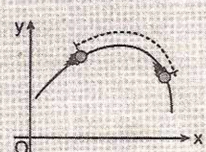


Fig. 3.3

Trayectoria



Recorrido



Velocidad-tiempo (v-t)

I. El área bajo la recta es igual al recorrido por el móvil.

$$\boxed{A = \text{recorrido}} \quad \ldots(3.12)$$

II. En general, el área bajo la recta es igual al cambio de posición que experimenta la partícula.

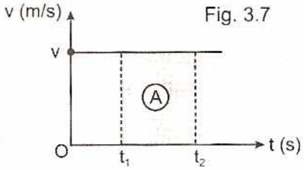
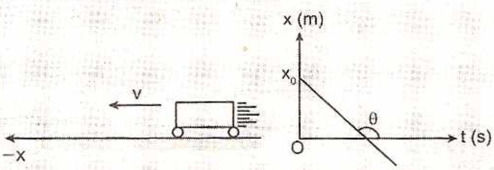
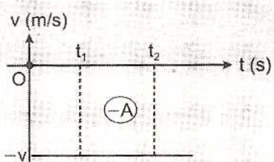


Fig. 3.7

Pendiente negativa:
Si la velocidad es negativa ($\tan\theta < 0$), entonces el móvil se desplaza en el sentido del eje $-x$.

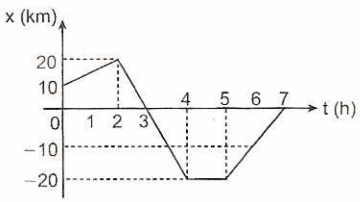


Velocidad negativa:
El área negativa $-A$, significa que el móvil se ha desplazado hacia la izquierda, en el sentido del eje $-x$.



Ejemplos:

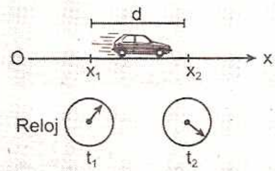
1. En el diagrama se muestra la variación de la posición de una partícula que se desplaza en línea recta en el eje x.



Resolución:
Entonces podemos afirmar que:

a. La posición inicial de la partícula es $x_0 = 10$ km.
b. En la segunda hora se encuentra en $x = 20$ km.
c. La velocidad en las dos primeras horas es:
$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 10}{2 - 0} = 5 \text{ km/h}$$
d. En la tercera hora el móvil invierte el sentido de su movimiento, llegando al origen de coordenadas $x = 0$ en el instante $t = 3$ h.
e. En la cuarta hora el móvil se desplaza en el eje $-x$ alejándose del origen de coordenadas, llegando a la posición $x = -20$ km en el instante $t = 4$ h.
f. La velocidad en el intervalo $t_1 = 2$ h y $t_2 = 4$ h es:
$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-20)-(20)}{4-2} = -20 \text{ km/h}$$
El signo ($-$) significa que el móvil se mueve en el sentido del eje $-x$.
g. En la quinta hora la partícula está en reposo.
h. En el intervalo $t = 5$ h y $t = 7$ h el móvil cambia de sentido dirigiéndose al origen del eje x, llegando en el instante $t = 7$ h.

Velocidad en el eje x:
$$v = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{d}{t} \Rightarrow v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



2. Una partícula inicia su movimiento en $x = 5$ m, con velocidad, como indica la figura, 3.8.

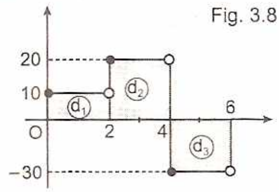


Fig. 3.8

Resolución:
Entonces podemos afirmar que:

a. La partícula inicia su movimiento con 10 m/s.
b. En los dos primeros segundos recorre:
$d_1 = \text{área} = bh = (2)(10) = 20$ m
c. En el intervalo $t = 2$ s y $t = 4$ s recorre:
$d_2 = \text{área} = (2)(20) = 40$ m
d. Posición de la partícula en el instante $t = 4$ s:
$x_f = x_0 + d_1 + d_2$, donde: $x_0 = 5$ m
$\Rightarrow x_f = 5 + 20 + 40 \Rightarrow x_f = 65$ m
e. La partícula inicia su movimiento ($t = 0$) con velocidad de 10 m/s, después de 2 s aumenta su velocidad a 20 m/s, siempre en el sentido del eje $+x$. En el instante $t = 4$ s el móvil invierte el sentido de su movimiento siguiendo el sentido del eje $-x$ con velocidad de 30 m/s. En la gráfica el signo negativo de la velocidad significa cambio de sentido en el movimiento.
f. En el intervalo $t = 4$ s y $t = 6$ s, la partícula recorre: $d_3 = \text{área} = (2)(-30) = -60$ m
El signo negativo significa que el móvil se desplaza en sentido opuesto.
g. Posición de la partícula en el instante $t = 6$ s:
$x_f = x_0 + d_1 + d_2 + d_3$
$x_f = 5 + 20 + 40 + (-60) = 5$ m significa que el móvil regresa a su posición inicial.

Movimiento rectilíneo

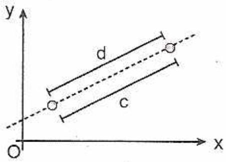
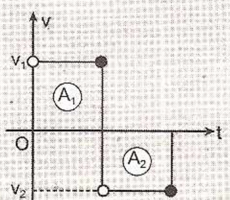


Fig. 3.9

"Si la partícula se mueve en línea recta y en el mismo sentido, entonces el recorrido y la distancia tienen el mismo valor".

$$e = d$$

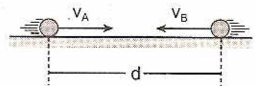
Recorrido (e):
El recorrido es igual a la suma del valor absoluto de las áreas, en el diagrama v-t.
$e = |A_1| + |A_2|$



FÓRMULAS ADICIONALES

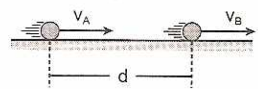
1. **Tiempo de encuentro.** Si dos móviles inician su movimiento simultáneamente en sentidos opuestos se cumple que:

$$\boxed{t_e = \frac{d}{v_a + v_b}}$$



2. **Tiempo de alcance.** Si dos móviles inician su movimiento simultáneamente en el mismo sentido se cumple que:

$$\boxed{t_a = \frac{d}{v_a - v_b}; \quad v_A > v_B}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si un móvil se mueve con una velocidad constante de 5 m/s y en el instante t = 3 s se halla en la posición x = 25 m, hallar su posición inicial (t = 0).

Resolución:

La posición de una partícula en el MRU está definida del siguiente modo: $x_f = x_0 + vt$
Para: t = 3 s
$25 = x_0 + 5(3) \Rightarrow x_0 = 10$ m
x_0: posición inicial (t = 0)

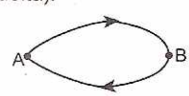
2. Un auto viaja desde una ciudad A hasta otra ciudad B distante 2 km empleando 50 s. En uno de los viajes (de A hacia B) después de 20 s de haber iniciado su movimiento sufre un desperfecto que lo obliga a detenerse 15 s. ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad con que debe continuar el viaje para que llegue a B sin ningún retraso?

Resolución:

Cálculo de la velocidad normal del móvil:
$v = \frac{e}{t} = \frac{2000}{50} = 40$ m/s
Espacio recorrido en 20 s:
$e = vt = (40)(20)$
$\Rightarrow e = 800$ m
La distancia que le falta recorrer (1200 m) lo tendrá que hacer en t = 15 segundos, para llegar a B sin retraso: $U = \frac{d}{t} = \frac{1200}{15} \Rightarrow U = 80$ m/s

El auto continúa su viaje con una velocidad de 80 m/s, duplicando su velocidad normal.

3. Un automóvil va de Lima a La Oroya (200 km de separación) en cuatro horas y el regreso lo hace en dos horas. Hallar la velocidad media del recorrido total (ida y vuelta).



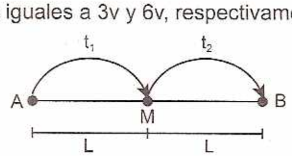
Resolución:

La velocidad media se define como la relación del desplazamiento entre el tiempo empleado.

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{t}$$

Si el móvil regresa a su posición inicial, su desplazamiento es nulo. Por consiguiente en este caso la velocidad media del automóvil es igual a cero. $v_m = 0$

4. En una carrera de regularidad se quiere saber la velocidad media que se tuvo al recorrer una distancia de 50 km. El camino se dividió en dos tramos iguales, recorriendo cada tramo con velocidades medias iguales a 3v y 6v, respectivamente.



Resolución:

Los tiempos empleados en cada tramo serán iguales a:

$t_1 = \dfrac{L}{3v} \wedge t_2 = \dfrac{L}{6v}$ ...(1)

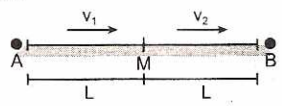
La velocidad media entre A y B será:

$v_m = \dfrac{L + L}{t_1 + t_2}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) se obtiene: $v_m = 4v$

5. Un automóvil se dirige de una ciudad A a otra ciudad B, la mitad de su camino recorre con una velocidad de 30 km/h y la otra mitad a 70 km/h, en línea recta. Determinar la velocidad media del móvil entre A y B.

Resolución:



$$v_m = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{L + L}{t_1 + t_2} = \frac{2L}{\dfrac{L}{v_1} + \dfrac{L}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$$

Reemplazando: $v_m = \dfrac{2(30)(70)}{100}$

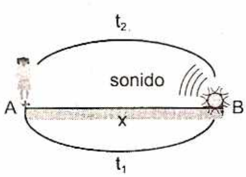
$\therefore\ v_m = 42$ km/h

6. Mónica baja de un microbús y se queda parada mientras el bus se aleja con rapidez constante de 17 m/s. Si a los 21 s, de estar parada, escucha que una llanta del bus revienta, ¿a qué distancia de Mónica reventó la llanta? ($v_{sonido} = 340$ m/s)

Resolución:

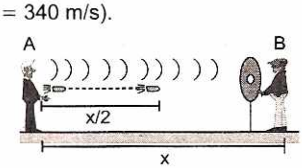
$t_1 + t_2 = 21 \Rightarrow \dfrac{x}{17} + \dfrac{x}{340} = 21 \Rightarrow \dfrac{21x}{340} = 21$

$\therefore\ x = 340$ m



7. Dos personas A y B están separadas una distancia x. En cierto instante la persona A dispara una bala con una velocidad de 170 m/s (horizontalmente) en dirección del blanco que se encuentra junto a la persona B. Sabiendo que B escucha el disparo y 3 s después percibe el impacto con el blanco, determinar x.

($v_{sonido} = 340$ m/s).



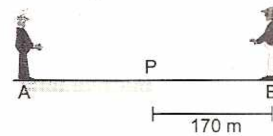
Resolución:

La velocidad del proyectil es la mitad de la velocidad del sonido, por consiguiente cuando el sonido llega a B el proyectil habrá recorrido (x/2), entonces en 3 s recorre la otra mitad.

$e = vt \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 170(3) \quad \therefore\ x = 1020$ m

8. En P ocurre una explosión y el sonido es percibido por A en 0,2 s antes que B. Determinar la distancia de separación entre A y B.

($v_{sonido} = 340$ m/s).



Resolución:

$t_{PB} = \dfrac{d}{v} = \dfrac{170}{340} = 0{,}5$ s

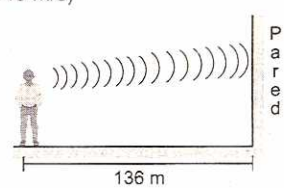
$t_{AP} = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$ s

$d_{AP} = vt = (340)(0{,}3) = 102$ m

$\therefore\ x = AP + PB = 102 + 170 = 272$ m

9. Un niño situado a 136 m de una pared emite un sonido hacia ella. ¿Qué tiempo después escucha el eco?

($v_{sonido} = 340$ m/s)



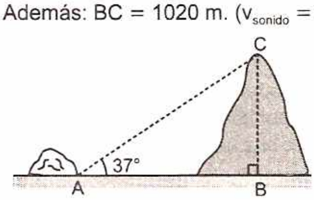
Resolución:

El sonido demora en llegar a la pared un tiempo t/2 y en regresar el mismo tiempo, recorriendo un espacio total de 272 m.

$e = vt \Rightarrow 272 = 340t \quad \therefore\ t = 0{,}8$ s

Se entiende por eco a la percepción del mismo sonido por segunda vez.

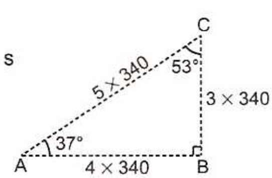
10. Tres amigos se ubican en dos montañas, tal como indica la figura, A ejecuta un disparo; hallar la diferencia de tiempos en que B y C escucharon el disparo. Además: BC = 1020 m. ($v_{sonido} = 340$ m/s)



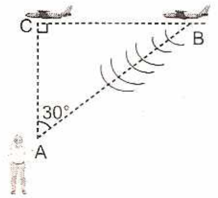
Resolución:

$\Rightarrow t_{AC} = 5$ s $\wedge$ $t_{AB} = 4$ s

$\therefore\ \Delta t = 1$ s



11. Un avión se dirige de B hacia C, el ruido del motor emitido en B, alcanza al observador en A en el instante en que el avión llega a C. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s, determinar la velocidad del avión.

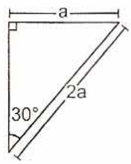


Resolución:

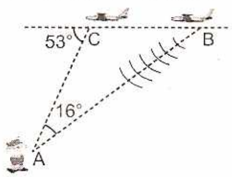
Del gráfico podemos afirmar que el desplazamiento del avión es la mitad del desplazamiento del sonido en un mismo intervalo de tiempo, por consiguiente la velocidad del avión es la mitad de la velocidad del sonido.

$v_{avión} = \frac{1}{2} v_{sonido}$

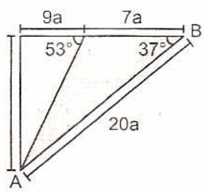
$\therefore\ v_{avión} = 170$ m/s



12. Un avión se dirige de B hacia C, el ruido del motor emitido en B, alcanza al observador en A en el instante en que el avión llega a la posición C. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s, determinar la velocidad del avión.



Resolución:



De la geometría elemental podemos establecer una proporción entre los lados del △ABC.

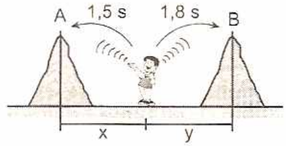
El tiempo empleado por el avión y el sonido son iguales:

$t = \frac{e_{avión}}{v_{avión}} = \frac{e_s}{v_s} \Rightarrow \frac{7a}{v} = \frac{20a}{340}$

$\therefore\ v_{avión} = 119$ m/s

13. Una persona ubicada entre dos montañas, emite un grito y percibe el primer eco a los 3 s y el siguiente a los 3,6 s correspondiente a la otra montaña. Determinar la distancia de separación entre las montañas.

($v_{sonido} = 340$ m/s)



Resolución:

El sonido demora en llegar a la montaña A en 1,5 s y a la montaña B en 1,8 s.

d = vt

Montaña A: $x = (340)(1,5) \Rightarrow x = 510$ m

Montaña B: $y = (340)(1,8) \Rightarrow y = 612$ m

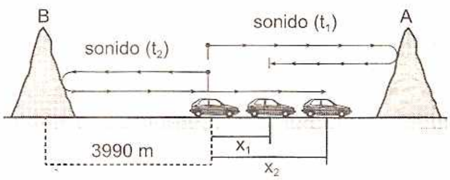
Luego: $x + y = 1122$ m

14. La distancia de separación entre dos montañas es 7980 m, un automóvil que se mueve con velocidad constante de 17 m/s por una carretera rectilínea que une las montañas toca la bocina justo en el instante que pasa por el punto medio entre las montañas. Hallar la distancia recorrida por el automóvil en el intervalo de tiempo comprendido entre la percepción del primer y segundo eco provocado por las montañas. Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s.

Resolución:

El eco provocado por la montaña A se percibe luego de un tiempo t_1, en el mismo tiempo el móvil se desplaza una distancia x_1. Igualando los tiempos tenemos:

$t_1 = \frac{e}{v} = \frac{7980 - x_1}{340} = \frac{x_1}{17}$



Resolviendo: $x_1 = 380$ m

El eco provocado por la montaña B se percibe luego de un tiempo t_2, en el mismo tiempo el auto se desplaza una distancia x_2. Igualando los tiempos tenemos:

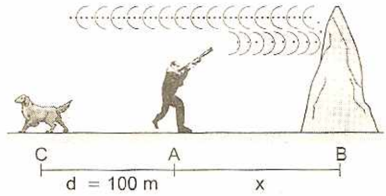
$t_2 = \frac{e}{v} = \frac{7980 + x_2}{340} = \frac{x_2}{17}$

Resolviendo: $x_2 = 420$ m

Luego, el automóvil recorre 40 m en el intervalo de tiempo t_1 y t_2.

$x = x_2 - x_1 \quad \therefore\ x = 40$ m

15. Un cazador y su perro se encuentran frente a una gran montaña, de pronto el cazador ejecuta un disparo y el perro parte del reposo en sentido contrario a la dirección de la montaña, acelerando a razón de 8 m/s^2. Si 5 s después el eco alcanza al perro, hallar la distancia que separaba al cazador de la montaña al momento del disparo. ($v_{sonido} = 340$ m/s)



Resolución:

Tiempo = 5 s

Desplazamiento del perro (MRUV): $d = vt + at^2/2$

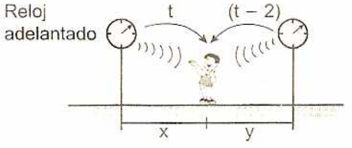
$d = 0 + (8)(5)^2/2 = 100$

El sonido recorre: $e = vt$

$x + x + 100 = 340(5) \Rightarrow 2x + 100 = 1700$

$\Rightarrow 2x = 1600 \quad \therefore\ x = 800$ m

16. Dos relojes electrónicos están separados 1020 m, cuando dan la hora una de ellos se adelanta 2 s. ¿A qué distancia del reloj adelantado una persona oirá a los dos relojes dar la hora al mismo instante? ($v_{sonido} = 340$ m/s)



Resolución:

De la figura: $x + y = 1020$ m ... (1)

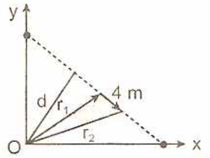
$d = vt$

En (1): $340t + 340(t - 2) = 1020$

Resolviendo: $t = 2{,}5$ s

Luego: $x = v_s t = 340(2{,}5) \quad \therefore\ x = 850$ m

17. Una partícula se mueve con MRU en un plano x e y, con velocidad igual a 4 m/s. Sabiendo que el vector posición describe un área de 12 m^2 en cada segundo, determinar la distancia mínima que se acerca al origen de coordenadas.



Resolución:

Ley de Kepler: el móvil recorre áreas iguales en tiempos iguales, respecto del origen de coordenadas.

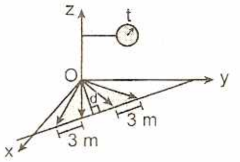
La partícula recorre 4 m en cada segundo.

El área que describe el vector posición, en cada segundo será:

$A = \frac{1}{2}bh \Rightarrow 12 = \frac{1}{2}(4)d \quad \therefore\ d = 6$ m

d: distancia mínima al origen de coordenadas.

18. Una partícula se mueve con MRU en un plano x e y. Si la rapidez del móvil es $v = 3$ m/s, determinar la distancia mínima que se acerca al origen de coordenadas, sabiendo que el radio vector (vector posición) describe un área de 6 m^2 en cada segundo.



Resolución:

Ley de Kepler: en todo movimiento rectilíneo uniforme, el vector posición describe áreas iguales en tiempos iguales.

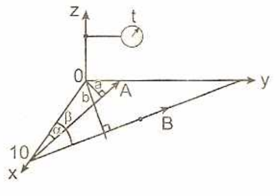
El espacio recorrido, en cada segundo, es 3 m. Por consiguiente la base del triángulo es 3 m en cada segundo:

$A = \frac{1}{2}bh \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}(3)(d) \quad \therefore\ d = 4$ m

19. Dos partículas A y B se mueven con MRU, en un plano x e y, iniciando su movimiento en un mismo punto: $x = 10$ m, con velocidades de 4 m/s y 3 m/s, respectivamente. El vector posición de cada partícula describe un área de 12 m^2, en cada segundo, respecto del origen de coordenadas. Determinar el ángulo que forman las trayectorias de A y B.

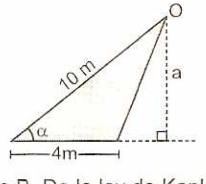
Resolución:

Analizando la partícula A. De la ley de Kepler para el MRU. La base del triángulo es igual a 4 m, en cada segundo:



$\text{Área} = \frac{Bh}{2} \Rightarrow 12 = \frac{4a}{2} \Rightarrow a = 6$ m

Identificando en el triángulo: $\alpha = 37°$

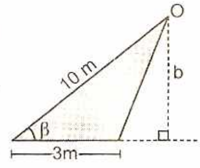


Analizando la partícula B. De la ley de Kepler para el MRU, la base del triángulo es igual a 3 m, en cada segundo:

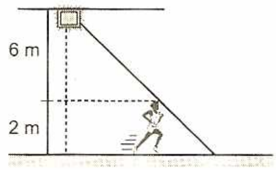
$A = \frac{Bh}{2} \Rightarrow 12 = \frac{3b}{2} \Rightarrow b = 8$ m

Identificando en el triángulo: $\beta = 53°$

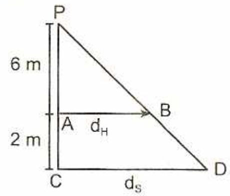
El ángulo que forman las trayectorias es 16°.



20. En un coliseo se encuentra un atleta que experimenta un MRU con velocidad de $6\hat{i}$ m/s pasando por debajo de un foco que se encuentra en el techo. Determine con qué rapidez se desplaza la sombra del atleta proyectada sobre el piso.



Resolución:

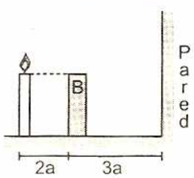


Semejanza de triángulos: $\triangle PAB \sim \triangle PCD$

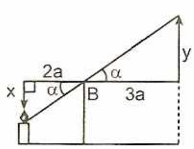
$$\frac{d_h}{6} = \frac{d_s}{8} \Rightarrow \frac{d_h}{6t} = \frac{d_s}{8t} \Rightarrow \frac{V_h}{6} = \frac{V_s}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{6\hat{i}}{6} = \frac{V_s}{8} \qquad \therefore V_{sombra} = 8\hat{i} \text{ m/s}$$

21. La vela se consume uniformemente a la velocidad de 0,8 cm/s. ¿Con qué velocidad se desplaza el extremo de la sombra que se proyecta en la pared vertical debido al obstáculo B?



Resolución:



Analizando el desplazamiento del extremo de la vela y el extremo de la sombra que se proyecta en la pared, donde x, desplazamiento de la vela, y, desplazamiento de la sombra.

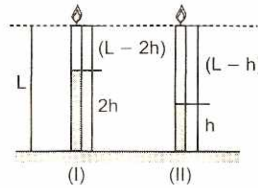
De la semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{x}{2a} = \frac{y}{3a} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

Pero: $v = \frac{e}{t} \Rightarrow \frac{y}{t} = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow v = \frac{3}{2}(0{,}8)$

La velocidad del extremo de la sombra es: $v = 1{,}2$ cm/s

22. Se tienen dos velas (I) y (II) de tamaños iguales, las cuales tienen una duración de $t_1 = 4$ h y $t_2 = 3$ h, emitiendo energía luminosa. Si las velas empiezan a emitir luz al mismo instante, ¿después de cuánto tiempo el tamaño de una de ellas será el doble de la otra?



Resolución:

Consideremos las velas de longitud L.

Velocidad de consumo de las velas:

$$v_1 = \frac{L}{t_1} = \frac{L}{4} \qquad \ldots (1)$$

$$v_2 = \frac{L}{t_2} = \frac{L}{3} \qquad \ldots (2)$$

Después de un tiempo t, consideremos las alturas de las velas 2h y h.

Vela (I): $e = vt \Rightarrow (L - 2h) = \frac{L}{4}t \qquad \ldots(3)$

Vela (II): $e = vt \Rightarrow (L - h) = \frac{L}{3}t \qquad \ldots(4)$

Dividiendo (3) ÷ (4): $\frac{L - 2h}{(L - h)} = \frac{3}{4}$

Resolviendo: $h = \frac{L}{5}$

Reemplazando en (4): $t = 2{,}4$ h

23. Determinar la gráfica, posición versus tiempo, de una partícula que se mueve en el eje x, con velocidad constante $v = 1$ m/s. Inicia su movimiento en la posición $x_0 = -2$ m.

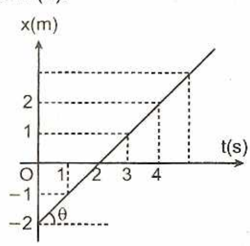
Resolución:

La posición de una partícula en el tiempo, que se mueve con la velocidad constante, está definida del siguiente modo:

$x_f = x_0 + vt \Rightarrow x_f = -2 + t \Rightarrow x_f = t - 2 \qquad \ldots(1)$

Graficando la función (1):

t	x
0	−2
1	−1
2	0
3	1
4	2
5	3



La pendiente de la recta es igual a la velocidad de la partícula. $v = \tan\theta$

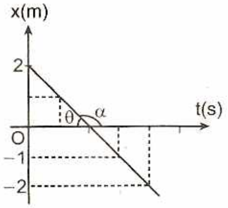
24. Determinar la gráfica, posición versus tiempo, de una partícula que se mueve en el eje x, con velocidad constante $v_x = -1$ m/s (en el sentido negativo del eje x). Inicia su movimiento en la posición $x_0 = 2$ m.

Resolución:

La posición de una partícula en el tiempo, que se mueve con velocidad constante, está definida del siguiente modo: $x_f = x_0 + vt$

$x_f = 2 + (-1)t \Rightarrow x_f = 2 - t$ ... (1)

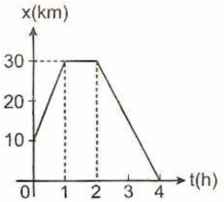
Graficando la función (1):



t	x
0	2
1	1
2	0
3	-1
4	-2
5	-3

La pendiente de la recta es igual a la velocidad de la partícula. $v = \tan\alpha = -\tan\theta$

25. El gráfico mostrado representa la posición de un automóvil en el tiempo.

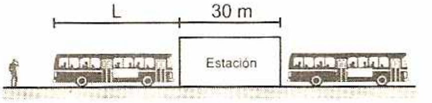


a) ¿Cuál era la posición del auto al principio del movimiento (t = 0)?
b) ¿Cuál era la posición en el instante t = 1 h?
c) ¿Qué velocidad desarrolló en esta primera hora de viaje?
d) ¿En qué posición y por cuánto tiempo permaneció parado?
e) ¿Cuál es su posición a las 4 h de viaje?
f) ¿Cuál es su velocidad en el viaje de regreso?

Resolución:

a) Al principio del movimiento el auto se encuentra en el kilómetro 10.
b) El auto avanza y después de una hora se encuentra en el kilómetro 30.
c) La pendiente de la recta que corresponde a la primera hora de viaje nos dará la velocidad:
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 - 10}{1 - 0} \Rightarrow v = 20 \text{ km/h}$$
d) Permaneció detenido en el kilómetro 30, durante una hora.
e) A las 4 horas de viaje el auto se encuentre en el origen (x = 0).
f) El automóvil llegó hasta la posición x = 30 km y a partir de esta posición el auto comenzó a regresar, la pendiente de la recta que corresponde al intervalo de tiempo <2 h; 4 h> nos dará la velocidad:
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 30}{4 - 2} \Rightarrow v = -15 \text{ km/h}$$
El signo (–) indica que el auto está de regreso.

26. Determinar la longitud de un ómnibus, sabiendo que tarda 4 s en pasar delante de un observador y 10 s por delante de una estación de 30 m de largo.



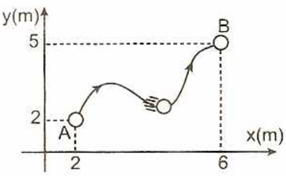
Resolución:

Cada punto del ómnibus experimenta un desplazamiento de (L + 30) para que el ómnibus atraviese completamente la estación.

El ómnibus se mueve con velocidad constante, por consiguiente: $v = \frac{L}{4} = \frac{L + 30}{10}$

Resolviendo: L = 20 m

27. Una mosca sigue la trayectoria mostrada, desde A hasta B. Determinar el desplazamiento y la distancia entre A y B (en m).



Resolución:

Desplazamiento:

$\vec{d}_{AB} = B - A = (6; 5) - (2; 2) = (4; 3) = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

La distancia es el módulo del desplazamiento (vector):

$d_{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m

28. Dos móviles A y B se encuentran separados inicialmente 120 m, salen simultáneamente al encuentro con rapidez de 20 m/s y 10 m/s, respectivamente. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse en un mismo punto?

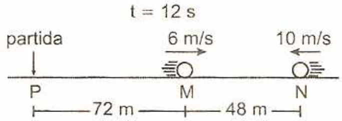
Resolución:

Los móviles A y B van al encuentro sobre una misma trayectoria. La distancia de separación inicial es 120 metros. Aplicamos la regla práctica.
$$t_{encuentro} = \frac{d}{v_A + v_B} = t_{encuentro} = \frac{120}{20 + 10} = 4 \text{ s}$$

29. Dos móviles A y B participan de una competencia de ida y vuelta, en una pista de 120 m de largo. Si parten simultáneamente con rapideces de 6 m/s y 10 m/s, respectivamente, ¿después de cuánto tiempo vuelven a encontrarse?

Resolución:

En 12 segundos el móvil B (de mayor rapidez) llega al extremo recorriendo 120 m y el otro (A) recorre 72 m en el mismo intervalo de tiempo. Después, el tiempo de encuentro es 3 segundos.



Cálculo del tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{d}{v_A + v_B} = \frac{48}{6+10} = 3\ \text{s}$$

El tiempo total transcurrido es: $12 + 3 = 15$ s

30. Un camión de 40 m de largo, marcha a 72 km/h por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en cruzarse íntegramente con un tren de 260 metros de largo que marcha a 36 km/h en dirección opuesta?

Resolución:

Transformando tenemos que el camión de 40 m tiene rapidez de 20 m/s y el tren de 260 m de largo con rapidez de 10 m/s. El tiempo que demora en cruzarse el camión con el tren es:

$$t = \frac{L_{camión} + L_{tren}}{v_{camión} - v_{tren}}$$

Reemplazando tenemos:

$$t = \frac{40+260}{20+10} = \frac{300}{30} = 10\ \text{s}$$

31. Dos autos que parten simultáneamente de una ciudad A en dirección a la ciudad B, con rapidez de 50 km/h y 60 km/h. Si llegan a la ciudad B con un intervalo de 20 minutos, ¿cuál es la distancia entre las ciudades A y B?

Resolución:

La distancia que recorren ambos móviles son iguales, entonces la velocidad y el tiempo empleado son inversamente proporcionales.

$d_1 = d_2 \Rightarrow v_1t_1 = v_2t_2$

Sabemos que 20 minutos es un tercio de hora.

Reemplazando tenemos que:

$$50t = 60\left(t - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow t = 2\ \text{horas}$$

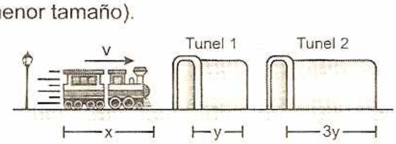
La distancia entre A y B es:

$d_{AB} = 50$ km/h(2 h) $= 100$ km

32. Un tren con MRU pasa por delante de un poste en 10 s y atraviesa íntegramente un túnel en 15 s. ¿En cuánto tiempo (en segundos) el tren cruzará otro túnel si el tamaño de este fuera el triple del primer túnel?

Resolución:

La velocidad del tren es constante. Consideramos x el largo del tren, e y el largo del primer túnel (de menor tamaño).



Cuando el tren pasa frente al poste recorre su propio tamaño en 10 segundos.

$$v = \frac{x}{10} = \frac{x+y}{15}$$

Resolviendo tenemos que: $x = 2y$ ...(1)

Cuando el tren atraviesa el segundo túnel:

$$v = \frac{x}{10} = \frac{x+3y}{t} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{2y}{10} = \frac{2y+3y}{t} \Rightarrow \frac{2y}{10} = \frac{5y}{t} \quad \therefore t = 25\ \text{s}$$

33. Una persona sale del punto A en auto a una velocidad de 12 km/h, llega al punto B y desea regresar caminando a 4 km/h (siguiendo el mismo camino). Si todo el recorrido duró 6 h, ¿durante cuánto tiempo estuvo caminando?

Resolución:

El espacio recorrido es el mismo: $e = v_1t_1 = v_2t_2$

$(12)t_1 = (4)t_2 \Rightarrow t_2 = 3t_1$ ... (1)

Pero: $t_1 + t_2 = 6$ h ... (2)

Resolviendo (1) y (2): $t_1 = 1{,}5$ h $\Rightarrow t_2 = 4{,}5$ h

Por lo tanto, estuvo caminando durante 4,5 h.

34. Una persona debe llegar a un determinado lugar a las 12 m y observa que caminando a razón de 3 km/h llega 5 h después y caminando a razón de 6 km/h llega 5 h antes. ¿Con qué velocidad debe caminar para llegar a las 12 m?

Resolución:

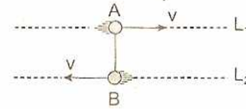
$d = vt \Rightarrow L = v_1t_1 = v_2t_2$

$L = 3(t+5) = 6(t-5) \Rightarrow t = 15$ h ... (1)

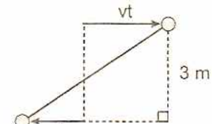
Reemplazando en (1):

$$L = 60\ \text{km} \Rightarrow v = \frac{L}{t} = \frac{60}{15} \quad \therefore v = 4\ \text{km/h}$$

35. Dos móviles A y B se mueven en sentidos contrarios sobre rectas paralelas L_1 y L_2, separados entre sí una distancia de 3 m. Si después de 1,5 s del instante que muestra la figura, la distancia de separación entre los móviles es de $3\sqrt{2}$ m, determinar después de qué intervalo de tiempo la distancia de separación es de 5 m. Cada uno de los móviles se mueve con la misma rapidez.



Resolución:



De la figura deducimos:

$2vt = 3$

Pero: $t = 1{,}5$ s

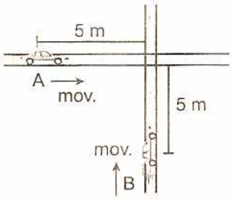
$\Rightarrow v = 1$ m/s

La distancia de separación será 5 m cuando la suma de sus recorridos sea igual a 4 m.

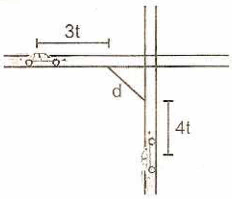
$\Rightarrow 2vt_1 = 4$

Pero: $v = 1$ m/s $\quad \therefore t_1 = 2$ s

36. Dos móviles A y B, desde las posiciones mostradas en la figura, se mueven con velocidades constantes de 3 m/s y 4 m/s a través de dos carreteras que se cruzan formando un ángulo recto. Hallar la mínima distancia que se encontrarán los móviles A y B durante su movimiento.

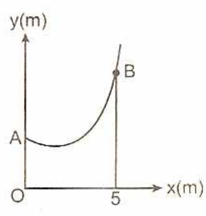


Resolución:



Consideremos una distancia mínima "d" en forma arbitraria.
En el triángulo rectángulo mostrado aplicamos el teorema de Pitágoras:
$d^2 = (5 - 3t)^2 + (5 - 4t)^2$
Completando cuadrados convenientemente:
$d^2 = 25 - 30t + 9t^2 + 25 - 40t + 16t^2$
$d^2 = 25t^2 - 70t + 50$
$d^2 = (5t - 7)^2 + 1$
Analizando la última relación, el valor mínimo de un número real elevado al cuadrado es igual a cero. Por consiguiente d será mínimo cuando: $5t - 7 = 0$
Luego, la distancia mínima en que se encontrarán los móviles A y B es d = 1 m, en el instante t = 1,4 s.

37. Determinar la velocidad media (en m/s) de la partícula, entre los puntos A y B, sabiendo que demora en recorrer la trayectoria curva un intervalo de 5 s. La trayectoria se define del siguiente modo:
$y = x^2 + 1$



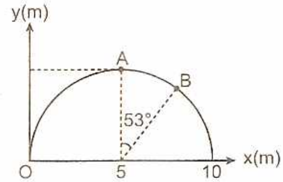
Resolución:
Cálculo del desplazamiento entre A y B: $\vec{r}_A = 0\,\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{r}_B = 5\,\hat{i} + 26\,\hat{j} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 5\,\hat{i} + 25\,\hat{j}$

Cálculo de la v_m: $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{d}}{\Delta t} = \dfrac{5\,\hat{i} + 25\,\hat{j}}{5}$

$\therefore\ \vec{v}_m = \hat{i} + 5\,\hat{j}$

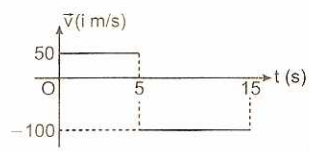
38. Determinar la velocidad media (en m/s) de la partícula, entre A y B, sabiendo que demora en recorrer el arco AB un intervalo de 2 s.



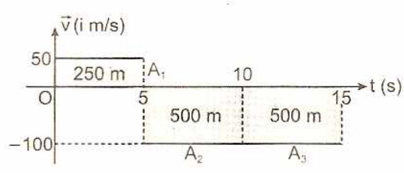
Resolución:
Cálculo del desplazamiento entre A y B:
$\vec{r}_A = 5\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$
$\vec{r}_B = 9\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$
$d = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j}$
Cálculo de la velocidad media:
$\vec{v}_m = \dfrac{\vec{d}}{t} = \dfrac{4\,\hat{i} - 2\,\hat{j}}{2} \qquad \therefore\ \vec{v}_m = 2\,\hat{i} - \hat{j}$

39. Un móvil se desplaza a lo largo del eje x, si su velocidad varia con el tiempo de acuerdo a la gráfica que se muestra. Indicar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones

I. El desplazamiento durante los primeros 10 s es $\vec{x} = -250\,\hat{i}$ m
II. La velocidad media durante los primeros 10 s es $\vec{v}_m = 25\,\hat{i}$ m/s
III. El recorrido total durante los primeros 15 s es 1250 m.

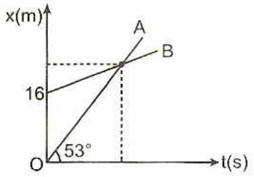


Resolución:



- Proposición I:
  Desplazamiento en los primeros 10 segundos:
  $\vec{d} = 250\,\hat{i} - 500\,\hat{i} = -250\,\hat{i}$ m
- Proposición II:
  Velocidad media en los primeros 10 segundos:
  $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{d}}{\Delta t} = \dfrac{-250}{10} = -25\,\hat{i}$ m/s
- Proposición III:
  Recorrido total durante los primeros 15 segundos:
  $e = |A_1| + |A_2| + |A_3|$
  $e = |250| + |-500| + |-500|$
  $e = 1250$ m

40. Dos autos A y B se desplazan de acuerdo a la gráfica x-t que se muestra en la figura. Determinar cuál será el tiempo de encuentro de los autos, si se cumple la siguiente relación de sus velocidades: $v_B = 0{,}6v_A$



Resolución:

Por dato: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{5}{3}$

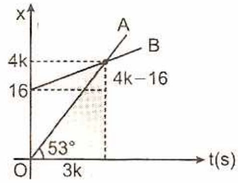
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{4k}{3k}}{\frac{4k-16}{3k}} = \frac{4k}{4k-16}$$

Por dato: $\frac{5}{3} = \frac{4k}{4k-16}$

$\Rightarrow k = 10$

Los móviles se encuentran en el instante: $t = 3k$

Reemplazando $k = 10 \therefore t = 30$ s

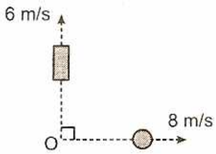


PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Del bus baja un pasajero y se queda quieto mientras el bus se aleja con una rapidez constante de 10 m/s. Si a los 35 s adicionales el pasajero quieto escucha que una llanta del bus revienta, ¿a qué distancia del pasajero reventó la llanta?

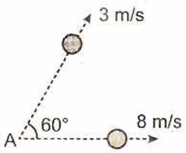
A) 120 m B) 240 m C) 340 m
D) 420 m E) 180 m

2. Los móviles parten iguales desde el punto O en direcciones como muestra la figura. Calcular que distancia estarán separados después de 10 segundos de la partida.



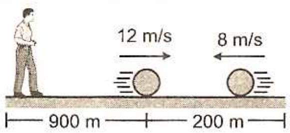
A) 100 m B) 10 m C) 20 m
D) 200 m E) 140 m

3. Calcular después de que tiempos los móviles estarán separados 70 m, si parten iguales de A con velocidades constantes.



A) 10 s B) 40 s C) 50 s D) 70 s E) 110 s

4. ¿Al cabo de qué tiempo el muchacho escucha el impacto de los móviles A y B? La rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s.

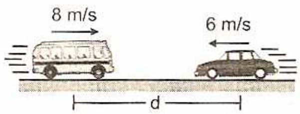


A) 20 s B) 10 s C) 23 s D) 35 s E) 13 s

5. Una persona dispone de 4 horas para dar un paseo con MRU. ¿Hasta qué distancia podrá alejarse a 122 km/h, sabiendo que debe de regresar a 6 km/h?

A) 16 km B) 8 km C) 4 km
D) 32 km E) 48 km

6. Dos vehículos se acercan con velocidades opuestas tal como se indica en la figura. Si para un instante dado d = 500 m, ¿En cuánto tiempo más estarán separados en 200 m por segunda vez?



A) 20 s B) 30 s C) 40 s D) 50 s E) 60 s

7. Un tren de 100 m de longitud cruza un túnel de 200 m en 15 segundos. Calcular en qué tiempo cruzará otro túnel de 300 m, si su velocidad se reduce a la mitad.

A) 40 s B) 20 s C) 80 s D) 10 s E) 30 s

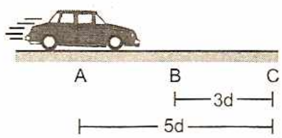
8. Un móvil, partiendo desde cierto lugar, recorre 60 m hacia el Oeste y luego 80 m hacia el Norte. Determinar el módulo de su desplazamiento.

A) 20 m B) 40 m C) 50 m
D) 100 m E) 140 m

9. Una persona posee una velocidad constante de 5 m/s. ¿Cuántas cuadras recorrerá en 1 minuto? (1 cuadra = 100 m)

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

10. Un automóvil con MRU, tarda 20 minutos para ir de A hacia B. Determine cuánto tiempo emplea para ir desde B hasta C.



A) 25 min B) 30 min C) 35 min
D) 40 min E) 45 min

11. ¿Cuánto tiempo demora un tren de 40 m de longitud que viaja a una velocidad de 72 km/h en pasar por un túnel de 80 m de largo?

A) 36 s B) 42 s C) 18 s
D) 24 s E) 50 s

12. ¿Cuánto tiempo tardará un pájaro que vuela a 30 m/s en línea recta, en cruzarse con un tren de 400 m de longitud que viaja a 20 m/s en dirección contraria?

A) 12 s B) 8 s C) 10 s
D) 4 s E) 6 s

13. Un estudiante avanza primero en la dirección Norte 15 m, seguidamente en la dirección Oeste 30 m y finalmente recorre 25 m en la dirección Norte. Determine el módulo del desplazamiento y la distancia recorrida en ese intervalo.

A) 40 m; 40 m B) 30 m; 40 m C) 30 m; 50 m
D) 50 m; 70 m E) 40 m; 50 m

14. Un automóvil se dirige de una ciudad A a otro B. La mitad del camino lo recorre con una rapidez de 30 km/h y la otra mitad a 70 km/h en línea recta. Determinar el módulo de la velocidad media del automóvil entre A y B.

A) 30 km/h B) 42 km/h C) 21 km/h
D) 70 km/h E) 210 km/h

15. Un auto recorre rectilíneamente la primera mitad del camino con una rapidez de 60 km/h y la segunda mitad en una dirección perpendicular a la primera con una rapidez de 120 km/h. Determinar el módulo de la velocidad media y la rapidez promedio (en km/h).

A) $40\sqrt{2}$; 80 B) $20\sqrt{2}$; 40
C) 60; 60 D) 50; 80
E) $10\sqrt{2}$; 20

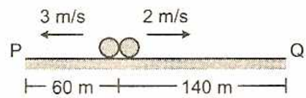
16. Dos móviles parten simultáneamente uno al encuentro del otro con velocidades constantes de 5 y 15 m/s. Si del punto de encuentro se observa que uno de ellos ha recorrido 60 m más que el otro, calcular la separación inicial de los móviles.

A) 60 m B) 90 m C) 120 m
D) 150 m E) 160 m

17. Un joven corre de un poste a otro con una rapidez de 4 m/s, pero si aumenta su rapidez en 2 m/s se demoraría 2 s menos que en el caso anterior. Determine la distancia entre postes. (Considere MRU para los dos casos).

A) 8 m B) 12 m C) 18 m
D) 24 m E) 32 m

18. Dos móviles parten de un mismo punto en direcciones opuestas, dirigiéndose respectivamente a P y a Q. Luego de llegar a su destino emprenden el retorno. ¿A qué distancia de Q se vuelven a encontrar?

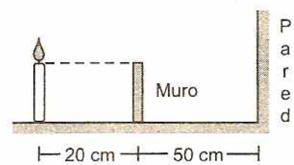


A) 20 m B) 30 m C) 15 m D) 10 m E) 25 m

19. Dos autos parten de dos puntos A y B distantes 1200 m con velocidades de 50 m/s y 60 m/s respectivamente, uno al encuentro del otro. El segundo parte 2 s después que el primero. ¿Qué distancia los separa cuando el segundo llegue al punto A?

A) 800 m B) 900 m C) 1000 m
D) 1100 m E) 1200 m

20. Si en el instante mostrado se enciende la vela. ¿Qué rapidez posee el extremo de la sombra en la pared si la vela se consume a razón constante de 2 cm/s?



A) 2 cm/s B) 3 cm/s C) 4 cm/s
D) 5 cm/s E) 6 cm/s

21. Un tren de 100 m demora 10 s en pasar a una persona que se mueve en su misma dirección con 2 m/s, y en pasar a un túnel 40 s. Determinar la longitud del túnel.

A) 100 m B) 200 m C) 280 m
D) 380 m E) 400 m

22. Dos móviles situados en una misma línea recta separadas 1,5 km parten simultáneamente con velocidades constantes de 42 m/s y 28 m/s alejándose cada vez más, al cabo de qué tiempo estarán separados 5 km.

A) 20 s B) 50 s C) 100 s D) 80 s E) 60 s

23. Un ciclista se desplaza con una rapidez constante de 4 m/s; de pronto observa un bache en su camino y gira 74° su timón. Si la maniobra duró 0,4 s, ¿qué aceleración media experimentó el ciclista si mantuvo constante su rapidez en el giro?

A) 4,8 m/s^2 B) 8,6 m/s^2 C) 10 m/s^2
D) −8 m/s^2 E) 12 m/s^2

24. Un auto se desplaza con una velocidad constante v durante 4 s, recorriendo una determinada distan-

cia. Luego aumenta su velocidad en 4 m/s; recorriendo la misma distancia en 3,5 s. Hallar v, en m/s.

A) 28 m/s B) 14 m/s C) 7 m/s
D) 20 m/s E) 21 m/s

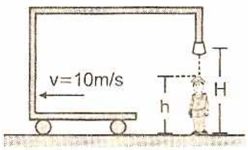
25. Una persona sale todos los días de su casa a la misma hora y llega a su trabajo a las 09:00 h. Un día se traslada al doble de su velocidad acostumbrada y llega a su trabajo a las 08:00 h. ¿A qué hora sale siempre de su casa?

A) 06:00 h B) 07:00 h C) 08:00 h
D) 05:00 h E) 04:00 h

26. Rocío ha estado viajando durante 4 h. Si hubiera viajado 1 h menos con una velocidad mayor en 5 km/h, habría recorrido 5 km menos, ¿cuál es la velocidad en km/h?

A) 4 km/h B) 5 km/h C) 10 km/h
D) 8 km/h E) 20 km/h

27. Si la plataforma mostrada comienza a moverse con velocidad constante de 10 m/s, estando la persona quieta, ¿con qué velocidad se desplaza la sombra que la persona proyecta en el piso? (H = 3h)



A) 4 m/s B) 6 m/s C) 5 m/s
D) 10 m/s E) 7 m/s

28. Un atleta corre una distancia de 12 km en 10 minutos. Calcular la velocidad que lleva, si el atleta corre a una velocidad constante.

A) 40 m/s B) 25 m/s C) 15 m/s
D) 45 m/s E) 20 m/s

29. Un corredor de autos obtiene con su Toyota una velocidad de 360 km/h durante 6 1/2 minutos. ¿Qué espacio recorrió en ese tiempo?

A) 36 km B) 39 km C) 30 km
D) 72 km E) 50 km

30. Una mosca vuela en línea recta 200 m en 1 minuto 30 segundos. Calcular su velocidad.

A) 1,82 m/s B) 0,92 m/s C) 1,3 m/s
D) 2,5 m/s E) 2,22 m/s

31. La velocidad del sonido (constante en el aire) es de 340 m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en oírse el disparo de un cañón ubicado a 1700 m?

A) 10 s B) 12 s C) 5 s
D) 8 s E) 5,5 s

32. Dos móviles viajan en la misma dirección y sentido, con velocidades de 15 y 30 m/s, respectivamente. Si parten del mismo punto y al mismo tiempo, ¿qué distancia los separará en 1 minuto?

A) 150 m B) 7,5 km C) 300 m
D) 450 m E) 900 m

33. Dos automóviles parten a las 4 de la mañana, uno de Lima hacia Tacna y otro de Tacna hacia Lima, estando a una distancia de 1000 km, parten a una misma hora y llegan a los destinos en 16 horas. Calcular a qué hora se encuentra.

A) 14:00 h B) 12:00 h C) 15:00 h
D) 24:00 h E) 10:00 h

34. Una tren de 100 m de largo tiene una velocidad de 20 m/s. Determinar el tiempo que demora en atravesar totalmente un túnel de 1100 m de longitud.

A) 75 s B) 45 s C) 55 s D) 60 s E) 40 s

35. Dos autos separados inicialmente una distancia de 2400 m deciden ir al encuentro, uno del otro, a velocidades de 48 y 24 m/s. Calcular el tiempo en que se encuentran.

A) 33 s B) 66,6 s C) 33,3 s D) 66 s E) 48 s

36. Dos autos separados una distancia d deciden ir al encuentro empleando un $t_e = 1$ s. Luego, separados la misma distancia d y con las mismas velocidades, uno va al alcance del otro empleando un $t_a = 8$ s. Si d = 4 m, calcular las velocidades.

A) $v_1 = 1$ m/s; $v_2 = 3$ m/s
B) $v_1 = 2$ m/s; $v_2 = 3$ m/s
C) $v_1 = 2{,}25$ m/s; $v_2 = 1{,}75$ m/s
D) $v_1 = 2$ m/s; $v_2 = 4$ m/s
E) $v_1 = 1$ m/s; $v_2 = 2$ m/s

37. Dos autos parten del mismo lugar y en la misma dirección a velocidades de 25 m /s y 72 km/h. Calcular el tiempo en que están separados 100 m.

A) 10 s B) 20 s C) 30 s
D) 40 s E) 50 s

38. En las siguientes proposiciones, indicar con una (V) si es verdadera o con una (F) si es falsa:

I. El desplazamiento es una magnitud vectorial.
II. La velocidad media puede ser igual a cero.
III. El valor de la velocidad media y el de la rapidez promedio pueden ser iguales.
IV. El vector desplazamiento es independiente del sistema de referencia.

A) VVVV B) VVVF C) VVFF
D) VFFF E) VFFV

39. Un móvil parte del punto (2; 1) de un sistema de coordenadas y se dirige en línea recta hasta llegar

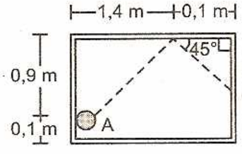
al punto (8; 4) y finalmente al punto (10; 16). Expresar el vector desplazamiento.

A) $10\hat{i} + 16\hat{j}$ B) $10\hat{i} + 15\hat{j}$ C) $8\hat{i} + 16\hat{j}$
D) $8\hat{i} + 15\hat{j}$ E) $15\hat{i} + 8\hat{j}$

40. Un ciclista corre uniformemente por una pista circular de radio 8 m y tarda 12 segundos en dar una vuelta completa. Calcular su rapidez promedio (en m/s) en los primeros 6 segundos.

A) $\pi/3$ B) $\pi/6$ C) $2\pi/3$
D) $4\pi/3$ E) $5\pi/3$

41. Una bola es lanzada desde el punto A de la mesa chocando en B y luego en C, tal como se observa en la figura. Determine el módulo de la velocidad media de la bola, si tardó 5 segundos en ir de A hasta C.



A) 34 m/s B) 17 m/s C) 3,4 m/s
D) 1,7 m/s E) 0,34 m/s

42. Un móvil se desplaza en línea recta. En un determinado instante su posición es $\vec{x} = 9\hat{i}$ m y en 3 segundos cambia su oposición a $\vec{x} = -6\hat{i}$ m. Su velocidad media es:

A) $\vec{v}_M = 1\hat{i}$ m/s B) $\vec{v}_M = -1\hat{i}$ m/s
C) $\vec{v}_M = 3\hat{i}$ m/s D) $\vec{v}_M = 5\hat{i}$ m/s
E) $\vec{v}_M = -5\hat{i}$ m/s

43. Sobre el eje de las abscisas de un sistema de coordenadas, se desplaza una partícula tardando 5 segundos en recorrer 80 cm, luego cambia de dirección y se dirige paralelamente al eje de las ordenadas y recorre 150 cm en 15 segundos. Determine el módulo de su velocidad media.

A) 85 cm/s B) 42,5 cm/s C) 34 cm/s
D) 17 cm/s E) 8,5 cm/s

44. Un móvil se desplaza en línea recta con una velocidad $\vec{v} = -3\hat{i}$ m/s y en 3 segundos cambia su velocidad a $\vec{v} = +6\hat{i}$ m/s. Su aceleración media es:

A) $a = +1\hat{i}$ m/s^2 B) $a = -1\hat{i}$ m/s^2
C) $a = +3\hat{i}$ m/s^2 D) $a = -3\hat{i}$ m/s^2
E) $a = +6\hat{i}$ m/s^2

45. Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ley: $x = 2t^2 + 5t + 1$ m. Calcular la velocidad media en el intervalo de tiempo [1; 3] segundos, si x se expresa en metros.

A) 26 m/s B) 13 m/s C) 6,5 m/s
D) 3,9 m/s E) 2,6 m/s

46. Un coche inicia un viaje de 560 km a las siete y media de la mañana con una velocidad media de 890 km/h. ¿A qué hora llegara a su destino?

A) A las 2 de la tarde
B) A las 2 de la tarde y media
C) A las 5 de la tarde y media
D) A las 5 de la tarde
E) A las 7 de la noche

47. Dos móviles parten simultáneamente al encuentro, uno al otro, con velocidades de 30 y 20 km/h. Calcular la distancia que recorre cada móvil hasta el instante de su encuentro, si inicialmente estaban separados por 80 km.

A) 48 km y 32 km B) 40 km y 40 km
C) 16 km y 64 km D) 42 km y 38 km
E) 62 km y 18 km

48. Un motociclista y un auto parten simultáneamente con velocidades de 12 y 8 m/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo estarán separados por 60 metros sabiendo que partieron de un punto y en sentido contrario?

A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s

49. Una escalera mecánica mide 6 metros y funciona con velocidad constante; Yohana, una estudiante de Física, desea conocer su velocidad. Sabiendo que demora 4 segundos en subir y 12 segundos en bajar, ¿cuál es la velocidad de Yohana?

A) 0,25 m/s B) 0,5 m/s C) 1 m/s
D) 1,5 m/s E) 2 m/s

50. Un pasajero que viaja en un tren de 200 metros a razón de 20 m/s desea calcular la longitud de un puente. Si el tiempo en cruzar dicho puente es 22 segundos, ¿cuánto fue la medida tomada?

A) 440 m B) 400 m C) 340 m
D) 240 m E) 220 m

51. Dos móviles se mueven sobre una línea recta según las ecuaciones:

$$x_A = 2 + 3t \wedge x_B = 12 - 2t$$

donde x se expresa en metros y t en segundos. Determine el instante en que los móviles se encuentran.

A) t = 1 s B) t = 2 s C) t = 3 s
D) t = 4 s E) t = 5 s

52. Dos móviles A y B parten simultáneamente según las ecuaciones:

$$x_A = 4t - a \wedge x_B = 10 + 5t$$

donde x se expresa en metros y t en segundos. ¿Qué distancia separa a los móviles en el instante t = 5 s, sabiendo que en el instante t = 2 s, el móvil A pasa por el origen?

A) 12 m B) 15 m C) 23 m D) 35 m E) 47 m

Dos trenes se cruzan perpendicularmente y hacen un recorrido durante cuatro horas, siendo la distancia que los separa, al cabo de ese tiempo, de 100 km. Si la velocidad de uno de los trenes es de 20 km/h, calcular la velocidad del segundo tren.

A) 15 km/h B) 16 km/h C) 12 km/h
D) 20 km/h E) 25 km/h

53. Dos vehículos cuyas velocidades son 10 y 24 km/h, respectivamente, se cruzan perpendicularmente en su camino. Al cabo de seis horas de recorrido, ¿cuál es la distancia que los separa?

A) 312 km/h B) 156 km/h C) 128 km/h
D) 78 km/h E) 64 km/h

54. Un alumno sale de su casa en bicicleta a las seis de la mañana. Al llegar a un cierto lugar, se le estropea la bicicleta y tiene que volver andando. Calcular a qué distancia ocurrió el percance, sabiendo que las velocidades de desplazamiento han sido de 30 km/h en bicicleta y 6 km/h andando y que llego a su casa a la una de la tarde.

A) 60 km B) 45 km C) 30 km
D) 25 km E) 15 km

55. Dos móviles parten simultáneamente de un mismo punto en la misma dirección y sentido, con velocidad constantes de 27 y 18 km/h. Después de 5 h de recorrido el de mayor velocidad se queda dormido (y se detiene), pero se despierta después de 5 h y continúa su viaje. ¿A qué distancia del punto de partida alcanza al otro?

A) 90 km B) 180 km C) 270 km
D) 360 km E) 405 km

56. Un avión que parte del reposo; recorre una distancia de 1800 m en 12 s antes de despegar con aceleración constante. Determinar la distancia recorrida en el último segundo.

A) 295,5 m/s B) 287,5 km C) 285 m/s
D) 297,5 km E) 300 km

57. Una persona que se desplaza a 6 m/s con MRU en dirección a una montaña, emite un fuerte grito y 3 segundos después se escucha su eco. Hallar a que distancia se encontraba de la montaña. (v_s = 340 m/s)

A) 1002 m B) 602 m C) 519 m
D) 419 m E) 1012 m

58. Una paloma y un tren viajan con MRU en rectas paralelas y en sentidos contrarios. La paloma viaja a 30 m/s y el tren que tiene una longitud de 600 m viaja a 20 m/s. ¿Qué tiempo tardan en cruzarse?

A) 10 s B) 11 s C) 12 s
D) 13 s E) 14 s

59. Dos caballos recorren en rectas paralelas. El caballo A con 72i km/h y el B con 54i km/h. Cuanto tiempo empleará el caballo A en pasar a B si ambos miden 3 m de longitud y corren con MRU.

A) 1 s B) 1,5 s C) 1,2 s
D) 1,6 s E) 2 s

CLAVES

1. C	9. E	17. D	25. B	33. C	41. E	49. C	57. B
2. A	10. B	18. A	26. E	34. D	42. E	50. D	58. C
3. A	11. D	19. D	27. B	35. C	43. E	51. B	59. C
4. E	12. B	20. D	28. E	36. C	44. C	52. C	
5. A	13. D	21. D	29. B	37. B	45. B	53. A	
6. D	14. B	22. B	30. E	38. B	46. B	54. B	
7. A	15. A	23. E	31. C	39. D	47. A	55. C	
8. D	16. C	24. A	32. E	40. D	48. C	56. C	

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

En este tipo de movimiento la velocidad de la partícula cambia en módulo en cada instante, aumentando o disminuyendo progresivamente, con aceleración constante.

Aceleración lineal ($\vec{a}$)

Es aquella magnitud física vectorial que mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad en módulo (MRUV)

$$\boxed{a = \frac{v_f - v_0}{t}}\text{, unidades: } \frac{m}{s^2}; \frac{cm}{s^2} \quad \ldots(3.13)$$

El movimiento puede ser:

Acelerado. Si la velocidad aumenta progresivamente el movimiento se denomina acelerado. La aceleración se representa por un vector que tiene la misma dirección y sentido de la velocidad, en las fórmulas tendrán signos iguales.

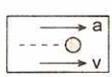
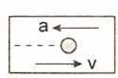


Fig. 3.10

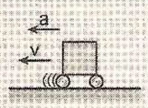


Movimiento acelerado Movimiento retardado

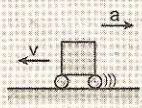
Retardado. Si la velocidad disminuye progresivamente, el movimiento se denomina retardado. La aceleración se representa por un vector que tiene la misma dirección pero sentido opuesto que la velocidad, en las fórmulas tendrán signos opuestos.

Aceleración y velocidad:

I. Movimiento acelerado



II. Movimiento retardado



Posición de una partícula en el MRUV

La posición de una partícula en el eje x, en el instante de tiempo t se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\boxed{x_f = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2} \qquad \ldots(3.14)$$

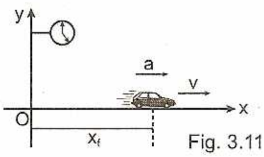


Fig. 3.11

x_0 : posición inicial ($t = 0$)
x_f : posición final
v_0: velocidad inicial ($t = 0$)

Velocidad instantánea ($\vec{v}$)

La velocidad de una partícula en el eje x, en el instante de tiempo t se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\boxed{v_f = v_0 + at} \qquad \ldots(3.15)$$

Fórmulas del MRUV

1. $\boxed{d = v_0t \pm at^2}$
2. $\boxed{v_f = v_0 \pm at}$
3. $\boxed{v_f^2 = v_0^2 \pm 2ad}$
4. $\boxed{d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t}$

signos: (+) movimiento acelerado.
(−) movimiento retardado.

Gráficas del MRUV

Posición-tiempo (x-t)

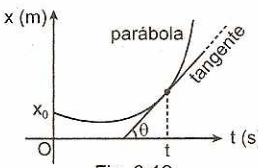


Fig. 3.12

I. La curva es una parábola.

II. La pendiente de la recta tangente trazada a la curva, es igual a la velocidad de la partícula en el instante t.

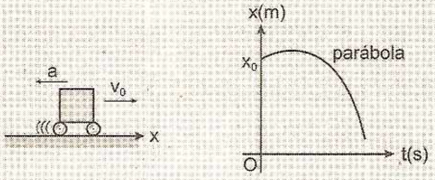
$$\boxed{v = \tan\theta} \qquad \ldots(3.16)$$

III. La curva corta al eje de ordenadas en un punto que nos da la posición inicial x_0.

Movimiento retardado:

La partícula tiene la siguiente ley de movimiento:

$$x_f = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2$$



Condición inicial del movimiento: v_0: (+) hacia la derecha; a : (−) hacia la izquierda

Casos particulares:

a) $x_0 = 0$

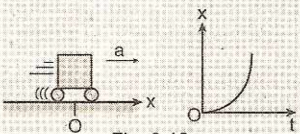


Fig. 3.13

b) x_0 (negativo)

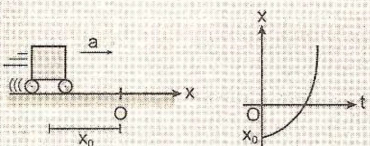


Fig. 3.14

Velocidad-tiempo (v-t)

I. La pendiente de la recta es igual a la aceleración de la partícula.

$$\boxed{a = \tan\alpha} \qquad \ldots(3.17)$$

II. El área bajo la recta, es igual al espacio recorrido por la partícula, en un intervalo de tiempo.

II. En general, el área bajo la recta es igual al cambio de posición que experimenta la partícula en un intervalo de tiempo.
A = cambio de posición

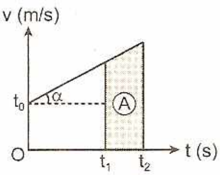
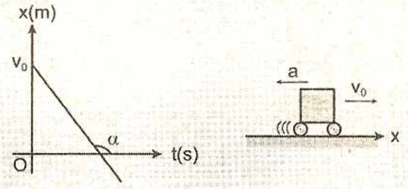


Fig. 3.15

Aceleración negativa:



$a = \tan\alpha < 0$

Condición inicial del movimiento: v_0: (+) hacia la derecha. a: (−) hacia la izquierda.

Casos particulares:

a) $v_0 = 0$ (sale del reposo)

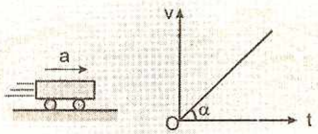


Fig. 3.16

b) v_0 (negativo)

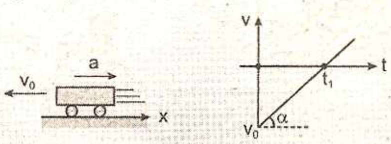


Fig. 3.17

Aceleración-tiempo (a-t)

I. La recta es paralela al eje temporal, significa que la aceleración es constante.

II. El área bajo la recta, es igual al cambio de velocidad que experimenta la partícula en un intervalo de tiempo.

$$\boxed{A = v_f - v_0} \qquad \ldots(3.18)$$

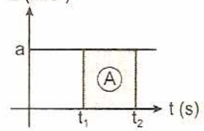


Fig. 3.18

Si la aceleración es negativa, la gráfica tiene la siguiente forma:

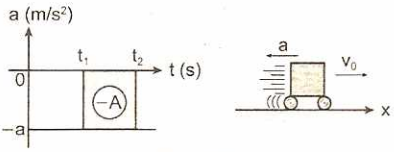
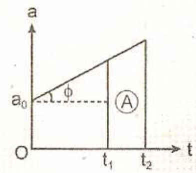


Fig. 3.19

El área negativa (−A) significa que la velocidad está disminuyendo en módulo, $v_f < v_0$

Aceleración variable:

- La aceleración varía progresivamente o linealmente.
- Donde a_0 es la aceleración inicial.
- El área A bajo la recta, es igual al cambio de velocidad.



Velocidad media (v_m)

La relación entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo correspondiente, determina la magnitud vectorial que se llama "velocidad media" de la partícula.

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{t}} \qquad \text{expresión vectorial} \qquad \ldots(3.19)$$

$$\boxed{v_m = \frac{d}{t}} \qquad \text{expresión escalar} \qquad \ldots(3.20)$$

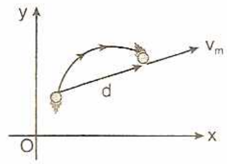


Fig. 3.20

Caso particular. Si el movimiento es rectilíneo, en el eje x, tal que la partícula se desplaza hacia la derecha y luego hacia la izquierda como indica la figura 3.21, la velocidad media se obtiene con la fórmula de la ecuación (3.20).

$$v_m = \frac{d}{t}$$

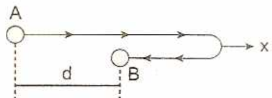


Fig. 3.21

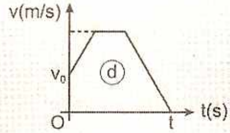
A: posición inicial; B: posición final

t: tiempo empleado para desplazarse de A hacia B.

Para calcular la "velocidad media" no es necesario conocer la trayectoria que sigue la partícula, solo la posición inicial y final.

Velocidad media:

Cuando la partícula se mueve rectilíneamente en el eje x, el área bajo las rectas nos da el desplazamiento "d" que experimenta en un tiempo t.



$$v_m = \frac{d}{t}$$

Ejemplos:

1. La figura 3.22 muestra la variación de la velocidad de una partícula que se mueve en el eje x. Si el móvil inicia (t = 0) su movimiento en la posición x = 0 con sentido del eje +x (hacia la derecha).

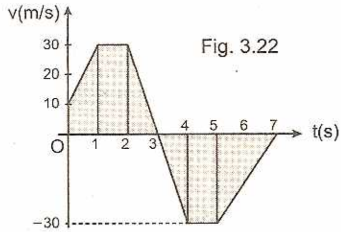


Fig. 3.22

Resolución:

Entonces podemos afirmar que:

a) El móvil inicia su movimiento con velocidad de 10 m/s.

b) En el 1.^{er} segundo acelera, aumentando su velocidad de 10 m/s a 30 m/s, entonces su aceleración es: 20 m/s^2.

c) En el 2.° segundo mantiene su velocidad constante de 30 m/s, por consiguiente su aceleración es nula.

d) En el 3.^{er} segundo su velocidad disminuye (movimiento retardado) de 30 m/s a 0 m/s, entonces su aceleración es negativa: −30 m/s^2.

e) En el 4.° segundo la velocidad es negativa (el móvil cambia el sentido de su movimiento) cambiando de 0 a −30 m/s, su aceleración es negativa: −30 m/s^2, el signo negativo significa que el vector aceleración tiene sentido del eje −x.

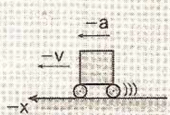
f) En el 5.° su velocidad es constante de −30 m/s, por consiguiente su aceleración es nula.

g) En los dos últimos segundos de su movimiento la velocidad negativa disminuye en módulo de −30 m/s a 0, entonces su aceleración es: 30 m/s^2 con signo positivo.

Signo y sentido:

−v: sentido a la izquierda.

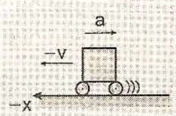
−a: sentido a la izquierda.



Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen igual sentido, entonces el movimiento se denomina acelerado.

Sentido y signo:

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos, entonces el movimiento se denomina retardado.



2. La figura 3.23 muestra la variación de la velocidad de una partícula que se mueve en el eje x. Si el móvil inicia su movimiento (t = 0) en la posición x = 10 m con sentido del eje +x (hacia la derecha).

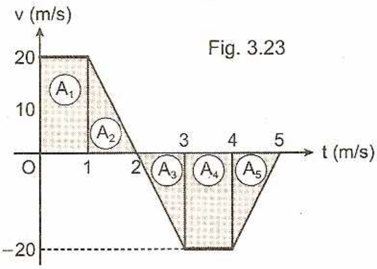


Fig. 3.23

Resolución:

Entonces se puede afirmar que:

a) En el 1.^{er} segundo se desplaza: $A_1 = 20$ m

b) En el instante t = 1 s, se encuentra en la posición:
$x_f = x_0 + A_1$; $x_0 = 10$ m
$x_f = 10 + 20 = 30$ m

c) En el 2.° segundo se desplaza: $A_2 = 10$ m

d) En el instante t = 2 s, se encuentra en la posición:
$x_f = x_0 + A_1 + A_2$
$x_f = 10 + 20 + 10 = 40$ m

e) En el 3.^{er} segundo se desplaza: $A_3 = -10$ m
El signo negativo, significa que el móvil cambió el sentido de su movimiento.

f) En el instante t = 3 s, se encuentra en la posición:
$x_f = x_0 + A_1 + A_2 + A_3$
$x_f = 10 + 20 + 10 + (-10) = 30$ m

g) En el 4.° segundo se desplaza: $A_4 = -20$ m

h) En el instante t = 4 s, se encuentra en la posición:
$x_f = x_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
$x_f = 10 + 20 + 10 + (-10) + (-20)$
$x_f = 10$ m (regresa a su posición inicial).

i) En el 5.° segundo se desplaza: $A_5 = -10$ m

j) En el instante t = 5 s, se encuentra en la posición:
$x_f = x_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$
$x_f = 10 + 20 + 10 + (-10) + (-20) + (-10)$
$x_f = 0$ (el móvil llega al origen del eje x).

Valor absoluto:

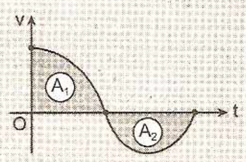
Para hallar el espacio recorrido por el móvil, se suma todas las áreas sin considerar el signo negativo, es decir, el valor absoluto de las áreas:

$e = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|$
$e = 20 + 10 + 10 + 20 + 10$
$e = 70$ m

Recorrido (e):

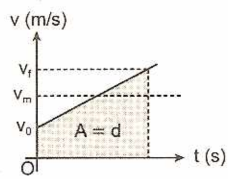
Para hallar el recorrido por una partícula, en la gráfica v-t, es suficiente sumar el valor absoluto de las áreas.

$e = |A_1| + |A_2|$



Velocidad media para el MRUV (v_m)

Para el MRUV: $\vec{v}_m = \dfrac{d}{t}$ ...(1)



d = A = área del trapecio

El desplazamiento que experimenta la partícula, es igual al área bajo la recta (inclinada).

$$d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1): $v_m = \dfrac{v_0 + v_f}{2}$

La velocidad media, se puede interpretar como aquella velocidad constante que debe tener un móvil, para recorrer el mismo espacio (e = d) en el mismo intervalo de tiempo, que otro móvil que tiene aceleración constante. Siempre y cuando el móvil no invierta el sentido de su movimiento.

Deducción de fórmulas que gobiernan el MRUV

En principio consideramos una partícula que se mueve en línea recta, sin invertir el sentido de su movimiento, por consiguiente el espacio recorrido y la distancia tienen el mismo valor.

Disponemos de dos ecuaciones iniciales:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \qquad \dots (1)$$

$$v_m = \frac{v_0 + v_f}{2} \qquad \dots (2)$$

Secuencia:

1. De la ecuación (1):
$$at = v_f - v_0 \qquad \dots(3)$$
$$v_f = v_0 + at \qquad \dots(4)$$

2. En el MRU:
$$d = v_m t \Rightarrow d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t \qquad \dots(5)$$
Reemplazando (4) en (5):
$$d = \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t \Rightarrow d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

3. Multiplicando las ecuaciones (3) y (5):
$$atd = \left(\frac{v_f^2 - v_0^2}{2}\right)t \Rightarrow v_f^2 = v_0^2 + 2ad$$

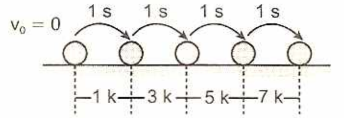
Resumen de fórmulas

1. $d = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$
2. $v_f = v_0 \pm at$
3. $v_f^2 = v_0^2 \pm 2ad$
4. $d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$
5. $x = v_0 \pm \frac{1}{2}a(2n - 1)$

Conceptos adicionales

Números de Galileo. Si un móvil que tiene MRUV sale del reposo, la distancia que recorre en cada segundo son proporcionales a números impares.

Donde: $k = \frac{a}{2}$; a es la aceleración constante.



Distancia en el enésimo segundo. La distancia x que recorre el móvil en el enésimo segundo (n) se consigue con la siguiente fórmula:

$$\boxed{x = v_0 \pm \frac{1}{2}a(2n - 1)}$$

v_0: velocidad inicial
n: enésimo segundo
a: aceleración del móvil
± : cuando acelera (+) y cuando desacelera (−)

Teorema

Si un móvil que describe un movimiento con una aceleración constante $\vec{a}$, tiene en cierto instante una velocidad $\vec{v}$, el desplazamiento experimentado por el móvil en los últimos t segundos es:

$$\vec{d} = \vec{v}t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Demostración:

Si un móvil describe un movimiento con una aceleración constante, se cumple que:

$$\vec{d} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \dots(1)$$

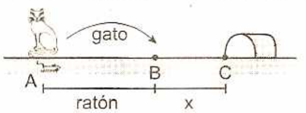
También: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{a}t \qquad \dots(2)$

Reemplazando (2) en (1) y despejando tenemos que:

$$\vec{d} = \vec{v}t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un ratón se dirige a su hueco en línea recta con velocidad constante de 2 m/s; cuando le faltan 5 metros para llegar, pasa por el lado de un gato que se encuentra en reposo. Si el gato acelera a razón de 2 m/s^2 en dirección del ratón, ¿el gato logra alcanzar al ratón?, si lo alcanza, ¿a qué distancia de su agujero?



Resolución:

Suponiendo que si lo alcanza en el punto "B", los espacios recorridos por el gato y el ratón serán iguales: $e_{gato} = e_{ratón}$

$$\frac{1}{2}at^2 = vt \Rightarrow t = \frac{2v}{a} \Rightarrow t = \frac{2(2)}{2} \Rightarrow t = 2\text{ s}$$

Espacio recorrido por el ratón en: t = 2 s

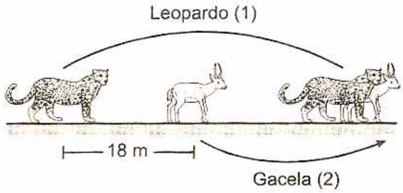
$e_{ratón} = vt \Rightarrow e_{ratón} = 2(2) = 4$ m

$x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$ m

Por lo tanto, lo alcanza al ratón a 1 m de su agujero.

2. Un leopardo africano puede lograr desde el reposo una aceleración de 8 m/s^2. Si va a la caza de una gacela que puede lograr una aceleración de 4 m/s^2, y si esta inicia la huida desde el reposo en el mis-

mo instante en que el leopardo está a 18 metros de ella. ¿Cuánto tardará el leopardo en atrapar a la gacela?. ¿Cuánto habrá recorrido la gacela antes de ser atrapada?. ¿A qué velocidad correrá el leopardo antes de atrapar a la gacela?



Resolución:

a) De la figura : $e_1 - e_2 = 18$ m ...(I)

Pero: $e = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

En (I): $\frac{1}{2}(8)t^2 - \frac{1}{2}(4)t^2 = 18.$

Resolviendo: $t = 3$ s

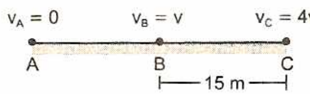
b) Espacio recorrido por la gacela en $t = 3$ s, será:

$e = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow e_2 = \frac{1}{2}(4)(9) \Rightarrow e_2 = 18$ m

c) Velocidad del leopardo instante antes de atrapar a la gacela: $v_f = v_0 + at \Rightarrow v_f = 0 + 8(3)$

$\therefore v_f = 24$ m/s

3. Un móvil parte del reposo y se mueve con MRUV sobre el eje x. Si transcurrido un tiempo t posee una velocidad v y luego recorre 15 metros en 3 segundos, siendo su velocidad en ese instante 4v, hallar el intervalo de tiempo t.



Resolución:

1. Consideramos tres puntos A; B y C sobre el eje x:
2. En el tramo BC: $d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t \Rightarrow 15 = \frac{(v + 4v)}{2}(3)$

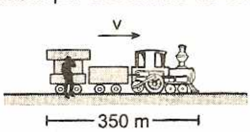
   Resolviendo: $v = 2$ m/s

   Cálculo de la aceleración:

   $a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{8-2}{3} \quad \therefore a = 2$ m/s^2
3. En el tramo AB: $v_f = v_0 + at \Rightarrow 2 = 0 + 2t$

   $\therefore t = 1$ segundo

4. Los extremos de un tren de 350 m de longitud pasan por el costado de una persona (fijo en la tierra) con velocidades de 5 m/s y 9 m/s respectivamente. Determinar la aceleración del tren y el tiempo que demora en pasar por el costado de esta persona.



Resolución:

Sabemos que: $d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$

$350 = \left(\frac{5+9}{2}\right)t$

$\therefore t = 50$ segundos

Cálculo de la aceleración:

$a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{9-5}{50}$

$\therefore a = 0{,}08$ m/s^2

5. Una partícula con MRUV tiene una velocidad $v_1 = 10$ m/s en el instante $t_1 = 2$ s y una velocidad $v_2 = 30$ m/s en el instante $t_2 = 7$ s.

Determinar la distancia recorrida por la partícula desde el instante $t = 0$, hasta el instante $t = 10$ s.

Resolución:

Tabla tiempo versus velocidad:

Posición	Tiempo	Velocidad
A	t = 0	v
B	t = 2	10
C	t = 7	30
D	t = 10	

Cálculo de la aceleración en el tramo BC:

$a = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = \frac{30 - 10}{7 - 2} = 4$ m/s^2

Cálculo de la velocidad inicial en el tramo AB:

$v_F = v_0 + at \Rightarrow 10 = v + 4(2 - 0)$

$\therefore v = 2$ m/s (velocidad inicial)

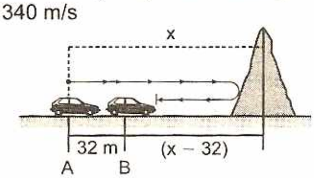
Cálculo de la distancia en el tramo AD:

$d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = 2(10) + \frac{1}{2}(4)(100)$

$\therefore d = 220$ m

6. Un automóvil que parte del reposo se mueve con una aceleración constante $a = 1$ m/s^2 en línea recta dirigiéndose hacia una montaña. Al partir el chofer emite una señal sonora y cuando ha recorrido 32 metros recibe el eco. Determinar la distancia de separación inicial ($t = 0$) entre el auto y la montaña.

$v_{sonido} = 340$ m/s



Resolución:

El intervalo de tiempo empleado por el auto en desplazarse 32 m, es el mismo tiempo que emplea la onda sonora en ir y regresar a la montaña con una rapidez de 340 m/s.

Para el auto:

$d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 32 = 0 + \frac{1}{2}(1)t^2 \quad \therefore t = 8$ s

Para el sonido:
$d = v_{sonido}(t) \Rightarrow x + (x - 32) = 340(8)$
$\therefore\ x = 1376$ m

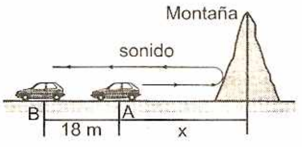
7. Un automóvil que inicialmente se encuentra en reposo, sale con aceleración constante igual a 1 m/s^2 en línea recta, alejándose de una montaña. En el instante que sale, el chofer toca la bocina y cuando a recorrido 18 m percibe el eco. Hallar la distancia de separación inicial entre el auto y la montaña.
$v_{sonido} = 340$ m/s

Resolución:

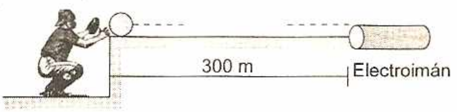
El tiempo empleado por el auto en desplazarse 18 m, es el mismo tiempo que emplea el sonido en ir a la montaña y en alcanzar al móvil.
Sea x la distancia de separación inicial (t = 0).
Analizando el movimiento del automóvil:

$$d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 18 = 0 + \frac{1}{2}(1)t^2$$

Resolviendo: t = 6 s
Ahora, analizamos el desplazamiento del sonido en el mismo intervalo de tiempo: d = vt
$2x + 18 = 340(6) \quad \therefore\ x = 1011$ m



8. Una esferilla de hierro que es sostenida por una persona es atraída en línea recta, por un electroimán con una aceleración constante. Luego de 6 segundos la persona escucha que el objeto choca con el electroimán que está a 300 m de distancia en el eje horizontal. ¿Con qué aceleración se desplazó el objeto?
$v_{sonido} = 340$ m/s



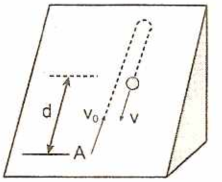
Resolución:

El sonido demora en desplazarse del electroimán hacia la persona 1 segundo, por consiguiente la esferilla que sale del reposo demora en chocar con el electroimán 5 segundos.

$$d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 300 = 0 + \frac{1}{2}a(5)^2$$

$\therefore\ a = 24$ m/s^2

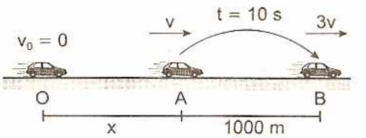
9. Una partícula se lanza desde el punto A hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial v_0 = 20 m/s. Si después de 9 segundos la partícula se encuentra bajando con una velocidad v = 16 m/s. Hallar a qué distancia d se encuentra del punto de lanzamiento en ese instante. Considerar que la partícula en todo momento se mueve con aceleración constante.



Resolución:

Cálculo de la aceleración:
$v_f = v_0 - at \Rightarrow -16 = 20 - a(9)$
$\therefore\ a = 4$ m/s^2
Convencionalmente el signo de la velocidad es positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.
Cálculo de la distancia d:
$v_f^2 = v_0^2 - 2ad \Rightarrow (-16)^2 = (20)^2 - 2(4)d$
$\therefore\ d = 18$ m

10. Un auto parte del reposo con un MRUV y recorre entre dos puntos A y B de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 segundos, si al pasar por B su velocidad es el triple de la que tuvo en A, calcular la distancia que recorrió entre el punto de partida y el punto A.



Resolución:

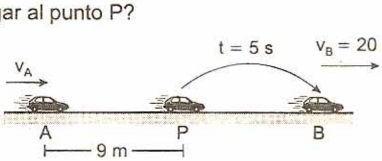
$$\text{En el tramo AB: } d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$$

$1000 = 2v(10) \Rightarrow v = 50$ m/s ... (1)
Cálculo de la aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2 \quad \text{... (2)}$$

En el tramo OA: $v_F^2 = v_0^2 + 2ad$
Reemplazando (1) y (2): $v^2 = 2ax$
$\therefore\ x = 125$ m

11. Un auto corre en una pista horizontal con una aceleración de 2 m/s^2, después de 5 s de pasar por un punto P, posee una velocidad de 72 km/h. ¿Qué velocidad tenía el auto cuando le faltaban 9 m para llegar al punto P?



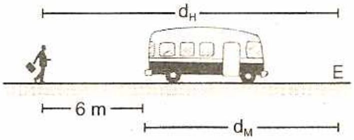
Resolución:

En el tramo PB:
$v_f = v_0 + at \Rightarrow 20 = v_p + 2(5)$
$v_p = 10$ m/s ... (1)

En el tramo AP: $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

$\Rightarrow 100 = v_A^2 + 2(2)(9) \quad \therefore v_A = 8$ m/s

12. Un hombre se mueve con una velocidad constante de 5 m/s tras un microbús que se encuentra en reposo, pero cuando está a 6 m, el microbús parte con una aceleración de 2 m/s^2. Hallar a partir de ese momento el tiempo en que se logra alcanzar al microbús.



Resolución:

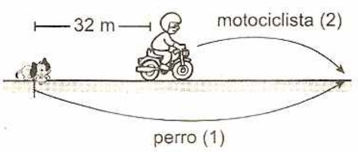
Supongamos que el hombre alcanza al microbús en el punto E. Del gráfico obtenemos la siguiente relación: $d_H = d_M + 6$

$vt = \frac{1}{2}at^2 + 6 \Rightarrow 5t = t^2 + 6$

Resolviendo tenemos dos valores que satisfacen la ecuación: t = 2 s y t = 3 s

Físicamente existe dos instantes en el cual el hombre puede subir al microbús.

13. Un perro se encuentra echado sobre el piso. A 32 m de él un motociclista arranca y sale ($V_0 = 0$) con una aceleración constante a = 1 m/s^2. Determinar la mínima velocidad constante del perro, tal que puede alcanzar al motociclista.



Resolución:

De la figura: $32 + d_2 = d_1$

Reemplazando: $32 + \frac{1}{2}at^2 = vt$

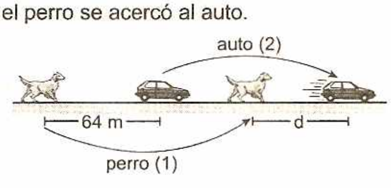
Luego: $\frac{1}{2}t^2 - vt + 32 = 0$

Resolviendo: $t = v \pm \sqrt{v^2 - 64}$

Pero: t es un número real positivo

Entonces: $v^2 - 64 \geq 0 \quad \therefore v_{min} = 8$ m/s

14. Un perro corre detrás de un automóvil con una rapidez de 6 m/s, cuando se encuentra a 64 m de él sale el auto del reposo con una aceleración constante a = 0,5 m/s^2. Determinar después de qué tiempo a partir de ese instante el perro alcanza al automóvil. Si no lo alcanza, determinar la distancia mínima que el perro se acercó al auto.



Resolución:

Suponemos que no lo alcanza, donde d es la distancia mínima que el perro se acerca al auto:

Del gráfico: $d_1 + d = 64 + d_2$

$d = d_2 - d_1 + 64 \Rightarrow d = \frac{1}{2}at^2 - vt + 64$

$d = \frac{1}{2}(0,5)t^2 - 6t + 64$

Completando cuadrados:

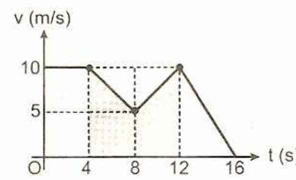
$d = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{2}\right)6 + 36 + 28$

$\Rightarrow d = \left(\frac{t}{2} - 6\right)^2 + 28$

La distancia d es mínimo cuando: t = 12 s

Luego: $d_{min} = 28$ m

15. A partir de la gráfica v-t, se pide determinar la velocidad media, del móvil, en el intervalo <4; 12> segundos.



Resolución:

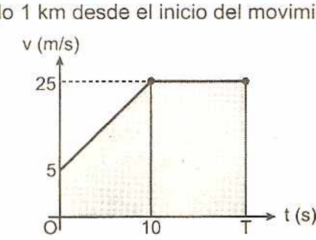
El desplazamiento que experimenta el móvil en el intervalo <4; 12> segundos, es igual al área bajo la curva.

d = área = 60 m

Por definición: $v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{60}{12-4}$

$\therefore v_m = 7,5$ m/s

16. Un móvil inicia su movimiento rectilíneo con una velocidad de 5 m/s y viaja con una aceleración constante de 2 m/s^2 durante 10 segundos, al final de los cuales continúa el trayecto a velocidad constante. Se pide determinar el tiempo en que habrá recorrido 1 km desde el inicio del movimiento.



Resolución:

Para t = 10 s, la velocidad del móvil es 25 m/s.

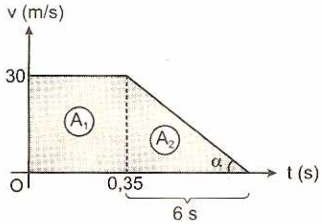
Graficando la variación de la velocidad con el tiempo:

El recorrido por el móvil es igual al área debajo de las rectas en el intervalo <0; T>:

d = Área = trapecio + rectángulo

$1000 = \frac{(5+25)}{2}(10) + (T - 10)(25) \quad \therefore T = 44$ s

17. El tiempo de reacción de una persona (intervalo de tiempo que transcurre entre la percepción de una señal y el momento de la respuesta), es en término medio de 0,35 segundos. Suponiendo que un automóvil experimenta una desaceleración máxima de 5 m/s^2, calcule la distancia total recorrida antes de detenerse, una vez percibida la señal, para el caso en que la velocidad que llevaba el automóvil sea de 108 km/h.



Resolución:

v = 108 km/h = 30 m/s

Aceleración: $\tan\alpha = a \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{30}{\Delta t} = 5 \Rightarrow \Delta t = 6\ s$

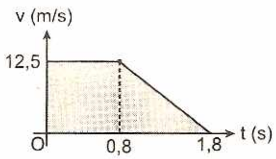
Recorrido = $A_1 + A_2$

$d = 30(0{,}35) + \dfrac{1}{2}(6)(30)$

$\Rightarrow d = 10{,}5 + 90 \quad \therefore\ d = 100{,}5\ m$

18. Un automóvil se está moviendo a una velocidad de 45 km/h cuando una luz roja se enciende en una intersección. Si el tiempo de reacción del conductor es 0,8 segundos y el auto desacelera a razón de 12,5 m/s^2 tan pronto el conductor aplica los frenos, calcular qué distancia recorrerá el auto desde el instante en que el conductor nota la luz roja hasta que el auto se detiene.

Tiempo de reacción: es el intervalo entre el tiempo en que el conductor nota la luz y el tiempo que aplica los frenos.



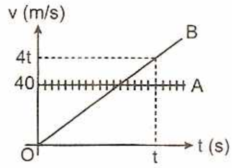
Resolución:

El automóvil se está moviendo con una velocidad de 12,5 m/s, transformando 45 km/h. Graficando la variación de la velocidad con el tiempo:

El automóvil se detiene después de 1 segundo de aplicar los frenos. La distancia que recorre el móvil es igual al área bajo las rectas.

$\therefore\ d = 16{,}25\ m$

19. Dos móviles A y B empiezan a moverse desde el mismo lugar y en el mismo sentido. El móvil A se mueve con velocidad constante de 40 m/s, mientras que B parte del reposo y acelera a razón de 4 m/s^2. Calcular la velocidad de B en el instante que alcanza al móvil A.



Resolución:

Consideremos el instante t en que el móvil B alcanza al móvil A. Entonces la velocidad de B será: 4t.

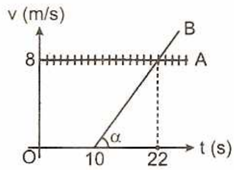
Los desplazamientos de A y B deben ser iguales:

$d_A = d_B$

$v_A t = 1/2at^2 \Rightarrow 40t = 1/2(4)t^2 \Rightarrow t = 20\ s$

Entonces la velocidad de B será: 80 m/s

20. Si dos móviles A y B parten del mismo punto, calcular la distancia que separa a los móviles después de 22 segundos de iniciar su movimiento el móvil A.



Resolución:

El móvil A (MRU), t = 22 s $\Rightarrow d_A = v_A t = 8(22) = 176\ m$

El móvil B (MRUV), t = 12 s; $v_0 = 0$

aceleración: $a = \tan\alpha = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}\ m/s^2$

$d_B = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = 0 + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}(12)^2 \Rightarrow d_B = 96\ m$

La distancia de separación: $x = d_A - d_B = 176 - 96$

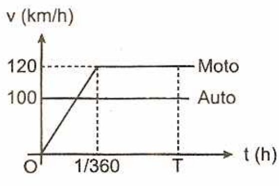
$\therefore\ x = 80\ m$

21. Un policía de tránsito ve que un automóvil se le aproxima a una velocidad no permitida de 100 km/h (constante). En el instante que pasa frente a él, sube a la moto y sale en su persecución. La moto después de acelerar durante 10 segundos alcanza su velocidad tope de 120 km/h. Calcular cuánto ha tardado el policía en alcanzar al auto.

Resolución:

Construyendo la gráfica v-t:

En el instante que el policía alcanza al auto los recorridos, desde (t = 0) que inicia la persecución, serán iguales: $d_{(auto)} = d_{(moto)}$

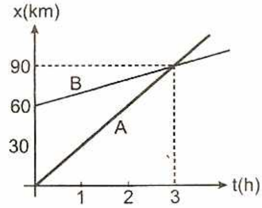


Pero el recorrido es igual al área bajo la curva:

$$100t = \left(\frac{2t - \frac{1}{360}}{2}\right)120$$

Resolviendo: $t = \frac{1}{120} \Rightarrow t = 30$ s

22. Dos automóviles A y B se desplazan en una misma carretera. El gráfico muestra la posición de cada uno en relación al comienzo de la carretera y en función del tiempo. Hallar la ecuación de la posición de los móviles A y B.



Resolución:

La pendiente de las rectas nos da la velocidad:

$v_A = \tan\alpha = \frac{90}{3} \Rightarrow v_A = 30$ km/h

$v_B = \tan\beta = \frac{30}{3} \Rightarrow v_B = 10$ km/h

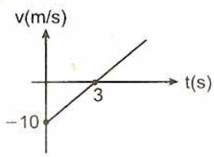
Posición de una partícula en el MRU:

$x_f = x_0 + vt$

Para el móvil A: $x_A = 0 + 30t \Rightarrow x_A = 30t$

Para el móvil B: $x_B = 60 + 10t$

23. Se tiene el gráfico v-t de un móvil que se mueve sobre el eje x-y, que en el instante t = 0 su posición es $x_0 = 5$ m. ¿En qué instante pasará por segunda vez por el origen?



Resolución:

Posición de una partícula, en el MRUV:

$x_f = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$0 = 5 - 10t + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)t^2 \Rightarrow \frac{1}{3}t^2 - 2t + 1 = 0$

Resolviendo:

$t_1 = (3 - \sqrt{6})$: 1.ª vez

$t_2 = (3 + \sqrt{6})$: 2.ª vez

24. Determinar la gráfica, v-t, de una partícula que se mueve en el eje x con aceleración constante $a_x = 1$ m/s^2. Inicia su movimiento (t = 0) con una velocidad $v_0 = -2$ m/s (en sentido negativo del eje x).

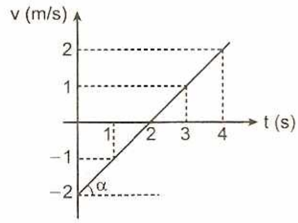
Resolución:

Sabemos que: $v_f = v_0 + at$

Reemplazando: $v_f = -2 + 1t$

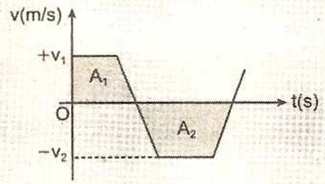
Luego: $v_f = t - 2$ ...(1)

Graficando la función (1):



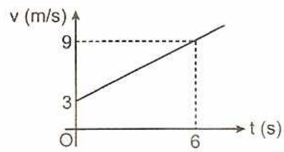
1. **Propiedad**: La pendiente de la recta es igual, a la aceleración de la partícula. a = tanα
2. **Propiedad**: El área bajo la curva es igual al cambio de posición que experimenta la partícula en un intervalo de tiempo: $(x_f - x_0) = A_1 - A_2$

* Se considera el signo del área.



3. **Propiedad**: El recorrido por la partícula es igual al área bajo la curva (en general) sin considerar los signos. Recorrido = $A_1 + A_2$

25. Una partícula se mueve sobre el eje x, en el instante t = 0, su posición es $x_0 = -2$ m. La figura muestra su gráfica v-t. Determinar su posición en el instante t = 6 s.



Resolución:

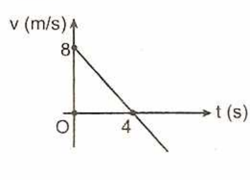
El cambio de posición que experimenta la partícula es igual al área bajo la recta; en la gráfica v-t:

$(x_f - x_0)$ = área del trapecio

$(x_f - x_0) = \left(\frac{3+9}{2}\right)6 \Rightarrow x_f - (-2) = 36$

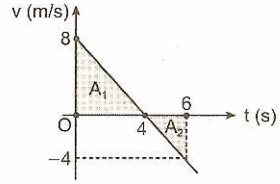
$\therefore\ x_f = 34$ m

26. Una partícula se mueve sobre el eje x, en el instante t = 0 su posición es $x_0 = 0$. La figura muestra su gráfica v-t. Determinar su posición en el instante t = 6 s y el recorrido en el intervalo de tiempo [0; 6] segundos.



Resolución:

El cambio de posición que experimenta la partícula es igual al área bajo la recta, en la gráfica v-t:

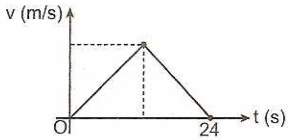


Cálculo del área:

$A_1 = 16$ m y $A_2 = 4$ m $\Rightarrow (x_f - x_0) = A_1 - A_2$

$x_f - 0 = 16 - 4 \quad \therefore x_f = +12$ m

27. La gráfica v-t, describe el movimiento de una partícula. Si para $t = 24$ segundos, el recorrido es 96 m, ¿qué velocidad máxima alcanzó la partícula?



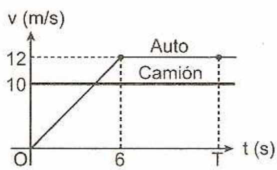
Resolución:

La velocidad máxima es igual a la altura del triángulo. El recorrido por la partícula es igual al área del triángulo, en la gráfica v-t:

$d = \dfrac{bh}{2} \Rightarrow 96 = \dfrac{24v}{2} \quad \therefore v_{máx} = 8$ m/s

28. Un auto está esperando que cambie la luz roja, cuando la luz cambia a verde el auto acelera a razón de 2 m/s^2 durante 6 segundos, después de la cual se mueve con velocidad constante; en el instante que el auto comienza a moverse un camión que se mueve en la misma dirección con velocidad constante de 10 m/s, lo pasa. ¿En qué intervalo de tiempo y a qué distancia se encontrarán nuevamente el auto y el camión?

Resolución:

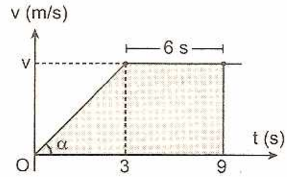


1. Analizando el movimiento del auto:
   $v_f = v_0 + at$
   $\Rightarrow v_f = 0 + 2(6) = 12$
   La velocidad máxima alcanzada es: 12 m/s.
   Recorrido = Área del trapecio = $\dfrac{(b+B)h}{2}$
   $\Rightarrow d_{auto} = \left(\dfrac{T-6+T}{2}\right)12 = (2T-6)6 \quad$ ... (1)
2. Recorrido para el camión = 10T ... (2)
3. Cuando el auto alcanza al camión, los recorridos serán iguales; igualando (1) y (2):
   $(2T-6)6 = 10T \Rightarrow T = 18$ s
   Cálculo de la distancia, reemplazando en (2):
   $x = 10T \Rightarrow x = 10(18) \quad \therefore x = 180$ m

29. Un automóvil parte del reposo y recorre una trayectoria recta de 270 m. La trayectoria fue: durante los tres primeros segundos tiene una aceleración constante, luego con la velocidad adquirida hace nula la aceleración del móvil durante 6 segundos más, con lo cual completa su recorrido. Hallar la aceleración del móvil durante el primer segundo.

Resolución:

Construyendo la gráfica v-t:



El área del trapecio es igual al recorrido del móvil:

$270 = \text{Área} = \dfrac{1}{2}(15)v$

$v = 36$ m/s ...(1)

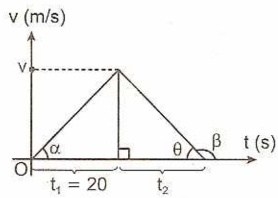
La pendiente de la recta nos da la aceleración:

$a = \tan\alpha \Rightarrow a = \dfrac{v}{3} = \dfrac{36}{3} \quad \therefore a = 12$ m/s^2

30. Un móvil parte del reposo y acelera a razón constante de 5 m/s^2 durante un tiempo de 20 s; luego con la velocidad adquirida comienza a desacelerar a razón de 2 m/s^2 hasta que se detiene completamente. Calcular el total recorrido por el móvil.

Resolución:

Construyendo la gráfica v-t:



La pendiente de la recta nos da la aceleración:

$\tan\alpha = \dfrac{v}{20} = 5 \Rightarrow v = 100$ m/s

$\tan\theta = \dfrac{v}{t_2} = 2 \Rightarrow t_2 = 50$ s

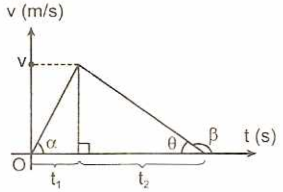
El área bajo la curva nos da el recorrido:

$\text{Área}_\Delta = \dfrac{1}{2}(t_1 + t_2)v \Rightarrow d = \dfrac{1}{2}(70)(100) \quad \therefore d = 3{,}5$ km

31. Un automóvil de carrera parte del reposo con una aceleración constante de 0,8 m/s^2, apenas termina de acelerar empieza a frenar a razón de 0,4 m/s^2. Si en total todo el movimiento duró 5 minutos, hallar la máxima velocidad que alcanzó el automóvil.

Resolución:

Construyendo la gráfica v-t:



La pendiente de la recta nos da la aceleración:

$\tan\alpha = \dfrac{v}{t_1} = 0{,}8 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v}{0{,}8}$ ...(1)

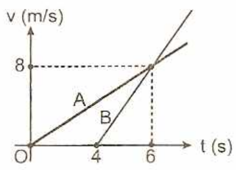
$\tan\theta = \dfrac{v}{t_2} = 0{,}4 \Rightarrow t_2 = \dfrac{v}{0{,}4}$ ...(2)

De la condición: $t_1 + t_2 = 300$ s

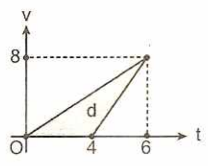
Reemplazando (1) y (2): $\dfrac{v}{0{,}8} + \dfrac{v}{0{,}4} = 300$

$\therefore\ v = 80$ m/s

32. El gráfico v-t mostrado nos representa el movimiento de dos móviles A y B. Si ambos móviles se encuentran en el instante t = 6 s. ¿Qué distancia los separaba inicialmente?



Resolución:

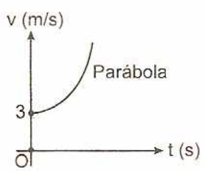


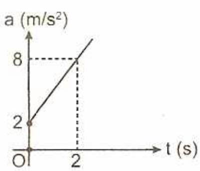
La distancia de separación inicial, es igual a la diferencia de recorridos:

$d = \dfrac{1}{2}bh = \dfrac{1}{2}(4)(8)$ $\therefore\ d = 16$ m

33. Una partícula se mueve en el eje x, mediante la siguiente ley: $x_f = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}a_0t^2 + \dfrac{1}{6}Ct^3$

Sus gráficas v-t y a-t, son:





Si la partícula inicia su movimiento (t = 0) en la posición $x_0 = -2$ m, determinar su posición en el instante: t = 4 s.

Resolución:

De la gráfica v-t, la velocidad inicial (t = 0) es:

$v_0 = 3$ m/s

De la gráfica a-t, la aceleración inicial (t = 0) es:

$a_0 = 2$ m/s^2

La celeridad es igual a la pendiente de la recta:

$C = \tan\theta = \dfrac{8-2}{2} = 3$ m/s^3

Reemplazando en la ley del movimiento:

$x_f = (-2) + 3(4) + \dfrac{1}{2}(2)(16) + \dfrac{1}{6}(3)(64)$

$\therefore\ x_f = 58$ m

34. La aceleración de una partícula, que se mueve en línea recta, varía mediante la siguiente ley:

$$a_f = a_0 + Ct$$

a_0 : aceleración inicial (t = 0)

C: celeridad o plus aceleración (m/s^3)

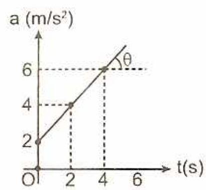
Si la partícula inicia su movimiento con una aceleración de 2 m/s^2 y celeridad constante C = 1 m/s^3, determinar la gráfica aceleración versus tiempo.

Resolución:

De la fórmula:

$a_f = a_0 + Ct \Rightarrow a_f = 2 + (1)t \Rightarrow a_f = 2 + t$ ...(1)

Graficando la función (1):



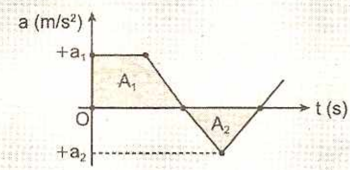
1. **Propiedad:** La pendiente de la recta es igual a la celeridad (plus aceleración) de la partícula.

$$C = \tan\theta$$

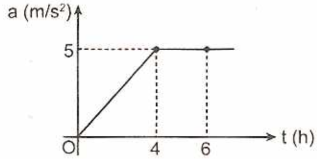
2. **Propiedad:** El área bajo la curva es igual al cambio de la velocidad que experimenta la partícula en un intervalo de tiempo.

$$(v_f - v_0) = A_1 - A_2$$

Se considera el signo del área.



35. Se tiene el gráfico a-t de un móvil que se mueve en línea recta. Si en el instante t = 0 su velocidad es v y para t = 4 s la velocidad es 3v, determinar su velocidad para t = 6 s.



Resolución:

En el intervalo de tiempo [0; 4⟩ segundos, el área bajo la recta es igual al cambio de la velocidad:

$(v_f - v_0) =$ área del triángulo $\Rightarrow (3v - v) = \frac{1}{2}(4)(5)$

$\Rightarrow v = 5$ m/s

En el intervalo de tiempo [4; 6⟩ segundos:

$v_f = v_0 + at \Rightarrow v_f = 15 + 5(2) \quad \therefore v_f = 25$ m/s

36. Un muchacho con su bicicleta se encuentra a 32 m de una motocicleta el cual arranca y sale del reposo con aceleración constante de 1,0 m/s². Determinar la mínima velocidad constante a la cual debe manejar su bicicleta, tal que pueda alcanzar al motociclista.

Resolución:

La distancia que recorre la bicicleta, es igual a la suma de la distancia que recorre la motocicleta más 32 metros: $d_{ciclista} = d_{motocicleta} + 32$

Reemplazando variables: $vt = \left(v_0t + \frac{1}{2}at^2\right) + 32$

Reemplazando los datos: $vt = \left(0(t) + \frac{1}{2}(1)t^2\right) + 32$

$vt = \frac{1}{2}t^2 + 32 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - vt + 32 = 0$

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Comparando tenemos: $t = \frac{v \pm \sqrt{(-v)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)32}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$

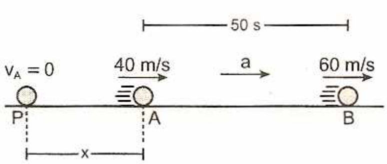
Analizando el discriminante, la solución límite es:

$(-v)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)32 = 0 \quad \therefore v = 8$ m/s

37. Un móvil que tiene MRUV se mueve en el eje x, pasa por el punto A con velocidad $40\hat{i}$ (m/s), pero 50 segundos después su velocidad es $60\hat{i}$ (m/s). Sabiendo que el móvil parte del reposo en el punto P, ¿qué distancia recorre desde el punto de partida hasta el punto A?

Resolución:

Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.



Cálculo de la aceleración en el tramo AB:

$a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{60 - 40}{50} = 0,4$ m/s²

En el tramo PA aplicamos:

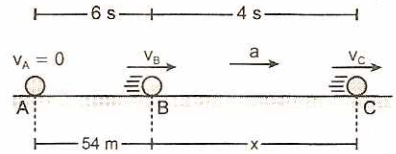
$v_F^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow (40)^2 = (0)^2 + 2(0,4)x$

Resolviendo: x = 2000 m

38. Un móvil parte del reposo con MRUV y avanza 54 m en los 6 primeros segundos. ¿Cuántos metros avanza en los 4 segundos siguientes?

Resolución:

Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.



En el tramo AB aplicamos: $d = \frac{(v_0 + v_f)}{2}t$

Reemplazando los datos:

$54 = \frac{(0 + v_B)}{2}(6) \Rightarrow v_B = 18$ m/s

Cálculo de la aceleración:

$a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{18 - 0}{6} = 3$ m/s²

En el tramo BC aplicamos:

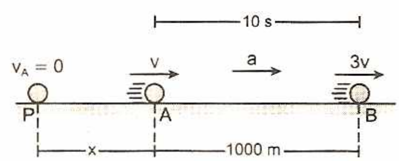
$d = v_0t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow x = 18(4) + \frac{(3)(4)^2}{2}$

$\therefore x = 96$ m

39. Un auto parte del reposo desde el punto P con MRUV y recorre entre los puntos A y B de su trayectoria la distancia de 1 km durante 10 segundos, si al pasar por el punto B su rapidez es el triple de la que tuvo en el punto A. Determina la distancia que recorre entre el punto de partida y el punto A.

Resolución:

Realizamos un diagrama para poder ordenar la información del fenómeno en estudio.



En el tramo AB aplicamos: $d = \frac{(v_0 + v_f)}{2}t$

Reemplazando los datos:

$1000 = \frac{(v + 3v)}{2}(10) \Rightarrow v = 50$ m/s

Cálculo de la aceleración:

$a = \frac{v_f - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{150 - 50}{10} = 10$ m/s

En el tramo PA aplicamos:

$v_f^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow (50)^2 = (0)^2 + 2(10)x$

Resolviendo: $x = 125$ m

40. Un ciclista que tiene MRUV inicia su movimiento con velocidad $2\hat{\imath}$ (m/s), después de 2 segundos recorre 12 m. ¿Qué distancia recorre el ciclista en el tercer segundo?

Resolución:

Aplicamos la ecuación:

$$d = v_0t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow 12 = 2(2) + \frac{(a)(2)^2}{2}$$

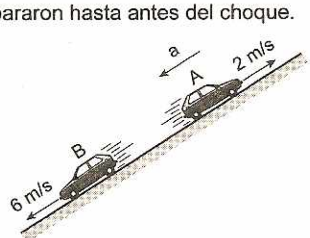
Resolviendo, la aceleración tiene módulo: $a = 4$ m/s^2

Aplicamos la ecuación para determinar la distancia que recorre en el enésimo segundo:

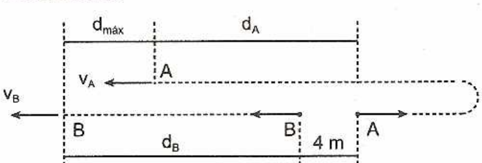
Tercer segundo: n= 3

$$d_n = v_0 + \frac{a(2n-1)}{2} \Rightarrow d_n = 2 + \frac{4[2(3)-1]}{2} = 12\text{ m}$$

41. Dos automóviles A y B se mueven con velocidades constantes de 2 y 6 m/s respectivamente, en la forma que muestra la figura. Si cuando estos se encuentran separados 4 m, A se malogra, moviéndose a partir de ese momento por inercia con una aceleración $a = 2$ m/s^2, determinar la máxima distancia que se separaron hasta antes del choque.



Resolución:



La distancia de separación entre A y B tomará un valor máximo cuando:

$v_A = v_B \Rightarrow 2 - 2t = -6$

$\Rightarrow t = 4$ s

A continuación determinemos los valores absolutos de los desplazamientos experimentados por cada móvil en este tiempo:

Para B: $d = vt \Rightarrow -d_B = (-6)4 \Rightarrow d_B = 24$ m

Para A: $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d_A = 2(4) + \frac{1}{2}(-2)(4)^2$

$\Rightarrow d_A = 8$ m

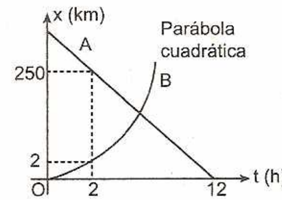
De donde se deduce que:

$d_{máx} + d_A = d_B + 4$

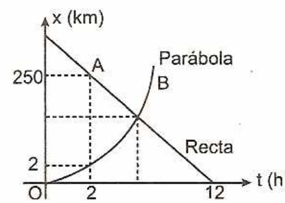
$\Rightarrow d_{máx} + 8 = 24 + 4$

$\therefore d_{máx} = 20$ m

42. Móviles A y B se desplazan en una misma dirección. El gráfico muestra la posición de cada móvil con relación al tiempo. Determinar el instante en que se cruzan.



Resolución:



Para el móvil A: ecuación de la recta

$x = mt + b$

$250 = 2m + b$ ...(α)

$0 = 12m + b$ ...(β)

Restando: $\alpha - \beta$

$250 = -10m \Rightarrow m = -25$

En (β): $0 = -25(12) + b \Rightarrow b = 300$

$x_A = -25t + 300$

Para el móvil B: Ecuación de la parábola

$x = kt^2$

$2 = k(2)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad \therefore x_B = \frac{1}{2}t^2$

Piden instante que se cruzan: las ecuaciones se igualan $x_A = x_B$

$-25t + 300 = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow t^2 + 50t - 600 = 0$

$(t + 60)(t - 10) = 0$

$t = -60 \wedge t = 10$

El tiempo nunca es negativo:

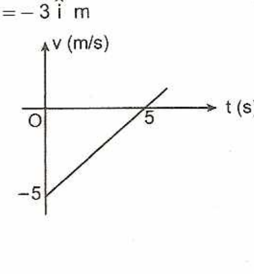
$\therefore t = 10$ h

43. Una partícula se desplaza en el eje x, en donde su velocidad varía con el tiempo de acuerdo a la gráfica adjunta. Determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

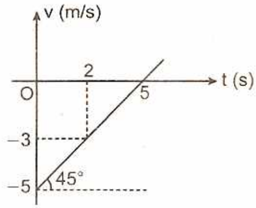
I. Su velocidad cuando t = 2 s es $3\hat{\imath}$ m/s

II. Es un MRUV con $\vec{a} = -1\hat{\imath}$ m/s^2

III. Si en t = 0 su posición es $\vec{x}_0 = 5\hat{\imath}$ m, en t = 2 s será: $\vec{x} = -3\hat{\imath}$ m



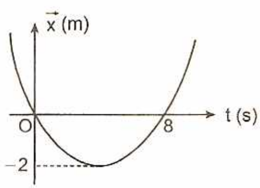
Resolución:



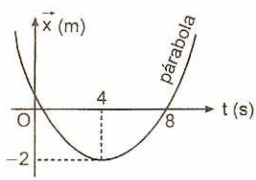
Para el enunciado (I)
$t = 2 \Rightarrow v = -3$ m/s
Para el enunciado (II)
La aceleración es cte. (MRUV) y se determina como la tangente de dicho ángulo (45°):
$a = \tan 45° \Rightarrow a = 1$ m/s^2.
Para el enunciado (III)
Si: $t = 0 \Rightarrow x_0 = 5$; en $t = 2$
Se sabe: $x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
Entonces para $t = 2$:
$x_f = 5 + (-5)(2) + \frac{1}{2}(1)(2)^2$
$x_f = -3$ m

44. Se muestra el gráfico $\vec{x}$ en función del tiempo t, de un móvil que se desplaza en la dirección del eje x con un MRUV. Indicar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. La magnitud de la aceleración es 0,20 m/s^2.
II. El móvil primero avanza hacia $-x\,\hat{i}$ m, luego en $t = 5$ s invierte su sentido de desplazamiento.
III. Su velocidad inicial, en $t = 0$ s, es $\vec{v}_0 = -8\,\hat{i}$ m/s



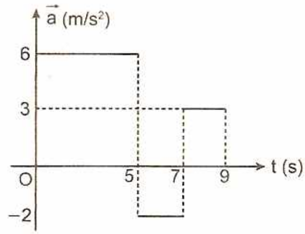
Resolución:



La posición del móvil en el eje x:

$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ...(α)
Para: $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
Para: $t = 4 \Rightarrow x = -2$
Reemplazando en (α)
$-2 = 0 + 4v_0 + \frac{1}{2}a(4)^2$
$-1 = 2v_0 + 4a$ ...(1)
Para: $t = 8 \Rightarrow x = 0$
$0 = 0 + 8v_0 + \frac{1}{2}a(8)^2$
$v_0 = -4a$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$-1 = -8a + 4a \Rightarrow a = 0{,}25$ m/s^2
Ahora en (2):
$v_0 = -4(0{,}25) \Rightarrow v_0 = -1$ m/s

45. Una partícula se mueve rectilíneamente con una aceleración, cuya gráfica $\vec{a}$-t se muestra si parte del reposo. ¿Cuál es la posición final al cabo de 7 s, si la posición inicial es $\vec{x}_0 = 20\,\hat{i}$ m?

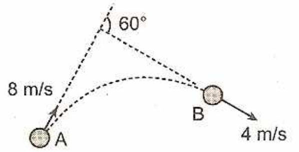


Resolución:

Dato: $t = 0$ s, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 20$ m
Recordar: $v_f = v_0 \pm at$
Ley de movimiento: $x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
Calculamos velocidad y posición en el instante $t = 5$ s
Reemplazando:
$v_f = v_0 + at \Rightarrow 0 + 6(5) \Rightarrow v_f = 30$ m/s
$x_f = x_0 + v_0 t + at^2 \Rightarrow 20 + 0 + \frac{1}{2}(6)5^2 \Rightarrow x_f = 95$ m
Piden posición final en el $t = 7$ s
Por dato desde $t = 5$ hasta $t = 7$, $v_0 = 30$ m/s, $t = 2$s
$a = -2$ m/s^2
Entonces posición final:
$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$x_f = 95 + 30(2) + \frac{1}{2}(-2)(2)^2$
$x_f = 95 + 60 - 4$
$\therefore x_f = 151$ m

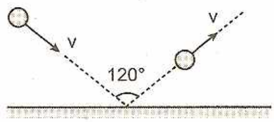
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el diagrama, el móvil de A hacia B emplea 2 segundos, observándose que en A su rapidez es 8 m/s y que en B es 4 m/s. ¿Qué aceleración experimenta?



A) $2\sqrt{3}$ m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 10 m/s^2
D) $6\sqrt{3}$ m/s^2 E) 5 m/s^2

2. Se muestra la incidencia y rebote elástico de una particular si el choque dura un tiempo t y la velocidad de incidencia es v. Hallar el módulo de la aceleración media en el tiempo t.



A) $\frac{v}{t}$ B) $\frac{v\sqrt{2}}{t}$ C) $\frac{3v}{t}$
D) $\frac{\sqrt{3}v}{2t}$ E) 0

3. Un auto parte del reposo y viaja durante 4 s, en ese instante su velocidad es de 20 m/s. Si continua con la misma aceleración, la velocidad que tendrá a los 9 s de iniciado su recorrido es:

A) 25 m/s B) 35 m/s C) 45 m/s
D) 55 m/s E) 65 m/s

4. Un móvil con MRUV, parte con cierta velocidad inicial. Si al recorrer 180 m en 12 s logra duplicar su velocidad, el módulo de su velocidad, al transcurrir los 6 primeros segundos es:

A) 5 m/s B) 10 m/s C) 15 m/s
D) 20 m/s E) 25 m/s

5. Un cuerpo que se mueve con MRUV recorre 36 m en 3 segundos. ¿Cuántos metros recorrió en el 2° segundo de los 3 segundos?

A) 18 m B) 16 m C) 14 m
D) 12 m E) 6 m

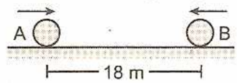
6. Un leopardo africano cuya aceleración es 8 m/s^2, persigue a una gacela cuya aceleración es 5 m/s^2 y está ubicada a 150 m de él. Si ambos parten del reposo simultáneamente, calcular el tiempo que tarda el leopardo en atrapar la gacela.

A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 9 s E) 10 s

7. Un móvil con MRUV recorre 50 m en los dos primeros segundos, 75 m en los siguientes 2 segundos. ¿Cuántos metros recorrerá en los siguientes 4 segundos?

A) 90 m B) 100 m C) 115 m
D) 125 m E) 225 m

8. Los móviles A y B parten del reposo con aceleración de 1 m/s^2 y 2 m/s^2 respectivamente. Si B parte 1 s después que A, ¿Qué distancia los separa cuando sus velocidades tengan igual valor?



A) 0 B) 2 m C) 15 m
D) 8 m E) 12 m

9. Un móvil parte del reposo con una aceleración de 3 m/s^2 y en un determinando instante desacelera hasta detenerse. ¿Cual es la aceleración en este segundo tramo, si el móvil estuvo en movimiento 12 s y recorrió una distancia total de 144 m?

A) 3 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 5 m/s^2
D) 6 m/s^2 E) 8 m/s^2

10. Un auto viaja con una velocidad de 10 m/s y divisa 13 m delante de él un camión que viaja a una velocidad constante de 36 km/h en el mismo sentido que el auto. Si el auto para rebasar el camión acelera con $a = 2$ m/s^2, calcular el tiempo necesario para lograrlo (longitud del auto y camión: 3 m y 9 m respectivamente)

A) 5 s B) 7 s C) 10 s D) 13 s E) 12 s

11. Un móvil con MRUV recorre 30 m en los dos primeros segundos, 65 metros en los siguientes dos segundos. ¿Cuántos metros recorrerá en los siguientes 4 segundos?

A) 90 m B) 100 m C) 235 m
D) 125 m E) 225 m

12. Un auto parte del reposo y luego de 45 s tiene una velocidad de 30 m/s.
Calcular su aceleración.

A) 0,67 m/s^2 B) 0,6 m/s^2 C) 1,5 m/s^2
D) 1,2 m/s^2 E) 1,8 m/s^2

13. Un gato corre a una velocidad de 3 m/s y al ver a un ratón aumenta su velocidad constantemente hasta alcanzarlo, luego de 10 s, cuando llevaba una velocidad de 15 m/s. Calcular su aceleración

A) 12 m/s^2 B) 1,2 m/s^2 C) 1,5 m/s^2
D) 2,4 m/s^2 E) 24 m/s^2

14. Un auto se mueve con velocidad de 45 m/s, desacelerando constantemente. Si luego de 3 s su velocidad se ha reducido a 30 m/s, ¿cuánto tiempo más debe transcurrir para lograr detenerse?

A) 3 s B) 6 s C) 9 s
D) 12 s E) 15 s

15. Una muchacha patina a una velocidad de 20 m/s, al ver un obstáculo frena de pronto y logra detenerse luego de 4 s. ¿Qué desaceleración le imprimieron los frenos?

A) $-4\ m/s^2$ B) $4\ m/s^2$ C) $-5\ m/s^2$
D) $5\ m/s^2$ E) $2\ m/s^2$

16. Un niño en su skateboard lleva una velocidad de 3 m/s. Cuando entra en una pendiente que le imprime una aceleración de $0{,}5\ m/s^2$ logra descender en 8 s. ¿Qué longitud tiene la pendiente?

A) 10 m B) 40 m C) 30 m
D) 80 m E) 20 m

17. Un ratón posee una velocidad constante v y un gato parte del reposo con una aceleración constante de $2\ m/s^2$ cuando esta 64 m delante del ratón. Determinar el v mínimo para que el ratón alcance al gato y qué tiempo demoró en alcanzarle.

A) 8 m/s, 4s B) 16 m/s, 8s C) 12 m/s, 6s
D) 65 m/s, 32s E) 3,6 m/s, 10s

18. Un automóvil ingresa a una avenida a razón de 36 km/h y acelerando a razón de $1\ m/s^2$ avanza 48m. ¿Qué tiempo le toma dicha operación?

A) 2 s B) 10 s C) 6 s
D) 8 s E) 4 s

19. Un automóvil parte del reposo y acelerando constantemente en 5 segundos recorre 50 m. Calcular el espacio que recorre en el tercer segundo de su movimiento.

A) 10 m B) 20 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

20. En el MRUV, se cumple que:

I. La aceleración varía.
II. El móvil recorre espacios diferentes en tiempos iguales.
III. El tiempo y la velocidad permanecen constantes.

A) I B) II C) III
D) I y II E) III y II

21. Cuál es el módulo de la aceleración de un móvil con MRUV, que cambia su velocidad de 40 m/s a 80 m/s en 10s.

A) $1\ m/s^2$ B) $2\ m/s^2$ C) $3\ m/s^2$
D) $4\ m/s^2$ E) $5\ m/s^2$

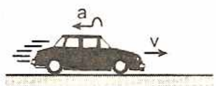
22. En relación a las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F):

I. En el MRUV, la aceleración es directamente proporcional a la variación de velocidad.
II. En el MRUV el modulo, la aceleración y el tiempo son inversamente proporcionales.
III. En el MRUV el módulo de la velocidad es constante.

A) FVF B) VVF C) VFV
D) FFV E) VVV

23. Para cierto instante, se muestra la velocidad v y la aceleración a de un móvil, luego se puede afirmar que:

I. El movimiento es acelerado.
II. El movimiento es desacelerado.
III. El móvil está en reposo.



A) I B) II C) III
D) I y III E) I y II

24. Por un punto A una partícula pasa con una rapidez de 40 m/s, 50 m más adelante la rapidez de la partícula es de 60 m/s. A qué distancia de A partió la partícula del reposo. La aceleración es constante.

A) 35 m B) 40 m C) 45 m
D) 50 m E) 55 m

25. Dos autos salen de un punto común. El primero con rapidez constante de 6 m/s y el otro desde el reposo con aceleración de módulo $2\ m/s^2$. Después de qué tiempo el segundo aventajará al primero en 16 m.

A) 2 s B) 4 s C) 6 s
D) 8 s E) 10 s

26. Un auto que parte del reposo con MRUV, acelera a razón $4\ m/s^2$ debiendo recorrer 1200 m para llegar a su destino, sin embargo cuando le faltan 400 m deja de acelerar y mantiene constante su velocidad hasta llegar a su destino. ¿Qué tiempo empleo el auto para llegar a su meta?

A) 20 s B) 25 s C) 30 s
D) 15 s E) 10 s

27. Frente a un poste se ubica un auto en reposo, el cual empieza a moverse con aceleración constante de $0{,}5\hat{\imath}\ m/s^2$, si 12,5 s antes delante del poste pasó un motociclista con una rapidez constante de $10\hat{\imath}\ m/s$. ¿A qué distancia del poste el auto dará alcance al motociclista?

A) 600 m B) 615 m C) 620 m
D) 625 m E) 630 m

28. Un automóvil con una rapidez de 180 km/h desacelera a razón de 5 m/s en cada segundo. Calcular después de qué tiempo y distancia recorrida se detiene.

A) 10s; 250 m B) 5 s, 200 m
C) 8s; 260 m D) 12s; 150 m
E) 15s; 300 m

29. Un móvil con MRUV parte del reposo y se desplaza durante 30 s, en este instante tiene una rapidez de 90 m/s. Hallar que rapidez tenia a los 6 s de iniciado su recorrido.

A) 15 m/s B) 16 m/s C) 17 m/s
D) 18 m/s E) 20 m/s

30. Un móvil parte del reposo, con aceleración del módulo 6 m/s^2 desplazándose con MRUV. Calcular la distancia recorrida cuando el móvil alcanza una rapidez de 60 m/s.

A) 100 m B) 200 m C) 300 m
D) 400 m E) 500 m

31. Un auto en un determinado instante pasa por un punto A con una rapidez de 20 m/s y 2 minutos después pasa por un punto B con una rapidez de 140 m/s. Hallar el módulo de su aceleración.

A) 6 m/s^2 B) 20 m/s^2
C) 10 m/s^2 D) 1 m/s^2
E) 0,5 m/s^2

32. Un auto parte del reposo con MRUV y recorre en los 4 primeros segundos 48 m. Cuánto recorre en los 4 segundos siguientes:

A) 192 m B) 240 m C) 144 m
D) 182 m E) 212 m

33. Un motociclista parte del reposo con una aceleración de 8 m/s^2. Calcular el espacio recorrido en el 8.° segundo.

A) 60 m B) 50 m C) 40 m
D) 30 m E) 20 m

34. Dos amigos están separados 245 m. Si parten del reposo uno hacia el otro con aceleraciones de 6 m/s^2 y 4 m/s^2. ¿Qué tiempo después estarán separados 475 m?.

A) 9 s B) 8 s C) 12 s
D) 6 s E) 5 s

35. Dos móviles parten del reposo simultáneamente y de un mismo punto, acelerando sobre una recta en el mismo con aceleraciones de módulo 4 m/s^2 y 2 m/s^2. ¿Qué tiempo después estarán separados 400 m?

A) 10 s B) 14 s C) 18 s
D) 20 s E) 22 s

36. Un móvil con MRUV recorre 400 m en 10 s con aceleración de módulo 2 m/s^2. ¿Cuál es su rapidez de partida?

A) 10 m/s B) 20 m/s C) 30 m/s
D) 40 m/s E) 50 m/s

37. Un móvil parte del reposo con una aceleración constante y cuando lleva recorrido 405 m, su rapidez es de 90 m/s. El módulo de su aceleración es:

A) 10 m/s^2 B) 9 m/s^2 C) 8 m/s^2
D) 7 m/s^2 E) 6 m/s^2

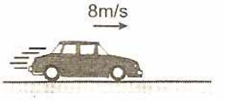
38. Un cuerpo parte del reposo con MRUV y avanza 4 m en el primer segundo de su movimiento. ¿Cuánto avanza en los 6 s siguientes?

A) 172 m B) 162 m C) 182 m
D) 192m E) 200 m

39. Un móvil que viaja con MRUV, triplica su rapidez luego de recorrer 200 m empleando 10 s. Calcule el valor de la aceleración que experimenta.

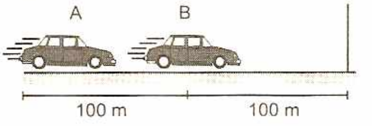
A) 1 m/s^2 B) 2 m/s^2 C) 3 m/s^2
D) 4 m/s^2 E) 5 m/s^2

40. El automóvil experimenta un MRUV. Determine su rapidez 3 s después del instante mostrado, si 2 s antes presentaba una rapidez de 4 m/s.



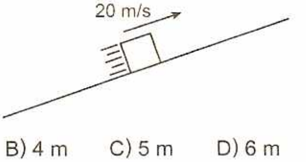
A) 12 m/s B) 14 m/s C) 16 m/s
D) 18 m/s E) 20 m/s

41. Dos autos A y B parten del reposo tal como se indica. Determine la relación de los módulos de sus aceleraciones $\left(\frac{a_A}{a_B}\right)$ si estos logran pasar simultáneamente juntos. (Considere MRUV).



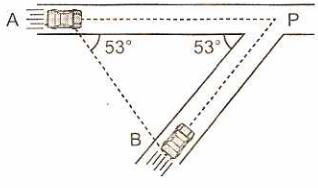
A) 1 B) 2 C) 3
D) 0,5 E) 0,3

42. El bloque es lanzado con 20 m/s, tal como se muestra, y luego de 5 s se detiene. Si el bloque realiza MRUV; determine su recorrido en el penúltimo segundo de su movimiento.



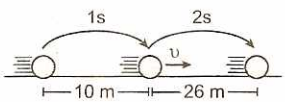
A) 2 m B) 4 m C) 5 m D) 6 m E) 8 m

43. Si el móvil B inicia su movimiento cambiando su rapidez 8 m/s en 2 s y llega al punto P en 5 s. Si A parte del reposo 1 s después de B y choca con B en el punto P, determine la aceleración del móvil A. (Considere que realizan MRUV).



A) 10 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) $\frac{10}{3}$ m/s^2
D) $\frac{20}{3}$ m/s^2 E) 7,5 m/s^2

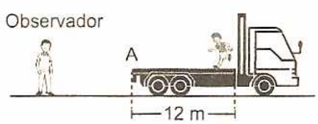
44. El grafico muestra un móvil que realiza MRUV en 3 Instantes; determine v



A) 9 m/s   B) 11 m/s   C) 14 m/s
D) 15 m/s   E) 20 m/s

45. En el grafico se muestra a un joven que empieza a trotar con 1 m/s respecto del camión (manteniendo constante dicha rapidez) y simultáneamente el trailer inicia su movimiento con una aceleración constante de $+0{,}25\ \hat{\imath}$ m/s^2. Determine el módulo de la velocidad media del joven respecto del observador hasta el instante en el que llega al extremo A del tráiler.

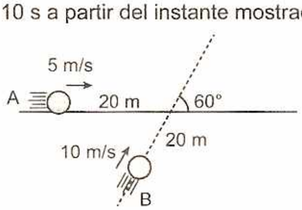
A) 1 m/s
B) 0,1m/s
C) 0,5 m/s
D) 5 m/s
E) 2,5 m/s



46. De un mismo lugar, 3 autos A, B y C parten simultáneamente del reposo con aceleraciones constantes de 2 m/s^2, 4 m/s^2 y 6 m/s^2, respectivamente, en la misma dirección sobre una pista rectilínea. ¿Al cabo de que tiempo de iniciado el movimiento el móvil B equidista de los autos A y C 100 m?.

A) 6 s   B) 8 s   C) 12 s   D) 15 s   E) 10 s

47. Dos móviles se desplazan sobre un plano horizontal; si el móvil A experimenta un MRUV con aceleración de módulo 1 m/s^2 y el móvil B experimenta un MRU, determine la separación de los móviles luego de 10 s a partir del instante mostrado.



A) 40 m   B) 50 m   C) 70 m
D) 80 m   E) 100 m

48. Dos buses se mueven con rapidez constante de 5 m/s cada uno, separados una distancia d sobre una pista rectilínea. Si de pronto el bus que se encuentra detrás empieza a acelerar a razón constante de 2 m/s^2, tal que el tiempo que emplea desde que alcanza al bus de adelante hasta que termina de cruzarlo completamente es de 2 s, ¿qué distancia estaban separados los buses inicialmente? (Considere que los dos buses son de longitud igual a 10 m)

A) 17 m   B) 20 m   C) 12 m
D) 8 m   E) 16 m

49. ¿En qué tiempo adquirirá un cuerpo una rapidez de 54 km/h, si parte con MRUV con una rapidez de 3 m/s y con una aceleración de 2 m/s^2? Halle, también, la distancia recorrida.

A) 4 s; 58 m   B) 3 s; 48 m   C) 5 s; 72 m
D) 8 s; 62 m   E) 6 s; 54 m

50. Un auto con MRUV logra duplicar su rapidez en 4 s, recorriendo una distancia de 48 m. Determinar la aceleración del auto.

A) 4 m/s^2 B) 8 m/s^2 C) 6 m/s^2
D) 3 m/s^2 E) 2 m/s^2

51. Un auto que describe un MRUV para triplicar su rapidez recorre una distancia de 80 m y demora para eso 5 s. Determinar la aceleración del auto.

A) 6,4 m/s^2 B) 12,8 m/s^2 C) 3,2 m/s^2
D) 1,6 m/s^2 E) 0,8 m/s^2

52. Un móvil parte del reposo y se desplaza con una aceleración constante recorriendo 18 m en los tres primeros segundos. Calcular la distancia que recorrerá durante los 7 s siguientes.

A) 200 m   B) 42 m   C) 84 m
D) 182 m   E) 21 m

53. Un cuerpo parte del reposo con MRUV y avanza 54 m en los 6 primeros segundos. ¿Cuánto avanza en los 4 s siguientes?.

A) 82 m   B) 96 m   C) 100 m
D) 54 m   E) 150 m

54. Un auto parte del reposo con MRUV y viaja cierta distancia entre dos ciudades con aceleración con módulo de 2,5 m/s^2 alcanzando una rapidez de 80 m/s. Hallar la distancia entre ambas ciudades.

A) 1840 m   B) 1280 m   C) 1460 m
D) 1620 m   E) 1680 m

55. Un carro parte del reposo y viaja una distancia de 2 km, entre dos ciudades con una aceleración

constante de magnitud 2,4 m/s^2. Determinar la máxima rapidez alcanzada por el auto.

A) $20\sqrt{2}$ m/s B) $20\sqrt{2}$ m/s C) $40\sqrt{2}$ m/s
D) $40\sqrt{2}$ m/s E) $40\sqrt{6}$ m/s

56. Si un atleta, partiendo del reposo, realiza un MRUV, recorriendo 9 m en 3 s. ¿Cuánto demora en recorrer los primeros 100 m?.

A) 40 s B) 25 s C) 20 s D) 15 s E) 10 s

57. Dos partículas están separadas una distancia de 12 m, se acercan mutuamente con rapidez de 4 m/s y 8 m/s y presentan aceleraciones contrarias a su velocidad inicial, la primera de 2 m/s^2 y la otra de a m/s^2 respectivamente. Determine el valor de a para que no se crucen.

A) $a > 2$ B) $a > 0$ C) $a = 0$
D) $a > 4$ E) $2 \leq a \leq 4$

58. Un auto que se desplaza con una rapidez constante de 10 m/s se pasa la luz roja de un semáforo; 6,6 s después un policía de tránsito ubicado junto al semáforo acciona su silbato; si la rapidez del sonido en el aire es 340 m/s aproximadamente; ¿a qué distancia del semáforo se detendrá el auto si el conductor al oír el silbato reacciona en 0,3 s y aplica los frenos generando una desaceleración uniforme de 25 m/s^2?.

A) 60 m B) 65 m C) 70 m
D) 73 m E) 80 m

59. ¿En qué segundo la distancia recorrida por un móvil en ese segundo y su aceleración estarán en la relación de 7 a 2? El móvil partió del reposo.

A) 2.° B) 3.° C) 4.°
D) 5.° E) 6.°

60. Una partícula describe un MRUV y tiene una rapidez V = 10 m/s en el instante t = 2 s y una rapidez V = 30 m/s en el instante t = 7 s. ¿Cuál es la rapidez de la partícula, después de haber recorrido una distancia d = 4 m a partir del instante t = 0?.

A) 6 m/s B) 8 m/s C) 4 m/s
D) 2 m/s E) 10 m/s

61. Un móvil parte del reposo y la magnitud de su aceleración uniforme es 3 m/s^2. Cierto tiempo después de la partida, aplica los frenos siendo la magnitud de su desaceleración de 6 m/s^2 hasta detenerse. Si su viaje duró 30 s ¿qué distancia logro recorrer?.

A) 450 m B) 600 m C) 300 m
D) 900 m E) 1200 m

62. Un móvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con una aceleración constante de magnitud 2 m/s^2 y 5 s; después de haber pasado por un punto "A" de su trayectoria, tiene una rapidez de 72 km/h. Calcular cuál era su rapidez 9 m antes de llegar al punto A.

A) 10 m/s B) 8 m/s C) 20 m/s
D) 4 m/s E) 15 m/s

CLAVES

1. A	9. D	17. B	25. D	33. A	41. B	49. E	57. D
2. A	10. A	18. E	26. B	34. C	42. D	50. E	58. D
3. C	11. C	19. A	27. D	35. D	43. E	51. C	59. C
4. A	12. A	20. B	28. A	36. C	44. B	52. D	60. A
5. D	13. B	21. D	29. D	37. A	45. C	53. B	61. D
6. E	14. B	22. B	30. C	38. D	46. E	54. B	62. B
7. E	15. C	23. B	31. D	39. B	47. D	55. E	
8. C	16. B	24. B	32. C	40. B	48. E	56. E	

MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL

Ley de movimiento

En el movimiento unidimensional, es el vector posición en el eje x. Determina la posición de la partícula o punto material en el eje x en cada instante de tiempo.

Ejemplo:

Un cuerpo tiene la siguiente ley del movimiento: $x(t) = 3 + 4t + t^2$, donde t se mide en segundos y x se mide en metros. ¿Dónde se encuentra en el instante t = 0?

Resolución:

Analizando la ley de movimiento. En el instante t = 0 s

$x_0 = 3 + 4(0) + (0)^2 = +3$ m

la partícula se encuentra en la posición x = 3 m

Velocidad media ($\vec{v}_m$)

Es aquella magnitud física vectorial que expresa la rapidez de cambio de posición de un móvil, evaluada en un intervalo de tiempo. La velocidad media v_m es colineal y del mismo sentido que el desplazamiento, es decir la velocidad media tiene la misma dirección del desplazamiento.

La velocidad media se evalúa entre dos puntos de la trayectoria. Matemáticamente se expresa así:

$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$; la velocidad media es independiente de la trayectoria.

Para un movimiento unidimensional en el eje x se expresa así:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{\Delta t}} \quad ...(3.21)$$

Ejemplo:

Se conoce la ley del movimiento de una partícula que se mueve en el eje x.

$x_t = 3t^2 - 12t + 5$, donde t se mide en segundos y x en metros.

a. Determinar la posición en el instante t = 1 s.
b. Determinar la posición en el instante t = 5 s.
c. Determinar la velocidad media en el intervalo de t = 1 s hasta t = 5 s
d. ¿En qué instante la velocidad es nula?

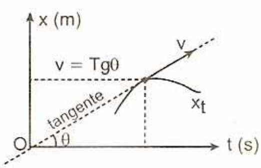
Resolución:

a. La posición en el instante t = 1 s, es: $x_1 = -4$ m
b. La posición en el instante t = 5 s, es: $x_5 = +20$ m
c. La velocidad media es: $\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{\Delta t}$

Entonces tenemos que: $v_m = \frac{20-(-4)}{5-1} = 6$ m/s

Velocidad instantánea ($\vec{v}$)

Es aquella magnitud física que expresa la rapidez probable de cambio de posición que tiende a poseer o posee un móvil en un instante de tiempo. Matemáticamente la velocidad instantánea viene a ser el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.



Se define como:

$$\boxed{\vec{v}_{\text{instantánea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m} \quad ...(3.22)$$

Con el uso del cálculo diferencial, la velocidad instantánea se expresa así:

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}$

Se lee derivada de la posición respecto del tiempo.

Para un movimiento unidimensional en el eje x.

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}$, se lee derivada de la posición en el eje x respecto del tiempo. Donde "x" es un polinomio cuya variable es el tiempo.

Unidades de la velocidad: cm/s; m/s; km/h

La velocidad instantánea se representa mediante un vector tangente a la curva.

Ejemplo:

La posición de una partícula en el eje x se define mediante la ley: $x_t = 4 + 5t + 6t^2 + 2t^3$, donde t se mide en segundos y x en metros. Determinar la velocidad de la partícula en el instante t = 5 s.

Resolución:

La velocidad se define como la derivada de la posición respecto del tiempo:

$v_t = \frac{dx}{dt} = 0 + 5t^0 + 6(2t^1) + 2(3t^2)$

Cálculo de la rapidez para t = 5 s

v = 5 + 60 + 150 = 215 m/s

Cálculo de la velocidad para t = 5 s

$v = 215\,\hat{i}$ m/s

Aceleración media ($\vec{a}_m$)

Es aquella magnitud física vectorial que mide la razón con que cambia la velocidad del móvil en módulo y dirección. Si el movimiento es en una dimensión, como por ejemplo en el eje x:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}} \quad ...(3.23)$$

Ejemplo:

Una partícula tiene la velocidad variable sobre el eje x. Determinar la aceleración media en el intervalo de t = 1 s hasta t = 3 s.

Resolución

la velocidad en t = 1s

$v_1 = 6$ m/s

La velocidad es t = 2 s

$v_2 = 40$ m/s

La aceleración media es:

$\vec{a}_m = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{40-6}{2-1} = 34$ m/s^2

Aceleración instantánea ($\vec{a}$).

Es aquella magnitud física vectorial que mide la razón con que cambia la velocidad del móvil e módulo y dirección. Matemáticamente la aceleración se define como la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

Si el movimiento es en una dimensión, como por ejemplo en el eje x:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{i}} \quad ...(3.24)$$

Ejemplo:

Una partícula tiene la velocidad variable sobre el eje x: $v_t = 4 + 10t - 8t^3$

Determinar la aceleración en el instante t = 3 s.

Resolución:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(4 + 10t - 8t^3) \Rightarrow \vec{a} = 10 - 24t^2$

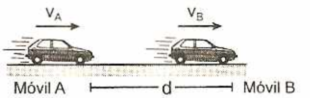
Para t = 3 s:

$\vec{a} = 10 - 24(3)^2 = -206$ m/s^2

Velocidad relativa

Es la velocidad del cuerpo A respecto de un observador ubicado en el cuerpo B que también se mueve. La velocidad de A respecto de B, se define como la diferencia de las velocidades.

$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$



Velocidad relativa

La velocidad relativa de A respecto de B, es el vector diferencia entre la velocidad de A (minuendo) y la velocidad de B (sustraendo).

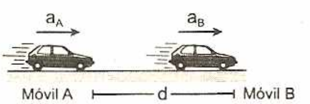
Principio de relatividad de Galileo. La velocidad absoluta del móvil A, es igual a la velocidad del móvil B más la velocidad relativa de A respecto de B.

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

Aceleración relativa

Es la aceleración del cuerpo A respecto de un observador ubicado en el cuerpo B que también se mueve con aceleración constante. La aceleración de A respecto de B, se define como la diferencia de las aceleraciones.

$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$



Aceleración relativa

MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE VERTICAL

- El movimiento es de caída libre, cuando la única fuerza que actúa sobre la partícula es su propio peso, por consiguiente la aceleración que adquiere el móvil es g, la aceleración de la gravedad.
- En este tipo de movimiento la partícula tiene como trayectoria una línea vertical. Para nuestro caso particular, vamos a despreciar la fuerza de resistencia del aire y considerar la aceleración de la gravedad:
  $g = 9{,}8$ m/s^2.

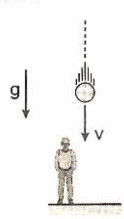


Fig. 3.24.a

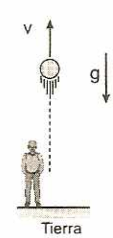


Fig. 3.24.b

Consideraciones:

1. La altura máxima alcanzada por la partícula es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la gravedad con la altura.
2. La velocidad máxima alcanzada por la partícula es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire.

El movimiento de Caída Libre Vertical, en un MRUV, donde la aceleración de la gravedad g permanece constante.

Aceleración de la gravedad

Todos los cuerpos abandonados cerca de la superficie terrestre adquieren una aceleración común, independientemente de su masa, denominada aceleración de la gravedad y denotada con la letra g.

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Se representa por un vector vertical hacia abajo: $\vec{g}$

Posición de una partícula en caída libre

I. Cuando el cuerpo (o partícula) es lanzado verticalmente hacia arriba desde el nivel de referencia.

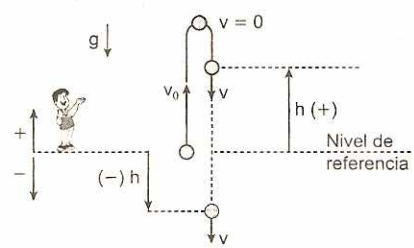


Fig. 3.25

h(+): cuando el cuerpo está sobre el nivel de referencia.

h(−): cuando el cuerpo está debajo del nivel de referencia.

1. $\boxed{h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$ ...(3.25)
2. $\boxed{v_f = v_0 - gt}$ ...(3.26)
3. $\boxed{v_f^2 = v_0^2 - 2gh}$ ...(3.27)

Gráfica v-t

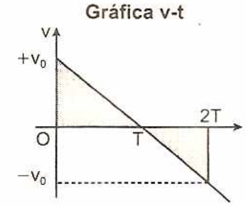


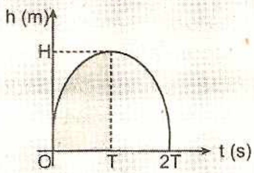
Fig. 3.26

Velocidad nula

En el instante que la partícula alcanza su máxima altura, la velocidad es nula.

Gráfica: Altura - Tiempo (h-t)

- En el instante T alcanza la máxima altura.
- En el instante 2T se encuentra otra vez en el nivel de referencia.
- La curva es una parábola.



II. Cuando el cuerpo (o partícula) es lanzado verticalmente hacia abajo desde el nivel de referencia, como muestra la figura 3.27.

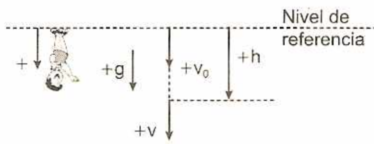
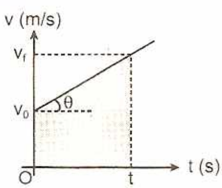


Fig. 3.27

Convencionalmente, los vectores con sentido hacia abajo tienen signo positivo, es decir, invertimos nuestro sistema de referencia.

1. $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ ...(3.28)
2. $v_f = v_0 + gt$ ...(3.29)
3. $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$ ...(3.30)

Donde: $g = \tan\theta = 9{,}8\ m/s^2$



Ejemplo:

Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba (fig. 3.28) con una velocidad $v_0 = 40$ m/s en el instante $t = 0$. Si consideramos $g = 10\ m/s^2$, entonces podemos afirmar que:

a) Para calcular el instante t, que el cuerpo pasa por el punto B se aplica la ecuación 3.25:

$h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 60 = 40t - 5t^2$

$5t^2 - 40t + 60 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t - 2)(t - 6) = 0 \Rightarrow t_1 = 2\ s$ y $t_2 = 6\ s$

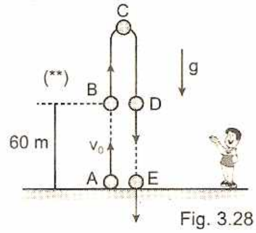


Fig. 3.28

En el instante t = 2 s el cuerpo está de subida pasando por B y en el instante t = 6 s el cuerpo está de bajada pasando por el punto D, ambos puntos están a 60 m del nivel de referencia (la Tierra).

b) La velocidad en el punto B se obtiene con la fórmula 3.26: $v_f = v_0 - gt \Rightarrow v_f = 40 - 10(2) = +20$ m/s

c) La velocidad en el punto D se obtiene con la fórmula 3.26:

$v_f = v_0 - gt \Rightarrow v_f = 40 - 10(6) = -20$ m/s

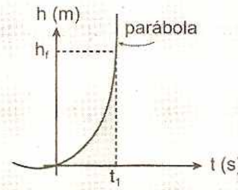
El signo (−) negativo, significa que el cuerpo a invertido el sentido de su movimiento.

d) El tiempo de subida se obtiene con la ecuación 3.26 aplicando al tramo AC:

$v_f = v_0 - gt$ (la velocidad final en C es cero)

$0 = 40 - 10t \Rightarrow t = 4$ s

Gráfica : Altura - Tiempo (h-t)



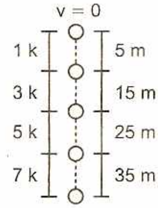
La curva es una parábola.

Simetría del movimiento

- El tiempo de subida es igual al tiempo de bajada: $t_{AC} = t_{CE}$ y $t_{BC} = t_{CD}$
- Velocidad de salida es igual a la velocidad de llegada, en módulo: $v_B = v_D$ y $v_A = v_E$

Casos especiales:

1. Como el tiempo de subida y de bajada son iguales, el tiempo de vuelo es: $t_{vuelo} = \dfrac{2v_0}{g}$
2. La altura máxima se obtiene con la siguiente fórmula: $h_{máx.} = \dfrac{v_0^2}{2g}$
3. Números de Galileo:



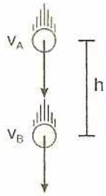
$g = 10\ m/s^2$

En general: $k = \frac{g}{2} = \frac{10}{2} = 5$

La distancia que recorre el móvil en cada segundo es directamente proporcional a números impares.

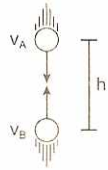
4. **Tiempo de alcance.** Si dos cuerpos se mueven verticalmente en forma simultánea y en el mismo sentido se puede aplicar:

$$t = \frac{h}{v_A - v_B};\ v_A > v_B$$



5. **Tiempo de encuentro.** Si dos cuerpos se mueven verticalmente en forma simultánea y en sentidos contrarios, se puede aplicar:

$$t = \frac{h}{v_A + v_B}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos cuerpos iguales se encuentran a una altura de 20 m; uno se deja caer y simultáneamente el otro se lanza hacia abajo con una velocidad de 15 m/s. Calcular la diferencia de tiempo en llegar al piso. $g = 10\ m/s^2$.

Resolución:

Apliquemos la siguiente fórmula:

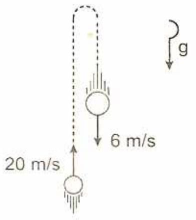
$h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2$

Primera piedra: $20 = 0 + \frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t_1 = 2\ s$

Segunda piedra: $20 = 15t + \frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t_2 = 1\ s$

Luego la diferencia de tiempos es igual a 1 s.

2. Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con velocidad de 20 m/s. Calcular el tiempo que demora en alcanzar una velocidad de 6 m/s por segunda vez. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

$v_f = v_0 - gt \Rightarrow -6 = 20 - 10t \quad \therefore\ t = 2{,}6\ s$

(−) El signo negativo se debe al sentido hacia abajo de la velocidad final.

3. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 44 m/s. ¿Después de qué tiempo estará descendiendo con una velocidad de 6 m/s? $g = 10\ m/s^2$

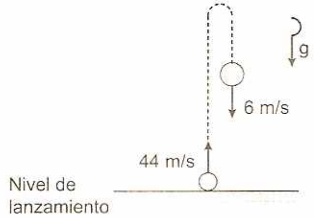
Resolución:

El signo negativo de la velocidad en la fórmula se debe al sentido hacia abajo de la velocidad final.

$v_f = v_0 - gt \Rightarrow -6 = 44 - 10t$

Luego: $t = 5\ s$

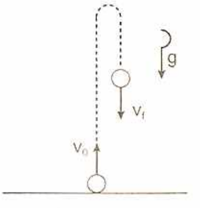
De la condición del problema, la piedra inicia su movimiento vertical hacia arriba, entonces, la aceleración es negativa.



4. Se lanza una piedra desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 50 m/s. Si después de un tiempo t la piedra se encuentra acercándose a la Tierra con una velocidad de 30 m/s, hallar t. $g = 10\ m/s^2$.

Resolución:

Convencionalmente el signo de la velocidad es positivo (+) hacia arriba y negativo (−) cuando tiene sentido hacia abajo.

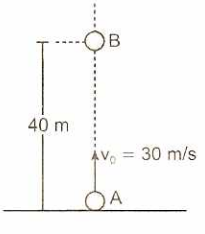


$v_f = v_0 - gt$

$(-30) = (50) - (10)t$

$\therefore\ t = 8\ s$

5. Se muestra el lanzamiento vertical de una esfera en el punto A con rapidez $v_0 = 30\ m/s$. Determinar la rapidez de la esfera cuando pasa por el punto B. ($g = 10\ m/s^2$)



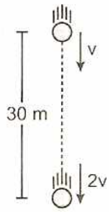
Resolución:

Aplicamos la siguiente ecuación del movimiento:

$v_f^2 = v_0^2 - 2gh \Rightarrow v_B^2 = (30)^2 - 2(10)(40)$

$v_B^2 = 100 \quad \therefore\ v_B = 10$ m/s

6. En cierto planeta una partícula en caída libre duplica su rapidez luego de recorrer 30 m en 2 segundos. Determinar la aceleración de la gravedad (en m/s^2).



Resolución:

Cálculo de la rapidez v:

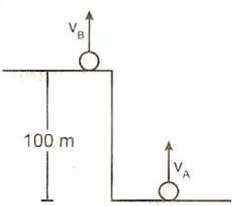
$$h = \frac{(v_0 + v_f)}{2}t \Rightarrow 30 = \frac{(v + 2v)}{2}(2)$$

Resolviendo: v = 10 m/s

Cálculo del módulo de la aceleración de la gravedad:

$$\therefore\ g = \frac{v_B - v_A}{t} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

7. Se muestra el lanzamiento vertical de dos esferas simultáneamente con rapideces de $v_A = 80$ m/s y $v_B = 30$ m/s. ¿Después de cuántos segundos las esferas se encuentran a la misma altura? (g = 10 m/s^2)

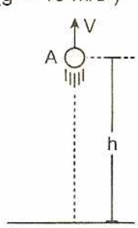


Resolución:

Los móviles están separados inicialmente 100 metros en la vertical. Aplicando la fórmula práctica:

$$t_{alcance} = \frac{H}{v_A - v_B} \Rightarrow t_{alcance} = \frac{100}{80 - 30} = 2 \text{ s}$$

8. Se muestra el lanzamiento de una partícula, con rapidez v = 20 m/s desde una altura h = 300 m. ¿Después de cuántos segundos llegará a la superficie terrestre? (g = 10 m/s^2)



Resolución:

El desplazamiento de la piedra finalmente es 300 metros vertical hacia abajo (signo negativo). Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Reemplazando tenemos:

$$-300 = 20t - \frac{1}{2}(10)t^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$-60 = 4t - t^2 \quad \therefore\ t = 10 \text{ s}$$

9. Desde un globo a 75 m sobre el suelo, que asciende verticalmente con rapidez de 10 m/s, se suelta un saco de lastre, determinar el intervalo de tiempo que le toma llegar al suelo. (g = 10 m/s^2)

Resolución:

La velocidad inicial del saco es 10 m/s hacia arriba (por inercia) respecto de nuestro observador ubicado en la Tierra. Aplicamos la ecuación del movimiento que relaciona la posición y el tiempo:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

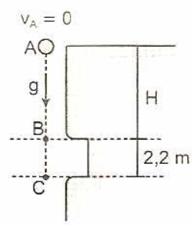
Reemplazando tenemos:

$$-75 = 10t - \frac{1}{2}(10)t^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$-15 = 2t - t^2 \quad \therefore\ t = 5 \text{ s}$$

10. Se deja caer un objeto desde la azotea de un edificio. Cuando pasa cerca a una ventana de 2,2 m de altura, se observa que el objeto invierte 0,2 s en recorrer la altura de la ventana. ¿Qué distancia existe entre la cima del edificio y la parte superior de la ventana? g = 10 m/s^2.



Resolución:

En el tramo AC: $(H + 2,2) = \frac{1}{2}gt^2$ ...(1)

En el tramo AB: $H = \frac{1}{2}g(t - 0,2)^2$ ...(2)

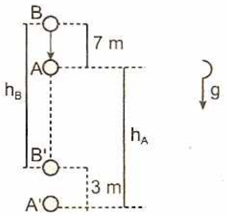
(2) en (1): t = 1,2 s

Reemplazando en (2): $H = \frac{1}{2}(10)(1,2 - 0,2)^2$

$\therefore\ H = 5$ m

11. Desde el penúltimo piso de un edificio se deja caer (v = 0) una piedra, al mismo tiempo (t = 0) que del último piso se lanza hacia abajo otra piedra con una velocidad inicial de 4 m/s. La distancia entre cada piso es de 7 m. Calcular al cabo de qué tiem-

po estarán separadas las piedras 3 m. Dar como respuesta el tiempo mínimo. $g = 10\ m/s^2$.



Resolución:

De la figura:

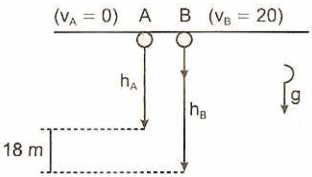
$h_B + 3 = h_A + 7 \Rightarrow h_B - h_A = 4$ ...(1)

Reemplazando en (1): $4t + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = 4$

$\Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1{,}0\ s$

En el segundo caso B' se encuentra 3 m delante de A'.

12. Se deja caer una esfera y al mismo tiempo se lanza hacia abajo otra esfera con una velocidad de 20 m/s. ¿Después de cuánto tiempo la distancia entre ellas es de 18 m? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Las partículas inician su movimiento del mismo nivel de lanzamiento.

De la figura: $h_B - h_A = 18$

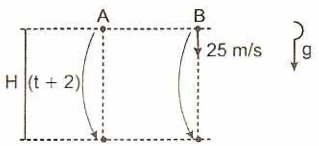
$v_Bt + \frac{1}{2}gt^2 - v_At - \frac{1}{2}gt^2 = 18$

$\Rightarrow v_Bt - v_At = 18$

$20t - 0 = 18$

Luego el tiempo es: $t = 0{,}9\ s$

13. Un cuerpo A se deja caer a partir del reposo desde una cierta altura y después de 2 s otro cuerpo B se lanza verticalmente hacia abajo desde el mismo lugar de donde se dejó caer A, con una velocidad inicial de 25 m/s. Hallar a qué distancia del nivel de lanzamiento se producirá el encuentro de los cuerpos.
($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Sea t el tiempo que estuvo en movimiento B hasta alcanzar al móvil A.

De la fórmula: $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

Para A: $H = 5(t + 2)^2$ ...(1)

Para B: $H = 25t + 5t^2$ ...(2)

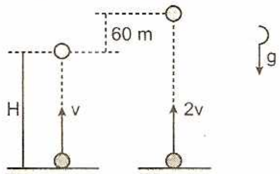
(1) = (2): $5(t + 2)^2 = 25t + 5t^2$

Resolviendo: $t = 4\ s$

Reemplazando en (1):

$\therefore\ H = 180\ m$

14. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba, desde la superficie de la Tierra, con una cierta velocidad inicial v que permite alcanzar una altura máxima H. Si dicha velocidad inicial se duplicara, su altura máxima aumentaría en 60 m. Hallar H.



Caso (1) Caso (2)

Resolución:

En el primer caso: $v_f^2 = v_0^2 - 2gH$

Pero: $v_f = 0 \Rightarrow v^2 = 2gH$ ...(1)

En el segundo caso: $v_f^2 = v_0^2 - 2gH$

$0 = (2v)^2 - 2g(H + 60)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $H = 20\ m$.

15. En cierto planeta la aceleración de la gravedad es la cuarta parte de la aceleración de la gravedad en la Tierra. En la Tierra se abandona una moneda desde una altura h y demora en llegar al piso un tiempo $t_1 = 3\ s$. Si repetimos la misma experiencia en este planeta, ¿cuánto tiempo demora la moneda en llegar al piso?

Resolución:

En general, en cualquier planeta, se cumple que:

$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

En la Tierra: $h = \frac{1}{2}g_Tt_1^2$ ...(1)

En el planeta: $h = \frac{1}{2}\left(\frac{g_T}{4}\right)t_2^2$ ...(2)

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$t_2 = 2t_1 \quad \therefore\ t_2 = 6\ s$

16. Una moneda se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad de 15 m/s, en caída libre. ¿Qué espacio recorre la moneda en el quinto segundo de su movimiento?

Resolución:

El espacio recorrido por una partícula en el enésimo segundo de su movimiento será:

$x = v_0 \pm \frac{1}{2}g(2n - 1)$

(+): cuando baja; (−): cuando sube

En este caso: $v_0 = 15\ m/s$; $n = 5$

Reemplazando: $x = 15 + \frac{1}{2}(10)(9) \quad \therefore\ x = 60\ m$

17. Se suelta un cuerpo desde una altura H. Si recorre la mitad de esta altura durante el 4.° segundo de su caída, hallar H. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

El espacio x recorrido por una partícula en el enésimo segundo de su movimiento será:

$x = v_0 \pm \frac{1}{2}g(2n - 1)$

(+): cuando baja

(−): cuando sube

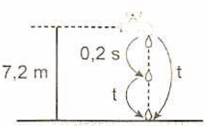
En este caso: $v_0 = 0 \wedge n = 4$

Reemplazando los datos:

$x = 0 + \frac{1}{2}(10)(8 - 1) \Rightarrow x = 35 \quad \therefore H = 70\ m$

18. De un caño cae una gota cada 0,1 s, si cuando está por caer la tercera gota se abre la llave y sale un chorro de agua. ¿Con qué velocidad debe salir dicho chorro para que alcance a la primera gota, justo cuando llegue al piso? El caño se encuentra a una altura de 7,2 metros del piso. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:



1. Para la primera gota:

   $h = \frac{1}{2}gt^2$

   Reemplazando:

   $7{,}2 = 5(t + 0{,}2)^2$

   Resolviendo: $t = 1\ s$

2. Para el chorro: $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

   Reemplazando: $7{,}2 = v_0(1) + 5(1)$

   $\therefore V_0 = 2{,}2\ m/s$

19. Un cuerpo que se encuentra cayendo libremente choca con la superficie de la Tierra, con una velocidad de 40 m/s. Determinar el tiempo que tarda en recorrer los últimos 60 m. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

Aplicamos la siguiente fórmula:

$h = v_it \pm \frac{1}{2}gt^2 \qquad ...(1)$

(+): cuando sube (retardado)

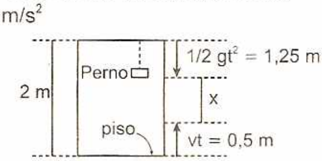
(−): cuando baja (acelerado)

Reemplazando datos en (1): $60 = 40t - \frac{1}{2}(10)t^2$

$\Rightarrow 12 = 8t - t^2 \quad \therefore t = 2\ s$

20. Del techo de un ascensor de 2 m de altura se desprende un perno en el mismo instante del arranque (en reposo) del ascensor que luego sube con velocidad constante de 1 m/s. Calcular la distancia a que estará el perno del piso del ascensor 0,5 segundos después de iniciada la subida.

$g = 10\ m/s^2$



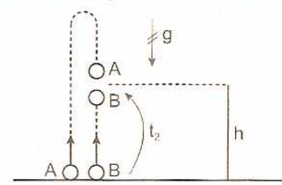
Resolución:

Para un observador ubicado en la tierra el perno sale del reposo con aceleración constante g, mientras que el piso del ascensor sube con velocidad constante. Para $t = 0{,}5\ s$ el perno desciende 1,25 m y el piso del ascensor sube 0,5 m. Sea x la distancia de separación entre el perno y el piso en el instante t.

De la figura tenemos: $1{,}25 + x + 0{,}5 = 2$

Luego: $x = 0{,}25\ m$

21. Un hombre lanza una pelota hacia arriba en forma vertical, 2 segundos más tarde lanza una segunda pelota hacia arriba, también en forma vertical y con la misma velocidad inicial que la primera. Observa que las dos pelotas chocan 0,4 segundos después que la segunda pelota fue lanzada. ¿Cuál es la velocidad inicial de las pelotas? Considere: $g = 10\ m/s^2$.



Resolución:

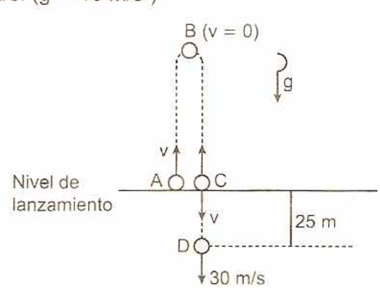
Hasta el instante del choque la primera pelota estuvo en movimiento $t_1 = 2{,}4\ s$ y la segunda $t_2 = 0{,}4\ s$. Cuando las pelotas chocan se encuentran a la misma altura: $h_A = h_B$

$v_0t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = v_0t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$

$\Rightarrow v_0(2{,}4) - 5(2{,}4)^2 = v_0\,(0{,}4) - 5(0{,}4)^2$

Resolviendo: $v_0 = 14\ m/s$

22. Una partícula es lanzada hacia arriba desde un cierto nivel horizontal. Determinar después de qué tiempo la partícula se encontrará a 25 m debajo del nivel de lanzamiento alejándose con velocidad de 30 m/s. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Cuando la particula regresa al nivel de lanzamiento tiene la misma velocidad de lanzamiento, en módulo, pero sentido opuesto.

Analizando el tramo CD: $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$

$30^2 = v^2 + 2(10)(25) \Rightarrow 900 = v^2 + 500 \Rightarrow v = 20\ m/s$

Además: $v_f = v_0 + gt$

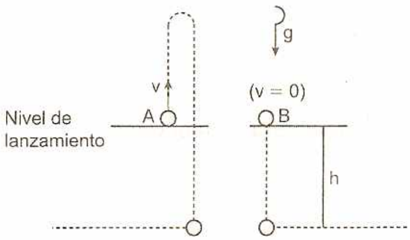
$30 = 20 + 10t \Rightarrow t_{CD} = 1$ s

Analizando el tramo BC: $v_f = v_0 + gt$

$\Rightarrow 20 = 0 + (10)t \Rightarrow t_{BC} = 2$ s

El tiempo en el tramo AB es también 2 s, por consiguiente $t = 5$ s

23. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio con una velocidad inicial de 30 m/s, otra piedra se deja caer 4 s después que se ha lanzado la primera. Hallar el tiempo en que después de soltar la segunda se encontrarán ambas a la misma altura. $g = 10$ m/s^2



Resolución:

Cuando se encuentran a la misma altura o nivel, la primera piedra estuvo en movimiento un intervalo de tiempo $(t + 4)$ y la segunda piedra un tiempo t.

Igualando los desplazamientos de las piedras A y B:

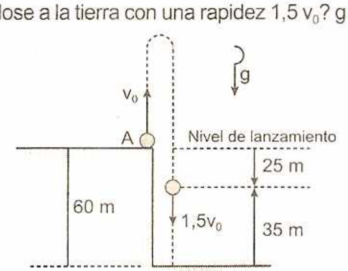
$h_A = h_B$

$v_A(t + 4) - \frac{1}{2}g(t + 4)^2 = -\frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 30(t + 4) - 5(t + 4)^2 = -5t^2$

Resolviendo: $t = 4$ s

24. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba, desde el borde de un acantilado de 60 m de altura, con una rapidez inicial v_0. ¿Después de qué tiempo de haber sido lanzado el cuerpo está a una altura de 35 m acercándose a la tierra con una rapidez $1{,}5\,v_0$? $g = 10$ m/s^2



Resolución:

1) Cálculo de v_0:

Sabemos que: $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$

Donde, h es el desplazamiento de la partícula con respecto al nivel de lanzamiento. $h > 0$ cuando el móvil se encuentra sobre el nivel de lanzamiento, en caso contrario (bajo el nivel) $h < 0$.

Entonces: $(-1{,}5v_0)^2 = v_0^2 - 2(10)(-25)$

$\Rightarrow 1{,}25v_0^2 = 500 \Rightarrow v_0 = 20$ m/s

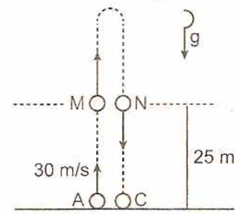
2) Cálculo del tiempo t:

Sabemos que: $v_f = v_0 - gt$

Donde, v_f es la velocidad final del móvil. $v_f > 0$, cuando el movimiento todavía es retardado (el cuerpo aún se mueve hacia arriba). $v_f < 0$, cuando el movimiento es acelerado (el cuerpo se mueve hacia abajo).

$\Rightarrow -30 = 20 - 10t \quad \therefore\ t = 5$ s

25. Un cuerpo cae libremente de una altura H impactando en la superficie terrestre con una velocidad de 30 m/s. Hallar el tiempo que ha empleado en recorrer los últimos 25 m. $g = 10$ m/s^2

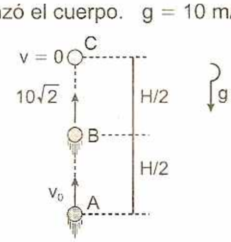


Resolución:

Cuando una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba, la velocidad de lanzamiento en A es igual a la velocidad de llegada en C, en dirección y módulo. La velocidad en los puntos M y N son iguales en módulo y dirección, pero sentidos opuestos. El tramo AM es equivalente a NC. Aplicando la fórmula en AM: $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 25 = 30t - 5t^2$

Resolviendo: $t = 1$ s

26. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba; si a la mitad del recorrido de su altura máxima su velocidad es de $10\sqrt{2}$ m/s, calcular la velocidad con que se lanzó el cuerpo. $g = 10$ m/s^2



Resolución:

Tramo BC:

$v_f^2 = v_0^2 - 2gh \Rightarrow 0 = 200 - 20(H/2) \Rightarrow H = 20$ m

Tramo AC: $v_f^2 = v_0^2 - 2gh$

$0 = v_0^2 - 2(10)(20) \Rightarrow v_0 = 20$ m/s

27. Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba ($t = 0$) con una velocidad de 40 m/s. Considerando la aceleración de la gravedad $g = 10$ m/s^2, determinar la gráfica v-t, hasta el instante que regresa a su posición inicial.

Resolución:

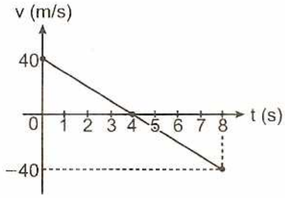
De la fórmula: $v_f = v_0 - gt$

Reemplazando: $v_f = 40 - 10t \qquad ...(\alpha)$

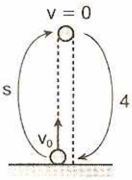
Graficando la función (α):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	40	30	20	10	0	−10	−20	−30	−40

El signo (−) significa que el sentido de la velocidad es hacia abajo.



28. Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad $v_0 = 40$ m/s ($t = 0$). Considerando la aceleración de la gravedad $g = 10$ m/s^2, determinar la gráfica, altura (h) versus tiempo (t).



Resolución:

1) Cálculo del instante t en que el cuerpo alcanza su altura máxima:

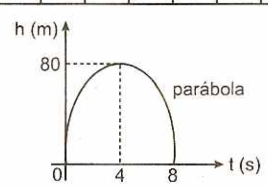
$v_f = v_0 - gt \Rightarrow 0 = 40 - 10t \Rightarrow t = 4$ s

2) De la fórmula: $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Reemplazando: $h = 40t - 5t^2$ ...(η)

Graficando la relación (η):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	35	60	75	80	75	60	35	0



29. Una piedra es lanzada verticalmente hacia un pozo con una velocidad inicial de $\vec{v}_0 = -32\hat{j}$ m/s. Si llega al fondo en 2 s. Calcular la profundidad del pozo, y la rapidez con la que la piedra llega al fondo del pozo. $g = 10$ m/s^2

Resolución:

Datos:

$t = 2$ s

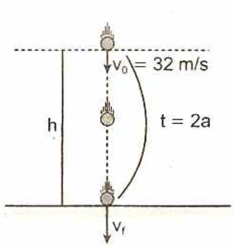
$v_0 = 32$ m/s

$g = 10$ m/s^2

$v_f = v_0 + gt$

$v_f = 32 + 10(2)$

$v_f = 52$ m/s



Se tiene: $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

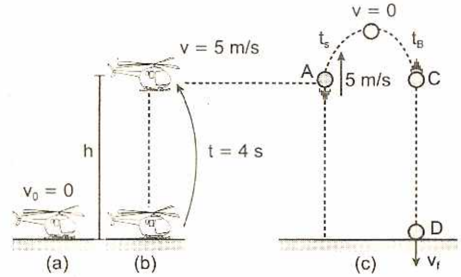
$h = 32(2) + \frac{1}{2}(10)(2)^2$

$h = 64 + 20 \Rightarrow h = 84$ m

Profundidad 84 m y rapidez que llega 52 m/s

30. Un helicóptero parte de tierra ascendiendo verticalmente con una rapidez constante de 5 m/s, si el piloto deja caer una canica 4 s después de iniciado el ascenso, calcular la rapidez de la canica al impactar con el suelo. Despreciar la resistencia del aire sobre la canica. $g = 10$ m/s^2

Resolución:



El helicóptero realiza un MRU

$h = vt$

$h = 5(4) \Rightarrow h = 20$ m

Se observa que el tramo AB = BC; tiempo subida igual tiempo bajada

Entonces caída libre en el tramo CD

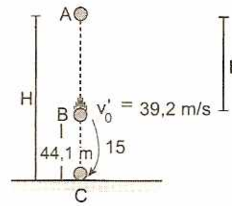
$v_f^2 = v_0^2 + 2gh$

$v_f^2 = (5)^2 + 2(10)(20)$

$v_f^2 = 425 \quad \therefore \ v_f = \sqrt{425} = 20{,}6$ m/s

31. Si un cuerpo al caer libremente en el vacío, en el último segundo recorre 44,1 m. Calcular la altura de la cual cae el cuerpo. $g = -9{,}8\hat{j}$ m/s^2

Resolución:



Datos:

$t = 1$ s

$d = 44{,}1$ m

$g = 9{,}8$ m/s^2

a. En el tramo BC

$h = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$44{,}1 = v_0'(1) + \frac{1}{2}(9{,}8)(1)^2$

$v_0' = 39.2$ m/s

b. En el tramo AB:

$v_f^2 = v_0^2 + 2gh$

$(39{,}2)^2 = (0)^2 + 2(9{,}8)(h)$

$h = 78{,}4$ m

c. En el tramo AC:

$H = h + 44{,}1$

$H = 78{,}4 + 44{,}1$

$\therefore \ H = 122{,}5$ m

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un auto emplea 30 segundos en recorrer 1 km y una moto emplea 2,5 segundos para recorrer 50 m. En una carrera de 150 metros entre el auto y la moto, ¿por cuantos metros ganará el auto?.

A) 30 m B) 40 m C) 50 m
D) 60 m E) 25 m

2. ¿En qué segundo la distancia recorrida por un móvil en ese segundo y su aceleración estarán en la relación de 7 a 2? El móvil partió del reposo.

A) 2.° B) 3.° C) 4.° D) 5.° E) 6.°

3. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0. Si luego de 6 s su velocidad es de 30 m/s hacia arriba, ¿cuál es el valor de v_0 en m/s? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 90 m/s B) 45 m/s C) 180 m/s
D) 60 m/s E) 30 m/s

4. Un paquete ubicado a 70 m del piso es lanzado verticalmente hacia arriba con v = 20 m/s. Determinar a qué altura se encontrara luego de 2 s ($g = 10\ m/s^2$).

A) 10 m B) 50 m C) 70 m
D) 120 m E) 90 m

5. Un misil es soltado desde helicóptero que está detenido y tarda 20 s en impactar en el suelo. Calcular con qué velocidad llega el proyectil al piso ($g = 9{,}8\ m/s^2$).

A) 158 m/s B) 59 m/s C) 205 m/s
D) 196 m/s E) 98 m/s

6. Un cuerpo se lanza desde el piso y permanece en el aire 10 s. Hallar su altura máxima ($g = 10\ m/s^2$).

A) 45 m B) 55 m C) 75 m
D) 85 m E) 125 m

7. Desde el piso se lanza una pelota verticalmente hacia arriba a razón de 20 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo como máximo se encontrará a 15 m de altura? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s

8. Desde una altura de 200 m, se lanza hacia abajo un objeto con una velocidad de 15 m/s. Calcular el tiempo que demora en chocar con el piso ($g = 10\ m/s^2$).

A) 5 s B) 10 s C) 8 s
D) 15 s E) 2,5 s

9. Un cuerpo en caída libre recorre en 3 s una altura de 90 m. ¿Qué altura recorrerá en los siguientes 4 s? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 180 m B) 270 m C) 260 m
D) 90 m E) 400 m

10. Si un auto en el primer segundo recorre 2 m, habiendo partido con cierta velocidad inicial y para los dos primeros segundos ha logrado recorrer 8 m, halle su aceleración.

A) $2\ m/s^2$ B) $4\ m/s^2$ C) $6\ m/s^2$
D) $1\ m/s^2$ E) $1{,}5\ m/s^2$

11. Un automóvil viaja con una velocidad constante de 10 m/s y se dirige hacia una pared. Cuando se encuentra a 1400 m de la pared, el conductor toca la bocina. ¿Después de cuantos segundos el conductor escuchará el eco? La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

A) 8 s B) 4 s C) 2 s
D) 6 s E) 5 s

12. Un móvil con una velocidad uniforme recorre 200 km en cierto tiempo. Si esta velocidad aumentase en 10 km/h, el viaje duraría una hora menos. ¿Cuál es la rapidez del móvil?.

A) 10 km/h B) 20 km/h C) 30 km/h
D) 40 km/h E) 50 km/h

13. Una persona sale todos los días a la misma hora de su casa y llega a su trabajo a las 09:00 h. Un día se traslada al doble de la velocidad acostumbrada y llega a su trabajo a las 08:00 h. ¿A qué hora sale siempre de su casa?.

A) 06:00 h B) 06:30 h C) 07:00 h
D) 07:30 h E) 05:30 h

14. Un tren tarda 40 s en cruzar totalmente un túnel de 500 m y tarda 1 m en pasar completamente por otro túnel de 800 m. Hallar el valor de la velocidad del tren (considerar que el tren posee MRU).

A) 18 m/s B) 16 m/s C) 12 m/s
D) 17m/s E) 15 m/s

15. Un objeto fue lanzado horizontalmente desde una altura h con una velocidad de 3 m/s, siendo su avance horizontal de 90 m hasta llegar al suelo. Hallar h ($g = 100\ m/s^2$)

A) 30 m B) 45 m C) 60 m
D) 90 m E) 120 m

16. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba. Si a la mitad del recorrido de su altura máxima, su velocidad es de $10\sqrt{2}$ m/s, calcular la velocidad con que se lanzó el cuerpo ($g = 10\ m/s^2$).

A) 10 m/s B) 20 m/s C) 30 m/s
D) 40 m/s E) 50 m/s

17. Una persona sale todos los días a la misma hora y realiza un movimiento rectilíneo uniforme, llegando a su destino a las 09:30 h. Si su velocidad fuese el triple llegaría a las 08:40 h, ¿a qué hora parte de su casa?

A) 07:17 h B) 07:30 h C) 07:45 h
D) 08:00 h E) 08:15 h

18. Un tren cruza en un poste en 10 s y un túnel en 15 s. ¿En cuánto tiempo el tren cruzará el túnel si el tamaño de este fuera el triple?

A) 15 s B) 20 s C) 25 s
D) 30 s E) 35 s

19. Un automóvil se desplaza con aceleración constante y recorre entre A y B 20 m tardando 1 s. Luego recorre entre B y C 45 m en 2 s. Calcular la aceleración del automóvil.

A) 1 m/s^2 B) 5/3 m/s^2 C) 3/5 m/s^2
D) 5/6 m/s^2 E) 10 m/s^2

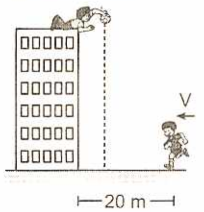
20. Si un móvil con movimiento rectilíneo y velocidad v desacelera uniformemente disminuyendo su velocidad a la tercera parte en 10 s, calcular que tiempo tarda el móvil en detenerse.

A) 15 s B) 12,5 s C) 12 s
D) 16 s E) 18 s

21. Una piedra se lanza verticalmente desde un punto A con una velocidad de 80 m/s. ¿A qué distancia de A se encontrará un punto B, en el cual la velocidad de la piedra será 20 m/s hacia abajo? (g = 10 m/s^2).

A) 100 m B) 200 m C) 300 m
D) 320 m E) 360 m

22. Desde la azotea de un edificio de 80 m una persona suelta una pelota de futbol. Con la intención de agarrar dicha pelota, otra persona distante 20 m de la base del edificio, presentando un MRU, se dirige hacia el lugar del impacto. ¿Cuál debe ser la velocidad v para que logre su propósito? (g = 10 m/s^2). Desprecie los efectos del aire.



A) 6 m/s B) 8 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 10 m/s

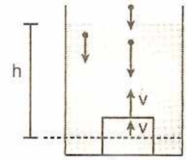
23. Desde la azotea de un edificio de 80 m, se suelta un cuerpo, luego de 2 s se lanza verticalmente hacia abajo otro cuerpo. Si ambos llegan simultáneamente a la base del edificio, calcular con qué rapidez fue lanzado el segundo cuerpo. Despreciar los efectos del aire (g = 10 m/s^2).

A) 35 m/s B) 10 m/s C) 30 m/s
D) 60 m/s E) 20 m/s

24. Una esfera se deja en libertad desde una altura de 80 m y al rebotar en el piso se eleva solo hasta la cuarta parte de la altura anterior. ¿Qué tiempo ha transcurrido hasta que se produce el 3.er impacto? (g = 10 m/s^2).

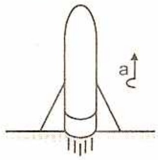
A) 4 s B) 6 s C) 8 s
D) 9 s E) 10 s

25. En el pozo de la figura caen sin fricción gotas a razón de una gota por segundo. Un objeto asciende a una velocidad constante de 10 m/s y es alcanzado por una gota cuando está a una profundidad h = 500 m. ¿Cuánto subirá, aproximadamente, el objeto hasta ser alcanzado por la segunda gota? (g = 10 m/s^2).



A) 3 m B) 5 m C) 7 m
D) 9 m E) 11 m

26. Un pequeño cohete comienza a moverse con una aceleración constante de 5 m/s^2. Si al cabo de 6 s se termina el combustible, ¿qué altura como máximo logra elevarse? Desprecie los efectos del aire y consigne g = g = 10 m/s^2.



A) 130 m B) 125 m C) 110 m
D) 90 m E) 135 m

27. Un paquete ubicado a 70 m del piso es lanzado verticalmente hacia arriba con v_0 = 20 m/s. Determinar a qué altura se encontrara luego de 6 s (g = 10 m/s^2).

A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 25 m E) 35 m

28. Un cuerpo es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 98 m/s. Si la altura alcanzada por el cuerpo coincide con la del edificio, ¿cuántos pisos tiene el edificio, si cada piso tiene 5 m de altura y qué tiempo demorará en volver al piso? (g = 9,8 m/s^2).

A) 49; 10 s B) 98; 20 s C) 49; 5 s
D) 98; 10 s E) 98; 15 s

29. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con $v_0 = 30$ m/s. ¿Al cabo de qué tiempo asciende la última tercera parte de su altura máxima? ($g = 10$ m/s^2).

A) 1,21 s B) 1,41 s C) 1,53 s
D) 1,73 s E) 1,81 s

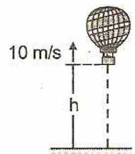
30. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo la pelota poseerá una velocidad de 40 m/s? ($g = 10$ m/s^2).

A) 3 s B) 4 s C) 5 s
D) 6 s E) Absurdo

31. Desde una altura de 20 m, respecto a la superficie de un lago, se suelta un objeto, llegando hasta el fondo del lago en 7 s. Si consideramos que el objeto se mueve con velocidad constante estando dentro del lago, ¿qué profundidad tiene el lago? ($g = 10$ m/s^2).

A) 100 m B) 80 m C) 60 m
D) 120 m E) 75 m

32. Desde un globo aerostático que sube describiendo un MRU con una velocidad de 10 m/s, una persona suelta una moneda y observa que demora 6 s en llegar al suelo. Calcular desde qué altura h fue soltada la moneda. Desprecie los efectos del aire sobre la moneda ($g = 10$ m/s^2).



A) 120 m B) 80 m C) 100 m
D) 125 m E) 140 m

33. Desde el piso se lanza un proyectil hacia arriba y retorna al punto de lanzamiento, al cabo de 8 segundos. ¿Con qué velocidad retorna al punto de lanzamiento? ($g = 10$ m/s^2)

A) 10 m/s B) 20 m/s C) 30 m/s
D) 40 m/s E) 50 m/s

34. Un cuerpo se suelta de una altura de 100 m. ¿Con qué velocidad llegará al piso y en qué tiempo? ($g = 10$ m/s^2)

A) $20\sqrt{3}$ m/s; $\sqrt{20}$ s B) $20\sqrt{5}$ m/s; $2\sqrt{5}$ s
C) $10\sqrt{5}$ m/s; $\sqrt{10}$ s D) $5\sqrt{5}$ m/s; $2\sqrt{5}$ s
E) $2\sqrt{5}$ m/s; $3\sqrt{5}$ s

35. Una pelota cae verticalmente al piso y rebota en él. La velocidad justo antes del choque es v y justo después del choque es 0,9v. Si la pelota se deja caer desde un metro de altura, ¿a qué altura llegará después del primer bote? ($g = 10$ m/s^2).

A) 0,9 m B) 1 m C) 0,95 m
D) 0,85 m E) 0,81 m

36. Un cuerpo cae en el último segundo un cuarto de la altura total. ¿Qué tiempo estuvo en movimiento?

A) $2(2 + \sqrt{3})$ s B) $(1 + \sqrt{3})$ s
C) $2(\sqrt{3} - 1)$ s D) $2\sqrt{3}$ s
E) $2(1 + \sqrt{3})$ s

37. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde tierra con una velocidad de 40 m/s. Hallar después de qué tiempo y a qué altura se encuentra cuando su velocidad es de 10 m/s hacia abajo ($g = 10$ m/s^2).

A) 10 s; 20 m B) 5 s; 75 m C) 5 s; 200 m
D) 10 s; 75 m E) 8 s; 120 m

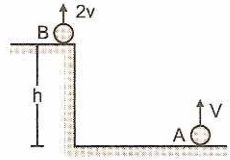
38. Desde lo alto de un edificio una piedra es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial v y 5 segundos después otra piedra es lanzada hacia abajo del mismo lugar y con la misma velocidad inicial, llegando ambas a tierra al mismo instante. Hallar v ($g = 10$ m/s^2).

A) 25 m/s B) 50 m/s C) 75 m/s
D) 100 m/s E) 20 m/s

39. Un globo aerostático sube verticalmente con una velocidad de 30 m/s. El piloto del globo al encontrarse a una altura de 240 m con respecto al suelo, lanza verticalmente hacia abajo un tomate con una velocidad respecto a su mano de 20 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo el tomate tocará el suelo?

A) 6 s B) 7 s C) 8 s
D) 10 s E) 12 s

40. Desde los puntos A y B se lanzan en el mismo instante dos objetos verticalmente hacia arriba con velocidades v y 2v, respectivamente. Si el que se lanzó de A llega solo hasta el nivel donde se ubica el punto B, ¿cuál es la distancia que separa a los objetos cuando el que se lanzó de B comienza a descender?



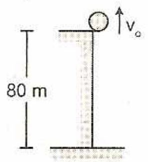
A) 2 h B) 3 h C) 4 h
D) 5 h E) 6 h

41. Un globo aerostático se está elevando verticalmente hacia arriba con cierta velocidad. De pronto se desprende un objeto del globo y 6 s más tarde se

está acercando a la tierra con una rapidez de 20 m/s. ¿Qué rapidez tenía el globo al desprenderse el objeto y qué altura máxima alcanza este desde tal instante?($g = 10\,\hat{j}$ m/s^2).

A) 20 m/s; 20 m B) 40 m/s; 80 m
C) 60 m/s; 60 m D) 40 m/s; 20 m
E) 40 m/s; 40 m

42. Desde la terraza de un edificio de 80 m se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 40 m/s. ¿Qué tiempo permanecerá en el aire? ($g = 10\,\hat{j}$ m/s^2).



A) 9 s B) 10 s C) 8 s
D) 11 s E) 7 s

43. Con respecto al problema N.° 2, ¿cuál es la velocidad del cuerpo 1 s antes de chocar con el suelo?

A) $-47\,\hat{j}$ m/s B) $-37\,\hat{j}$ m/s C) $40\,\hat{j}$ m/s
D) $46\,\hat{j}$ m/s E) 47 m/s

44. Desde el borde superior de un edificio de 10 m de altura se lanza hacia arriba una piedra con una velocidad de 5 m/s. ¿Con qué velocidad llega al suelo? ($g = 10\,\hat{j}$ m/s^2).

A) $-20\,\hat{j}$ m/s B) $-15\,\hat{j}$ m/s C) $15\,\hat{j}$ m/s
D) $-25\,\hat{j}$ m/s E) $-10\,\hat{j}$ m/s

45. Con respecto al problema (4). Exprese la ecuación $y = f(t)$ para ese caso. (Considera como origen de coordenadas el suelo).

A) $y_f = 10\,\hat{j} + (5\,\hat{j})t - (5\,\hat{j})t^2$
B) $y_f = 10\,\hat{j} - (5\,\hat{j})t - (5\,\hat{j})t^2$
C) $y_f = 10\,\hat{j} + (5\,\hat{j})t + (5\,\hat{j})t^2$
D) $y_f = -10\,\hat{j} + (5\,\hat{j})t - (5\,\hat{j})t^2$
E) $y_f = -10\,\hat{j} - (5\,\hat{j})t - (5\,\hat{j})t^2$

46. Una piedra se arroja hacia arriba y alcanza una altura h antes de caer de nuevo al piso t segundos después. Calcular su velocidad media durante el intervalo de tiempo t. ($g = 10$ m/s^2).

A) 0 B) h/2t C) h/t
D) 2h/t E) h/g

47. Hallar la altura máxima que alcanza un cuerpo al ser lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 36 m/s ($g = 10$ m/s^2).

A) 64,8 m B) 60 m C) 70 m
D) 65 m E) 63 m

48. Una maceta se cae desde una ventana de un quinto piso. Exactamente cuando pasa por la ventana del tercer piso alguien deja caer accidentalmente un vaso de agua desde esa ventana. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) La maceta llega primero al piso y con una velocidad de mayor módulo que la del vaso.
B) La maceta toca el piso al mismo tiempo que el vaso, pero la rapidez de la maceta es mayor.
C) La maceta y el vaso tocan el piso al mismo instante con la misma velocidad.
D) El vaso toca el piso antes que la maceta.
E) La maceta toca el piso al mismo tiempo que el vaso, pero la rapidez de la maceta es menor.

49. Una piedra se deja caer desde el techo de un edificio de 20 m de altura. Calcule el módulo de la velocidad con la que llega al suelo y el tiempo de caída ($g = -10\,\hat{j}$ m/s^2).

A) 20 m/s; 4 s B) 10 m/s; 2 s C) 20 m/s; 2 s
D) 10 m/s; 4 s E) 20 m/s; 1 s

50. Dos cuerpos A y B se encuentran inicialmente a la misma altura. Si en el instante en que A se deja caer, B es lanzado hacia abajo con una velocidad inicial de 10 m/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo estarán separados 50 m? ($g = -10\hat{j}$ m/s^2).

A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 5 s E) 6 s

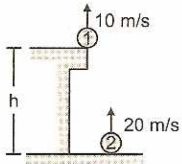
51. Desde el suelo un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba. Halle el módulo de esta velocidad de lanzamiento tal que entre los instantes t = 4 s y t = 10 s, no haya desplazamiento ($g = -10\hat{j}$ m/s^2).

A) 5 m/s B) 80 m/s C) 60 m/s
D) 70 m/s E) 50 m/s

52. Una persona se encuentra en cierto planeta en cuyo entorno su aceleración gravitatoria tiene un módulo de 6 m/s^2. Lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. ¿Qué distancia sube durante el último segundo de ascenso?

A) 5 m B) 4 m C) 3 m D) 2 m E) 1 m

53. En la figura, se tienen dos cuerpos 1 y 2 con sus respectivas velocidades iniciales. Calcular la altura del edificio sabiendo que ambos cuerpos chocan en su extremo superior, luego de partir simultáneamente ($g = -10\,\hat{j}$ m/s^2).



A) 50 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

54. Una piedra de masa M se lanza hacia arriba, con una velocidad inicial v_0; alcanza una altura H. Una segunda piedra de masa 2M se tira hacia arriba con una velocidad inicial de $2v_0$. ¿Qué altura alcanzará?

A) H/2 B) H C) 2H
D) $\sqrt{2}$H E) 4H

55. Un objeto se deja caer desde el reposo. Durante el primer segundo cae una distancia S_1 y una distancia adicional S_2 en el siguiente segundo; la relación S_2/S_1 es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

56. Se tiene un libro a un metro de altura sobre el piso, sobre el libro un pedazo de papel. ¿Qué se observará al soltar el libro?

A) El libro llega primero y luego el papel.
B) El papel al principio cae junto con el libro, pero luego llegan juntos.
C) El papel y el libro llegan juntos.
D) El papel sube poco y luego cae sobre el libro.
E) Solo cae el libro y no el papel.

57. Las cuerdas que sostienen a un ascensor, de un edificio del Centro Cívico, se rompen en el instante en que una persona que va en el interior abandona una moneda en el aire. ¿Qué sucede con la moneda?

A) Se pega en el techo.
B) Cae con MRU.
C) Se pega en el piso.
D) Se suspende en el espacio.
E) Cae desaceleradamente.

58. Un proyectil es lanzado con una velocidad $v = 30\hat{j}$ m/s desde una posición $y_0 = 40\hat{j}$ m en el instante t = 0. Determinar la posición y en un instante t. Usar unidades del SI (g = 10 m/s^2).

A) $y = 41 + 10t - 15t^2$
B) $y = 40 + 30t - 5t^2$
C) $y = 30t - 5t^2$
D) $y = 40t - 5t^2$
E) $y = 40 + 30t + 5t^2$

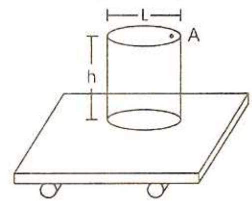
59. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba; alcanza su punto más alto y regresa. ¿Cuál de las siguientes proporciones es correcta?

A) La aceleración siempre está en la misma dirección y sentido del movimiento.
B) La aceleración siempre se opone a la velocidad.
C) La aceleración siempre está dirigida hacia abajo.
D) La aceleración siempre está dirigida hacia arriba.
E) No existe aceleración ya que el cuerpo desarrolla un MRU.

60. Se lanza un proyectil con una velocidad $\vec{v}_0 = 50\hat{j}$ m/s. ¿Qué velocidad poseerá al cabo de 7 s? (g = 10 m/s^2).

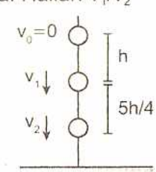
A) $+50\hat{j}$ m/s B) $+20\hat{j}$ m/s C) $+10\hat{j}$ m/s
D) $-30\hat{j}$ m/s E) $-10\hat{j}$ m/s

61. Un cilindro hueco se encuentra sobre una plataforma horizontal, como se ve en la figura. Si en el punto A, se deja caer una piedra y en ese mismo instante, la plataforma inicia su movimiento hacia la derecha. Calcular la mayor aceleración que podrá tener la plataforma para que la piedra llegue a dicha plataforma, sin tocar las paredes del cilindro. (g: aceleración de la gravedad)



A) $\frac{h}{L}$ B) Lg C) hLg
D) $\frac{Lg}{h}$ E) $\frac{hg}{L}$

62. Desde una cierta altura, se deja caer un objeto, tal como se muestra. Hallar: v_1/v_2



A) 1 B) 1/3 C) 2/3 D) 1/2 E) 4/9

63. Una persona en la boca de un pozo deja caer una piedra y escucha el impacto de la piedra en el fondo luego de 3 s. Hallar la profundidad del pozo. (g = 10 m/s^2; v_{sonido} = 340 m/s).

A) 45 m B) 55,42 m C) 41,42 m
D) 50 m E) 46,42 m

64. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba, si duplicamos su velocidad de lanzamiento, la altura máxima que alcanza...

A) Permanece constante.
B) Se duplica.
C) Se reduce a la mitad.
D) Se cuadruplica.
E) Se triplica.

65. De la parte superior de un precipicio se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad de 10 m/s y demora en llegar al suelo 16 s. ¿Cuál es la altura del precipicio? (g = 10 m/s^2)

A) 1280 m B) 1120 m C) 1160 m
D) 900 m E) 2000 m

66. Una pelota cae verticalmente desde una altura de 80 m y, al chocar con el piso, se eleva con una velocidad que es 3/4 de la velocidad anterior al impacto. Halle la altura alcanzada después del choque ($g = 10\ m/s^2$).

A) 45 m B) 48 m C) 60 m
D) 46 m E) 52 m

67. En el planeta MK-54 de la constelación de la Osa Menor se deja caer una piedra desde cierta altura y se observa que en 1 s determinado recorre 26 m y en el siguiente segundo 32 m. Halle el valor de la aceleración de la gravedad en dicho planeta, en m/s^2.

A) 6 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4

68. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre, a los 5 s de ser lanzado llega a una altura h de manera que al ascender 25 m más, solo le falta 2 s para alcanzar su altura máxima. Halle h ($g = 10\ m/s^2$)

A) 275 m B) 125 m C) 175 m
D) 375 m E) 385 m

69. El marco superior de una ventana de 8,25 m de altura se ubica a 9 m del borde de la azotea del edificio. Desde la azotea es lanzada verticalmente hacia abajo una moneda con una velocidad de 4 m/s. ¿En cuánto tiempo la moneda pasará por toda la ventana? ($g = 10\ m/s^2$).

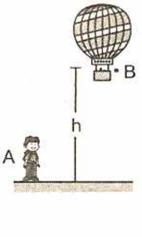
A) 1 s B) 3 s C) 0,5 s
D) 0,75 s E) 1,5 s

70. Desde una misma altura, se deja caer un cuerpo y simultáneamente otro se lanza hacia abajo con una rapidez de 2 m/s. ¿Después de cuantos segundos estarán separados 12 m? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 12 s B) 8 s C) 6 s D) 4 s E) 2 s

71. Un globo aerostático asciende con rapidez constante de 90 m/s. Cuando se encuentra a una altura h, se suelta un objeto desde el globo. Indicar las proporciones verdaderas:

I. Para el observador B, el objeto parte del reposo sin aceleración.
II. Para el observador A, el objeto parte con velocidad inicial hacia abajo y con aceleración constante.
III. En t = 2 s, el objeto tiene velocidad diferente de cero para el observador B.



A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) Solo III E) II y III

72. Dos cuerpos A y B se encuentran, inicialmente, a una misma altura, a una distancia d de un punto P que está por debajo de A y B. Si en el instante en que A se deja caer, B es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 19,6 m/s y al cabo de 4 s ambos cuerpos equidistan del punto P. Determinar la distancia d.

A) 120 m B) 117,6 m C) 116,4 m
D) 118,6 m E) 114,8 m

73. Marcar verdadero (V) o falso (F):

( ) Si un cuerpo lanzado verticalmente desde el piso, tarda t segundos en alcanzar su altura máxima; entonces, demora t/2 en subir la primera mitad de dicha altura.
( ) En un movimiento vertical de caída libre se cumple que en un mismo plano de referencia los vectores velocidad de subida y bajada son iguales.
( ) Cuando un cuerpo en caída libre llega al piso, luego de estar quieto, la aceleración de la gravedad se anula.

A) VFV B) FFV C) FFF
D) VVF E) VFF

74. Un auto parte del reposo y acelera con 5 m/s^2 a 10 m de un edificio de 28 m de altura. Al mismo tiempo, Jorge se encuentra en la parte superior del edificio y lanza verticalmente hacia abajo una piedra con una rapidez inicial v_0. Si la piedra impacta en el auto, halle v_0 ($g = 10\ m/s^2$).

A) 2 m/s B) 1 m/s C) 6 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

75. Una maceta se deja caer desde la azotea de un edificio de 45 m de altura. Halle la altura recorrida por la maceta en el último segundo de su caída ($g = 10\ m/s^2$).

A) 5 m B) 25 m C) 35 m
D) 22,5 m E) 20 m

76. Un cuerpo se deja caer desde cierta altura H y en el último segundo de su caída, recorre la mitad de dicha altura. Halle qué tiempo duró su caída. ($g = 10\ m/s^2$).

A) 3 s B) 2 s C) 4 s
D) 1,2 s E) 3,4 s

77. Desde el piso se lanza una partícula hacia arriba con una rapidez de $10\sqrt{3}$ m/s. Halle su rapidez cuando la partícula alcance la cuarta parte de su altura máxima ($g = 10\ m/s^2$).

A) 10 m/s B) 15 m/s C) 20 m/s
D) 25 m/s E) 30 m/s

78. Una pelota cae verticalmente al piso y, al rebotar alcanza una altura igual a la mitad de la altura inicial. Si su velocidad, justo antes del choque, es de 20 m/s. Halle su velocidad después del impacto ($g = 10\ m/s^2$).

A) 20 m/s B) 10 m/s C) 14,1 m/s
D) 28,2 m/s E) 40 m/s

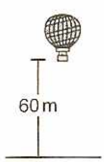
79. Dos cuerpos inician una caída libre partiendo del reposo y desde la misma altura con un intervalo de 1 s. ¿Cuánto tiempo después de que empieza a caer el primer cuerpo estarán estos separados por una distancia de 10 m? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 1,8 s B) 2,5 s C) 1,2 s
D) 1,4 s E) 1,5 s

80. La posición de una partícula con movimiento vertical, obedece a la siguiente ley: $\vec{y} = 80 - 5t^2$; donde y, en metros, y t, en segundos. Calcule la distancia recorrida durante los dos primeros segundos de iniciado el análisis de su movimiento.

A) 60 m B) 15 m C) 20 m
D) 25 m E) 45 m

81. Desde un globo aerostático, el cual asciende verticalmente con una rapidez constante de 5 m/s, se suelta una piedra en el instante mostrado. Determine la distancia que separa a ambos cuerpos en el instante en que la piedra impacta en el piso ($g = 10\ m/s^2$)



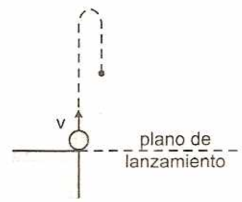
A) 60 m B) 70 m C) 80 m
D) 90 m E) 100 m

82. Un globo se eleva desde la superficie terrestre a una velocidad constante de 5 m/s. Cuando se encuentra a una altura de 360 m, se deja caer una piedra. Hallar el tiempo, en segundos, que tarda la piedra en llegar a la superficie terrestre ($g = 10\ m/s^2$).

A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

83. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con velocidad v tal como se muestra. Señale las proposiciones correctas:

I. Para ningún instante de tiempo, la velocidad será 2v en modulo.
II. Para el tiempo $t = 5v/2g$, el móvil se encuentra por debajo del plano de lanzamiento.
III. Para $t = 2v/g$ la velocidad media del cuerpo es cero.

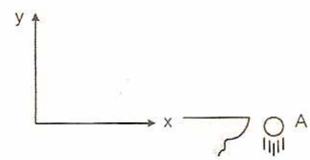


A) Todas B) Solo I C) Solo II
D) II y III E) Solo III

84. Un cuerpo que es dejado caer, en el último segundo de su movimiento, recorre h metros. Hallar de qué altura se soltó (g: aceleración de gravedad).

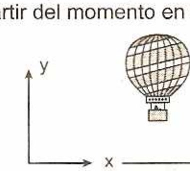
A) $(h + g/2)^2/g$ B) $(h + g/2)^2/2g$
C) $(h - g/2)^2/2g$ D) $(h + g/2)^2/2g$
E) $(h - g)^2/4g$

85. La ecuación de movimiento de un proyectil lanzado verticalmente desde el punto A cercano a tierra es: $y_{(t)} = -10 + 40t - 5t^2$. ¿Cuál es la altura alcanzada con respecto al nivel de referencia?



A) 70 m B) 90 m C) 60 m
D) 80 m E) 50 m

86. Un globo aerostático se encuentra ascendiendo con velocidad constante de 6 m/s. Cuando el globo se encuentra a 40 m sobre el suelo, se suelta de él un objeto. Asumiendo que solo actúa la gravedad, ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa el movimiento del objeto, respecto a un observador de tierra, a partir del momento en que fue soltado?



A) $y = 40t - \frac{g}{2}t^2$ B) $y = 6t + \frac{g}{2}t^2$
C) $x = 40 - 6t - \frac{g}{2}t^2$ D) $x = 40 + 6T - \frac{g}{2}t^2$
E) $y = 40 + 6t + \frac{g}{2}t^2$

87. Un globo aerostático asciende verticalmente con una velocidad de 22 m/s y cuando se encuentra a una altura de 1120 m, se lanza del globo una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad de 12 m/s. ¿Qué tiempo tarda la piedra en llegar al suelo? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 30 s B) 24 s C) 20 s D) 18 s E) 16 s

88. Dos cuerpos, uno de los cuales es más pesado que el otro, descienden en caída libre en las proximidades de la superficie terrestre; entonces, podemos afirmar correctamente:

I. La aceleración del cuerpo más pesado es igual a la que adquiere el cuerpo menos pesado.

II. El tiempo de caída del cuerpo más pesado es menor que el del cuerpo liviano.

III. Si la aceleración de la gravedad fuera 4,9 m, los cuerpos lanzados verticalmente hacia arriba alcanzarían mayor altura.

A) Solo I B) I y II C) I y III
D) Todas E) II y III

89. Desde el piso, se impulsa arriba una partícula y se pide determinar cuánto asciende durante los dos últimos segundos de su ascenso ($g = 10\ m/s^2$)

A) 10 m B) 12 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

90. Un globo está subiendo verticalmente en forma acelerada. Cuando su velocidad es 12 m/s y se encuentra a 80 m sobre el piso, se le cae un paquete. Hallar el tiempo, en segundos, que tarda en llegar el paquete al piso ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 B) 12,8
C) 6,4 D) 5,3
E) Falta conocer la aceleración del globo.

91. Silvia se encuentra dentro en un ascensor que no tiene indicador de pisos. No sabe si la cabina está detenida, se mueve hacia arriba o hacia abajo. Para tratar de averiguarlo, deja caer una moneda desde una altura de 1 m demorándose esta 0,4 s para caer al piso del ascensor. Luego:

A) No se puede afirmar nada.
B) La cabina se mueve a velocidad constante.
C) El ascensor acelera hacia abajo.
D) El ascensor está detenido.
E) El ascensor acelera hacia arriba.

92. De un caño malogrado, caen gotas de agua cada t segundos. Calcule el recorrido desarrollado por la primera gota hasta el instante en que está por caer la enésima gota. Desprecie la resistencia del aire.

A) $\dfrac{n^2gt^2}{2}$ B) $\dfrac{(n-1)^2gt^2}{2}$

C) $\dfrac{(n+1)^2gt^2}{2}$ D) $(n+1)^2gt^2$

E) $(n-1)\,gt^2$

93. Se deja caer un objeto libremente y se observa que en el último segundo recorre la tercera parte del camino total. Calcular el tiempo de caída en segundos. Considere: $g = 10\ m/s^2$ y $\sqrt{6} = 2{,}45$

A) 12,7 B) 10,9 C) 5,45
D) 6,9 E) 4,7

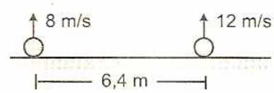
94. Considere 2 esferas metálicas A y B. La esfera A se deja caer libremente desde una altura de 20 m. En el mismo instante, la esfera B, es lanzada hacia abajo desde una altura de 30 m con velocidad constante v_c. Hallar el valor aproximado de v_c, en m/s, para que ambas esferas caigan al suelo al mismo tiempo. (Considere despreciable la resistencia del aire y asuma $g = 10\ m/s^2$)

A) 10 B) 8 C) 5
D) 4 E) 2

95. Un piloto suelta una bomba desde un helicóptero estático en el aire y después de 120 s escucha la detonación. Si la rapidez del sonido la suponemos 300 m/s; ¿con qué rapidez impactó la bomba en tierra? ($g = 10\ m/s^2$)

A) 1200 m/s B) 900 m/s C) 600 m/s
D) 300 m/s E) 120 m/s

96. Dos esferas son lanzadas simultáneamente con rapidez de 8 m/s y 12 m/s, tal como se muestra. Determine la distancia que separa a las esferas, en el instante que la esfera más veloz alcance su altura máxima ($g = 10\ m/s^2$).

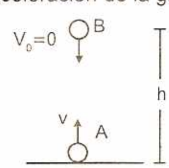


A) 5 m B) 6 m C) 7 m
D) 8 m E) 9 m

97. Un objeto se suelta de una altura de 19,6 m. En ese mismo instante, un móvil parte del reposo a una distancia de 34 m del punto de caída. Halle la aceleración del móvil para que alcance al objeto justo en el momento que llega al suelo.

A) 34 m/s^2 B) 8 m/s^2 C) 51 m/s^2
D) 12 m/s^2 E) 17 m/s^2

98. Un cuerpo A se ha lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v, otro cuerpo B cae desde una altura h con una velocidad inicial nula (ambos en la misma vertical). Hallar cómo varía la distancia x entre los cuerpos A y B en función del tiempo, si ambos comenzaron a moverse simultáneamente. (g: aceleración de la gravedad).



A) $vt - gt^2/2$ B) $h - vt$ C) vt
D) $vt - gt^2/2$ E) h

99. Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 19 m/s. Determinar qué altura recorrerá durante el último segundo de su movimiento ($g = 10\ m/s^2$).

A) 19 m B) 17 m C) 14 m
D) 11 m E) 7 m

100. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde de un acantilado de 60 m de altura, con una velocidad inicial v_0. Después de qué tiempo de haber sido lanzado el cuerpo, está a una altura de 35 m acercándose a tierra con una rapidez de $1{,}5\,v_0$ ($g = 10\ m/s^2$)

A) 2 s B) 4 s C) 5 s D) 6 s E) 7 s

CLAVES

1. D	14. E	27. B	40. D	53. D	66. A	79. E	92. B
2. C	15. B	28. B	41. B	54. E	67. A	80. A	93. C
3. A	16. B	29. D	42. B	55. C	68. A	81. C	94. C
4. E	17. B	30. C	43. A	56. C	69. C	82. B	95. C
5. D	18. E	31. A	44. B	57. D	70. C	83. D	96. D
6. D	19. E	32. A	45. D	58. B	71. D	84. D	97. E
7. E	20. C	33. D	46. A	59. C	72. B	85. A	98. B
8. C	21. C	34. B	47. A	60. B	73. C	86. D	99. C
9. A	22. D	35. E	48. A	61. D	74. D	87. E	100. C
10. C	23. C	36. A	49. C	62. C	75. B	88. C	
11. A	24. E	37. B	50. D	63. C	76. E	89. D	
12. D	25. D	38. A	51. D	64. D	77. B	90. D	
13. C	26. E	39. C	52. C	65. B	78. C	91. E	

MOVIMIENTO RELATIVO Y COMPUESTO

Consideramos un hombre caminando sobre la plataforma de un coche de ferrocarril en movimiento. Para determinar la velocidad y desplazamiento del hombre, es necesario examinar el movimiento del cuerpo simultáneamente respecto de dos sistemas de referencia, uno de los cuales se considera convencionalmente inmóvil (tierra) y el otro (coche) se mueve de un modo determinado respecto de la tierra.

Movimiento compuesto:

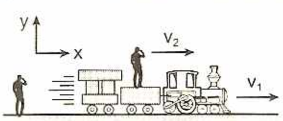
Si el coche de ferrocarril tiene una velocidad $v_1 = 10$ m/s respecto de la tierra y el hombre se mueve con una velocidad de 4 m/s respecto de la plataforma del coche, entonces la velocidad del hombre respecto de la tierra es:

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 4\,\hat{i}$; $\vec{v}_2 = 10\,\hat{i} + 4\,\hat{i}$; $\vec{v}_2 = 14\,\hat{i}$ m/s

Si el hombre se mueve sobre la plataforma en sentido contrario al movimiento del ferrocarril, entonces su velocidad respecto de la tierra es:

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - 4\,\hat{i}$; $\vec{v}_2 = 10\,\hat{i} - 4\,\hat{i}$; $\vec{v}_2 = 6\,\hat{i}$ m/s

En ambos casos el hombre se mueve hacia la derecha respecto al observador ubicado en la tierra.



Velocidad relativa ($V_{A/B}$)

Consideremos dos carros A y B que se mueven en línea recta con velocidades v_A y v_B respecto de un observador fijo en la tierra.

La velocidad del carro A respecto de un observador ubicado en el carro B, es igual a la diferencia vectorial de sus velocidades respecto de la tierra.

$$\boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B} \quad ...(3.31)$$

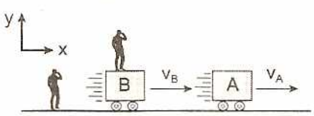


Fig. 3.29

Ejemplos:

1. Si dos móviles A y B se desplazan en el mismo sentido con velocidades de 6 m/s y 8 m/s respectivamente, la velocidad de B respecto de A es: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 6\,\hat{i} - 8\,\hat{i} = -2\,\hat{i}$ m/s, el signo negativo significa que el móvil A se acerca hacia el móvil B, de derecha a izquierda.

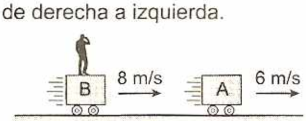


Fig. 3.30

2. Si dos móviles A y B se desplazan en sentidos opuestos con velocidades de 3 m/s y 6 m/s respectivamente, según la figura 3.31.

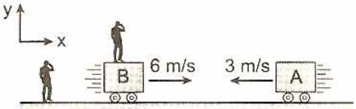


Fig. 3.31

En la ecuación (3.31), se reemplaza la velocidad considerando los signos, a la derecha positivo a la izquierda negativo:

$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (-3\,\hat{i}) - (6\,\hat{i}) = -9\,\hat{i}$ m/s

El signo negativo de la velocidad relativa significa que el móvil A se acerca al móvil B de derecha a izquierda.

Del mismo modo podremos calcular la velocidad de B respecto de A:

$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 6\,\hat{i} - (-3\,\hat{i}) = +9\,\hat{i}$ m/s

El signo (+) positivo de la velocidad relativa significa que el móvil B se acerca al móvil A de izquierda a derecha.

3. Dos móviles A y B se desplazan con velocidades:

$\vec{v}_A = -5\,\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_B = +3\,\hat{i}$ m/s

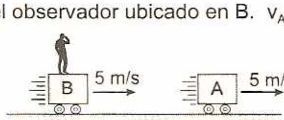
Entonces la velocidad de A respecto de B es:

$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (-5\,\hat{i}) - (3\,\hat{i}) \Rightarrow \vec{v}_{A/B} = -8\,\hat{i}$ m/s

El signo negativo de la velocidad relativa significa que el móvil A se aleja del móvil B de derecha a izquierda.

El reposo es relativo:

Veamos el caso particular, cuando los carros A y B tienen igual velocidad, entonces el móvil A está en reposo respecto del observador ubicado en B. $v_{A/B} = 0$



La trayectoria es relativa

Consideremos el siguiente caso, un avión vuela horizontalmente con velocidad constante $\vec{v}$, paralelamente y sobre un automóvil que viaja también con velocidad $\vec{v}$, en cierto instante el piloto del avión apaga los motores, entonces el avión se encuentra en caída libre.

Entonces, un hombre que se encuentra fijo en la tierra observa que la trayectoria que describe el avión es una parábola. Figura 3.32.2.

El piloto del avión, dice que está cayendo en línea vertical sobre el automóvil. Figura 3.32.3.

El piloto del automóvil, dice que el avión está cayendo verticalmente en dirección a él.

a)

Fig. 3.32.1

b)

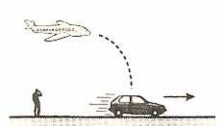


Fig. 3.32.2

c)

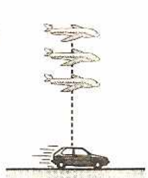


Fig. 3.32.3

¿Quién dice la verdad?

- La posición de un cuerpo, recorrido, desplazamiento, trayectoria, velocidad y aceleración son relativas, dependen del sistema de referencia que se elige, por consiguiente la verdad es relativa.
- Todo movimiento es relativo, depende del sistema de referencia que se elige.

4. Consideremos una lancha cuya velocidad en relación al agua (proporcionada por sus motores) es $v_{A/B} = 6$ m/s

(A: lancha y B: agua).

La embarcación se desplaza en un río cuya corriente tiene una velocidad $v_B = 4$ m/s.

a) ¿A qué velocidad se desplaza río abajo?

La lancha está animada simultáneamente de dos velocidades. Por lo tanto, se desplazará con respecto a tierra con una velocidad total v_A, en este caso los vectores tienen igual dirección y el mismo sentido:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \qquad ...(3.32)$$

$\Rightarrow \vec{v}_A = 4\,\hat{i} + 6\,\hat{i} \Rightarrow \vec{v}_B = 10\,\hat{i}$ m/s

La velocidad de la lancha se incrementa debido a la corriente en favor a su movimiento.

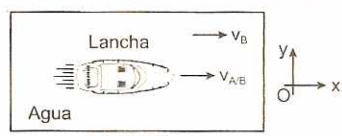


Fig. 3.33.a

Principio de independencia de los movimientos:

- Cada movimiento componente es un fenómeno físico independiente de los demás movimientos.
- El parámetro común de los movimientos componentes es el intervalo de tiempo, para cada uno de ellos transcurre de igual modo.

b) ¿A qué velocidad se desplaza río arriba?

En este caso los vectores tienen la misma dirección pero sentido contrario (figura 3.33.b), en la ecuación 3.32:

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \Rightarrow \vec{v}_A = (-6\,\hat{i}) + 4\,\hat{i} = -2\,\hat{i}$ m/s

El signo negativo significa que la lancha se desplaza hacia la izquierda (contra la corriente del río).

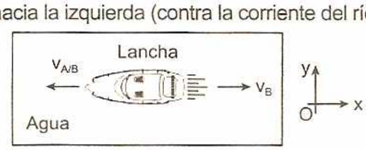


Fig. 3.33.b

c) Si la velocidad de la lancha se orientase perpendicularmente en relación con las márgenes del río (figura 3.33.c), ¿a qué velocidad se desplazaría por las aguas fluviales?

En este caso los vectores v_B y $v_{A/B}$ son perpendiculares, por consiguiente la velocidad resultante se obtendrá aplicando el método del paralelogramo. De la ecuación (3.32) tenemos:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{v}_A = 4\,\hat{i} + 6\,\hat{j} \text{ m/s}$$

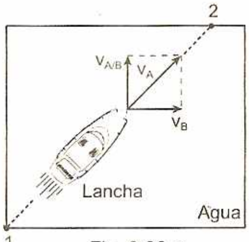


Fig. 3.33.c

El módulo del vector resultante se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\vec{v}_A = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}2 \text{ m/s}$$

La lancha sigue la dirección 1 – 2 como indica la figura 3.33.c.

MOVIMIENTO MECÁNICO EN COORDENADAS CARTESIANAS

Consideremos el movimiento de una partícula en el plano cartesiano, es decir un movimiento bidimensional; entonces la ley de movimiento tendrá la siguiente forma: $\vec{r} = r_x\,\hat{i} + r_y\,\hat{j}$

Veamos el siguiente ejemplo: $\vec{r} = (t^2 + 4)\,\hat{i} + (t^3 - 5)\,\hat{j}$

La ley del movimiento de una partícula en el espacio tridimensional tiene la forma: $\vec{r} = r_x\,\hat{i} + r_y\,\hat{j} + r_z\,\hat{k}$

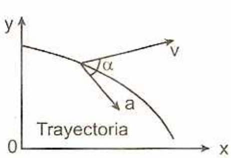
Veamos el siguiente ejemplo:

$$\vec{r} = (t^2 + 4)\,\hat{i} + (t^3 - 5)\,\hat{j} + (2t)\,\hat{k}$$

Velocidad ($\vec{v}$)

La velocidad de una partícula se define como la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{r_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{r_y}{dt}\right)\hat{j}$$



La velocidad de una partícula en el plano tiene dos componentes: $\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$

La velocidad de una partícula en el espacio tridimensional tiene tres componentes:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{r_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{r_y}{dt}\right)\hat{j} + \left(\frac{r_z}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k}$$

Aceleración ($\vec{a}$)

Es aquella magnitud física vectorial que mide la razón con que cambia la velocidad del móvil, modulo y dirección. Matemáticamente la aceleración se define como la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{v_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v_y}{dt}\right)\hat{j}$$

La aceleración de una partícula en el plano tiene dos componentes: $\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$

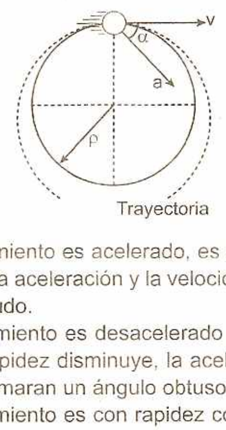
La aceleración de una partícula en el espacio tridimensional tiene tres componentes:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\hat{j} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$$

Ángulo entre la velocidad y la aceleración

El ángulo que forma la velocidad y la aceleración en cierto instante determina el carácter de la aceleración y la curvatura de la trayectoria del modo siguiente. Por un punto de la trayectoria trazamos una circunferencia que tenga con aquella una línea tangente común a dicho punto y que en el tramo dado de la curva se aproxime lo más exactamente posible a ella. Esta circunferencia se llama osculatriz y su radio R recibe el nombre de radio de curvatura del punto dado. La aceleración está dirigida siempre hacia dentro de esta circunferencia. Se presentan tres casos posibles:



I. Si el movimiento es acelerado, es decir, la rapidez aumenta, la aceleración y la velocidad formaran un ángulo agudo.

II. Si el movimiento es desacelerado o retardado, es decir, la rapidez disminuye, la aceleración y la velocidad formaran un ángulo obtuso.

III. Si el movimiento es con rapidez constante, es decir, el módulo de la velocidad con cambia, la aceleración y la velocidad formaran un ángulo recto ($\alpha = 90°$). Además se cumple que:

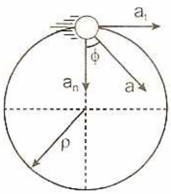
$$\vec{a}\vec{v} = 0$$

Descomposición de la aceleración

La aceleración se puede descomponer en dos componentes rectangulares, una es la dirección tangencial a la trayectoria en el punto dado, denominada aceleración tangencial y la otra en dirección normal, denominada aceleración normal, se cumple que: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

El valor de la aceleración se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2$$



La aceleración tangencial mide solamente la rapidez de cambio de la velocidad en módulo. La aceleración tangencial se obtiene derivando la velocidad respecto del tiempo: $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

La aceleración normal mide solamente la rapidez de cambio de la velocidad en dirección:

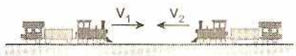
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Donde ρ representa el radio de curvatura de la trayectoria en un instante.

La desviación ϕ de la aceleración respecto de la línea normal o radial es: $\tan\phi = \dfrac{|a_t|}{a_n}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos trenes de 200 m y 400 m de longitud avanzan en vías paralelas en sentidos opuestos y cuando se encuentran sus velocidades son 12 m/s y 18 m/s y sus aceleraciones son iguales a 3 m/s^2, respectivamente. Hallar el tiempo que demoran los trenes en cruzarse completamente.



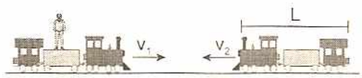
Resolución:

Ubicamos nuestro sistema de referencia en el primer tren. Respecto de él, el otro tren se acerca con una velocidad inicial igual a la suma $v_{2/1} = 30$ m/s y con aceleración constante $a_{2/1} = 6$ m/s^2.

Cada punto del tren (2) experimenta un desplazamiento de 600 m para cruzarse completamente con el tren (1):

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 600 = 30t + 3t^2 \quad \therefore\ t = 10\ \text{s}$$

2. Dos trenes corren en sentidos contrarios y con velocidades $v_1 = 36$ km/h y $v_2 = 54$ km/h. Un pasajero del primer tren (el de v_1), observa que el tren (2) demora en pasar por su costado 6 segundos. ¿Cuál es la longitud del segundo tren?. Se supone que el pasajero está inmóvil en el primer tren mirando a través de la ventana.



Resolución:

El pasajero (sistema de referencia) observa pasar al segundo tren con una velocidad $(v_1 + v_2)$:

$v_1 = 10$ m/s y $v_2 = 15$ m/s

Para el pasajero: $e = v_{2/1}t$

$L = (v_1 + v_2)t$

Reemplazando: $L = 6(10 + 15)$

$\therefore\ L = 150$ m

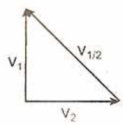
$v_{2/1}$: velocidad del móvil (2) respecto del móvil (1).

3. Dos autos que se desplazan en caminos perpendiculares viajan hacia el norte y el este respectivamente. Si sus velocidades con respecto a la tierra son de 60 km/h y de 80 km/h, calcular su velocidad relativa, uno respecto del otro.

Resolución:

$v_1 = 60$ km/h; $v_2 = 80$ km/h

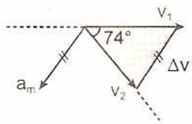
Consideremos las velocidades v_1 y v_2.



Cálculo de la velocidad del móvil (1) respecto del móvil (2), $v_{1/2}$: $v_{1/2}^2 = v_1^2 + v_2^2$

Reemplazando: $v_{1/2} = 100$ km/h

4. Un ciclista se mueve en línea recta con velocidad constante de 5 m/s, de pronto se desvía girando el timón un ángulo de 74° en un intervalo de 2 s, para luego seguir otra trayectoria rectilínea con velocidad de 5 m/s. Determinar la aceleración media que experimenta el ciclista.



Resolución:

Aplicando el método del paralelogramo:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos 74°}$$

Reemplazando los datos tenemos: $\Delta v = 8$ m/s

Cálculo de la aceleración media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8}{2} \quad \therefore\ a_m = 4\ \text{m/s}^2$$

5. Un ascensor de 4,9 m de altura (entre el techo y el piso) está subiendo con una velocidad constante de 5 m/s. Calcular el tiempo que demora en llegar al piso del ascensor un perno que se desprende del techo del mismo ascensor.

Resolución:

Fijamos nuestro sistema de referencia dentro del

ascensor. La velocidad inicial del perno respecto de nuestro observador es igual a cero:

$h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 4{,}9 = 0 + \frac{1}{2}(9{,}8)t^2 \quad \therefore\ t = 1\ s$

El tiempo transcurre de igual modo para todos los sistemas de referencia.

6. Un hombre encerrado en un ascensor no sabe si está en movimiento, para averiguar deja caer una moneda sin velocidad inicial desde una altura de 1,5 m, demorándose en llegar al piso del ascensor 0,5 segundos, ¿cómo se mueve el ascensor? ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

Calculemos la aceleración relativa a_R de la moneda, respecto del observador en el ascensor:

$h = v_0t + \frac{1}{2}a_Rt^2 \Rightarrow 1{,}5 = 0 + \frac{1}{2}a_R(0{,}5)^2$

$\Rightarrow a_R = 12\ m/s^2$

En general la aceleración relativa en el ascensor es: $a_R = (g \pm a)$

(+) : cuando el ascensor sube con a.

(−): cuando el ascensor baja con a.

De donde deducimos que el ascensor sube con aceleración constante: $a = 2\ m/s^2$

7. Un ascensor baja con una aceleración constante igual a g/2, en un determinado instante un perno se desprende del techo. Calcular el tiempo en el cual el perno choca con el piso del ascensor. La altura del ascensor entre el techo y el piso es 2,5 m. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

En general la aceleración relativa del perno, respecto del observador en el ascensor es: $a_R\ (g \pm a)$

(+): cuando el ascensor sube con a.

(−): cuando el ascensor baja con a.

De donde deducimos que la aceleración del perno respecto del ascensor es $a_R = g/2$ y la velocidad inicial cero:

$h = v_0t + \frac{1}{2}a_Rt^2 \Rightarrow 2{,}5 = 0 + \frac{1}{2}(5)t^2 \quad \therefore\ t = 1\ s$

8. Un camión de 40 m de largo marcha a 72 km/h, por una carretera paralela a la vía del tren. ¿Cuánto tiempo invertirá el camión en pasar íntegramente a un tren de 260 m de largo que marcha a 36 km/h en la misma dirección y sentido?

Resolución:

Transformando a m/s la velocidad del camión es 20 m/s y la velocidad del tren es 10 m/s. Respecto de un observador ubicado en el tren, el camión pasa con una velocidad igual a la diferencia (20 m/s − 10 m/s); cada punto del camión experimenta un desplazamiento de (260 m + 40 m) para que el camión atraviese íntegramente el tren.

$d_{rel} = v_{rel}t \Rightarrow 300 = 10t$

$\therefore\ t = 30\ s$

9. Un muchacho caminando sobre una escalera mecánica detenida se demora en llegar arriba 90 segundos. Cuando está parado sobre la escalera en movimiento demora en llegar 60 segundos, ¿qué tiempo demora en llegar si camina sobre la escalera en movimiento?

Resolución:

Sea, L la longitud de la escalera.

Velocidad del hombre respecto a la escalera:

$v_{H/E} = \frac{L}{90}$

Velocidad de la escalera respecto a la tierra:

$v_E = \frac{L}{60}$

Velocidad del hombre respecto a la tierra:

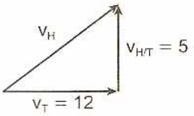
$v_H = v_E + v_{H/E} \Rightarrow v_H = \frac{L}{60} + \frac{L}{90} \Rightarrow v_H = \frac{L}{36}$

Por lo tanto el hombre demora en desplazarse la distancia L, 36 segundos.

10. Sobre la plataforma de un ferrocarril que está corriendo a razón de 12 km/h, un hombre camina con una velocidad de 5 km/h respecto a la plataforma, en dirección perpendicular a la dirección de los rieles. La verdadera velocidad del hombre respecto al suelo firme es igual a:

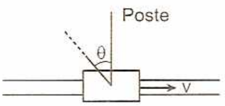
Resolución:

En el movimiento compuesto, la velocidad resultante se consigue sumando vectorialmente la velocidad del tren, más, la velocidad del hombre respecto del tren.

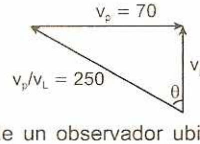


Del teorema de Pitágoras: $v_H = 13$ km/h

11. Un hombre se encuentra parado sobre una plataforma móvil que se mueve horizontalmente con una velocidad constante de 70 m/s. Si el hombre tiene en sus manos un rifle, ¿en qué dirección, definido por el ángulo θ debe hacer el disparo, en el instante que el hombre pasa frente a un poste, para hacer blanco en éste? Velocidad de la bala respecto del rifle 250 m/s.



Resolución:



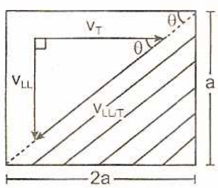
Respecto de un observador ubicado en tierra, la velocidad del proyectil es igual a la suma vectorial

de la velocidad de la plataforma más la velocidad del proyectil respecto de la plataforma, y esta resultante se dirige al poste.
Del triángulo rectángulo, deducimos, que la dirección con que debe hacer el disparo es: $\theta = 16°$

12. A través del cristal de la ventana de un coche de ferrocarril, un pasajero ve caer las gotas de lluvia paralelamente a la diagonal del marco. ¿Con qué velocidad cae realmente, si no hay viento, y el tren está corriendo a 60 km/h? El ancho de la ventana es el doble de la altura.

Resolución:

Nos piden determinar la velocidad de la lluvia respecto del tren. De la condición del problema, la velocidad de la lluvia respecto del tren es paralela a la diagonal del marco.



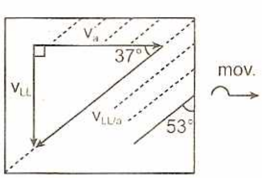
De la semejanza de triángulos:

$$\frac{v_{LL}}{a} = \frac{v_T}{2a} \qquad \therefore\ v_{LL} = 30 \text{ km/h}$$

13. Un hombre que guía su automóvil a través de una tormenta a 100 km/h observa que las gotas de lluvia dejan trazas en las ventanas laterales haciendo un ángulo de 53° con la vertical. Cuando él detiene su auto, observa que la lluvia está cayendo realmente en forma vertical. Calcular la velocidad de la lluvia respecto de la tierra.

Resolución:

Consideremos la velocidad del auto hacia la derecha, v_a.

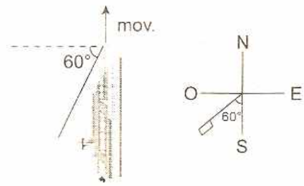


Del diagrama de velocidades:

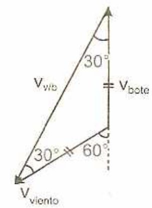
$$\tan 37° = \frac{v_{LL}}{a} \Rightarrow v_{LL} = v_a \tan 37°$$

Reemplazando: $v_{LL} = 75$ km/h $\qquad \therefore\ v_{LL/a} = 125$ km/h

14. La bandera situada en el mástil de un bote a vela flamea haciendo un ángulo de 60°, como se muestra en la figura, pero la bandera situada en una casa a la orilla del río se extiende 60° al suroeste. Si la velocidad del bote es de 10 km/h, calcular la velocidad del viento y la velocidad aparente del viento para un observador situado sobre el bote.

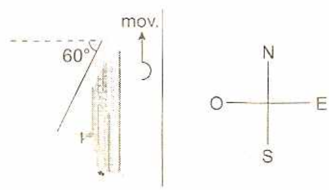


Resolución:

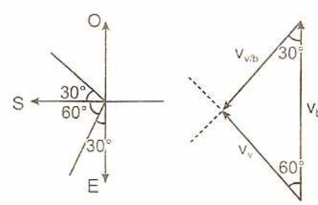


La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en dirección de la velocidad relativa del viento respecto del bote.
De la composición vectorial de velocidades se deduce que: $v_{bote} = v_{viento} = 10$ km/h
Cálculo de la velocidad del viento respecto de un observador ubicado en el bote:
De la ley de cosenos: $v_{v/b} = 10\sqrt{3}$ km/h
En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamearía en el sentido de N a S, opuesto al movimiento del bote.

15. Una bandera ubicada en el mástil de un bote flamea haciendo un ángulo de 60° como se muestra en la figura, pero la bandera situada en la orilla se extiende al Sur 30° Oeste. Encontrar la velocidad del viento respecto a la tierra, si el bote se mueve con una rapidez de 10 km/h.

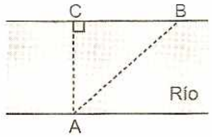


Resolución:

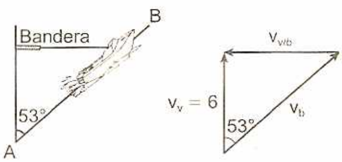


La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en dirección de la velocidad relativa del viento respecto del bote. $\vec{v}_{v/b} = \vec{v}_v - \vec{v}_b$
Resolviendo el triángulo: $v_{viento} = 5$ km/h
En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamea en el sentido de Oeste a Este, opuesto al movimiento del bote.

16. En un río del punto A al punto B que se encuentra en la orilla opuesta, a lo largo de la recta AB, navega un bote. La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en la dirección del río. El viento sopla con una velocidad de 6 m/s en dirección perpendicular a la orilla, de A hacia C. Si, AC = 3 km y CB = 4 km, determinar la velocidad del bote respecto de la orilla.



Resolución:



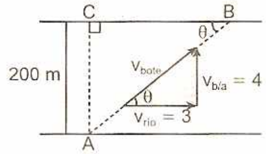
La bandera ubicada en el mástil del bote flamea en dirección de la velocidad relativa del viento respecto del bote.

Del triángulo rectángulo deducimos que la velocidad del bote respecto de la orilla es 10 m/s.

$v_b = 10$ m/s

En ausencia del viento, la bandera ubicada en el mástil del bote flamearía en el sentido de B hacia A, opuesto al movimiento de bote.

17. Para cruzar un río de 200 m de ancho, se emplea un bote, que se mueve siempre perpendicularmente a la corriente del agua, con una velocidad de 4 km/h. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, ¿a qué distancia, medida desde el punto de partida, se encuentra el punto de llegada del bote?



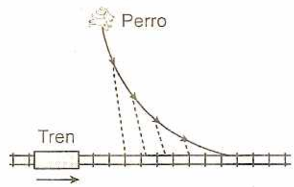
Resolución:

En el movimiento compuesto, la velocidad resultante se consigue sumando vectorialmente la velocidad del río, más la velocidad del bote respecto del agua. La trayectoria que sigue el bote tiene la misma dirección del vector velocidad.

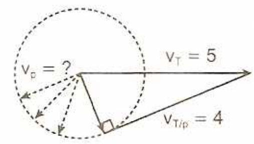
Del triángulo rectángulo de velocidades se deduce que el ángulo θ mide 53°.

En el triángulo rectángulo ACB: d = AB = 250 m

18. Un coche de ferrocarril se desplaza rectilíneamente a velocidad constante de 5 m/s. Un perro que se encuentra fuera de la línea férrea se dirige en todo instante al coche con velocidad constante en módulo. El perro observa que el tren pasa frente a él (perpendicularmente) con una velocidad de 4 m/s. Hallar la velocidad del perro.



Resolución:

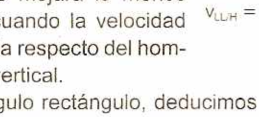


El perro cambia de dirección en cada instante respecto a la tierra, pero manteniendo constante el módulo de su velocidad.

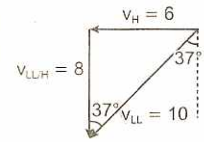
El perro dirá que el tren pasa frente a él cuando la velocidad del perro es perpendicular a la velocidad relativa del tren respecto al perro.

Del diagrama de velocidades se deduce, que la velocidad del perro es: $v_p = 3$ m/s

19. Las gotas de lluvia caen con una velocidad constante de 10 m/s formando un ángulo de 37° con la vertical. Hallar la velocidad con que debe moverse el hombre con sombrero de charro para mojarse lo menos posible.



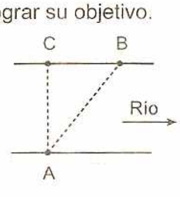
Resolución:



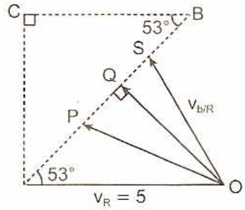
El hombre con sombrero de charro se mojará lo menos posible cuando la velocidad de la lluvia respecto del hombre sea vertical.

Del triángulo rectángulo, deducimos que la velocidad constante con que debe moverse el hombre es 6 m/s hacia la izquierda.

20. Un hombre en un bote debe ir de A hacia B que están en orillas opuestas del río. Las dimensiones son AC = 80 m y BC = 60 m. La velocidad de la corriente del río es 5 m/s. Hallar la mínima velocidad del bote relativa al agua, para lograr su objetivo.



Resolución:



La velocidad del bote respecto a tierra debe tener la dirección AB. Pero la velocidad resulta de sumar vectorialmente la velocidad del río, más la velocidad del bote respecto del agua (río).

$\vec{v}_b = \vec{v}_R + \vec{v}_{b/R}$

La velocidad del bote respecto del rio, puede ser:

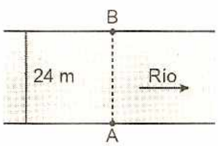
$\overrightarrow{OP}$; $\overrightarrow{OQ}$; $\overrightarrow{OS}$

La velocidad de menor módulo, es aquel vector perpendicular al segmento AB.

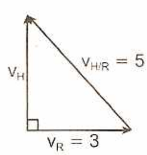
Luego: $v_{b/R} = 4$ m/s

Velocidad mínima del bote respecto del agua.

21. Un hombre puede nadar en aguas tranquilas con una velocidad de 5 m/s. Si se tiene un río de 24 m de ancho, cuyas aguas se mueven con una velocidad constante de 3 m/s, hallar el tiempo que tardará en cruzar el río, sabiendo que quiere hacerlo en la dirección de A hacia B.



Resolución:



Respecto de un observador ubicado en tierra, la velocidad del hombre nadando es igual a la suma vectorial, de la velocidad de la corriente del río, más la velocidad del hombre respecto del río, y esta resultante tiene la dirección de A hacia B.

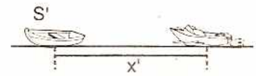
Del triángulo rectángulo, deducimos que la velocidad del hombre respecto de la tierra es $v_H = 4$ m/s, con el cual recorre la distancia AB en un tiempo t.

$d_{AB} = v_H t \Rightarrow 24 = 4t \quad \therefore t = 6$ s

22. Una lancha a motor que va río arriba se encontró con un bote que flotaba aguas abajo. Pasado una hora de este encuentro el motor de la lancha paró. La reparación de ésta duró 30 minutos y durante todo el tiempo la lancha se guía libremente de la corriente del río. Arreglado el motor, la lancha comenzó a ir río abajo con la misma velocidad con relación a la corriente del agua y alcanzó al bote a una distancia igual a 7,5 km del punto del primer encuentro. Determinar la velocidad de la corriente del río, considerandola constante.

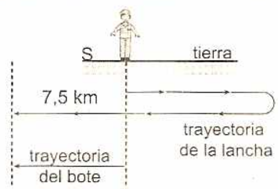
Resolución:

Fijamos nuestro sistema de referencia inercial S' en el bote, de ahí observamos que la lancha se aleja una distancia x' en una hora.



Pasado media hora, en que el motor de la lancha paró, la distancia x' no se altera, debido a que ambos cuerpos tienen la misma velocidad del río. Arreglado el motor la lancha regresa con la misma rapidez respecto del agua, por consiguiente pasado una hora más da alcance al bote.

El tiempo total transcurrido será: 2,5 h

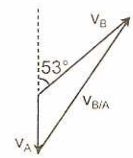


El tiempo transcurre de igual modo para todos los sistemas de referencia. Ahora fijamos nuestro sistema de referencia S en la tierra:

Observamos que la lancha le da alcance al bote a 7,5 km del punto de su primer encuentro. El bote en 2,5 h se ha desplazado 7,5 km con la velocidad del río, respecto a tierra:

$d = vt \Rightarrow 7{,}5 = v(2{,}5) \quad \therefore v = 3$ km/h

23. Un barco A navega hacia el Sur con una velocidad de 14 km/h, mientras que otro barco B mantiene el rumbo N53°E moviéndose a 30 km/h. Determinar la velocidad del barco B respecto a un observador que se encuentra sobre la cubierta de A.



Resolución:

Velocidad de B respecto de A: $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

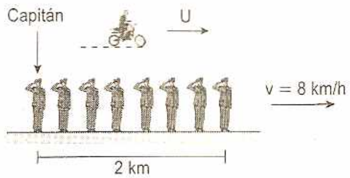
$$v_{BA} = \sqrt{v_B^2 + v_A^2 - 2v_B v_A \cos 127^\circ}$$

$$\Rightarrow v_{BA} = \sqrt{30^2 + 14^2 - 2(30)(14)\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

De donde: $v_{BA} = 40$ km/h

24. Una columna de soldados que se extiende 2 km se mueve por una carretera con velocidad de 8 km/h. El capitán que se halla en la retaguardia envía

un motociclista con una orden a la cabeza de la columna. Después de 20 minutos el motociclista regresa con la misión cumplida. Determine la velocidad del motociclista considerando que él avanzó en ambas direcciones con la misma velocidad.



Resolución:

Fijamos nuestro sistema de referencia en los ojos del capitán. Para el capitán, la velocidad del motociclista será (U – v) de ida y (U + v) de regreso.

Para la ida: $t_1 = \dfrac{d}{U - v} = \dfrac{2}{U - 8}$ ...(1)

Para el regreso: $t_2 = \dfrac{d}{U + v} = \dfrac{2}{U + 8}$ ...(2)

Pero el tiempo total es: $t_1 + t_2 = 20 \text{ min} = \dfrac{1}{3}\text{h}$...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\dfrac{2}{U - 8} + \dfrac{2}{U + 8} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ U = 16 km/h

25. El movimiento de un cuerpo viene dado por las ecuaciones:
$x = 3t^2 + 2t;\quad y = 2t^3 + 5;\quad z = 2t + 6$
Para t = 2 segundos, calcular la velocidad, la aceleración y los cosenos de los ángulos que forma la velocidad con los ejes cartesianos.

Resolución:

Sabemos que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo; por lo tanto, calculamos sus componentes:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t + 2;\ v_y = \frac{dy}{dt} = 6t^2;\ v_z = \frac{dx}{dt} = 2$$

Componiendo los tres valores obtenemos la velocidad, v, en función del tiempo:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$
$$= \sqrt{(6t + 2)^2 + (6t^2)^2 + 2^2}$$

que para t = 2 s nos da v = 27,8 m/s.

Para saber la aceleración, derivamos de nuevo las expresiones anteriores:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t;\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Componiendo y sustituyendo para t = 2 segundos, resulta:

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$
$$a = \sqrt{6^2 + [12(2)]^2 + 0^2} = 24{,}7 \text{ m/s}^2$$

El valor de los cosenos de los ángulos que forma la velocidad con los ejes cartesianos viene dado por los cocientes respectivos de los módulos de las velocidades de cada componente respecto al módulo de la velocidad total. Tenemos que ya hemos calculado el valor del módulo de la composición de las tres ecuaciones para la velocidad y hemos obtenido un valor de 27,8. De ese modo:

$$\cos\alpha = \frac{|v_x|}{|v|} = \frac{14}{27{,}8} = 0{,}503$$

$$\cos\beta = \frac{|v_y|}{|v|} = \frac{24}{27{,}8} = 0{,}863$$

$$\cos\delta = \frac{|v_z|}{|v|} = \frac{2}{27{,}8} = 0{,}071$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sobre la plataforma de un camión que viaja con una rapidez de 8 m/s, una persona camina a razón de 3 m/s respecto al camión y perpendicularmente a la pista. ¿Cuál es la velocidad de la persona respecto al chofer de un auto que viaja en el mismo sentido que el camión y con una rapidez de 12 m/s?

A) 6 m/s B) 5 m/s C) 4 m/s
D) 3 m/s E) 2 m/s

2. El piloto de un avión desea volar hacia el Sur en medio de un terrible ventarrón que sopla hacia el Oriente con una velocidad de 100 km/h. Si el avión puede desarrollar una velocidad de 200 km/h con respecto al aire:

- ¿Qué rumbo debe tomar para ir al Sur?
- ¿Cuál es la velocidad del avión con respecto a un observador en tierra?

A) Sur 30° Oeste; 100 km/h
B) Sur 30° Oeste; 200 km/h
C) Sur 30° Oeste; $100\sqrt{3}$ km/h
D) Norte 30° Oeste; $100\sqrt{3}$ km/h
E) Sur 30° Este; $100\sqrt{3}$ km/h

3. Del origen de coordenadas parten del reposo con MRUV dos partículas (A y B). La primera hacia el eje negativo de las abscisas y la segunda hacia el eje positivo de las abscisas. Se sabe que al cabo de 5 segundos sus velocidades son:
$\vec{v}_A = -12\,\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_B = +8\,\hat{i}$ m/s. Determine la aceleración relativa de B respecto de A (en m/s^2).

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,8 D) 2 E) 4

4. Desde una altura de 80 m se lanzan horizontalmente dos proyectiles con velocidades de $\vec{v}_A = 12\,\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_B = 16\,\hat{i}$ m/s. Determinar:

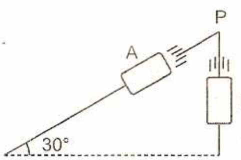
- La velocidad de A respecto de B, en el instante que llegan a tierra.
- La separación entre los puntos de contacto con el piso ($g = 10\ m/s^2$).

A) 20 m/s; 4 m B) 20 m/s; 28 m C) 4 m/s; 4 m
D) 4 m/s; 16 m E) 28 m/s; 16 m

5. Una persona navega en un bote a favor de la corriente de un río. Si la velocidad del río es 3 km/h y la del bote respecto del río es 4 km/h, ¿qué valor tiene la velocidad del bote, para una persona ubicada en las orillas del río?

A) 7 km/h B) 5 km/h C) 4 km/h
D) 3 km/h E) 1 km/h

6. Dos argollas son soltadas desde P al mismo tiempo, tal como se muestra en la figura. Si los alambres son lisos, determine la velocidad de la argolla A respecto de B, al cabo de un segundo de ser soltadas ($g = 10\ m/s^2$).



A) 2 m/s B) $5\sqrt{3}$ m/s C) 10 m/s
D) $10\sqrt{3}$ m/s E) 15 m/s

7. Un bus viaja de Norte a Sur con una rapidez de 72 km/h. Determine el módulo de la velocidad del auto respecto al bus (en m/s).

A) 10 B) $10\sqrt{3}$ C) 20
D) $20\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{5}$

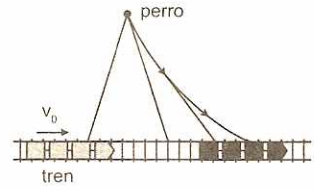
8. Sobre la plataforma de un ferrocarril, que se mueve con velocidad 6 i m/s, un niño lanza una pelota con velocidad 8 j m/s respecto a la plataforma.

Respecto de un observador en la tierra (fijo), indique la(s) afirmación(es) correcta(s)

I. La trayectoria que describe la pelota es vertical.
II. La trayectoria que describe la pelota es parabólica.
III. La pelota regresa a las manos del niño.

A) Solo I B) I y II C) II y III
D) I y III E) Solo II

9. Un coche de ferrocarril se desplaza rectilíneamente con velocidad constante $v_0 = 5$ m/s. Un perro que se encuentra fuera de la línea férrea se dirige en todo instante al coche con velocidad constante en modulo, el perro observa (movimiento relativo) que el tren pasa frente a él con una velocidad de 4 m/s. Hallar la velocidad constante, en modulo, del perro.



A) 2 m/s B) 3 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 6 m/s

10. Una lancha A se mueve río abajo con una rapidez de 3 km/h respecto al río y otra lancha B río arriba con 5 km/h respecto al río. Parten del mismo punto y al mismo instante; B se mueve durante 2 horas y retorna río abajo con una rapidez doble respecto al río, 4 horas más al cabo del cual se detiene el motor. La lancha A que mantiene su dirección y sentido le da alcance a B 50 km más abajo del punto de partida. Hallar la velocidad del río.

A) 1 km/h B) 2 km/h C) 3 km/h
D) 4 km/h E) 5 km/h

CLAVES

1. B	4. D	7. E	10. B
2. C	5. A	8. C	
3. E	6. B	9. B	

MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE PARABÓLICO

Una pelota lanzada con cierto ángulo con la horizontal, una bala disparada hacia un blanco distante, y una bomba que se tira desde un avión, siguen la trayectoria descrita por Galileo, una línea curva llamada parábola. Empecemos por encontrar las fuerzas aplicadas al cuerpo en movimiento, sobre este actúa solamente la fuerza de gravedad (peso), por esta razón, en la dirección horizontal el cuerpo se mueve con velocidad constante, la fuerza resultante en el eje x es igual a cero, mientras en el eje vertical su movimiento es uniformemente acelerado a razón de $\vec{a} = \vec{g} = -9{,}8\hat{j}\ m/s^2$.

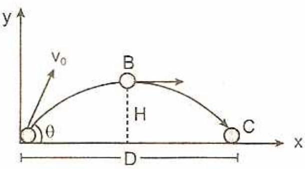


Fig. 3.34

Para recordar:
"Se ha observado que las bombas y los proyectiles describen una trayectoria curva de cierta especie; sin embargo, nadie ha señalado que esta trayectoria es una parábola".
Galileo Galilei

Movimientos componentes:

a) En el eje horizontal (x) se cumplen las leyes del MRU, la velocidad permanece constante durante todo el movimiento.

$$\boxed{\vec{v}_x = v_0\cos\theta\,\hat{i} = \text{constante}} \qquad \ldots(3.33)$$

b) En el eje vertical (y) se cumplen las leyes del MRUV, el cuerpo tiene aceleración constante durante todo el movimiento.

$$\boxed{\vec{a}_y = -g\hat{j} = -9{,}8\hat{j}\ \text{m/s}^2 = \text{constante}} \qquad \ldots(3.34)$$

La velocidad es variable en la vertical.
La velocidad inicial, según la figura 3.34 es:

$$\boxed{\vec{v}_{0(y)} = v_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\ \text{m/s}} \qquad \ldots(3.35)$$

- Consideraciones:
  1. El alcance horizontal D es suficientemente pequeño como para despreciar la curvatura de la Tierra.
  2. La máxima altura H alcanzada es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la gravedad con la altura.
  3. La velocidad de lanzamiento v_0 es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire.

¿Cuándo la trayectoria deja de ser una parábola?

- Cuando el alcance y la altura máxima es comparable con el radio de la Tierra.
- La trayectoria del proyectil es parte de una elipse, donde uno de sus focos es el centro de la Tierra.

Fórmulas especiales

1. Tiempo de vuelo (A → B → C): t

$$\boxed{t = \frac{2v_0\operatorname{sen}\theta}{g}} \qquad \ldots(3.36)$$

2. Altura máxima: H

$$\boxed{H = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}} \qquad \ldots(3.37)$$

3. Alcance horizontal: D

$$\boxed{D = \frac{2v_0^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}} \qquad \ldots(3.38)$$

Casos particulares

I. Cuando lanzamos horizontalmente un proyectil de cierta altura (figura 3.35), la velocidad inicial (t = 0) en la vertical es igual a cero.
El alcance horizontal d_1 o d_2 depende solo del módulo de la velocidad de lanzamiento v_x. El tiempo de caída t depende solo de H.

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2H}{g}}} \qquad \ldots(3.39)$$

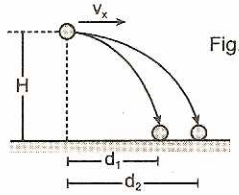
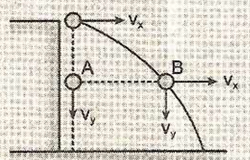


Fig. 3.35

¡Atención!
Galileo, comprobó que la velocidad horizontal v_x del objeto B no influye en su movimiento vertical.



El objeto A se suelta y B es lanzado horizontalmente en el mismo instante, entonces A y B llegarán a tierra en el mismo instante.

II. Cuando lanzamos dos proyectiles horizontalmente y simultáneamente (figura 3.36) el alcance es proporcional a su velocidad de lanzamiento.

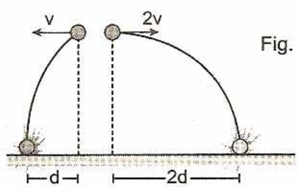


Fig. 3.36

El tiempo de caída es igual para ambos cuerpos, cuando estos tienen la misma altura en el instante de su lanzamiento horizontal.

III. Se tiene un dispositivo que lanza proyectiles, siempre con velocidad constante en módulo v_0, como indica la figura 3.37. El alcance horizontal es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es $\theta = 45°$, para cualquier otro valor del ángulo ($\theta > 45° \vee \theta < 45°$) el alcance es menor.

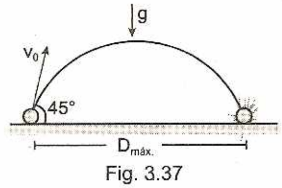


Fig. 3.37

IV. Se tiene dos dispositivos A y B que lanzan proyectiles con velocidad constante en módulo v_0 como indica la figura 3.38. El alcance de ambos proyectiles son iguales, cuando los ángulos de lanzamiento a y b son complementarios, $\alpha + \beta = 90°$.

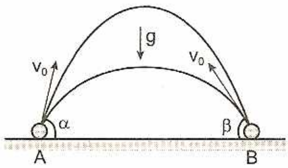


Fig. 3.38

Ejemplo:

Un avión vuela horizontalmente con velocidad de 75 $\hat{i}$ m/s, se deja caer una piedra respecto del avión y recorre una distancia horizontal de 750 m antes de llegar al suelo.

a) ¿Después de cuánto tiempo llega la piedra a tierra?
b) ¿Cuál es la altura a la que vuela el avión?
c) ¿Cuál es la velocidad de impacto contra la tierra?
d) Con qué ángulo llegó la piedra sobre el suelo respecto de la horizontal? ($\vec{g} = -10\hat{j}$ m/s^2)

Resolución:

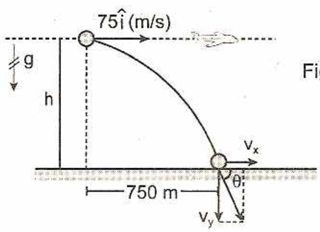


Fig. 3.39

Se recomienda graficar el fenómeno físico, como indica la figura 3.39, para comprender y facilitar la resolución.

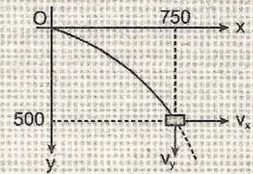
a) Analizando el movimiento en el eje horizontal (x):
$d = v_x t \Rightarrow 750 = 75t \Rightarrow t = 10$ s
El tiempo en movimiento es 10 segundos.

b) Analizando el movimiento en el eje vertical (y), donde la velocidad inicial es cero, $v_{0(y)} = 0$ de la ecuación (3.28):
$h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 0 + \frac{1}{2}(10)(10)^2$
$h = 500$ m, es la altura a que se encuentra el avión.

c) Calculamos la componente vertical de la velocidad con la ecuación 6.5: $v_y = v_{0y} + gt$
$v_y = 0 + (10)(10) = 100$ m/s
La velocidad resultante se obtiene aplicando el método del paralelogramo y el módulo aplicando el teorema de Pitágoras: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
Reemplazando valores:
$v = \sqrt{(75)^2 + (100)^2} = 125$ m/s

Independencia de las velocidades

Cuando un cuerpo está animado simúltáneamente de dos movimientos perpendiculares entre sí, el desplazamiento en la dirección de uno de ellos es determinado solamente por la velocidad en esa dirección.



d) El ángulo se obtiene aplicando la función tangente: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53°$

Teorema

Si dos partículas se mueven con una misma aceleración (iguales en módulo y dirección), su movimiento relativo es un movimiento rectilíneo uniforme.

Demostración:

Sabemos: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

entonces, para dos partículas A y B que se mueven con una misma aceleración tenemos que:

$\vec{v}_A = \vec{v}_{0A} + \vec{a}t$; $\vec{v}_B = \vec{v}_{0B} + \vec{a}t$

Por otro lado, por definición de velocidad relativa:

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

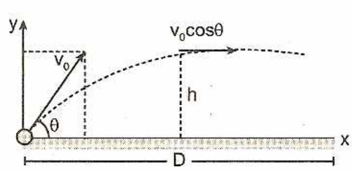
$\vec{v}_{AB} = \left(\vec{v}_{0A} + \vec{a}t\right) - \left(\vec{v}_{0B} + \vec{a}t\right)$

$\Rightarrow \vec{v}_{AB} = \vec{v}_{0A} - \vec{v}_{0B} \Rightarrow \vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AB0}$

Como la velocidad relativa, de A respecto de B, no varía con el tiempo, su trayectoria relativa será una línea recta.

FÓRMULA DE LA PARÁBOLA

Si lanzamos un cuerpo con cierto ángulo de inclinación y el medio fuese el vacío, el móvil describiría una trayectoria curva llamada parábola, la cual tendrá una forma que dependerá de la velocidad de lanzamiento y el ángulo de disparo. Galileo demostró que el movimiento parabólico debido a la gravedad es un movimiento compuesto por otros dos: uno horizontal y el otro vertical. Descubrió asimismo que el movimiento horizontal se desarrolla siempre como un MRU y el movimiento vertical es un MRUV con aceleración igual a g, es decir movimiento de caída libre vertical.

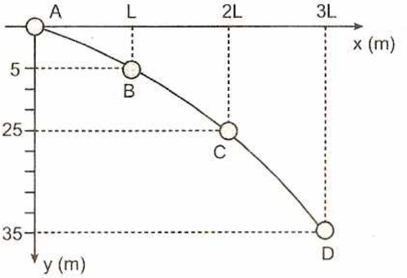


Tiro semiparabólico

Desplazamiento vertical: caída libre desde el reposo

Desplazamiento horizontal: movimiento con velocidad constante.

Todos los tiros semiparabólicos causados por la gravedad se resuelven con las siguientes relaciones:



Movimiento vertical: $y = \frac{1}{2}gt^2$

Movimiento horizontal: $x = v_x t$

v_0 : Velocidad de lanzamiento (dirección horizontal).

Sistema de referencia. Para una trayectoria semiparabólica fijamos nuestro sistema de referencia en el nivel de lanzamiento, de manera que el cuerpo acelera en el eje y.

Forma vectorial. Cuando utilices las ecuaciones vectoriales no debes olvidar que todas las cantidades vectoriales que en ellas aparecen tienen signos, los que dependerán del sentido que posean. Asimismo, te recomiendo trazar el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, y desde allí medir los desplazamientos, horizontal $(\vec{x})$ y vertical $(\vec{y})$. Las ecuaciones vectoriales del movimiento vertical son:

Para la velocidad vertical: $\vec{v}_{f(y)} = \vec{v}_{0(y)} + \vec{g}t$

Para el desplazamiento vertical: $\vec{h} = \vec{v}_{0(y)}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$

La velocidad total del proyectil es siempre tangente a la parábola en cualquier punto de esta, y su valor se determina aplicando el teorema de Pitágoras:

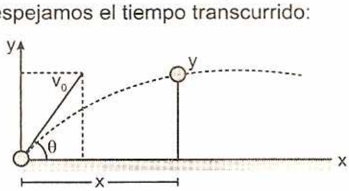
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_{f(y)}^2}$$

Ecuación de la parábola

Aplicamos en el eje x el MRU, entonces, el módulo del desplazamiento horizontal es:

$$x = v_x t \Rightarrow x = (v_0\cos\theta)t$$

Ahora despejamos el tiempo transcurrido:



$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} \qquad \ldots (1)$$

Aplicamos en el eje y el MRUV, la rapidez inicial en el eje vertical es: $v_{0(y)} = v_0\text{sen}\theta$, entonces el módulo del desplazamiento vertical es:

$$y = v_{0(y)}t - \frac{gt^2}{2} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazamos (1) en (2):

$$y = (v_0\cos\theta)\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right) - \frac{g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2}{2}$$

La trayectoria que describe el proyectil en una línea curva llamada parábola.

$$y = ax - bx^2$$

Teorema plus 100

Si dos partículas se mueven con una misma aceleración (iguales en modulo y dirección), su movimiento relativo es un movimiento rectilíneo uniforme (MRU).

Demostración:

Sabemos que: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_t$ entonces para las partículas A y B que se mueven con una misma aceleración tenemos que: $\vec{v}_A = \vec{v}_{0(A)} + \vec{a}t$ y $\vec{v}_B = \vec{v}_{0(B)} + \vec{a}t$

Por otro lado, por definición de velocidad relativa:

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

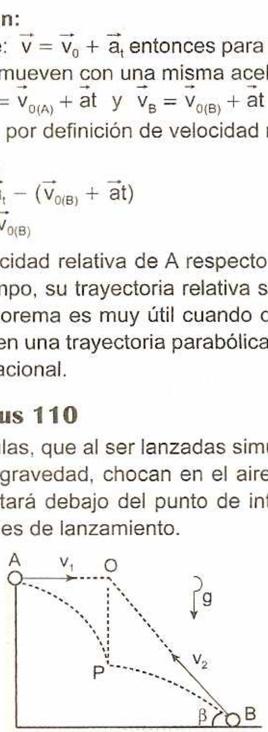
$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{0(A)} + \vec{a}_t - (\vec{v}_{0(B)} + \vec{a}t)$

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{0(A)} - \vec{v}_{0(B)}$

Como la velocidad relativa de A respecto de B, no varía con el tiempo, su trayectoria relativa será una línea recta. Este teorema es muy útil cuando dos partículas A y B describen una trayectoria parabólica dentro de un campo gravitacional.

Teorema plus 110

Si dos partículas, que al ser lanzadas simultáneamente al campo de gravedad, chocan en el aire, el punto de impacto P estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.



Demostración:

Sabemos por teoría que el desplazamiento que experimenta una partícula que se mueve parabólicamente en el campo de gravedad está dado por: $\vec{d} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Según esto el vector desplazamiento $\vec{d}$ es la suma vectorial de un vector colineal con la velocidad de lanzamiento $\vec{v}_0$ y de un vector vertical paralelo a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$.

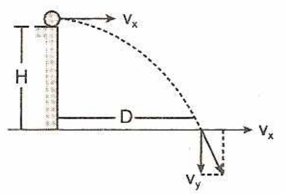
Si dos partículas A y B, que al ser lanzadas simultáneamente, chocan en el punto P, se cumplirá que el punto P estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.

En ausencia de la gravedad las partículas A y B chocarían en el punto O.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. De lo alto de una torre, se lanza una piedra con una velocidad horizontal de 40 m/s. Sabiendo que la piedra estuvo en movimiento 3,0 s:

- ¿Cuál es la altura de la torre?
- ¿A qué distancia del pie de la torre, la piedra alcanza el suelo?
- ¿Con qué velocidad la piedra alcanza el suelo? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

En la vertical:

$H = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow H = 0 + \frac{1}{2}(10)(9) \Rightarrow H = 45\ m$

En la horizontal: $D = v_xt \Rightarrow D = (40)(3) \Rightarrow D = 120m$

Cálculo de la velocidad en la vertical:

$v_y = v_{0(y)} + gt$

$\Rightarrow v_y = 0 + 10(3) \Rightarrow v_y = 30\ m/s$

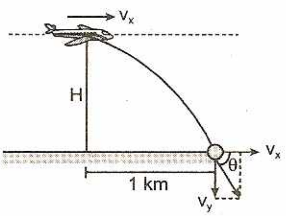
Del teorema de Pitágoras: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$\Rightarrow v^2 = 1600 + 900 \Rightarrow v = 50\ m/s$

v: velocidad de la piedra cuando llega al suelo.

2. Un avión vuela horizontalmente con velocidad de 100 m/s, se deja caer una piedra respecto del avión y recorre una distancia horizontal de 1000 m antes de llegar al suelo.

- ¿Con que ángulo llegó la piedra sobre el suelo respecto de la horizontal? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

En la horizontal: $D = v_xt \Rightarrow 1000 = 100t \Rightarrow t = 10\ s$

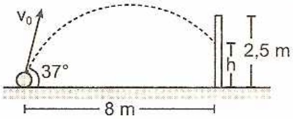
Cálculo de la velocidad en la vertical:

$v_y = v_{0(y)} + gt \Rightarrow v_y = 0 + 10(10) \Rightarrow v_y = 100\ m/s$

Cálculo del ángulo de impacto: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

$\Rightarrow tg\theta = 1 \quad \therefore\ \theta = 45°$

3. Un futbolista patea una pelota y esta adquiere una velocidad de 10 m/s con un ángulo de 37° con la horizontal, encontrándose a 8 m de distancia de una portería de 2,5 m. ¿Habría posibilidad de gol?



Resolución:

En la horizontal:

$D = (V_0\cos 37°)t$

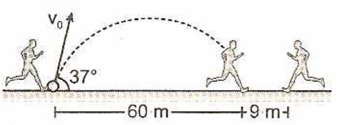
$8 = (10)\frac{4}{5}t \Rightarrow t = 1$

En la vertical: $h = (v_0 sen37°)t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = 10\left(\frac{3}{5}\right)(1) - \frac{1}{2}(9,8)(1) \Rightarrow h = 1,1\ m$

¿Hay posibilidad de gol?: Sí, $h < 2,5\ m$

4. Un futbolista patea una pelota, saliendo esta con una velocidad de 25 m/s y un ángulo de 37° con el piso. Otro jugador que se encuentra a 69 m delante del primero corre a recoger la pelota. ¿Con qué velocidad media debe correr este último para recoger la pelota justo cuando llega al suelo? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Cálculo del tiempo de vuelo de la pelota.

Analizando el movimiento en el eje vertical:

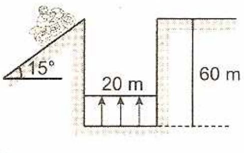
$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 15t - 5t^2 \Rightarrow t = 3\ s$

Desplazamiento de la pelota en el eje horizontal:

$d = v_xt \Rightarrow d = (20)(3) \Rightarrow d = 60\ m$

Por consiguiente el otro se desplaza 9 m en 3 s con velocidad media igual a: $v_m = 3\ m/s$

5. Un motociclista intenta pasar el obstáculo impulsándose en un plano inclinado 15° con la horizontal. Determinar la mínima velocidad de lanzamiento v_0 para lograr su objetivo. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Descomponemos la velocidad de lanzamiento v_0. La componente horizontal es $v_x = v_0\cos 15°$ y la velocidad inicial en el eje vertical es $v_y = v_0 sen15°$.

Analizando el movimiento en el eje y: $h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2$

$0 = v_0 t\,\text{sen}15° - 5t^2 \Rightarrow t = \frac{v_0}{5}\text{sen}15°$ ...(1)

Analizando el movimiento en el eje x: $d = v_x t$

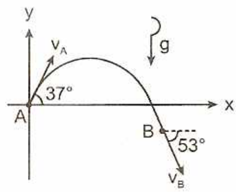
$\Rightarrow 20 = v_0 t\cos 15°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

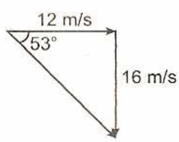
$$20 = v_0 \cos 15° \frac{v_0 \text{sen}15°}{5} \Rightarrow 100 = v_0^2\left(\frac{\text{sen}30°}{2}\right)$$

Luego: $v_0 = 20$ m/s

6. En el gráfico se muestra la trayectoria parabólica del proyectil en un plano vertical, calcular el tiempo que empleó para ir de A hacia B, si la velocidad en A es 15 m/s. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:



Descomponiendo la velocidad en A. La componente en el eje x es 12 m/s (constante) y en el eje y es 9 m/s. Analizando las componentes de la velocidad en B.

Luego, analizando el desplazamiento de A a B en el eje vertical: $v_{f(y)} = v_{0(y)} - gt \Rightarrow -16 = 9 - 10t$

Entonces: $t = 2{,}5$ s

7. Un buque de guerra avanza en línea recta hacia un blanco con una velocidad constante de 10 m/s. Tiene un cañón que dispara un proyectil con velocidad en módulo de 50 m/s y formando un ángulo de 53° según un observador situado en el buque. Hallar a qué distancia del blanco debe disparar para acertarle.
($g = 10$ m/s^2)

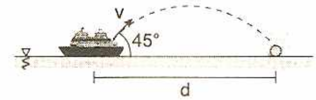
Resolución:

Descomponiendo la velocidad de lanzamiento y analizando el movimiento del proyectil respecto de un observador fijo en la tierra. Instante después del lanzamiento el proyectil tiene las siguientes componentes: en el eje horizontal su velocidad constante es 40 m/s y en el eje vertical la velocidad inicial hacia arriba es también 40 m/s, por consiguiente la velocidad de lanzamiento respecto de la tierra forma 45° con la horizontal.

Analizando el movimiento en el eje vertical:

$$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 40t - 5t^2$$

Resolviendo: $t = 8$ s



Analizando el movimiento en el eje horizontal:

$d = v_x t \Rightarrow d = (40)(8)$

Luego: $d = 320$ m

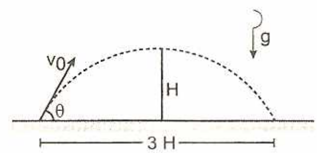
8. Respecto del movimiento parabólico, determinar la medida del ángulo de lanzamiento θ, tal que el alcance horizontal sea el triple de la altura máxima alcanzada.

Resolución:

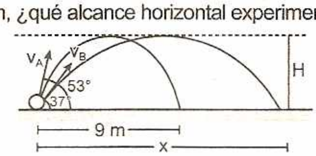
El ángulo de lanzamiento θ, la altura máxima H y el alcance horizontal D, se relacionan del siguiente modo:

$$\tan\theta = \frac{4H}{D}$$

Pero : $D = 3H \Rightarrow \tan\theta = \frac{4H}{3H} = \frac{4}{3}$ $\quad\therefore\ \theta = 53°$



9. Dos proyectiles A y B lanzados con inclinaciones de 53° y 37° respectivamente alcanzan iguales alturas máximas. El proyectil A experimenta un alcance horizontal de 9 m, ¿qué alcance horizontal experimenta B?



Resolución:

Aplicando la siguiente propiedad: $\tan\theta = \frac{4H}{D}$

Proyectil A: $\frac{4}{3} = \frac{4H}{9}$ $\quad\therefore\ H = 3$ m

Proyectil B: $\frac{3}{4} = \frac{4(3)}{x}$ $\quad\therefore\ x = 16$ m

10. Un futbolista patea la pelota, la cual describe una trayectoria parabólica. Si permanece en el aire un intervalo de 6 segundos, ¿qué altura máxima alcanzó la pelota? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

En un parabólico, el tiempo de vuelo t y la altura máxima alcanzada H, se relacionan del siguiente modo:

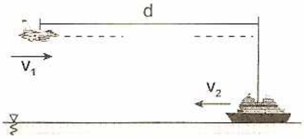
$$H = \frac{g}{8}t^2 \quad ...(1)$$

pero: $g = 10$ m/s^2 y $t = 6$ s

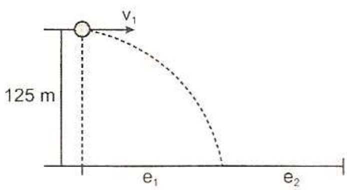
Reemplazando en (1): $H = \frac{10}{8}(36)$

$\therefore\ H = 45$ m

11. Un bombardero que vuela horizontalmente a una altura de 125 m y con una velocidad de 100 m/s, trata de atacar a un barco que navega a una velocidad de 20 m/s, en la misma dirección y sentidos opuestos. ¿A qué distancia d se debe dejar caer una bomba para lograr un impacto sobre el barco? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:



Cálculo del tiempo de vuelo del proyectil:

$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, pero: $v_{0(y)} = 0$

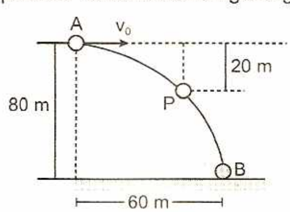
$\Rightarrow 125 = 0 + \frac{1}{2}(10)t^2$

$\Rightarrow t = 5\ s$

De la figura: $d = e_1 + e_2 \Rightarrow d = v_1 t + v_2 t$

$d = 100(5) + 20(5) \quad \therefore d = 600\ m$

12. Calcular la velocidad del móvil en el punto P. El cuerpo es lanzado horizontalmente desde el punto A y llega al punto B como indica la figura. $g = 10\ m/s^2$



Resolución:

Analizando en la vertical: $h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 80 = 0 + \frac{1}{2}(10)t^2$

$\Rightarrow t = 4\ s$

Analizando en la horizontal: MRU

$v_x = \frac{x}{t} = \frac{60}{4}\ m/s$

Cálculo de la velocidad en el punto P.

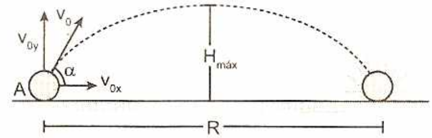
Componente vertical: $v_{f(y)}^2 = v_{0(y)}^2 + 2gh$

$\Rightarrow v_y^2 = 0 + 2(10)(20)$

$\Rightarrow v_y = 20\ m/s$

Luego: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 25\ m/s$

13. Una partícula se lanza con velocidad $30\hat{i} + 40\hat{j}$ (m/s). Considerando ($g = 10\ m/s^2$)



Determine:

a. El tiempo de vuelo.

b. La altura máxima.

c. El alcance horizontal.

Resolución:

a. En el eje y se cumplen las ecuaciones de caída libre vertical. Cálculo del tiempo de vuelo:

$t = \frac{2v_y}{g} \Rightarrow t = \frac{2(40)}{10} = 8\ s$

El tiempo de vuelo (hasta regresar al plano horizontal) es 8 segundos.

b. Cálculo de la altura máxima:

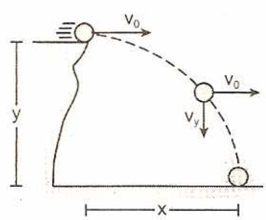
$H = \frac{v_y^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{(40)^2}{20} = 80\ m$

La altura máxima que alcanza el proyectil es 80 metros.

c. En el eje x se cumplen las ecuaciones del MRU. Cálculo del alcance horizontal:

$R = v_x t_v \Rightarrow R = (30)(8) = 240\ m$

14. Una partícula se lanza con velocidad $8\hat{i}$ (m/s) de la parte más alta de una torre de 180 m de altura. ¿A qué distancia de la base de la torre caerá la partícula? ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

En el eje y se cumplen las ecuaciones de caída libre vertical. Cálculo del tiempo de caída libre:

$H = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow 180 = \frac{10(t^2)}{2}$

Resolviendo: $t = 6$ segundos.

En el eje x se cumplen las ecuaciones del MRU. Cálculo del alcance horizontal:

$R = v_x t_v \quad \therefore R = (8)(6) = 48\ m$

15. Una pelota se lanza desde una torre. ¿De qué altura fue lanzada una pelota con velocidad $40\hat{i}$ (m/s)?, si al caer al piso recorre una distancia horizontal de 120 m. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

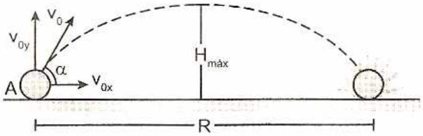
En el eje x se cumplen las ecuaciones del MRU. Cálculo del alcance horizontal:

$R = v_x t_v \Rightarrow 120 = (40)t \Rightarrow t = 3$ s

En el eje y se cumplen las ecuaciones de caída libre vertical. Cálculo del tiempo de caída libre:

$$H = \frac{gt^2}{2} \quad \therefore H = \frac{(10)(3)^2}{2} = 45 \text{ m}$$

16. Un proyectil es lanzado con un ángulo de elevación de 53° con una rapidez de 20 m/s. Determine la distancia horizontal que recorre hasta regresar al piso ($g = 10$ m/s^2).



Resolución:

Descomponemos la velocidad de lanzamiento en un plano cartesiano: $12\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$ (m/s)

En el eje y se cumplen las ecuaciones de caída libre vertical. Cálculo del tiempo de vuelo:

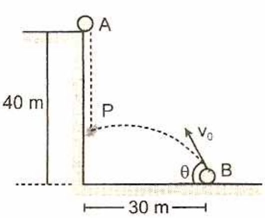
$$t = \frac{2v_y}{g} \Rightarrow t = \frac{2(16)}{10} = 3{,}2 \text{ s}$$

El tiempo de vuelo (hasta regresar al plano horizontal) es 3,2 segundos.

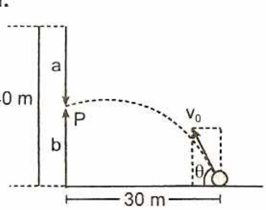
En el eje x se cumplen las ecuaciones del MRU. Cálculo del alcance horizontal:

$R = v_x t_v \quad \therefore R = (12)(3{,}2) = 38{,}4$ m

17. En la figura mostrada, en el mismo instante que se abandona la esferita A se lanza la esferita B con una velocidad v_0, determinar el ángulo θ de lanzamiento, tal que, las esferitas A y B colisionan en el punto P.



Resolución:



Analizando en la vertical:

$$h = v_{0(y)}t \pm \frac{1}{2}gt^2$$

Para A: $a = \frac{1}{2}gt^2$ ...(I)

Para B: $b = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ ...(II)

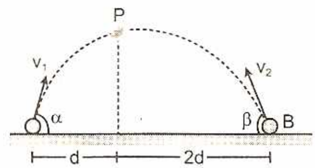
(I) + (II): $40 = v_0 t \operatorname{sen}\theta$ ...(III)

Analizando en la horizontal : MRU

$30 = v_0 t \cos\theta$ ...(IV)

(III) ÷ (IV): $\frac{4}{3} = \tan\theta \quad \therefore \theta = 53°$

18. Hallar la relación entre los ángulos α y β con que se lanzan los dos proyectiles simultáneamente, si colisionan en el aire durante su movimiento.



Resolución:

1. Ambos proyectiles alcanzan alturas iguales:

   $h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2$

   Para A: $h = (v_1 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ...(I)

   Para B: $h = (v_2 \operatorname{sen}\beta)t - \frac{1}{2}gt^2$ ...(II)

   Igualando: (I) y (II)

   $v_1 \operatorname{sen}\alpha = v_2 \operatorname{sen}\beta$ ...(III)

2. Desplazamiento horizontal (MRU): $d = v_x t$

   Para A: $(v_1 \cos\alpha)t = d$

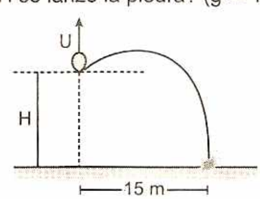
   Para B: $(v_2 \cos\beta)t = 2d$

   $2v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$ ...(IV)

   Dividiendo las ecuaciones, (III) ÷ (IV):

   $\therefore \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 2$

19. Desde un globo que asciende con una velocidad $U = 6$ m/s, se lanza una piedra horizontalmente (respecto del globo) con una velocidad $v_x = 5$ m/s. La piedra experimenta un alcance horizontal de 15 metros hasta llegar al suelo. ¿Desde qué altura H se lanzó la piedra? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

1. En el eje horizontal se cumple el MRU:

   $t = \frac{d}{v_x} = \frac{15}{5}$

   $t = 3$ s: tiempo en movimiento

2. En el eje vertical, tomamos como referencia el punto de lanzamiento:

   $-H = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -H = 6(3) - \frac{1}{2}(10)(9)$

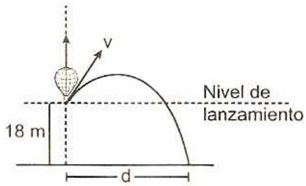
Resolviendo: $H = 27$ m

20. Desde un globo que sube con velocidad constante vertical de 5 m/s se lanza un proyectil con una

velocidad de 5 m/s formando un ángulo de 53° con la horizontal (dicha velocidad y ángulo respecto de un observador en el globo). Si el globo se halla a una altura de 18 m del piso en el momento del lanzamiento, determinar el alcance horizontal que experimenta la partícula hasta llegar al piso. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

Descomponiendo la velocidad de lanzamiento y analizando el movimiento respecto de un observador fijo en la tierra, instante después del lanzamiento la partícula tiene los siguientes componentes: en el eje horizontal su velocidad constante es 3 m/s y en el eje vertical la velocidad inicial hacia arriba es 9 m/s. El proyectil describe una trayectoria parabólica.



Analizando el movimiento en el eje vertical:

$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2$

$-18 = 9t - 5t^2 \Rightarrow t = 3\ s$

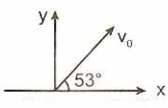
Analizando el movimiento en el eje horizontal:

$d = v_x t$

$d = (3)(3)$

Luego: $d = 9\ m$

21. Desde el origen de coordenadas x-y se lanza un proyectil con una velocidad inicial de módulo 50 m/s y formando un ángulo de 53° con el eje x. Sobre dicho proyectil actúa la aceleración de $(5;\ -10)\ m/s^2$, constante. Hallar el alcance horizontal que experimenta el proyectil hasta regresar al plano en x.



Resolución:

El proyectil tiene aceleración en el eje x igual a $5\ m/s^2$ y en el eje y igual a $-10\ m/s^2$. Descomponiendo la velocidad de lanzamiento, la velocidad constante en x es 30 m/s y en el eje y su velocidad inicial es 40 m/s.

Analizando el movimiento del proyectil en el eje y:

$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}a_y t^2$

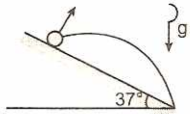
$0 = 40t - 5t^2 \Rightarrow t = 8\ s$

Analizando el movimiento en el eje x:

$d = v_{0(x)}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow d = 30(8) + (2{,}5)(8)^2$

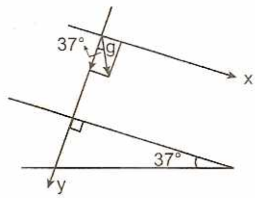
Luego el desplazamiento horizontal es: $d = 400\ m$

22. Se lanza una esfera perpendicularmente al plano inclinado con una velocidad de 40 m/s. ¿Después de cuántos segundos la esfera experimenta un alejamiento máximo respecto del plano, inclinado 37° respecto de la horizontal? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Descomponiendo la aceleración de la gravedad g convenientemente. La componente perpendicular al plano es $8\ m/s^2$ y la componente tangente (o paralela) al plano es $6\ m/s^2$.



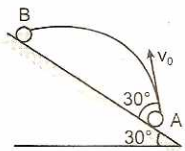
Analizando el movimiento de la esfera en el eje y perpendicular al plano. El alejamiento será máximo cuando la velocidad en y sea igual a cero:

$v_{f(y)} = v_{0(y)} - a_y t$

$0 = 40 - 8t$

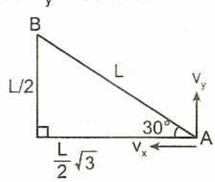
Luego, el tiempo es: $t = 5\ s$

23. Un proyectil es lanzado con una velocidad $v_0 = 20\sqrt{3}$ m/s en un plano vertical como indica la figura. Determinar el desplazamiento AB sobre el plano inclinado. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Descomponemos la velocidad v_0. La velocidad componente en el eje horizontal es $v_x = 10\sqrt{3}$ m/s, constante en el tiempo. La velocidad inicial en el eje vertical es $v_y = 30$ m/s.



Analizando el movimiento del proyectil en el eje x:

$d = v_x t$

$\frac{L}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}t \Rightarrow t = \frac{L}{20}$ ...(I)

Analizando el movimiento del proyectil en el eje y:

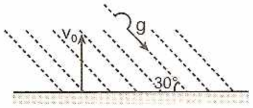
$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2$

$\frac{L}{2} = (30)t - 5t^2$ ...(II)

reemplazando (I) en (II): $\frac{L}{2} = (30)\frac{L}{20} - (5)\frac{L^2}{400}$

Resolviendo tenemos: L = 80 m

24. En la figura el campo gravitatorio se representa mediante líneas de fuerza. Se lanza una pelota perpendicularmente a la superficie con una velocidad v_0 = 20 m/s. Hallar la altura máxima que alcanza la pelota respecto a la superficie. (g = 10 m/s^2)



Resolución:

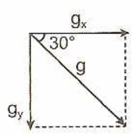
Descomposición rectangular de la intensidad del campo gravitatorio:

$g_x = 5\sqrt{3}$; $g_y = 5$ m/s^2

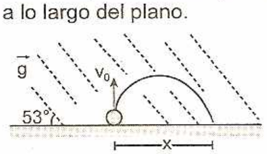
En el eje y: $v_f^2 = v_0^2 - 2g_yh$ ...(1)

Reemplazando en (1): $0 = 400 - 2(5)h$

$\therefore$ h = 40 m



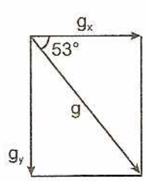
25. La figura muestra un campo gravitatorio representado mediante líneas de fuerza de intensidad g = 10 m/s^2. Se lanza un proyectil perpendicularmente a la superficie con velocidad v_0 = 40 m/s. Determinar el desplazamiento que experimenta el proyectil a lo largo del plano.



Resolución:

Descomponemos rectangularmente la intensidad del campo gravitatorio:

$g_x = 6$ m/s^2; $g_y = 8$ m/s^2



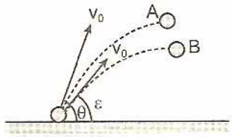
Analizando el movimiento en el eje y, determinamos el tiempo de vuelo:

$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}g_yt^2 \Rightarrow 0 = 40t - 4t^2 \Rightarrow t = 10$ s

Analizamos el movimiento en el eje x. La velocidad inicial es igual a cero:

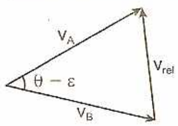
$x = v_{0(x)}t + \frac{1}{2}g_xt^2 \Rightarrow x = 0 + 3(10)^2 \quad \therefore x = 300$ m

26. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente con una misma velocidad v_0 pero con diferentes ángulos de lanzamiento. Determinar el módulo de su velocidad relativa después de un tiempo t.



Resolución:

Como el movimiento relativo es un movimiento rectilíneo uniforme, su velocidad relativa permanecerá constante en el tiempo. Hallaremos la velocidad relativa, analizando el instante inicial.

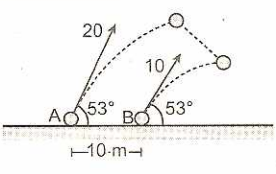


$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

$\vec{v}_{rel} = |\vec{v}_A - \vec{v}_B| \Rightarrow \vec{v}_{rel} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2\cos(\theta - \varepsilon)}$

De donde: $\vec{v}_{rel} = 2v_0\text{sen}\left(\frac{\theta - \varepsilon}{2}\right)$

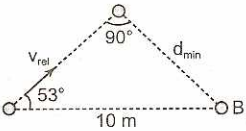
27. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente, de las posiciones indicadas, con velocidades de 20 y 10 m/s respectivamemente. Determinar al cabo de qué tiempo la distancia de separación entre estos será mínima.



Resolución:

Analicemos el movimiento de A respecto de B.

Por definición: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_{rel} = 10$ m/s

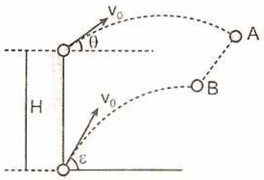


La figura muestra la trayectoria de A respecto de B y de esta se deduce que la distancia de separación entre las partículas será mínima cuando A haya recorrido 6 m.

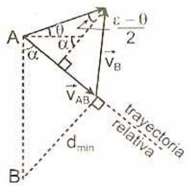
$e = vt \Rightarrow 6 = 10t \quad \therefore t = 0{,}6$ s

28. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente de las posiciones indicadas, con una misma velocidad v_0 pero con diferentes ángulos de lan-

zamiento. Si estos ángulos θ y ε son complementarios, determine cuál es la mínima distancia de separación entre las partículas.



Resolución:



Analicemos el movimiento de A respecto de B:

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

Como los módulos de los vectores $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ son iguales y el ángulo comprendido entre estos es $\varepsilon - \theta$ se demuestra que: $\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon + \theta) \Rightarrow \alpha = 45°$

La distancia de separación mínima será:

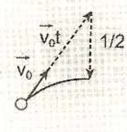
$d_{min} = h\text{sen}45° \quad \therefore\ d_{min} = h/\sqrt{2}$

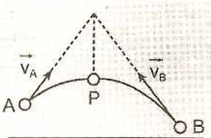
Teorema

Si dos partículas, que al ser lanzadas simultáneamente al campo de la gravedad, chocan en el aire, el punto de impacto estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.

Demostración:

Sabemos por teoría que el desplazamiento que experimenta una partícula que se mueve parabólicamente en el campo de la gravedad está dado por: $\vec{d} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

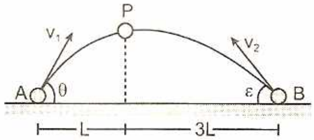




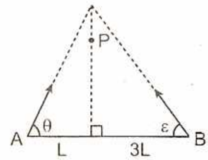
Según esto el vector desplazamiento $\vec{d}$ es la suma vectorial de un vector colineal con la velocidad de lanzamiento $\vec{v}_0$ y de un vector vertical paralelo a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$.

Si dos partículas A y B que al ser lanzados simultáneamente, chocan en el punto P, se cumplirá que el punto P estará debajo del punto de intersección de sus velocidades de lanzamiento.

29. Si los proyectiles A y B que son lanzados simultáneamente de las posiciones indicadas, chocan en el punto P, determinar una relación entre los ángulos θ y ε.



Resolución:

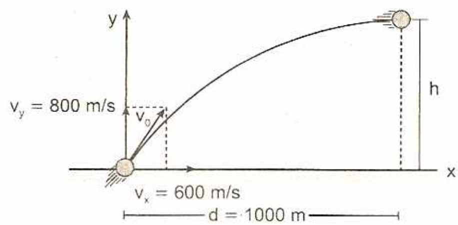


De la figura: $L\tan\theta = 3L\tan\varepsilon$

$\therefore\ \tan\theta = 3\tan\varepsilon$

30. Un cañón dispara un proyectil con una velocidad de $\vec{v}_0 = (600\,\hat{i} + 800\,\hat{j})$ m/s. ¿A qué altura (en m) se encuentra un objetivo si horizontalmente se encuentra a 100 $\hat{i}$ m del cañón? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:



En el eje x se cumple el MRU

$t = \frac{d}{v_x} = \frac{1000}{600} = \frac{5}{3} \Rightarrow t = 1{,}67$ s

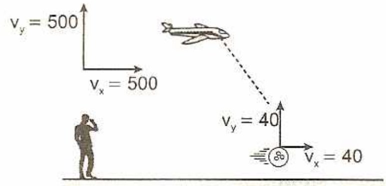
En el eje y se cumple las leyes de caída libre

$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2$

$h = 800\left(\frac{5}{3}\right) - 5\left(\frac{25}{9}\right) \quad \therefore\ h = 1319{,}4\,\hat{j}$ m

31. Un avión vuela con la siguiente velocidad $\vec{v}_0 = (500\,\hat{i} + 500\,\hat{j})$ km/h respecto a Tierra. Si un observador en el avión toma los datos del movimiento de una bola cuya velocidad resulta ser $(40\,\hat{i} + 40\,\hat{j})$ km/h. ¿Cuál es la velocidad de dicha bola para un observador en Tierra?

Resolución:

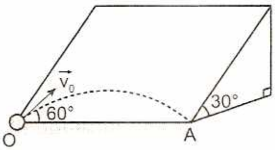


Movimiento compuesto:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = (500\,\hat{i} + 500\,\hat{j}) + (40\,\hat{i} + 40\,\hat{j})$

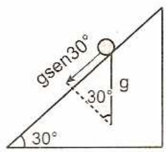
$\therefore\ \vec{v}_B = (540\,\hat{i} + 540\,\hat{j})$ km/h

32. Un niño lanza una billa sobre una pista inclinada sin rozamiento con una rapidez inicial de 20 m/s y un ángulo de 60°, tal como se muestra en la figura. Hallar el alcance horizontal OA logrado por la bola al rodar por el plano inclinado.



Resolución:

Descomposición de la aceleración de la gravedad sobre el plano inclinado.

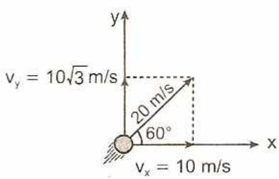


La gravedad equivalente es:

$g = g\text{sen}30° = 5\ m/s^2$

Tiempo de vuelo: OA

$$t_{vuelo} = \frac{2v_{0(y)}}{g} = \frac{2(10\sqrt{3})}{5} = 4\sqrt{3}\ s$$



Alcance horizontal: OA

$d = v_x t_{vuelo} = 10(4\sqrt{3})$

$\therefore\ d = 40\sqrt{3}\ m$

33. Un proyectil es disparado con una velocidad de $(10\sqrt{3}\ \hat{i} + 30\hat{j})$ m/s. Después de 4 s de vuelo, el ángulo que su vector velocidad hace con la horizontal, es:

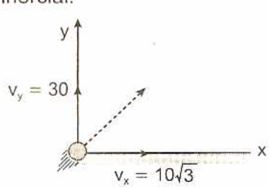
Resolución:

Sistema de referencia inercial:

Por dato:

$v = (10\sqrt{3}\ \hat{i} + 30\hat{j})\ m/s$

Descomponiendo la velocidad:

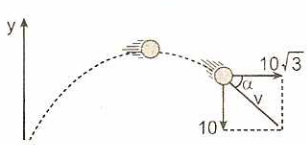


$v_x = 10\sqrt{3}\ \hat{i}\ m/s$

$v_y = v_{0(y)} - gt$

$\quad = 30 - 10(4) = -10\ m/s$

Graficando la velocidad final:

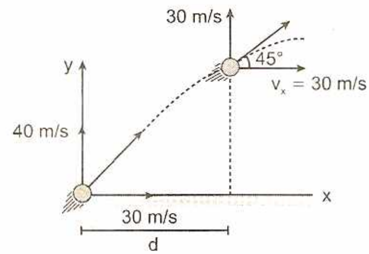


34. Un proyectil se dispara con una velocidad de $\vec{v}_0 = (30\ \hat{i} + 40\ \hat{j})$ m/s. Si el proyectil impacta contra una pared vertical con una velocidad que hace 45° con ella. Calcular qué distancia del punto de disparo se encuentra la pared (el proyectil choca cuando se encuentra ganando altura). ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución

a. En el eje horizontal, la velocidad es constante:
   $v_x = 30\ m/s$

b. En el eje vertical, la velocidad es variable, de la condición de velocidad final $v_{f(y)} = 30\ m/s$

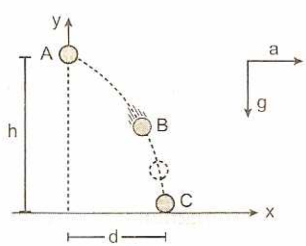


c. Desplazamiento horizontal con MRU
   $d = v_x t$
   $d = 30(1) = 30\ m$

Cuando el móvil está descendiendo, el tiempo transcurrido es $t = 7$ s y el desplazamiento horizontal es: $d = 210$ m

35. Se suelta un proyectil desde una altura h. Al impactar sobre el piso se observa un desplazamiento horizontal del 1% de altura. ¿Cuál es el valor de la aceleración horizontal? ($g = 9{,}8\ m/s^2$)

Resolución:



a. Eje vertical: caída libre, desde el reposo. ($v_y = 0$)
   $h = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$
   Haciendo: $h = 490$
   $\Rightarrow t^2 = \frac{490}{4{,}9} = 100 \Rightarrow t = 10\ s$

b. Eje horizontal: MRUV, desde el reposo ($v_x = 0$)

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un proyectil fue lanzado con una rapidez de 80 m/s y formando 30° con la horizontal. ¿En qué instante de tiempo se encuentra a una altura de 75 m? ($g = 10\ m/s^2$).

A) t = 1 s; t = 7 s
B) t = 2 s; t = 6 s
C) t = 3 s; t = 6 s
D) t = 3 s; t = 5 s
E) t = 2 s; t = 5 s

2. Se disparó un proyectil desde una superficie horizontal describiendo una trayectoria parabólica. Si su alcance máximo posible fue 90 m, determinar la rapidez del lanzamiento ($g = 10\ m/s^2$).

A) 20 m/s
B) 30 m/s
C) 45 m/s
D) 60 m/s
E) 75 m/s

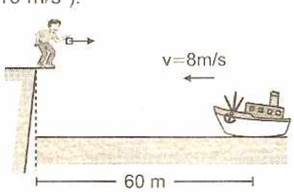
3. Un objeto se lanzó horizontalmente con una rapidez de 30 m/s desde una altura de 100 m. ¿A qué altura se encontraba cuando su rapidez fue de 50 m/s?

A) 10 m
B) 15 m
C) 20 m
D) 50 m
E) 0 m

4. Un avión desciende con una rapidez de 300 km/h y su dirección forma 53° con la vertical. En un determinado instante deja caer un objeto y observa que este al chocar con el piso realizó un avance horizontal de 800 m. Determinar a qué altura del piso fue soltado el objeto. Se desprecia la resistencia del aire ($g = 10\ m/s^2$).

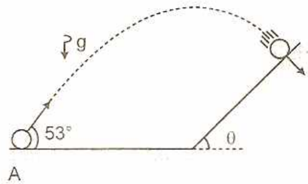
A) 600 m
B) 720 m
C) 960 m
D) 1440 m
E) 1320 m

5. Una persona ubicada en un acantilado a 45 m sobre el agua debe lanzar horizontalmente un botiquín hacia un barco en cuarentena que se acerca al acantilado con una rapidez constante de 8 m/s. Para el instante mostrado, ¿con qué rapidez debe lanzar la persona el botiquín para lograr su objetivo? ($g = 10\ m/s^2$).



A) 10 m/s
B) 8 m/s
C) 15 m/s
D) 18 m/s
E) 12 m/s

6. Un proyectil fue lanzado desde el punto A con una rapidez de 50 m/s y formando 53° con la horizontal. Si impactó sobre el plano inclinado en forma perpendicular luego de 6 s, calcular $\tan\theta$ ($g = 10\ m/s^2$).



A) 1,2
B) 1,5
C) 1,8
D) 2,5
E) 0,75

7. Un cañón lanza un proyectil con una rapidez de 360 km/h y formando 53° con la horizontal. Despreciando el rozamiento del aire, determinar a qué altura se encuentra luego de 3 s del lanzamiento ($g = 10\ m/s^2$).

A) 145 m
B) 175 m
C) 185 m
D) 195 m
E) 205 m

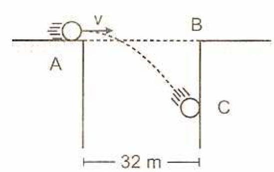
8. Un jugador patea un balón de futbol con una rapidez de 90 km/h y formando un ángulo de 53°, observándose que logró un alcance horizontal de 52 m. ¿Cuánto disminuyó la resistencia del aire el alcance del balón? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 6 m
B) 8 m
C) 10 m
D) 12 m
E) 15 m

9. Desde la ventana de un edificio una persona lanza horizontalmente una moneda con una rapidez de 8 m/s. Si la moneda cayó a 32 m de la base del edificio, determinar a qué altura se encuentra la ventana ($g = 10\ m/s^2$).

A) 80 m
B) 60 m
C) 40 m
D) 100 m
E) 120 m

10. Desde el punto A se lanza un objeto en forma horizontal con una rapidez de 20 m/s. Si las paredes verticales son muy altas, determinar la distancia BC ($g = 10\ m/s^2$).



A) 12,8 m
B) 14,4 m
C) 18,8 m
D) 21,2 m
E) 25,6 m

11. Desde una cierta altura, se lanza un objeto horizontalmente con una rapidez de 15 m/s. Después de 25 s, ¿qué ángulo formará su velocidad con la aceleración que experimenta? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

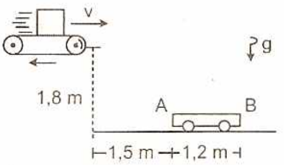
12. Un proyectil lanzando con un cierto ángulo sobre la horizontal describe una trayectoria parabólica. Si su velocidad 2 s antes de alcanzar su altura máxima forma 45° con la horizontal, determina su rapidez 3 s después de pasar su altura máxima. ($g = 10\ m/s^2$).

A) 40 m/s B) $40\sqrt{3}$ m/s
C) $5\sqrt{3}$ m/s D) $10\sqrt{3}$ m/s
E) $20\sqrt{2}$ m/s

13. Un mortero puede disparar proyectiles con una rapidez de 180 km/h y formando 53° con la horizontal. Un tanque avanza dirigiéndose hacia el mortero con una rapidez de 10 m/s. ¿Cuál debe ser la distancia entre el tanque y el mortero en el instante del disparo para hacer blanco sobre el tanque? ($g = 10\ m/s^2$).

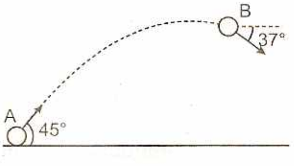
A) 240 m B) 280 m C) 300 m
D) 320 m E) 360 m

14. La figura muestra una faja transportadora que debe colocar cajas sobre la plataforma AB en reposo. Determinar entre qué valores debe encontrarse la velocidad de la faja para lograr el objetivo ($g = 10\ m/s^2$).



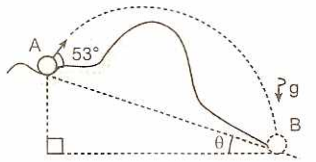
A) $2\ m/s \leq v \leq 4{,}5\ m/s$
B) $2{,}5 \leq v \leq 4\ m/s$
C) $2{,}5\ m/s \leq v \leq 4{,}5\ m/s$
D) $2\ m/s \leq v \leq 5\ m/s$
E) $1{,}5\ m/s \leq v \leq 5\ m/s$

15. La figura muestra un proyectil que fue lanzado en el punto A describiendo una trayectoria parabólica. Sabiendo que cuando llega a B han transcurrido 10,5 s; determine su avance horizontal hasta este instante ($g = 10\ m/s^2$).



A) 540 m B) 450 m C) 630 m
D) 720 m E) 840 m

16. Un mortero lanzó un proyectil desde A con una rapidez de 50 m/s y formando 53° con la horizontal. Si luego de 10 s impactó en el punto B, determinar la tangente del ángulo θ ($g = 10\ m/s^2$)



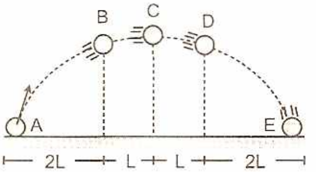
A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3 D) 1 E) 1/4

17. Respecto al movimiento de proyectiles o movimiento parabólico, indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, su velocidad es nula.
II. Su aceleración en el punto más alto es perpendicular a su velocidad.
III. El movimiento ascendente es acelerado.

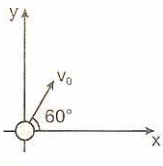
A) FVV B) FVF C) FFF
D) VVF E) VFV

18. Se muestra la trayectoria parabólica de un proyectil. Si el tiempo que permaneció en el aire fue 18 s, determinar qué tiempo empleó en ir de B hasta E.



A) 9 s B) 15 s C) 12 s D) 10 s E) 6 s

19. Se lanza un proyectil con una rapidez de 100 m/s y un ángulo de tiro de 60°, tal como se muestra en la figura. Determinar después de qué tiempo la velocidad del proyectil es horizontal.



A) $10\sqrt{3}$ s B) $6\sqrt{3}$ s C) 5 s
D) 6 s E) $5\sqrt{3}$ s

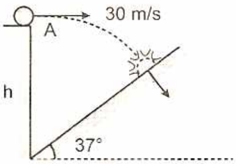
20. Una persona lanza horizontalmente una moneda desde una altura de 1,25 m, con una velocidad de 12 m/s. ¿Con qué velocidad llega la moneda al piso? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 5 m/s B) 6 m/s C) 12 m/s
D) 13 m/s E) 17 m/s

21. Sabiendo que un proyectil lanzado desde tierra tiene un alcance máximo de 36 m, ¿qué altura máxima habrá logrado ascender? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 20 m B) 18 m C) 15 m
D) 12 m E) 9 m

22. Una pequeña pelota es lanzada desde el punto A con una velocidad de 30 m/s. Si impacta perpendicularmente en el plano inclinado, calcular la altura h ($g = 10\ m/s^2$).



A) 80 m B) 100 m C) 120 m
D) 170 m E) 200 m

23. Un avión vuela a 720 m de altura y deja caer un paquete 1200 m antes de sobrevolar el objetivo haciendo blanco en él. ¿Qué velocidad tiene el avión?

A) 100 km/h B) 120 km/h C) 160 km/h
D) 240 km/h E) 360 km/h

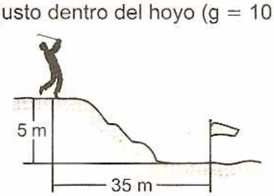
24. Se desea limpiar una ventana situada a 8,5 m del suelo para lo cual dispones de una manguera que sujetas a 1,5 m del suelo con una inclinación de 53°. Si tu distancia horizontal a la ventana es de 9 m, ¿con qué velocidad debe salir el agua?

A) 3 m/s B) 4 m/s C) 5 m/s
D) 10 m/s E) 15 m/s

25. Un globo aerostático asciende con velocidad constante de 3 m/s. Cuando se encuentra a una altura de 14 m, un pasajero del globo lanza horizontalmente un disco con una rapidez de 7,5 m/s. ¿Qué distancia separa el disco del globo cuando el disco toca tierra? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 15 m B) 20 m C) 25 m
D) $\sqrt{421}$ m E) 30 m

26. Un golfista se encuentra en la cima de una colina a 35 m horizontal del hoyo y 5 m de altura. Elige un palo que hace que la pelota salga disparada con un ángulo de 45° respecto a la horizontal. Determine la velocidad que debe imprimirle a la pelota, para que caiga justo dentro del hoyo ($g = 10\ m/s^2$).



A) 35 m/s B) 30 m/s C) 25 m/s
D) 17,5 m/s E) 15 m/s

27. Con respecto al movimiento parabólico, indique la afirmación correcta:

A) La aceleración no es constante.
B) En el punto más alto de la trayectoria la velocidad y la aceleración son paralelas.
C) La componente horizontal de la velocidad varía uniformemente.
D) Mientras el cuerpo desciende su aceleración aumenta uniformemente.
E) Existe un punto en la trayectoria donde la velocidad y la aceleración son perpendiculares entre sí.

28. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial que forma un ángulo de 60° hacia arriba, de forma tal que cuando alcanza el punto de máxima altura, su velocidad es 2 m/s. Determine el módulo de velocidad inicial.

A) 1 m/s B) 2 m/s C) $2\sqrt{3}$ m/s
D) 4 m/s E) $4\sqrt{3}$ m/s

29. Si se lanza una piedra con una velocidad de 10 m/s, de manera que forma 53° con la horizontal, calcular la altura que alcanza la piedra, con respecto a la línea horizontal de lanzamiento, al cabo de medio segundo ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 m B) 3,75 m C) 3,5 m
D) 2,75 m E) 1,25 m

30. Un futbolista patea un balón de manera que la pelota sale con una velocidad de 25 m/s y formando un ángulo de 37° con el piso horizontal. Determine:

- ¿Cuánto tarda la pelota en chocar nuevamente con el piso?
- ¿A qué distancia del punto de lanzamiento hace impacto?

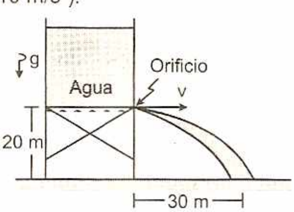
($g = 10\ m/s^2$)

A) 1,5 s; 30 m B) 3 s; 60 m C) 3 s; 30 m
D) 2,5 s; 50 m E) 2,5 s; 60 m

31. Una bolita, tras rodar sobre una mesa horizontal, cae. Determine la velocidad con que llega al piso, si desde que abandonó la mesa, la componente horizontal del desplazamiento vale 1,2 m y el tiempo de vuelo 0,4 s.

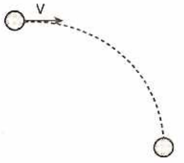
A) 5 m/s B) 4 m/s C) 3 m/s
D) 2 m/s E) 1 m/s

32. En la figura, con una altura de 20 m, el chorro de agua da en el suelo a 30 m del pie del orificio de salida, ¿Cuál es la velocidad v de salida del líquido? ($g = 10\ m/s^2$).



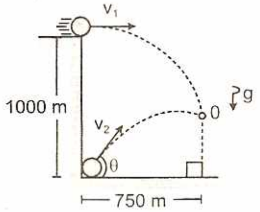
A) 15 m/s B) 7,5 m/s C) 8 m/s
D) 10 m/s E) 7,3 m/s

33. Después de 0,5 segundos de haber lanzado horizontalmente una piedra, su velocidad es 1,5 veces su velocidad de lanzamiento. ¿Con qué velocidad fue lanzada la piedra? ($g = 10\ m/s^2$).



A) $\sqrt{5}$ m/s B) $3\sqrt{5}$ m/s C) $4\sqrt{5}$ m/s
D) $5\sqrt{5}$ m/s E) $2\sqrt{5}$ m/s

34. Simultáneamente dos partículas son lanzadas tal que chocan en O. Calcular θ ($g = 10\ m/s^2$).

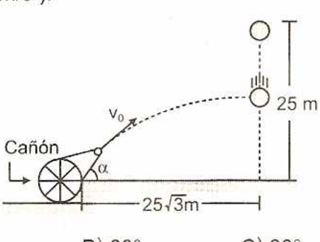


A) 60° B) 37° C) 30° D) 45° E) 53°

35. Desde un globo que asciende con una velocidad de 6 m/s se lanza una piedra horizontalmente respecto del globo con una velocidad de 5 m/s. La piedra hace un recorrido horizontal de 15 m hasta llegar al suelo. ¿Desde qué altura se lanzó la piedra? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 32 m B) 27 m C) 40 m D) 45 m E) 30 m

36. Se suelta una esfera de una altura de 25 m y simultáneamente se dispara un proyectil, con velocidad inicial de 25 m/s. Calcular el ángulo de inclinación con que se debe lanzar el proyectil para que impacte con la esfera como se muestra en la figura ($g = 10\ m/s^2$).

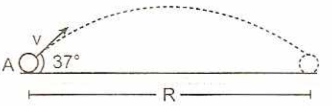


A) 40° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 37°

37. Un avión MIG-29 que vuela en dirección horizontal a 1125 m de altura, logra ver un barco "Chileno" que viaja en la misma dirección y sentido que el avión, con rapidez constante igual a 16/3 m/s. Luego, el avión dispara un misil horizontalmente hacia el barco, cuando se encuentra a una distancia de 1120 m Determinar la velocidad inicial del proyectil para que pueda impactar en el barco, y el tiempo en que se produce el impacto, después del disparo.

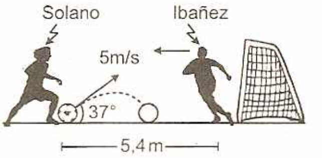
A) 40 m/s y 10 s B) 100 m/s y 15 s
C) 80 m/s y 20 s D) 90 m/s y 15 s
E) 80 m/s y 15 s

38. Si un proyectil lanzado desde A alcanza su altura máxima con una velocidad de 12 m/s, encontrar su alcance horizontal R (en m). ($g = 10\ m/s^2$).



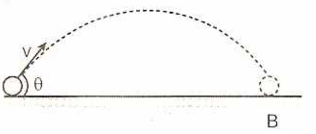
A) 21,6 B) 24,2 C) 18,3 D) 27 E) 28,4

39. Solano decide darle un pase a Ibáñez para lo cual patea un balón con la velocidad de 5 m/s y con un ángulo de 37° con la horizontal. El arquero Ibáñez se encuentra a una distancia de 5,4 m. ¿Con qué velocidad debe correr el arquero hacia el balón para cogerlo justo cuando llegue al piso? ($g = 10\ m/s^2$).



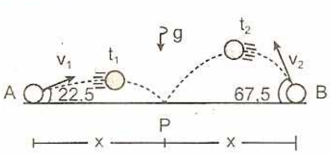
A) 8 m/s B) 10 m/s C) 6 m/s
D) 5 m/s E) 7 cm/s

40. La altura máxima es la tercera parte de su alcance horizontal. Determinar la velocidad (en m/s) con que debe ser lanzado un cuerpo para que llegue a B en 8 segundos.



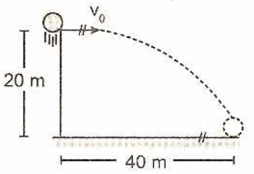
A) 10 B) 40 C) 30 D) 50 E) 20

41. En la figura se muestran dos pelotas A y B ubicadas a igual distancia del punto P. Si se disparan simultáneamente en las direcciones dadas, determinar la relación entre los tiempos empleados (t_2/t_1) por las pelotas en su vuelo si las dos impactan en el mismo punto P.



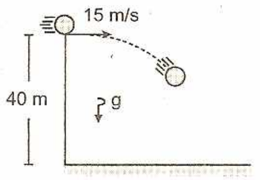
A) $1 - \sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2} + 1$
D) $\sqrt{3} + 1$ E) $\sqrt{2} + 2$

42. Se lanza una esfera desde una altura de 20 m, de manera que su alcance horizontal total es 40 m. Determine su rapidez 1,5 después de su lanzamiento ($g = 10\ m/s^2$).



A) 75 m/s B) 50 m/s C) 25 m/s
D) 100 m/s E) 45 m/s

43. Determine la rapidez del cuerpo cuando se encuentra a 20 m de altura respecto de la superficie horizontal. Desprecia la resistencia del aire ($g = 10\ m/s^2$).



A) 15 m/s B) 20 m/s C) 25 m/s
D) 28 m/s E) 40 m/s

44. Un proyectil lanzado desde el piso describe un movimiento parabólico de caída libre, si el tiempo de vuelo es de 6 s; ¿qué altura máxima alcanzó? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 35 m B) 45 m C) 40 m
D) 55 m E) 30 m

45. Se lanza un proyectil con una rapidez v_0 y un ángulo de elevación θ. Si la altura máxima alcanzada es la tercera parte del alcance horizontal máximo. Determine θ.

A) 53° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 30°

46. De lo alto de una torre, se lanza una piedra con una velocidad horizontal de 40 m/s. Sabiendo que la piedra estuvo en movimiento 3 segundos, ¿con qué velocidad la piedra alcanza el suelo? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 30 m/s B) 40 m/s C) 50 m/s
D) 60 m/s E) 70 m/s

47. Un bombardero vuela horizontalmente con una velocidad de 100 m/s, deja caer una bomba respecto al avión y recorre una distancia horizontal de 1000 m antes de llegar al suelo. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el avión? y ¿con qué ángulo llegó la bomba sobre el suelo respecto de la horizontal? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 500 m y 30° B) 500 m y 37°
C) 500 m y 45° D) 500 m y 53°
E) 500 m y 60°

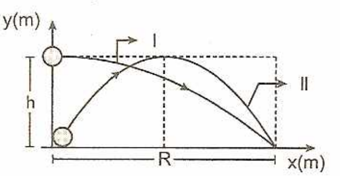
48. Un buque de guerra avanza en línea recta hasta un blanco con una velocidad de 10 m/s. Tiene un cañón que dispara un proyectil con velocidad en módulo de 50 m/s y formando un ángulo de 53° según su observador situado en el buque. Hallar a qué distancia del blanco debe disparar para acertarle ($g = 10\ m/s^2$).

A) 300 m B) 320 m C) 240 m
D) 260 m E) 400 m

49. Un futbolista patea una pelota y sale con una velocidad de 25 m/s y un ángulo de 37° con el piso. Otro jugador que se encuentra a 69 m delante del primero corre a recoger la pelota. ¿Con qué velocidad media debe correr este último para recoger la pelota justo cuando llega al suelo? ($g = 10\ m/s^2$).

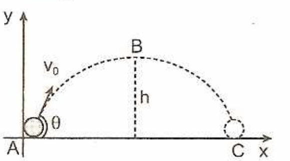
A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) N.A.

50. Dos proyectiles tienen el mismo alcance horizontal R. El primero (I) es disparado desde una altura h. El segundo (II) se encuentra directamente debajo del primero cuando son disparados simultáneamente, tal como se muestra. ¿Cuál es la relación de tiempos de viaje?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) 3

51. Se lanza un cuerpo haciendo un ángulo θ respecto de la horizontal como se muestra en la figura (h: altura máxima).



¿Qué afirmaciones son ciertas?

I. La aceleración centrípeta tiene su máximo valor en B.
II. La aceleración tangencial en B es cero y la centrípeta es g.
III. La velocidad del cuerpo en el punto más alto (B) es nula.
IV Si simultáneamente lanzamos otro cuerpo de A con un ángulo de disparo igual a $(90° - \theta)$,

ambos cuerpos caerán a tierra en el mismo instante,

A) Solo I B) Solo III C) I y II
D) I, II y III E) Todas

52. Un cuerpo disparado desde el piso oblicuamente tiene en su punto más alto una velocidad de 10 m/s, y logra un alcance horizontal de 100 m. Hallar la velocidad de lanzamiento ($g = 10$ m/s^2).

A) 50 m/s B) 40 m/s C) $10\sqrt{26}$ m/s
D) $5\sqrt{26}$ m/s E) 45,5 m/s

53. Un futbolista de un potente shoot impulsa la pelota, la cual describe una trayectoria parabólica, si permanece en el aire seis segundos, ¿qué altura máxima alcanzo la pelota? ($g = 10$ m/s^2).

A) 30 m B) 35 m C) 40 m
D) 45 m E) 50 m

54. Un bombardero en picada desciende con un ángulo de 53° con respecto a la vertical y deja caer un proyectil desde una altura de 425 m, y el proyectil llega al suelo 5 s después de ser soltado. ¿Cuál es la velocidad del bombardero? ($g = 10$ m/s^2).

A) 50 m/s B) 75 m/s C) 100 m/s
D) 125 m/s E) 130 m/s

55. Un proyectil lanzado desde el piso con un ángulo de elevación de 74° demora en llegar a su punto más alto 4 segundos. Hallar la altura máxima alcanzada ($g = 10$ m/s^2).

A) 20 m B) 40 m C) 60 m
D) 80 m E) 90 m

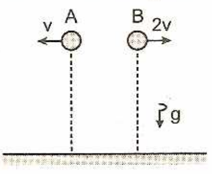
56. Un avión bombardero está volando horizontalmente a una altura de 720 m con una velocidad de 50 m/s ($g = 10$ m/s^2).

I. Cuánto tiempo antes de que el avión esté sobre el blanco debe dejar caer la bomba.
II. Cuál es la velocidad de la bomba al llegar a tierra.

A) 10 s y 50 m/s B) 12 s y 130 m/s
C) 12 s y 120 m/s D) 6 s y 100 m/s
E) Ninguna

57. Dos partículas A y B son lanzadas simultáneamente en el vacío, horizontalmente, con velocidades v y 2v como muestra la figura. Respecto de las siguientes afirmaciones, marcar verdadero (V) o (F):

I. Llega primero al piso la partícula A.
II. A y B llegan al mismo instante al piso.
III. El alcance de A es menor que B.



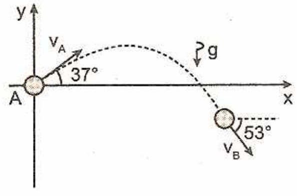
A) FFV B) VFF C) VFV
D) VVF E) FVV

58. Desde la superficie de la Tierra se lanza un proyectil con velocidad $v = (6;8)$ m/s. Considere $g = (0; -10)$ m/s. Respecto de las siguientes afirmaciones marcar (F) o verdadero (V):

( ) Después de 0,8 segundos alcanza su altura máxima.
( ) El alcance horizontal es menor que 10 metros.
( ) La velocidad del proyectil, en el instante que choca con la Tierra; tiene módulo de 10 m/s.

A) VVF B) FVV C) VFV
D) VFF E) VVV

59. En el gráfico se muestra la trayectoria parabólica del proyectil en un plano vertical. Calcular el tiempo que empleó para ir de A hacia B, si la velocidad en A es 15 m/s ($g = 10$ m/s^2).

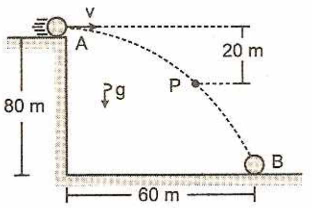


A) 1,5 s B) 2,0 s C) 2,5 s
D) 3,0 s E) 3,5 s

60. Si 5 segundos después de que se ha lanzado un proyectil formando un ángulo θ con la horizontal observamos que está ascendiendo, encontrándose a una altura de 150 m encima de la horizontal y a su vez ha recorrido una distancia horizontal de 54 m. ¿Después de cuánto tiempo que fue lanzado el proyectil se encontrará a una altura de 60 m por debajo de la línea horizontal a la cual se disparó?

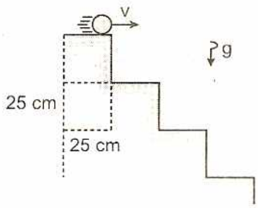
A) 10 s B) 11 s C) 12 s
D) 15 s E) 16 s

61. Calcular la velocidad del móvil en el punto P. El cuerpo es lanzado horizontalmente desde el punto A y llega al punto B como indica la figura. ($g = 10$ m/s^2).



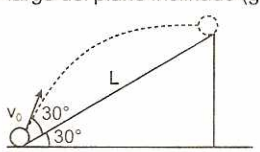
A) 15 m/s B) 20 m/s
C) 25 m/s D) 30 m/s
E) 35 m/s

62. Una esfera es lanzada con una velocidad horizontal de 3 m/s, la escalera tiene como longitud horizontal 0,25 m y altura 25 cm. ¿En qué escalón caerá por primera vez la esfera? ($g = 10\ m/s^2$).



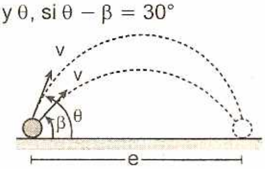
A) 5° B) 6° C) 7°
D) 8° E) 9°

63. Si $v_0 = 10\sqrt{3}$ m/s y $g = 10\ m/s^2$, determinar el alcance L a lo largo del plano inclinado ($g = 10\ m/s^2$).



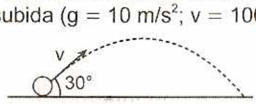
A) 10 m B) 15 m C) 20 m
D) 30 m E) 35 m

64. Calcular β y θ, si $\theta - \beta = 30°$



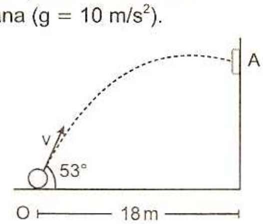
A) 60°; 30° B) 37°; 53° C) 15°;45°
D) 7°; 37° E) 23°;53°

65. Del gráfico mostrado, halle la altura máxima y el tiempo de subida ($g = 10\ m/s^2$; $v = 100$ m/s).



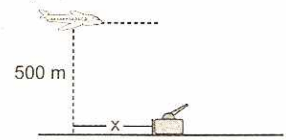
A) 120 m y 12 s B) 100 m y 10 s
C) 125 m y 5 s D) 125 m y 10 s
E) 100 m y 5 s

66. Si una pelota que es lanzada en la posición O con $v = 15$ m/s impacta en la ventana A. Hallar la altura de la ventana ($g = 10\ m/s^2$).



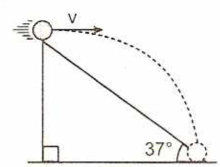
A) 2 m B) 4 m C) 6 m
D) 9 m E) 10 m

67. Se muestra un avión que desea bombardear un tanque que se mueve en la misma dirección. Si la velocidad del avión es 280 m/s y la del tanque es 20 m/s, halle la distancia x, si en este instante el avión suelta una bomba y logra su objetivo. ($g = 10\ m/s^2$).



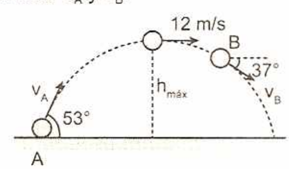
A) 2000 m B) 800 m C) 3000 m
D) 2600 m E) 1300 m

68. La bolita se lanza en forma horizontal con $v = 20$ m/s. Hallar la longitud del plano indicado ($g = 10\ m/s^2$).



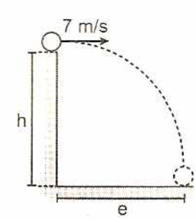
A) 45 m B) 60 m C) 75 m
D) 80 m E) 100 m

69. Se da el gráfico del movimiento parabólico de un proyectil. Hallar v_A y v_B.



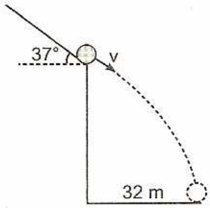
A) 20 m/s; 15 m/s B) 12 m/s; 16 m/s
C) 16 m/s; 10 m/s D) 10 m/s; 20 m/s
E) 16 m/s; 12 m/s

70. Calcular h y e; $g = 10\ m/s^2$, el tiempo de vuelo es de 4 s



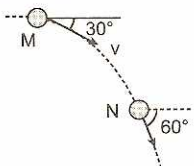
A) 80 m; 28 m B) 40 m; 14 m C) 80 m; 70 m
D) 80 m; 75 m E) 40 m; 40 m

71. El móvil resbala por el plano inclinado y sale por la posición mostrada con $v = 10$ m/s. ¿Al cabo de qué tiempo impactará con el piso? ($g = 10\ m/s^2$).



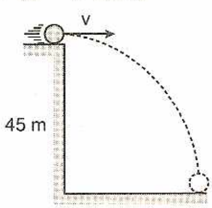
A) 4 s B) 6 s C) 8 s D) 10 s E) 12 s

72. Para el gráfico mostrado determinar el tiempo empleado desde M hasta N, si v = 60 m/s (g = 10 m/s²).



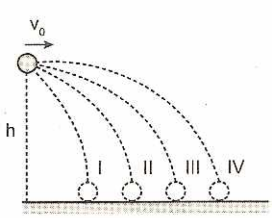
A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 5 s E) 6 s

73. Hallar el valor de la velocidad con el cual impacta el proyectil sobre el piso, si partió horizontalmente con v = 30 m/s (g = 10 m/s²).



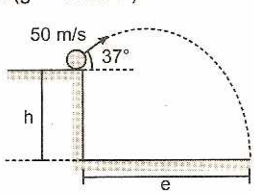
A) 30 m/s B) 40 m/s C) $30\sqrt{2}$ m/s
D) $40\sqrt{2}$ m/s E) $50\sqrt{2}$ m/s

74. ¿En cuál de los casos el vuelo parabólico dura más tiempo?



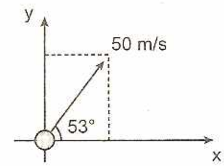
A) I B) II C) IV
D) I y IV E) Iguales

75. Calcular h y e si el tiempo total del vuelo es de 7 segundos. (g = 10 m/s²).



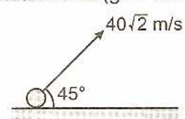
A) 35 m; 280 m B) 30 m; 120 m
C) 60 m; 150 m D) 30 m; 40 m
E) 15 m; 45 m

76. Calcular la altura que asciende y la distancia horizontal que avanza el proyectil después de 1 segundo de su lanzamiento. (g = 10 m/s²).



A) 35 m; 30 m B) 45 m; 30 m C) 80 m; 40 m
D) 45 m; 45 m E) 30 m; 30 m

77. Calcular la velocidad del proyectil después de 1 segundo de su lanzamiento (g = 10 m/s²).

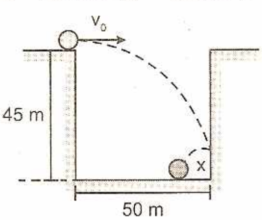


A) 50 m/s B) $50\sqrt{2}$ m/s C) 25 m/s
D) $25\sqrt{2}$ m/s E) $50\sqrt{3}$ m/s

78. El alcance de una piedra lanzada desde cierto punto es x = 240 m y la altura máxima a que se ha elevado es h = 45 m. Hallar con qué ángulo de elevación es lanzado el proyectil.

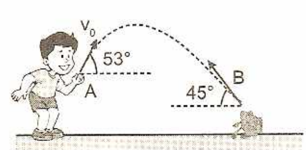
A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

79. Hallar x, si v_0 = 20 m/s. (g = 10 m/s²).



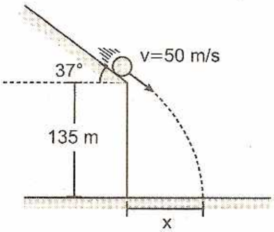
A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

80. Si en el tiro al sapo se hizo con v_0 = 5 m/s, tal como se indica en la figura, hallar el tiempo que dura el vuelo de A a B (g = 10 m/s²).



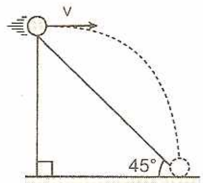
A) 0,3 s B) 0,4 s C) 0,5 s
D) 0,6 s E) 0,7 s

81. ¿Cuánto tiempo tardará la esferita en llegar al piso? Hallar también x. ($g = 10\ m/s^2$).



A) 4 s; 50 m B) 3 s; 120 m C) 2 s; 60 m
D) 2 s; 70 m E) 9 s; 80 m

82. Hallar la longitud del plano inclinado si la pelotita se lanza en forma horizontal con v = 20 m/s ($g = 10\ m/s^2$).



A) 20 m B) $20\sqrt{2}$ m C) $40\sqrt{2}$ m
D) $60\sqrt{2}$ m E) $80\sqrt{2}$ m

CLAVES

1. D	12. D	23. E	34. E	45. A	56. B	67. C	78. D
2. B	13. D	24. E	35. B	46. C	57. E	68. C	79. B
3. C	14. C	25. C	36. C	47. C	58. E	69. A	80. E
4. E	15. C	26. D	37. E	48. B	59. C	70. A	81. D
5. E	16. B	27. E	38. A	49. C	60. C	71. A	82. E
6. B	17. B	28. D	39. D	50. A	61. C	72. E	
7. D	18. C	29. D	40. D	51. C	62. D	73. C	
8. B	19. E	30. B	41. C	52. C	63. A	74. E	
9. A	20. D	31. A	42. A	53. D	64. A	75. A	
10. A	21. E	32. B	43. C	54. C	65. D	76. A	
11. B	22. D	33. E	44. B	55. D	66. B	77. A	

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME (MCU)

Decimos que una partícula se encuentra en movimiento circunferencial cuando su trayectoria es una circunferencia, como por ejemplo, la trayectoria descrita por una piedra que se hace girar atada al extremo de una cuerda (figura 3.40). Si además de eso, el valor de la velocidad permanece constante, el movimiento circular recibe el calificativo de uniforme. Entonces, en este movimiento el vector velocidad tiene módulo constante, pero su dirección varía en forma continua.

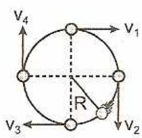


Fig. 3.40

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = |\vec{v}_4|$$

Desplazamiento lineal (s)

Es la longitud de arco de la circunferencia que recorre la partícula, entre dos puntos considerados de su trayectoria. Se mide en metros.

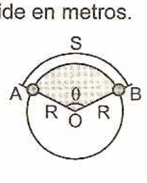


Fig. 3.41

Desplazamiento angular (θ)

Es el ángulo central correspondiente al arco descrito por la partícula en su movimiento. Se mide en radianes. El ángulo θ medido en radianes es igual al cociente de la longitud de arco s entre el radio R de curvatura.

$$\boxed{\theta = \frac{s}{R}} \qquad \ldots(3.40)$$

$$\boxed{s = \theta R} \qquad \ldots(3.41)$$

Recuerda:
Los ángulos se pueden medir en grados sexagesimales o en radianes.
$360° = 2\pi$ rad; $180° = \pi$ rad; $90° = \pi/2$ rad; $60° = \pi/3$ rad; $45° = \pi/4$ rad; $30° = \pi/6$ rad; $15° = \pi/12$ rad; 1 rad = 57,3°

Velocidad lineal o tangencial (v)

Es aquella magnitud física vectorial, que se define, como la longitud de arco que recorre el móvil por cada unidad de tiempo. Se representa por un vector tangente a la trayectoria en cada instante de tiempo (figura 3.40)

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad \ldots(3.42)$$

Unidades: m/s, cm/s, km/h

Velocidad angular (ω)

Es aquella magnitud física vectorial que se define, como el desplazamiento angular que experimenta la partícula por cada unidad de tiempo. Se representa por un vector perpendicular al plano de rotación; el sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha, los dedos indican el sentido de giro y el pulgar el sentido de la velocidad angular.

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}} \qquad \ldots(3.43)$$

Unidades: rad/s , rad/min

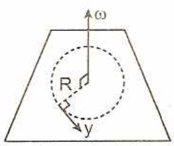


Fig. 3.42

Relación entre las velocidades lineal y angular

$$\boxed{v = \omega R} \qquad \ldots(3.44)$$

De la figura 3.42, se observa que las velocidades tangencial y angular son perpendiculares, entonces la ecuación 3.44 solo relaciona a los módulos.

Período (T)

Es el intervalo de tiempo constante que demora una partícula en recorrer la misma trayectoria. Su valor indica el tiempo empleado por cada vuelta o revolución.

$$\boxed{T = \frac{\text{tiempo empleado}}{\text{número de vueltas}}} \qquad \ldots(3.45)$$

Unidades: segundos, minutos, hora.

Concepto del MCU

Es aquel movimiento que tiene como trayectoria una circunferencia, en el cual la partícula barre ángulos iguales en tiempos iguales, esto quiere decir que la velocidad angular permanece constante. El movimiento de la partícula es periódico, pasa por cada punto de la circunferencia en intervalos de tiempos iguales.

Frecuencia (f).

Se define como la inversa del período. Su valor indica el número de vueltas que describe la partícula por cada unidad de tiempo.

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\text{número de vueltas}}{\text{tiempo empleado}}} \qquad \ldots(3.46)$$

Unidades: r. p. s.; r. p. m.; r. p. h.

Relaciones entre la velocidad angular, el período y la frecuencia

Sabemos que, $\omega = \theta/t$ de la ecuación 3.43, pero, cuando la partícula describe una vuelta al ángulo barrido es: $\theta = 2\pi$ y el tiempo empleado es igual a período T.

Luego: $\theta = 2\pi$ y $t = T$ (período).
Reemplazando en la ecuación 9.4:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad \ldots(3.47)$$

Pero de la ecuación 3.46: $f = \frac{1}{T}$, en (3.47) se obtiene:

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \qquad \ldots(3.48)$$

Ley de Kepler para el MCU

Toda partícula que tiene movimiento circunferencial uniforme describe áreas iguales en tiempos iguales, respecto de un sistema de referencia ubicado en el centro de la circunferencia.

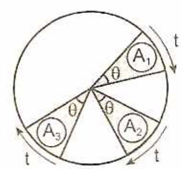


Fig. 3.43

Áreas iguales en tiempos iguales.

$$A_1 = A_2 = A_3$$

Aceleración Centrípeta ($\vec{a}_c$). En el movimiento circunferencial uniforme, el módulo de la velocidad de la partícula permanece constante, y por tanto, la partícula no posee aceleración tangencial. Pero como la dirección del vector velocidad varía continuamente, la partícula sí posee aceleración centrípeta.

En la figura 3.44 se presentan los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}_c$ en cuatro posiciones distintas de la partícula. Observe que el vector $\vec{a}_c$ tiene la dirección del radio y siempre apunta hacia el centro de la circunferencia.

Podemos deducir, matemáticamente, que el valor de la aceleración centrípeta en el movimiento circular está dado por:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R}} \qquad \ldots(3.49)$$

Observe que la magnitud de la $\vec{a}_c$ es proporcional al cuadrado de la velocidad, e inversamente proporcional al radio de curvatura. Por lo tanto, si un automóvil toma una curva cerrada (con R pequeño) a gran velocidad, tendrá una aceleración centrípeta enorme.

Reemplazando la ecuación 3.44 en 3.49 tenemos:

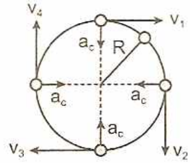
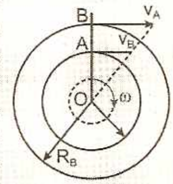


Fig. 3.44

$$\boxed{a_c = \omega^2 R} \qquad \ldots(3.50)$$

Importante

- Una barra gira con movimiento uniforme, alrededor de un eje que pasa por el punto O. Los puntos A y B tiene igual velocidad angular ω, por lo tanto, la aceleración centrípeta de los puntos A y B es directamente proporcional al radio de giro.



- La velocidad lineal, $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$, es directamente proporcional al radio de giro, R_A y R_B: $\dfrac{v_A}{R_A} = \dfrac{v_B}{R_B}$

Unidad de frecuencia

El término usual de la frecuencia es r. p. s., revoluciones por segundo o hertz. La unidad fue llamada hertz en honor al físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), quien fue el primero en demostrar experimentalmente la existencia de las ondas electromagnéticas.

Casos particulares

I. Si los discos son tangentes o están unidos mediante fajas o cuerdas, los puntos periféricos tienen igual velocidad tangencial.

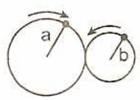


Fig. 3.45a

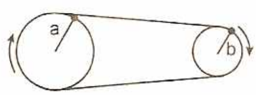


Fig. 3.45b

- "El número de vueltas que da cada disco es inversamente proporcional al radio de curvatura".
- "A mayor radio, menor cantidad de vueltas; a menor radio, mayor cantidad de vueltas".

II. Si los discos o poleas son concéntricos (eje común), entonces, todos los puntos del sistema tienen igual velocidad angular.

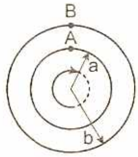


Fig. 3.46a

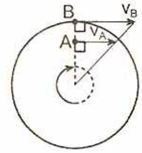


Fig. 3.46b

Si la velocidad angular es constante, la velocidad lineal de los puntos A y B es directamente proporcional a la distancia del centro de giro al punto.

$$\boxed{\frac{v_A}{a} = \frac{v_B}{b}}$$

Ejemplos:

1. Un motociclista describe una curva cuyo radio es 100 m con una velocidad de 25 m/s. Calcular su aceleración centrípeta.

Resolución:

De la ecuación (3.49):

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{100} = \frac{625}{100}$$

$\therefore\ a_c = 6{,}25\ m/s^2$

2. Dos hormigas A y B se encuentran diametralmente opuestos en la periferia de un disco, salen simultáneamente al encuentro con velocidades angulares de $\pi/12$ rad/min y $\pi/18$ rad/min, respectivamente. ¿Después de cuánto tiempo se encuentran?

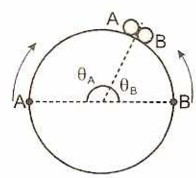


Fig. 3.47

Resolución:

De la figura 3.47, obtenemos la siguiente relación:

$$\theta_A + \theta_B = \pi$$

De la ecuación 3.43: $\omega_A t + \omega_B t = \pi$

Reemplazando los datos: $\dfrac{\pi}{12}t + \dfrac{\pi}{18}t = \pi$

Simplificando π:

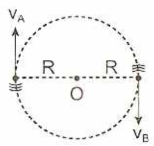
$$\frac{t}{12} + \frac{t}{18} = 1$$

Resolviendo la ecuación: t = 1,2 min

Por lo tanto, las hormigas se encuentran después de 72 segundos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos móviles A y B parten de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular, desplazándose en el mismo sentido con velocidades angulares de $\pi/2$ y $\pi/3$ rad/s, respectivamente. ¿Después de cuánto tiempo se encuentran juntos?



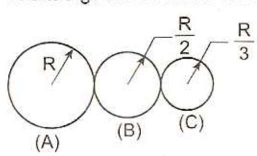
Resolución:

Desplazamiento angular: $\theta_A - \theta_B = \pi$

$\Rightarrow (\omega_A - \omega_B)t = \pi$

Reemplazando: $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)t = \pi \quad \therefore\ t = 6\ s$

2. La figura muestra tres discos tangentes entre sí, de radios de curvatura: R; $\frac{R}{2}$; $\frac{R}{3}$ respectivamente. Cuando el disco de mayor radio gira 4 vueltas, ¿cuántas vueltas girará el disco de menor radio?



Resolución:

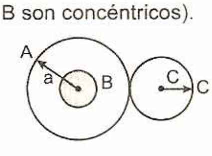
Los puntos periféricos de los discos tangentes, tienen igual velocidad lineal: $v_A = v_B = v_C$

$\omega_A R = \omega_C \frac{R}{3} \Rightarrow 3\omega_A = \omega_C \Rightarrow 3f_A = f_C \Rightarrow 3(4) = f_C$

$\therefore\ f_C = 12$ vueltas

El número de vueltas que gira uno de los discos tangentes es inversamente proporcional a su radio de curvatura.

3. La figura muestra tres discos A, B y C de radios a = 6 cm y c = 4 cm. Si el disco B gira a razón de 120 r. p. m., determinar la velocidad angular del disco C. (A y B son concéntricos).



Resolución:

Los discos A y B son concéntricos, por consiguiente, tienen igual velocidad angular. El disco B genera un ángulo de 240π radianes en cada minuto, por lo tanto, su velocidad angular es: $\omega_A = \omega_B = \frac{\theta}{t} = 4\pi$

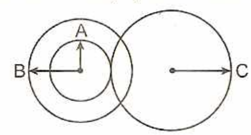
Los discos A y C son tangentes, por consiguiente, tienen igual velocidad lineal sus puntos periféricos:

$v_A = v_C$

$\omega_A R_A = \omega_C R_C \Rightarrow (4\pi)(6) = \omega_C(4)$

Luego: $\omega_C = 6\pi$ rad/s

4. La figura muestra tres discos A, B y C de radios a = 2 m; b = 4 m y c = 5 m respectivamente. Si el disco C gira con velocidad angular constante de 3 rad/s, determinar la velocidad lineal de los puntos periféricos del disco B (A y B son concéntricos).



Resolución:

Los discos A y C son tangentes, por consiguiente, sus puntos periféricos tienen igual velocidad lineal:

$v_A = v_C$

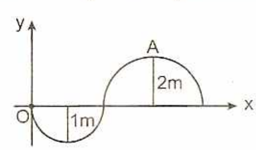
$\omega_A R_A = \omega_C R_C \Rightarrow \omega_A(2) = (3)(5) \quad \therefore\ \omega_A = 7{,}5$ rad/s

Los discos A y B son concéntricos, por consiguiente, tienen igual velocidad angular, $\omega_A = \omega_B$

Pero: $v_B = \omega_B R_B \Rightarrow v_B = (7{,}5)(4)$

Luego: $v_B = 30$ m/s

5. Un móvil recorre la trayectoria mostrada, con una velocidad lineal constante en módulo, en 3 s. Encontrar la aceleración centrípeta en el punto A. La trayectoria está formada por dos semicircunferencias de radios 1 m y 2 m respectivamente.



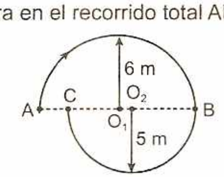
Resolución:

En el intervalo de 3 s el móvil recorre un espacio de 3π metros, por consiguiente el módulo de la velocidad lineal es π m/s.

La aceleración centrípeta en el punto A será: $a_c = \frac{v^2}{R}$

Reemplazando datos tenemos: $a_C = \frac{\pi^2}{2}$

6. Un móvil recorre la trayectoria ABC, con módulo de la velocidad constante para el tramo AB y para el tramo BC. Se sabe que la aceleración en AB es 6 m/s^2 y en BC 5 m/s^2. Hallar el intervalo de tiempo que demora en el recorrido total ABC.



Resolución:

1) La aceleración centrípeta en cada tramo:

$a_C = \dfrac{v^2}{R}$

En $\widehat{AB}$: $6 = \dfrac{v^2}{6} \Rightarrow v_{AB} = 6$ m/s

En $\widehat{BC}$: $5 = \dfrac{v^2}{5} \Rightarrow v_{BC} = 5$ m/s

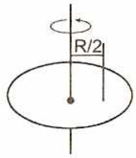
2) Cálculo del tiempo en cada tramo: $t = \dfrac{e}{v}$

En $\widehat{AB}$: $t_{AB} = \dfrac{6\pi}{6} = \pi$ s

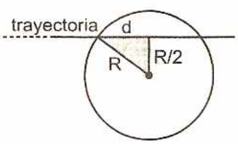
En $\widehat{BC}$: $t_{BC} = \dfrac{5\pi}{5} = \pi$ s

Luego: Tiempo total: 2π s

7. Una moneda se encuentra clavada a un disco de radio R que gira con velocidad angular constante de 0,5 rad/s. La moneda se encuentra a una distancia R/2 del centro de rotación. Determinar el tiempo que demora la moneda en abandonar el disco, cuando retiramos el clavo. No hay fricción.



Resolución:



Cuando retiramos el clavo, respecto de un observador en la tierra, la velocidad lineal constante es igual a $v = \omega(R/2)$ y se desplaza en un tiempo t una distancia $d = R\sqrt{3}/2$, hasta abandonar la superficie horizontal lisa.

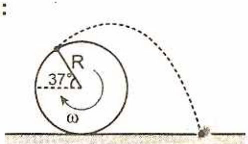
El tiempo t que demora en abandonar la superficie es:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\frac{R}{2}\sqrt{3}}{\omega\frac{R}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\omega} \qquad \therefore\ t = 2\sqrt{3}\ \text{s}$$

8. Una rueda gira con velocidad angular constante de 2 rad/s respecto de un eje fijo. En la posición mostrada una partícula se suelta del punto A. Determinar la altura máxima que alcanza respecto del piso.

Donde: R = 5 m; g = 10 m/s^2.

Resolución:



La velocidad lineal de la partícula en A es $v = \omega R$ de módulo 10 m/s y forma un ángulo de 53° con la horizontal. Descomponiendo la velocidad, la componente en la horizontal es 6 m/s (constante) y la velocidad inicial en el eje vertical hacia arriba es 8 m/s. La partícula alcanza su altura máxima cuando la componente vertical de la velocidad se hace nula.

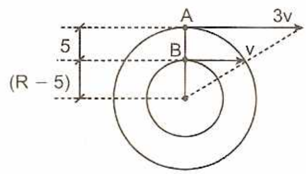
$v_{fy}^2 = v_{0y}^2 - 2gh \Rightarrow 0 = 64 - 20h \Rightarrow h = 3{,}2$ m

Cálculo del desplazamiento vertical desde A hasta alcanzar la altura máxima: h = 3,2 m

La altura máxima que alcanza respecto del piso será: $H = R + R\text{sen}37° + h \Rightarrow H = 5 + 3 + 3{,}2$

Luego: H = 11,2 m

9. Un disco gira con una velocidad angular constante; si los puntos periféricos tienen el triple de velocidad que aquellos puntos que se encuentran 5 cm más cerca al centro del disco, determinar el radio del disco.



Resolución:

Los puntos A y B tienen igual velocidad angular ω.

La velocidad lineal será: $v_1 = \omega R_1$

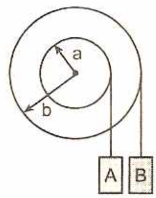
Para A: $3v = \omega R$

Para B: $v = \omega(R - 5)$

Dividiendo: $\dfrac{3}{1} = \dfrac{R}{(R-5)}$

Resolviendo: R = 7,5 cm

10. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios de curvatura a = 20 cm y b = 30 cm. Si las poleas giran en sentido horario con velocidad angular constante ω = 4 rad/s, hallar la velocidad relativa de alejamiento entre los bloques A y B.



Resolución:

La velocidad de cada bloque es igual a la velocidad lineal de los puntos periféricos de las poleas respectivas: $v = \omega R$

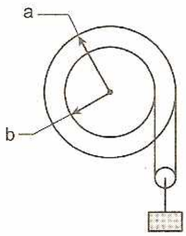
Para A: $v_A = (4)(20) = 80$ cm/s (↓)

Para B: $v_B = (4)(30) = 120$ cm/s (↓)

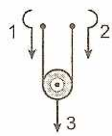
En cada segundo los bloques se alejan en 40 cm:

$\therefore\ v_{relativa} = (v_B - v_A) = 40$ cm/s

11. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios a = 20 cm y b = 10 cm, respectivamente. La polea móvil se encuentra sostenida mediante una cuerda cuyos extremos están enrollados a las poleas fijas. Si las poleas con centro fijo giran con velocidad angular constante de 4 rad/s en sentido horario, hallar la velocidad del bloque unido a la polea móvil.



Resolución:



La velocidad de los puntos (1) y (2) en las cuerdas, es igual a la velocidad lineal de los puntos periféricos de las poleas respectivas: $v = \omega R$

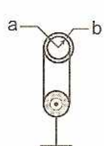
Para (1): $v_1 = (4)(10) = 40$ cm/s

Para (2): $v_2 = (4)(20) = 80$ cm/s

Propiedad de la polea móvil: $v_3 = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

Reemplazando: $v_3 = 60$ cm/s

12. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios a = 20 cm y b = 10 cm, respectivamente. Si las poleas giran en sentido antihorario con velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s, hallar la velocidad del bloque que se encuentra unido a la polea móvil.



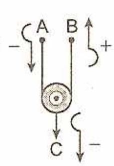
Resolución:

1. Cálculo de la velocidad lineal de los puntos A y B de la cuerda:
2. Sabemos que: $v = \omega R$

   Punto A: $v_A = (6)(20) = 120$ cm/s (↓)

   Punto B: $v_B = (6)(10) = 60$ cm/s (↑)

   Propiedad de la polea móvil:

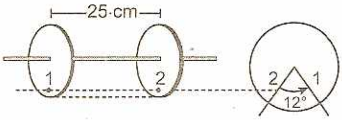


$$v_C = \frac{v_A + v_B}{2}$$

Reemplazando:

$$v_C = \frac{(-120) + (60)}{2} \qquad \therefore\ v_C = -30 \text{ cm/s}$$

13. Sobre un eje que gira con una frecuencia de 1200 r. p. m., se tiene montado dos discos separados una distancia de 25 cm. Se dispara un proyectil paralelamente al eje, tal que perfora los dos discos, notándose que el segundo agujero se desvía 12° respecto del primero. Determinar la velocidad del proyectil.



Resolución:

El tiempo que demora el proyectil en desplazarse del 1.° al 2.° agujero, es el mismo tiempo que emplean los discos en girar un ángulo de 12° o $\dfrac{\pi}{15}$ radianes.

Cálculo del tiempo empleado: $t = \dfrac{\theta}{\omega} = \dfrac{\theta}{2\pi f}$

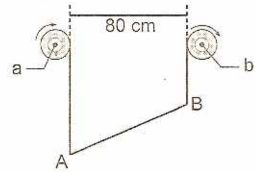
$$\Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{15}}{(2\pi)1200\left(\frac{1}{60}\right)} \Rightarrow t = \frac{1}{600} \text{ s}$$

Analizando el movimiento del proyectil que tiene MRU: $\quad v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{0{,}25}{\frac{1}{600}}$

$\therefore\ v_{(bala)} = 150$ m/s

14. Se tiene una barra horizontal en reposo cuya longitud es de 1 m, sostenida por dos cuerdas enrolladas a dos poleas de radios a = 2,5 cm y b = 7,5 cm, respectivamente.

Si las poleas empiezan a girar a razón de 2 rad/s en sentido horario. ¿En cuánto tiempo los cables que sostienen la barra estarán en posición vertical, como indica la figura?



Resolución:

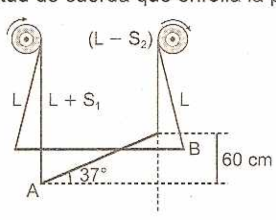
De la figura:

$(L + S_1) - (L - S_2) = 60$ cm

$\Rightarrow S_1 + S_2 = 60$ cm ...(1)

S_1: longitud de cuerda que cede la polea a

S_2: longitud de cuerda que enrolla la polea b

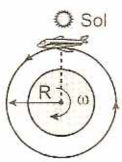


En (1): $\omega at + \omega bt = 60$ cm
Reemplazando: $t\omega(a + b) = 60$ cm
$\Rightarrow t(2)(10) = 60$
$\therefore t = 3$ s

15. ¿Con qué velocidad respecto de la Tierra deberá volar un avión en el Ecuador de Este a Oeste, para que a sus pasajeros les parezca que el Sol está fijo en el firmamento?
Radio de órbita del avión: 6396 km.

Resolución:

La velocidad angular del avión debe ser igual a la velocidad angular de la Tierra, pero en sentido opuesto:



$\omega = \dfrac{\theta}{t} = \dfrac{2\pi}{24}$ rad/h $\Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{12}$ rad/h

La velocidad lineal del avión respecto de la Tierra:
$v = \omega R$
$v = \dfrac{\pi}{12}(6396)$
$\therefore v = 1674{,}46$ km/h

16. Se lanzan dos satélites alrededor de la Tierra; uno de ellos A se ve fijo y el otro B se observa que da dos vueltas por día. Hallar la relación entre sus velocidades angulares, visto por un observador fuera del planeta Tierra.

Resolución:

Si el satélite A se ve fijo desde la Tierra, esto quiere decir que ambos tienen la misma velocidad angular:

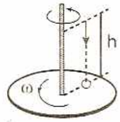
$$\omega_A = \omega_{Tierra} = \omega \qquad \ldots(1)$$

La velocidad angular del satélite B es el triple de la velocidad angular de la Tierra, razón por el cuál da dos vueltas por día respecto de un observador ubicado en la superficie de la Tierra.

$$\omega_B = 3\omega \qquad \ldots(2)$$

De (1) y (2) podemos afirmar que: $\omega_B = 3\omega_A$

17. Un disco que tiene un agujero a 50 cm de su centro geométrico, gira con velocidad angular constante en un plano horizontal respecto de un eje vertical; desde una altura h = 1,25 m se abandona una bolita en el instante en que el agujero y la bolita están en la misma línea vertical. Hallar la mínima velocidad angular del disco, tal que la bolita puede pasar por el agujero.



Resolución:

El tiempo que demora la bolita en recorrer h = 1,25 m, es el mismo tiempo que demora el disco en dar una (1) vuelta.

En la vertical: $h = v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2$

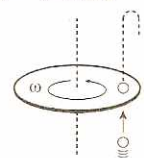
Reemplazando: $1{,}25 = 0 + \dfrac{1}{2}(10)t^2$

Resolviendo: t = 0,5 segundos

Para el movimiento circular del disco:

$\omega = \dfrac{\theta}{t} = \dfrac{2\pi}{0{,}5} \qquad \therefore \omega = 4\pi$ rad/s

18. Si la bala atraviesa el orificio del disco mostrado con una velocidad lineal de 100π m/s hacia arriba, ¿cuál deberá ser la mínima velocidad angular constante con la que está girando ese disco, para que la bala de regreso pase por el mismo orificio, hacia abajo? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

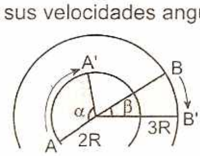
Determinemos el tiempo del proyectil empleado en alcanzar su altura máxima y regresar al orificio.

$h = V_{0(y)}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 100\pi t - 5t^2 \Rightarrow t = 20\pi$ s

La velocidad angular del disco será mínima cuando en el mismo tiempo describe un ángulo igual a 2π radianes:

$\omega = \dfrac{\theta}{t} = \dfrac{2\pi}{20\pi \text{ s}} \qquad \therefore \omega = 0{,}1$ rad/s

19. Dos satélites A y B describen trayectorias circulares concéntricas de radios de curvatura 2R y 3R respectivamente. Si los vectores posición respecto del centro de curvatura, de A y de B describen áreas iguales en tiempos iguales, determinar la relación entre sus velocidades angulares.



Resolución:

El área de un sector circular es directamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.

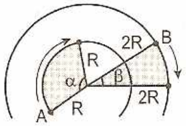
De la condición del problema, igualamos las áreas descritas en un tiempo t: $A_{(A)} = A_{(B)}$

$\dfrac{1}{2}\alpha(2R)^2 = \dfrac{1}{2}\beta(3R)^2 \Rightarrow 4\alpha = 9\beta \Rightarrow 4\dfrac{\alpha}{t} = 9\dfrac{\beta}{t}$

$\therefore 4\omega_A = 9\omega_B$

20. Dos satélites A y B describen trayectorias circulares concéntricas de radios de curvatura R y 2R,

respectivamente. Si los vectores posición, respecto del centro de curvatura, de A y B describen áreas iguales en tiempos iguales, determinar la relación entre sus velocidades angulares.



Resolución:

Igualando áreas: $A_{(A)} = A_{(B)} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha R^2 = \frac{1}{2}\beta (2R)^2$

$\Rightarrow \alpha = 4\beta$

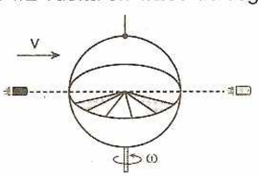
Por consiguiente: $\omega_A = 4\omega_B$

21. Un cascarón esférico de radio de curvatura R = 0,5 m gira con velocidad angular constante, cuya frecuencia es 100 r. p. s. respecto de un eje vertical. Se dispara un proyectil horizontalmente, de tal modo que pasa por el centro geométrico del cuerpo esférico. Calcular la máxima velocidad del proyectil, tal que atraviesa haciendo un solo agujero.

Resolución:

De la condición del problema el proyectil hace un solo agujero: $\theta = \pi; 3\pi; 5\pi;$ ...Si la velocidad del proyectil es máxima, entonces el desplazamiento angular del agujero es π radianes. El tiempo empleado por el cascarón en dar 1/2 vuelta, es el mismo empleado por el proyectil en recorrer el diámetro igual a 1 metro.

El agujero da 100 vueltas en 1 segundo, por consiguiente, gira 1/2 vuelta en 1/200 de segundo.



$\Rightarrow t = \frac{1}{200}$ s

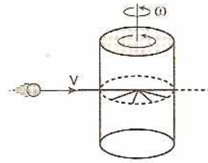
El proyectil: $v = \frac{d}{t} = \frac{1}{\frac{1}{200}}$

$\therefore v = 200$ m/s

22. Un cilindro hueco (vacío) de radio de curvatura 0,4 m gira con velocidad angular constante, cuya frecuencia es 150 r. p. s. respecto de un eje vertical. Se dispara un proyectil horizontalmente, de tal modo que pasa por el eje de rotación. Calcular la máxima velocidad del proyectil, tal que atraviesa haciendo un solo agujero al cilindro.

Resolución:

Si la velocidad del proyectil es máximo, entonces, el desplazamiento angular del agujero es π radianes. El tiempo empleado por el cilindro en dar 1/2 vuelta es el mismo empleado por el proyectil en recorrer el diámetro igual a 0,8 m.



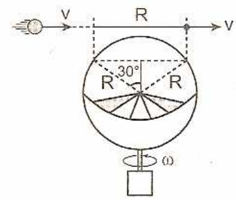
El agujero da 150 vueltas en 1 segundo, por consiguiente, gira 1/2 vuelta en 1/300 de segundo.

$\Rightarrow t = \frac{1}{300}$ s

La velocidad lineal del proyectil será: $v = \frac{d}{t} = \frac{0,8}{\frac{1}{300}}$

$\therefore v = 240$ m/s

23. Una esfera hueca de radio 1,0 m gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un proyectil se desplaza con una velocidad de 400 m/s perpendicularmente al eje, perforando la esfera en un punto cuyo radio forma 30° con el eje. Hallar la mínima velocidad angular que debe tener la esfera para que el proyectil entre y salga por el mismo agujero.



Resolución:

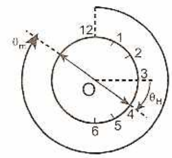
El proyectil atraviesa el cuerpo esférico haciendo un solo agujero cuando la esfera gira un ángulo de 180° (mínimo) en el mismo tiempo.

Proyectil: $d = vt$

$1 = 400t \Rightarrow t = \frac{1}{400}$ ...(1)

Esfera: $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\pi}{\frac{1}{400}}$ $\therefore \omega = 400\pi$ rad/s

24. Se tiene un reloj de agujas. ¿A qué hora entre las tres y las cuatro, el horario y el minutero forman un ángulo de 180°?



Resolución:

Velocidad angular del horario: $\omega_h = \frac{\pi}{6}$ rad/h

Velocidad angular del minutero: $\omega_m = 2\pi$ rad/h

De la figura: $\theta_m - \theta_h = \frac{3}{2}\pi$ ...(1)

Pero: $\theta = \omega t$

En (1): $2\pi t - \frac{\pi}{6}t = \frac{3}{2}\pi$

Luego: $t = \frac{9}{11}$ h

Respuesta: 3 h 49 min 5,45 s

25. ¿A qué hora entre las 3:00 y las 4:00 el horario y el minutero forman un ángulo de 90°?

Resolución:

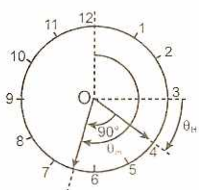
Sabemos que la velocidad angular del minutero y el horario es: $\omega_m = 2\pi$ rad/h y $\omega_h = \frac{\pi}{6}$ rad/h

Sea θ_m y θ_h los ángulos que giran el minutero y el horario, a partir de las 3:00 horas, hasta el instante en que las agujas del reloj forman un ángulo de 90°.

De la figura se deduce que: $\theta_m = \pi + \theta_h$

$\omega_m t = \pi + \omega_h t \Rightarrow 2\pi t = \pi + \left(\frac{\pi}{6}\right)t$

$\Rightarrow 2t = 1 + \frac{1}{6}t$



Resolviendo: $t = \frac{6}{11}$

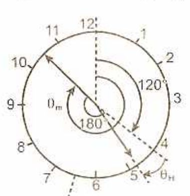
Luego: $t = 0{,}5454$ h $\Rightarrow t = 32$ min 44 s

Por lo tanto, a las 3 h 32 min 44 s las agujas forman un ángulo de 90°.

26. ¿A qué hora entre las 4:00 y las 5:00 el horario y el minutero forman un ángulo de 180°?

Resolución:

Sabemos que la velocidad angular del minutero y el horario es: $\omega_m = 2\pi$ rad/h y $\omega_h = \frac{\pi}{6}$ rad/h.



Sea θ_m y θ_h los ángulos que giran el minutero y el horario, a partir de las 4:00 horas, hasta el instante en que las agujas del reloj forman un ángulo de 180°.

De la figura se deduce que:

$\theta_m = 120° + \theta_h + 180°$

$\omega_m t = \frac{2}{3}\pi + \omega_h t + \pi \Rightarrow 2\pi t = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6}t + \pi$

$2t = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}t + 1$ Resolviendo: $t = \frac{10}{11}$ h

Luego: $t = 0{,}909090$ h $\Rightarrow t = 54$ min 33 s

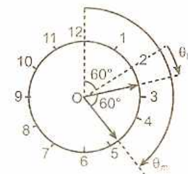
Por lo tanto, forman un ángulo de 180° a las 4 h 54 min 33 s.

27. ¿A qué hora entre las 2:00 y las 3:00 el horario y el minutero forman un ángulo de 60° por segunda vez?

Resolución:

Sabemos que la velocidad angular del minutero y del horario es: $\omega_m = 2\pi$ rad/h y $\omega_h = \frac{\pi}{6}$ rad/h.

Sea θ_m y θ_h los ángulos que giran el minutero y el horario, a partir de las 2:00 horas, hasta el instante en que las agujas del reloj forman un ángulo de 60° por segunda vez.



De la figura se deduce que:

$\theta_m = 60° + \theta_h + 60° \Rightarrow \theta_m = 120° + \theta_h$

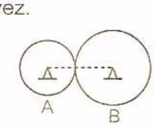
$\omega_m t = \frac{2}{3}\pi + \omega_h t \Rightarrow 2\pi t = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi t$

Resolviendo: $t = \frac{4}{11}$ h

$\Rightarrow t = 0{,}363636$ h $= 21$ min 49 s

Por lo tanto, a las 2 h 21 min 49 s las agujas forman un ángulo de 60°

28. La polea A de 1,2 m de radio transmite su movimiento a la polea B de 1,6 m de radio, de tal manera que el módulo de la resultante de sus velocidades angulares es de π rad/s. Determinar al cabo de cuántos segundos, del instante mostrado en la figura, los puntos de contacto señalados vuelven a coincidir por segunda vez.

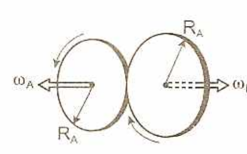


Resolución:

Por dato: $\omega_A - \omega_B = \pi$

Pero: $\omega_A R_A = \omega_B R_B$

$\omega_A = \frac{4}{3}\omega_B$



De estas ecuaciones se deduce que: $\omega_A = 4\pi$ rad/s y $\omega_B = 3\pi$ rad/s y sus períodos de rotación son:

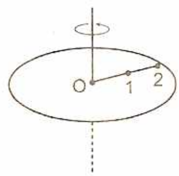
$$t_A = \frac{1}{2}\text{ s y } t_B = \frac{2}{3}\text{ s}$$

El tiempo que los puntos de contacto coinciden se obtiene hallando el MCM de estos períodos, es decir:

$t = \text{MCM}\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) = 2$

Pero nos piden por 2.ª vez: $t' = 2t \quad \therefore t' = 4$ s

29. Un disco rota uniformemente alrededor de su eje. Los puntos 1 y 2 distan 2 y 4 cm respectivamente desde el punto O. La razón de las aceleraciones de los puntos 1 y 2 (a_2/a_1) es:



Resolución:

La velocidad tangencial es directamente proporcional al radio de curvatura.

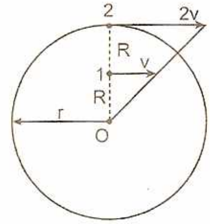
La aceleración centrípeta:

$a_c = \omega^2 r$

1. $a_c = \omega^2(R)$
2. $a_c = \omega^2(2R)$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega^2(2R)}{\omega^2 R} = \frac{2}{1}$$

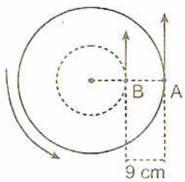
$\therefore\ a_2/a_1 = 2$



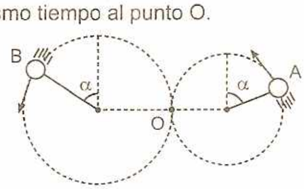
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La figura muestra un disco que gira con 60 r.p.m.; la relación de módulos, de las velocidades tangenciales de A y B es de 4 a 1.
Hallar su producto.

A) $140\ \pi^2\ cm^2/s^2$
B) $144\ \pi^2\ cm^2/s^2$
C) $180\ \pi^2\ cm^2/s^2$
D) $234\ \pi^2\ cm^2/s^2$
E) N. A.



2. La figura muestra la posición inicial de dos móviles A y B, los cuales giran con velocidades angulares constantes ω_A y ω_B donde $\omega_B = 2\omega_B$. Determinar el ángulo a para que ambos lleguen simultáneamente en el mismo tiempo al punto O.



A) 15° B) 45° C) 60°
D) 30° E) 90°

3. ¿Cuál no es característica del MCU?
A) La aceleración angular vale cero.
B) La aceleración tangencial vale cero.
C) El ángulo que gira es directamente proporcional al tiempo.
D) En tiempos diferentes se giran ángulos diferentes.
E) Es un movimiento que tiene aceleración constante en modulo y dirección.

4. A las doce del día las agujas de un reloj están superpuestas. Al cabo de que tiempo, expresado en minutos, el minutero y el horario formaran un ángulo de 60° por primera vez.

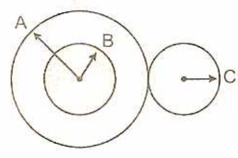
A) $10\frac{1}{11}$ B) $10\frac{2}{11}$ C) $10\frac{9}{11}$
D) $10\frac{10}{11}$ E) $10\frac{11}{12}$

5. Un disco A gira a razón de 120 r.p.m y un punto P se encuentra a 30 cm del centro de rotación. Otro disco B gira a razón de 90 r.p.m. y un punto Q se encuentra a 40 cm del centro de rotación. ¿Cuál de los dos puntos tiene mayor velocidad lineal?
A) P mayor que Q.
B) P menor que Q.
C) Ambos puntos tienen igual velocidad lineal.
D) Faltan datos para decidir.
E) N. A.

6. Una partícula recorre una trayectoria circular de radio 5 m, con velocidad constante en modulo y aceleración centrípeta de 20 m/s^2. Determinar el periodo de rotación de la partícula, en segundos.

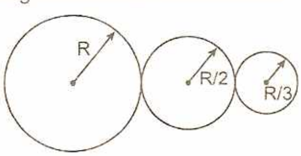
A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) N.A.

7. La figura muestra tres discos A, B y C de radios a = 6 cm; b = 4 cm y c = 4 cm, respectivamente. Si el disco B gira a razón de 120 r.p.m., determinar la velocidad angular del disco C.
(A y B: concéntricos)



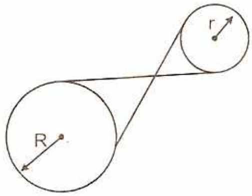
A) 3π rad/s B) 6π rad/s C) 7π rad/s
D) 8π rad/s E) N. A.

8. La figura muestra tres discos tangentes entre sí, de radios de curvatura: R, R/2, R3, respectivamente. Cuando el disco mayor radio gira 4 vueltas, ¿cuántas vueltas girará el disco menor radio?



A) 1/2 B) 3 C) 1/3 D) 12 E) 6

9. En la figura se tienen dos poleas fijas que giran unidas por una correa de transmisión, los radios son 15 cm y 6 cm. Si la polea mayor gira a 180 r.p.m, Hallar la frecuencia de la menor.



A) 180 r.p.m.
B) 270 r.p.m.
C) 300 r.p.m.
D) 450 r.p.m.
E) 540 r.p.m.

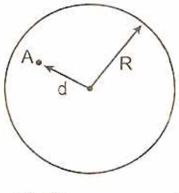
10. Una hélice gira a razón de 120 r.m.p. Si da vueltas antes de detenerse, con aceleración constante, ¿cuántos segundos tarda en detenerse?

A) 10 s
B) 20 s
C) 30 s
D) 35 s
E) N.A.

11. Una hélice gira a razón de a r.p.m. Si da vueltas antes de detenerse, ¿qué tiempo tarda en detenerse con aceleración angular constante?.

A) $\frac{a}{b}$ min
B) $2\frac{b}{a}$ min
C) $2\frac{a}{b}$ min
D) $\frac{b}{2a}$ min
E) ab min

12. Los puntos periféricos del disco gira con una velocidad línea de 54π km/h. Si la partícula A situada a una distancia d del centro tarda 10 segundos en dar una revolución. El radio R del disco es:



A) 85 m
B) 75 m
C) 65 m
D) 55 m
E) 5 m

13. Un disco está girando a razón de 120 r.p.m., un cuerpo que está por encima de un punto A del disco es abandonado y cae sobre el punto mencionado en el menor tiempo posible. ¿Desde qué altura se abandonó al cuerpo? ($g = 10$ m/s^2)

A) 1 m
B) 1,25 m
C) 1,5 m
D) 1,75 m
E) 2,5 m

14. Una partícula describe circunferencias horizontales de radio R constante y concéntricas. Su velocidad se mantiene constante en modulo.

I. La partícula no tiene aceleración.
II. La aceleración de la partícula es perpendicular al eje de rotación.
III. La velocidad de la partícula es perpendicular a su aceleración.

¿Qué afirmaciones son verdaderas?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) II y III
E) I y III

15. Se tiene un reloj de agujas, ¿a qué hora entre las tres y las cuatro, el horario y el minutero forman un ángulo recto?

A) $3\frac{5}{11}$ h
B) $3\frac{6}{11}$ h
C) $3\frac{7}{11}$ h
D) $3\frac{9}{11}$ h
E) N. A.

16. Con qué velocidad deberá volar un avión respecto de la tierra en el Ecuador de Este a Oeste, para que a sus pasajeros les parezca que el Sol esta fijo en el firmamento.

Considerar:

$R_T = 6396$ km (radio de la Tierra)

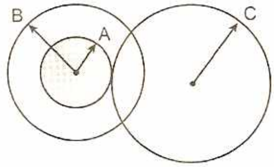
$\pi = 3,14$

A) 1674 km/h
B) 1574 km/h
C) 1474 km/h
D) 1374 km/h
E) 1247 km/h

17. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios $a = 20$ cm y $b = 10$ cm, respectivamente. Si las poleas giran en sentidos antihorario con velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s, hallar la velocidad del bloque que se encuentra unido a la polea móvil, en cm/s.

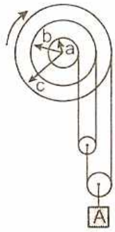
A) $+30\,\hat{j}$
B) $-30\,\hat{j}$
C) $+20\,\hat{j}$
D) $-35\,\hat{j}$
E) N. A.

18. La figura muestra tres discos A, B y C de radios $a = 2$ m, $b = 4$ m y $c = 5$ m, respectivamente. Si el disco C gira con velocidad angular constante de 3 rad/s, determinar la velocidad lineal de los puntos periféricos del disco B. (A y B: concéntricos)



A) 10 m/s
B) 20 m/s
C) 30 m/s
D) 40 m/s
E) N. A.

19. La figura muestra tres poleas concéntricas de radios de curvatura $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $c = 30$ cm. Si el sistema de poleas gira con velocidad angular constante $\omega = 4$ rad/s, en sentido horario, hallar la velocidad con que se mueve el bloque A, en cm/s.

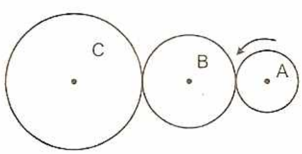


A) -50 j B) -60 j C) -70 j
D) -90 j E) -120 j

20. El minutero de un reloj mide 10 cm, calcular la velocidad tangencial del extreme del minutero.

A) 5π cm/s B) 10π cm/s C) 15π cm/s
D) 20π cm/s E) 25π cm/s

21. En la figura el engranaje A gira con una velocidad angular constante de 20 rad/s. ¿Cuál será la velocidad angular del engranaje C?
($R_A = 0{,}2$ m; $R_B = 0{,}3$ m; $R_C = 0{,}5$ m)

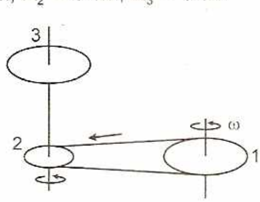


A) 80 rad/s B) 40 rad/s
C) 20 rad/s D) 10 rad/s
E) 8 rad/s

22. Dos partículas parten simultáneamente de los extremos de un diámetro en direcciones opuestas. ¿Luego de qué tiempo se cruzan por segunda vez siendo sus periodos 20 s y 30 s?

A) 18 s B) 20 s C) 24 s
D) 26 s E) 30 s

23. Si $\omega = 4$ rad/s. ¿Qué velocidad tangencial tienen los puntos periféricos de la polea 3?
($R_1 = 12$ cm; $R_2 = 6$ cm, $R_3 = 8$ cm

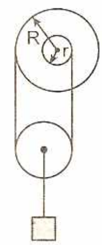


A) 4 cm/s B) 8 cm/s C) 16 cm/s
D) 32 cm E) 64 cm/s

24. Sobre un punto P marcado en la periferia de un disco de radio $15\sqrt{2}$ cm que gira a 45 r.p.m. se deja caer una piedra desde una altura de 4,9 m. Calcular a qué distancia del punto P logro impactar la piedra en el disco.

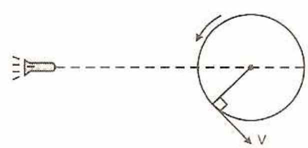
A) 15 cm B) $15\sqrt{2}$ cm C) 30 cm
D) $30\sqrt{2}$ cm E) 45 cm

25. Hallar la velocidad con que se mueve el bloque si las poleas giran a razón de 20 rad/s ($R = 0{,}8$ m y $r = 0{,}3$ m).



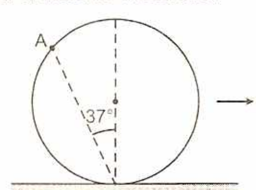
A) 1 m/s B) 2 m/s C) 2,5 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

26. Un cilindro hueco gira uniformemente alrededor de su eje, tal que los puntos de su periferia tienen una velocidad lineal v. Sabiendo que una bala que lleva una velocidad constante ingresa y sale por un mismo agujero en el menor tiempo posible, hallar la velocidad de la bala.



A) $2v/\pi$ B) v C) v/π
D) $\pi v/2$ E) $v\pi$

27. Un disco rueda sin resbalar sobre una superficie con una velocidad v. ¿Cuál será la velocidad del punto A para el instante mostrado?



A) $3v/5$ B) $6v/5$ C) $8v/5$
D) $4v/5$ E) v

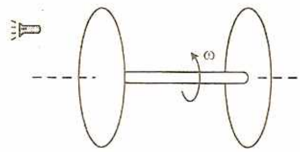
28. Un disco gira con MCU y rapidez angular de 3 rad/s. Hallar el tiempo que tarda un punto de la periferia del disco en recorrer un ángulo 1080°

A) $2\pi/3$ s B) 4π s C) 3π s
D) π s E) 2π s

29. En un planeta de 28 800 km de radio, el día dura 32 horas. La velocidad tangencial en un punto ubicado sobre el paralelo a 60° al Norte del Ecuador, debido a su rotación, es:

A) 120π m/s B) 180π m/s
C) 250π m/s D) 288π m/s
E) 314π m/s

30. Dos discos están conectados por medio de una varilla de longitud 0,5 y giran alrededor de un eje con frecuencia de 1600 r.p.m. Se dispara una bala, la cual atraviesa ambos discos, pero el agujero perforado en el segundo disco resulta desviado con relación al primero un ángulo de 12°. Calcule la velocidad de la bala.



A) 200 m/s B) 300 m/s C) 400 m/s
D) 500 m/s E) 600 m/s

CLAVES

1. B	5. C	9. D	13. B	17. B	21. E	25. E	29. C
2. D	6. A	10. B	14. D	18. C	22. A	26. A	30. C
3. E	7. B	11. B	15. B	19. D	23. E	27. C	
4. D	8. D	12. B	16. A	20. D	24. C	28. E	

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO (MCUV)

Decimos que una partícula se encuentra en movimiento circular cuando su trayectoria es una circunferencia, como por ejemplo, la trayectoria descrita por una piedra que se hace girar atada al extremo de una cuerda. Si además de eso, el valor de la velocidad varía progresivamente, el movimiento circular recibe el calificativo de uniformemente variado. Entonces la partícula aumenta o disminuye su velocidad angular progresivamente, por consiguiente se mueve con velocidad angular uniformemente variado, es decir, con aceleración angular constante.

Aceleración angular ($\vec{\alpha}$)

Es aquella magnitud física vectorial, que mide la rapidez de cambio de la velocidad angular que experimenta la partícula. Se representa por un vector perpendicular al plano de rotación.

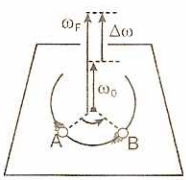


Fig. 3.48

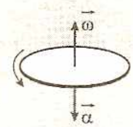
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_F - \omega_0}{t} \qquad \ldots(3.51)$$

Unidades: rad/s^2; rad/min^2

Importante:

I. Si la velocidad angular está aumentando en módulo, entonces la aceleración angular y velocidad angular tienen igual dirección y sentido.

II. Si la velocidad angular está disminuyendo en módulo, entonces la aceleración angular y velocidad angular tienen igual dirección, pero sentidos opuestos.



Descomposición rectangular de la aceleración lineal ($\vec{a}$).

La aceleración lineal ($\vec{a}$) se puede escribir en función de dos componentes mutuamente perpendiculares llamados: aceleración tangencial y aceleración centrípeta.

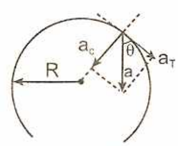
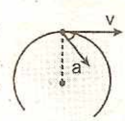


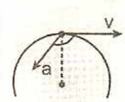
Fig. 3.49

Importante:

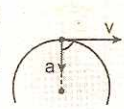
I. Si la aceleración y la velocidad instantánea forman ángulo agudo, entonces la velocidad está aumentando en módulo.



II. Si la aceleración y la velocidad instantánea forman ángulo obtuso, entonces la velocidad está disminuyendo en valor.



III. Si la aceleración y la velocidad instantánea forman ángulo recto, entonces la velocidad permanece constante en módulo.



Aceleración tangencial (a_T). Mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad lineal en módulo.

$$\boxed{a_T = a\cos\theta} \quad ...(3.52)$$

Aceleración Centrípeta (a_C). Mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad lineal en dirección (y sentido)

$$\boxed{a_C = a\,\text{sen}\theta} \quad ...(3.53)$$

Relación entre la aceleración angular y la aceleración tangencial

$$\boxed{a_T = \alpha R} \quad ...(3.54)$$

En la relación 3.54 se considera solo los módulos de las aceleraciones, donde R representa el radio de la trayectoria. Vectorialmente, la aceleración tangencial y angular son perpendiculares entre sí.

Fórmulas del MCUV

I. **Lineal**

$$\boxed{s = v_0 t \pm \frac{1}{2}a_T t^2} \quad ...(3.55)$$

$$\boxed{v_f = v_0 \pm a_T t} \quad ...(3.56)$$

$$\boxed{v_f^2 = v_0^2 \pm 2a_T s} \quad ...(3.57)$$

$$\boxed{s = \frac{(v_0 + v_f)}{2}t} \quad ...(3.58)$$

II. **Angular**

$$\boxed{\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2} \quad ...(3.59)$$

$$\boxed{\omega_F = \omega_0 \pm \alpha t} \quad ...(3.60)$$

$$\boxed{\omega_f^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta} \quad ...(3.61)$$

$$\boxed{\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_f)}{2}t} \quad ...(3.62)$$

Gráficas del MCUV

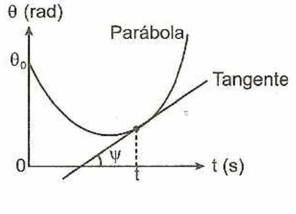
Posición-tiempo (θ - t).

I. La curva es una parábola.

II. La pendiente de la recta tangente trazada a la curva, es igual a la velocidad angular de la partícula en un instante t de tiempo.

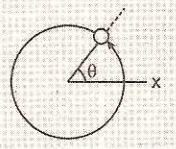
$$\boxed{\omega = \tan\psi} \quad ...(3.63)$$

Fig. 3.60



III. La curva corta al eje de ordenadas en un punto que nos da la posición inicial θ_0.

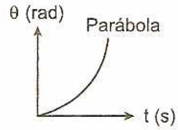
Sistema de referencia:
La partícula se desplaza describiendo una trayectoria circunferencial de radio R, la posición del móvil se define mediante el ángulo θ que se mide en sentido antihorario.



$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta_0$: posición inicial (t = 0)

Caso particular. La curva pasa por el origen del eje de coordenadas cuando la posición inicial es $\theta_0 = 0$.

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



Velocidad Angular-Tiempo (ω-t)

I. La pendiente de la recta es igual a la aceleración angular de la partícula.

$$\boxed{\alpha = \tan\beta} \quad ...(3.64)$$

II. El área bajo la recta es igual al desplazamiento angular experimentado por la partícula en un intervalo de tiempo.

$$\boxed{A = \theta_2 - \theta_1} \quad ...(3.65)$$

III. La recta corta al eje de ordenadas en un punto que nos da la velocidad angular inicial ω_0 de la partícula.

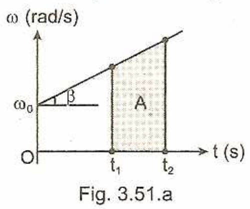


Fig. 3.51.a

Caso particular. Si la velocidad angular es constante (aceleración angular cero) la recta es paralela al eje temporal.

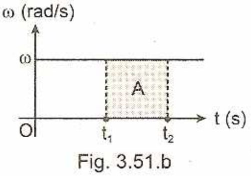
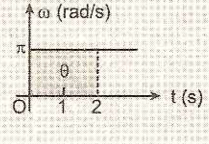


Fig. 3.51.b

Recuerda:
En el movimiento circular uniforme (MCU), la velocidad angular es constante.
Si la velocidad angular es $\omega = \pi$ rad/s, entonces, en t = 2 s describe una vuelta o revolución.



Poleas móviles.

En toda polea móvil que se encuentra trasladándose y rotando se cumple que la velocidad con que se mueve su centro es la semisuma vectorial de las velocidades con que se mueven sus extremos.

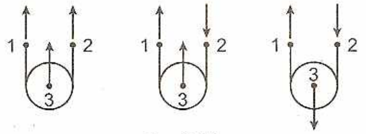


Fig. 3.52

$$\boxed{\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}} \quad ...(3.66)$$

También es válido para desplazamientos y aceleraciones:

$$\boxed{\vec{d}_3 = \frac{\vec{d}_1 + \vec{d}_2}{2}} \quad ...(3.67)$$

$$\boxed{\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}} \quad ...(3.68)$$

Cuando reemplazamos los vectores, el sentido se representa mediante signos convencionales elegidos, hacia arriba positivo, hacia abajo negativo, hacia la derecha positivo, hacia la izquierda negativo.

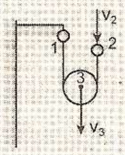
Importante:

Si un extremo de la polea se encuentra fijo ($v_1 = 0$) entonces, el desplazamiento, velocidad y aceleración de la polea, es igual a la mitad del otro extremo.

$$\boxed{\vec{d}_3 = \frac{\vec{d}_2}{2}} \quad (d_1 = 0)$$

$$\boxed{\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_2}{2}} \quad (v_1 = 0)$$

$$\boxed{\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_2}{2}} \quad (a_1 = 0)$$



Ejemplos:

1. La hélice de un ventilador gira a razón de 120 r. p. m., si al desconectarlo se detiene después de 10 s, con aceleración angular constante, calcular el número de vueltas que ha dado hasta detenerse.

Resolución:

Calculamos la velocidad angular inicial, la hélice gira 120 revoluciones en un minuto, entonces, su velocidad es:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{120(2\pi)}{60} = 4\pi \text{ rad/s}$$

Cuando la hélice se detiene, entonces $\vec{\omega} = \vec{0}$.

El desplazamiento angular se determina con la ecuación:

$$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_f)}{2}t = \frac{(4\pi + 0)}{2}10$$

$\theta = 20\pi$ rad

El número de vueltas se determina, dividiendo el ángulo girado entre 2π radianes:

$$\text{N.° de vueltas} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10 \text{ vueltas}$$

2. Una partícula sale del reposo, describiendo una trayectoria circular, con aceleración angular constante $\alpha = 0{,}25\pi$ rad/s^2. Hallar el desplazamiento angular y el número de vueltas que describe en 8 s.

Resolución:

Con la ecuación: $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$,

pero del dato $\omega_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta = 0 + \frac{1}{2}(0{,}25\pi)(8)^2 = 8\pi \text{ rad}$$

El número de vueltas se determina, dividiendo el desplazamiento angular entre 2π radianes.

$$\text{N.° de vueltas} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{8\pi}{2\pi} = 4 \text{ vueltas.}$$

Importante:

El desplazamiento angular que describe la partícula con MCUV en el enésimo segundo de su movimiento es:

$$x = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha(2n - 1)$$

ω_0: velocidad angular inicial

α: aceleración angular

3. La figura 3.53 muestra la variación de la velocidad angular de una partícula que gira describiendo una trayectoria circular.

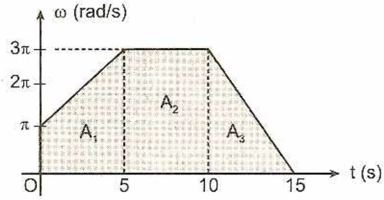


Fig. 3.53

Resolución:

Entonces podemos afirmar que:

a) El móvil inicia su movimiento con velocidad angular
$$\omega_0 = \pi \text{ rad/s} \quad (t = 0)$$

b) En los 5 primeros segundos acelera, aumentando su velocidad de π a 3π rad/s, entonces su aceleración angular es: $\alpha_1 = \frac{2\pi}{5}$ rad/s^2

c) En el intervalo de t = 5 s a t = 10 s el móvil mantiene su velocidad constante, $\omega_2 = 3\pi$ rad/s.

d) En el intervalo de t = 10 s a t = 15 s el móvil tiene movimiento retardado, disminuyendo su velocidad de 3 rad/s a 0, entonces, su aceleración es: $\alpha_3 = -\frac{3\pi}{5}$ rad/s^2

e) El desplazamiento angular en los 5 primeros segundos es igual al área del trapecio A_1:

$$A_1 = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(\pi + 3\pi)5}{2} = 10\pi \text{ rad}$$

f) En el intervalo t = 5 s a t = 10 s, el desplazamiento angular es igual al área del rectángulo, A_2:

$$A_2 = bh = (5)(3\pi) = 15\pi \text{ rad.}$$

g) En el intervalo t = 10 s a t = 15 s, el desplazamiento angular es igual al área del triángulo, A_3:

$$A_3 = \frac{bh}{2} = \frac{5(3\pi)}{2} = \frac{15\pi}{2} = 7{,}5\pi \text{ rad}$$

h) El desplazamiento angular total (en 15 s) es igual a la suma de las áreas:

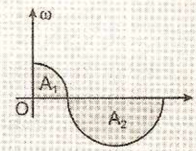
$$\theta = A_1 + A_2 + A_3 = 32{,}5\pi \text{ rad}$$

Desplazamiento angular (θ)

Para hallar el desplazamiento angular de una partícula, en la gráfica ω-t, es suficiente sumar.

$\theta = A_1 - A_2$

Considere el signo de las áreas.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. La hélice de un ventilador gira a razón de 240 r. p. m. Si al desconectarlo se detiene al cabo de 10 segundos, con aceleración angular constante, calcular el número de vueltas que ha dado hasta detenerse.

Resolución:

Cálculo de la velocidad angular inicial:

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{240}{60}\right) \Rightarrow \omega_0 = 8\pi \text{ rad/s}$$

$\omega_f = 0$ ... (la hélice se detiene).

Cálculo del desplazamiento angular:

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t \Rightarrow \theta = \frac{(8\pi + 0)}{2}10 = 40\pi \text{ rad}$$

Cálculo del número de vueltas:

$$\text{N.° de vueltas} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{40\pi}{2\pi}$$

$\therefore$ N.° de vueltas = 20

2. La velocidad de un automóvil aumenta uniformemente en 10 s de 19 km/h a 55 km/h. Si el diámetro de sus ruedas es 50 cm, ¿cuál es la aceleración angular de las mismas?

Resolución:

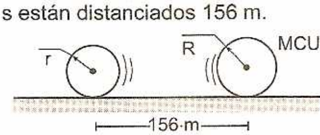
Cálculo de la aceleración lineal:

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{55 - 19}{10}\left(\frac{1000}{3600}\right) \Rightarrow a_T = 1 \text{ m/s}^2$$

Pero: $a_T = \alpha R \Rightarrow 1 = \alpha(0{,}25)$

Luego: $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$

3. Dos ruedas parten de un mismo punto en sentidos opuestos con velocidades angulares iguales a $\omega_0 = 5$ rad/s; una mantiene un MCU y la otra un MCUV acelerando a razón de 2 m/s². Calcule la suma de los radios de ambas ruedas, si después de 4 s están distanciados 156 m.



Resolución:

Cálculo del desplazamiento lineal:

MCU: $s_1 = vt = \omega_0 rt$

MCUV: $s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}a_T t^2$

$$s_2 = \omega_0 Rt + \frac{1}{2}a_T t^2$$

Pero: $s_1 + s_2 = 156$ m

$$\omega_0 t(r + R) + \frac{1}{2}a_T t^2 = 156$$

$$\Rightarrow 5(4)(r + R) + \frac{1}{2}(2)(16) = 156$$

Luego: $(r + R) = 7$ m

4. Una partícula realiza un MCUV a partir del reposo con aceleración angular constante de 0,25 rad/s². Si se sabe que el radio de la trayectoria es de 2 m y el cambio de la velocidad en módulo es igual, al cambio de la velocidad en dirección y sentido en un determinado instante, determine el tiempo en movimiento de la partícula hasta ese instante.

Resolución:

La aceleración centrípeta es igual a la aceleración lineal, en módulo:

$$a_C = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_T = \alpha R$$

Igualando: $v^2 = \alpha R^2$

Reemplazando:

$v^2 = (0{,}25)(4) \Rightarrow v = 1$ m/s

Cálculo de la aceleración lineal o tangencial:

$a_T = \alpha R \Rightarrow a_T = (0{,}25)(2)$

$a_T = 0{,}5 \text{ m/s}^2$

Cálculo del intervalo de tiempo:

$v_f = v_0 + a_T t \Rightarrow 1 = 0 + (0{,}5)t$

Luego: $t = 2$ s

5. Si un disco parte del reposo con MCUV y en 3 segundos su rapidez angular es 36 rad/s. ¿Cuál será la rapidez angular a los 5 segundos en rad/s?

Resolución:

Aplicamos la siguiente ecuación del movimiento, para calcular la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{36 - 0}{3} = 12 \text{ rad/s}^2$$

Cálculo de la rapidez angular en el instante t = 5 s:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\therefore \omega_f = 0 + (12)(5) = 60 \text{ rad/s}$$

6. ¿Cuántas vueltas habrá dado un disco que inicia un MCUV desde el reposo si al transcurrir el primer minuto tiene una frecuencia de 300 r.p.m.?

Resolución:

Cálculo de la rapidez angular final en el instante t = 60 s:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow \omega = 2\pi\left(\frac{300}{60}\right) = 10\pi \text{ rad/s}$$

Cálculo de la medida del ángulo que revoluciona en los primeros 60 segundos:

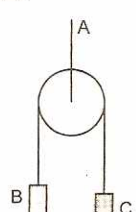
$$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_f)}{2}t$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{(0 + 10\pi)}{2}(60) = 300\pi \text{ rad}$$

Cálculo del número de vueltas:

$$\text{N.° de vueltas} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{300\pi}{2\pi} = 150$$

7. Si el bloque B se mueve con una velocidad de $8\,\hat{j}$ (m/s) y el bloque C con $10\,\hat{j}$ (m/s), ¿cuál es el módulo de la velocidad (en m/s) con la que se mueve el punto A?



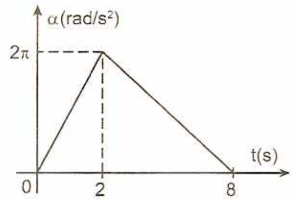
Resolución:

La velocidad de la polea (punto A) se mueve con la semisuma de las velocidades de los puntos B y C que son los extremos de la cuerda.

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{v}_B + \vec{v}_C}{2}$$

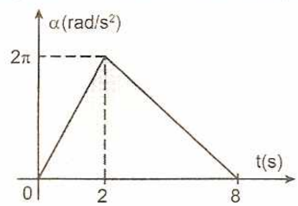
$$\therefore \vec{v}_A = \frac{8\,\hat{j} + 10\,\hat{j}}{2} = 9\,\hat{j} \text{ (m/s)}$$

8. Se muestra la variación de la aceleración angular en el tiempo de un disco. Si en el instante t = 0 su rapidez angular es ω y para t = 8 s la rapidez angular es 3ω, determinar su rapidez angular (en rad/s) para t = 2 s.



Resolución:

En toda gráfica aceleración angular versus tiempo, el área bajo la curva es igual al incremento de la rapidez angular en un intervalo de tiempo.



Analicemos variación de la rapidez angular para: t = 8 s

$$\omega_f - \omega_0 = \frac{bt}{2}$$

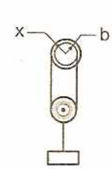
$$3\omega - \omega = \frac{(8)(2\pi)}{2} \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad/s}$$

Analicemos variación de la rapidez angular para: t = 2 s.

$$\omega_f - \omega = \frac{(2)(2\pi)}{2} \Rightarrow \omega_f - 4\pi = 2\pi$$

$$\therefore \omega_f = 6\pi \text{ rad/s}$$

9. La figura muestra dos poleas concéntricas de radios x = 20 cm y b = 10 cm, respectivamente. Si las poleas giran en sentido antihorario con aceleración angular constante igual a 0,2 rad/s^2; hallar la aceleración lineal del bloque que se encuentra unido a la polea móvil.



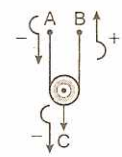
Resolución:

La aceleración lineal de los puntos A y B, es igual a la aceleración lineal de los puntos periféricos de las respectivas poleas.

$a = \alpha R$

Para A: $a_A = (0{,}2)(20) = 4 \text{ cm/s}^2$ (↓)

Para B: $a_B = (0{,}2)(10) = 2 \text{ cm/s}^2$ (↑)



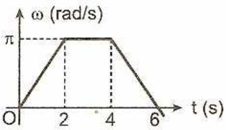
Propiedad de la polea móvil:

$$a_C = \frac{a_A + a_B}{2}$$

Reemplazando: $a_C = \dfrac{(-4) + (2)}{2}$

Luego: $a_C = -1 \text{ cm/s}^2$ (−): sentido hacia abajo

10. Un disco experimenta un movimiento de rotación variado, cuya velocidad angular versus tiempo es la que indica la figura. Determinar el número de revoluciones que gira en los 6 primeros segundos.



Resolución:

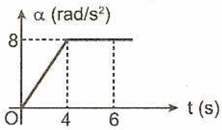
El desplazamiento angular que experimenta el disco es igual al área de la curva, en la gráfica $\omega-t$:

θ = área del trapecio

$$\theta = \left(\frac{b+B}{2}\right)h \Rightarrow \theta = \left(\frac{2+6}{2}\right)\pi = 4\pi$$

$$\text{Número de vueltas} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

11. La figura muestra la gráfica $\alpha-t$ de una partícula que describe una trayectoria circular. Si en el instante $t = 0$ su velocidad angular es ω y para $t = 4$ s la velocidad angular es 3ω, determinar su velocidad angular para $t = 6$ s.



Resolución:

En el intervalo de tiempo $[0; 4\rangle$ s, el área bajo la recta es igual al cambio de la velocidad angular:

$(\omega_f - \omega_0)$ = área del $\Delta \Rightarrow (3\omega - \omega) = \frac{1}{2}(4)(8)$

$\Rightarrow \omega = 8$ rad/s

En el intervalo de tiempo $[4; 6\rangle$ s:

$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_f = 24 + 8(2)$

$\therefore \omega_f = 40$ rad/s, para $t = 6$ s

12. Una rueda durante su recorrido necesita 3 s para girar un ángulo de 234 rad. Su velocidad angular al cabo de este tiempo es de 108 rad/s. Determinar su aceleración angular constante.

Resolución:

De la fórmula $\theta = \frac{(\omega_0 + \omega_f)}{2}t$; tenemos:

$$234 = \left(\frac{\omega_0 + 108}{2}\right)3$$

$\Rightarrow \omega_0 = 48$ rad/s

Cálculo de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{108 - 48}{3}$$

$\therefore \alpha = 20$ rad/s^2

13. En qué tiempo se detiene una rueda que giraba a 1200 r. p. m. si es frenada logrando dar 200 vueltas hasta que se detiene.

Resolución:

Considerando un movimiento con aceleración angular constante: $\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t$

Pero: $\omega_0 = 2\pi f$ y $\omega_f = 0$

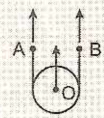
Reemplazando:

$$200(2\pi) = \left[\frac{2\pi(1200)}{2}\right]t \Rightarrow t = \frac{1}{3}\text{min}$$

$\therefore t = 20$ s

Teorema

En toda polea móvil que se encuentra trasladándose y rotando se cumple que la velocidad con que se mueve su centro es la semisuma vectorial de las velocidades con que se mueven sus extremos.



$$\vec{v}_0 = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$$

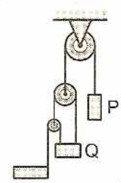
Demostración:

Si elegimos un sistema de referencia donde el punto 0 se encuentra en reposo se cumplirá que:

$$\vec{v}_{A/0} = -\vec{v}_{B/0} \Rightarrow \vec{v}_A - \vec{v}_0 = -(\vec{v}_B - \vec{v}_0)$$

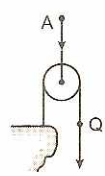
$$\Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$$

14. Si el bloque P mostrado en la figura sube con una velocidad de 6 m/s, determinar la velocidad con que baja el bloque Q.



Resolución:

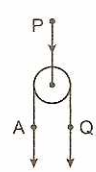
Analizando la polea móvil inferior: $\vec{v}_A = \frac{1}{2}\vec{v}_Q$



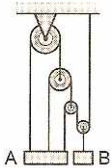
Analizando la polea móvil superior:

$$\vec{v}_P = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_Q) \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_Q + \vec{v}_Q\right)$$

$\therefore v_Q = 8$ m/s



15. Si el bloque A mostrado en la figura sube con una velocidad de 2 m/s, determinar la velocidad con que baja el bloque B.



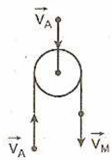
Resolución:

Analizando la polea móvil superior:

$\vec{v}_A = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_M)$

$v_A = \frac{1}{2}(-v_A + v_M)$

$v_M = 6$ m/s

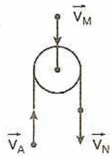


Analizando la polea móvil intermedia:

$\vec{v}_M = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_N)$

$v_M = \frac{1}{2}(-v_A + v_N)$

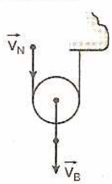
$v_N = 14$ m/s



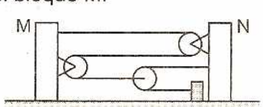
Analizando la polea móvil inferior:

$\vec{v}_B = \frac{1}{2}\vec{v}_N$

$v_B = 7$ m/s



16. Si el móvil N se mueve horizontalmente con una velocidad de 6 m/s, determinar con qué velocidad se mueve el bloque M.

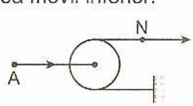


Resolución:

Analizando la polea móvil inferior:

$\vec{v}_A = \frac{1}{2}\vec{v}_N$

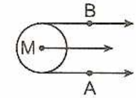
$v_A = 3$ m/s



Analizando la polea fija al móvil M:

$\vec{v}_M = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$

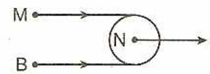
$\vec{v}_M = \frac{1}{2}(3 + v_B) \quad ...(\alpha)$



Analizando la polea fija al móvil N:

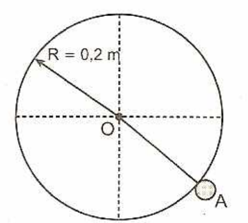
$\vec{v}_N = \frac{1}{2}(\vec{v}_M + \vec{v}_B)$

$6 = \frac{1}{2}(v_M + v_B) \Rightarrow v_M + v_B = 12 \qquad ...(\beta)$



Resolviendo las ecuaciones (α) y (β) tenemos que: $v_M = 5$ m/s

17. En el disco (sin fricción) una bolita atada a una cuerda gira alrededor del punto O, con aceleración y velocidad angulares constantes ($\alpha = \pi/6$ rad/s^2 y $\omega_0 = \pi$ rad/s). La bolita inició su movimiento en el punto A y a los 12 s se rompe la cuerda. Calcular la longitud total en metros recorrida desde el inicio del movimiento hasta 5 s después que la cuerda se rompió.



Resolución:

Para t = 12 s con MCUV

Velocidad angular: $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$

$\omega_f = \pi + \left(\frac{\pi}{6}\right)12 \Rightarrow \omega_f = 3\pi$ rad/s

Posición angular $\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2$

$\theta_1 = 0 + \pi(12) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)12^2 \Rightarrow \theta_1 = 24\pi$ rad

En los últimos 5 segundos: MCV

$\theta_2 = \omega t \Rightarrow \qquad \theta_2 = 3\pi(5) = 15\pi$ rad

Desplazamiento angular total:

$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 24\pi + 15\pi = 39\pi$ rad

Longitud de arco que recorre en 17 segundos es:

$L = \theta R$

$L = 39\pi(0,2) \quad \therefore L = 24,5$ m

1. Un coche recorre una circunferencia de radio 8 m, la velocidad del coche aumenta uniformemente de 20 m/s a 80 m/s. Hallar la aceleración tangencial del coche en la última posición.

A) 5 m/s^2 B) 7,5 m/s^2 C) 10 m/s^2
D) 15 m/s^2 E) 17,5 m/s^2

2. Una partícula se mueve por una circunferencia de 5 cm de radio, si se sabe que partió del reposo y que después de 5 vueltas su velocidad es 3,14 m/s. Hallar su aceleración tangencial de modulo constante.

A) 1 m/s^2 B) 1,36 m/s^2 C) 3 m/s^2
D) 3,14 m/s^2 E) 6 m/s^2

3. Un proyectil se lanza con una rapidez de 15 m/s en forma horizontal desde un balcón, hallar su aceleración centrípeta luego de 2 s ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 m/s^2 B) 6 m/s^2 C) 8 m/s^2
D) 10 m/s^2 E) 12 m/s^2

4. Si un cuerpo se mueve sobre una circunferencia con una velocidad de igual valor a la que adquiere cayendo libremente desde una altura igual a la mitad del radio de la circunferencia, hallar su aceleración centrípeta ($g = 10\ m/s^2$).

A) 2,5 m/s B) 5 m/s C) 7,5 m/s
D) 10 m/s E) 12,5 m/s

5. Una partícula parte con cierta velocidad con MCUV, si durante el primer segundo dio 3 vueltas y durante el tercero dio 9 vueltas. ¿Cuántas vueltas dio durante los dos primeros segundos?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

6. Una partícula gira con MCUV en un plano horizontal. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
   I. La aceleración siempre es tangente a la trayectoria.
   II. La magnitud de la velocidad tangencial es constante.
   III. La velocidad angular es perpendicular al plano de la trayectoria.

A) FVF B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFV

7. Una rueda gira describiendo 80 vueltas en un minuto. Si la rueda tiene un radio de 50 cm. ¿Cuál será la aceleración centrípeta, en m/s^2?

A) $4\pi^2/5$ B) $4\pi^2/9$ C) $3\pi^2/9$
D) $64\pi^2/3$ E) $64\pi^2/9$

8. Una partícula se encuentra girando con velocidad angular constante sobre una circunferencia de radio 2 m. Halle la aceleración, en m/s^2, de la partícula en el instante en que su velocidad es:
$v = (i + \sqrt{3}\ j)$ m/s

A) 0,5 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

9. La rapidez angular de una rueda aumenta uniformemente de 20 rad/s a 30 rad/s en 5 s. Calcular el ángulo descrito por un punto de la periferia de la rueda en dicho intervalo de tiempo.

A) 125 rad B) 150 rad C) 200 rad
D) 250 rad E) 300 rad

10. Una partícula parte del reposo con una aceleración angular constante de 2π rad/s^2. ¿Cuántas vueltas dará durante los primeros 8 segundos de su movimiento?

A) 64 B) 32 C) 24
D) 16 E) 8

11. Una rueda gira uniformemente con una velocidad angular de 4π rad/s. En un momento determinado aumenta uniformemente su velocidad hasta triplicarla en 4 s. ¿Qué valor tiene su aceleración angular, en rad/s^2, durante ese lapso de tiempo?

A) $\pi/2$ B) $\pi/4$ C) π
D) 2π E) 4π

12. Una rueda parte del reposo acelerando uniformemente a razón de 10π rad/s^2. Si en 2 s gira 180π rad, ¿qué velocidad, en rev/s, alcanza al final de dicho recorrido?

A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

13. La velocidad angular de una rueda que desacelera uniformemente disminuye de 300 hasta 60 r.p.m. en 1 minuto. Calcular el número de vueltas que dio en el último minuto antes de detenerse completamente.

A) 180 B) 150 C) 120
D) 110 E) 60

14. Sea un movimiento circular de radio 12 m. Su distancia recorrida sobre una curva viene dada por: $s = 2t^2 - 2t + 1$ (en metros) como distancia a un origen tomando en ella. ¿Cuál será el módulo de su aceleración para $t = 2$ s y qué ángulo forma con la velocidad?

A) 5 m/s^2; 37° B) 4 m/s^2; 37° C) 3 m/s^2; 37°
D) 5 m/s^2; 53° E) 4 m/s^2; 53°

15. Una varilla gira uniformemente con una aceleración angular constante de 20 rad/s^2. Si necesita 3 s para girar un ángulo de 186 rad, ¿qué tiempo, en segundos, transcurrió desde que partió del reposo hasta el inicio de dicho recorrido?

A) 1,8 B) 1,7 C) 1,6
D) 1,5 E) 1,4

16. La velocidad angular de una rueda disminuye uniformemente desde 900 hasta 780 r.p.m. en 5 segundos. Calcular cuánto tiempo más hará falta para que la rueda se detenga, suponiendo que se mantiene constante la aceleración de frenado.

A) 3,25 s B) 6,5 s C) 13 s
D) 26 s E) 32,5 s

17. Una particular se mueve sobre una trayectoria circular de radio 9 m, de modo que la longitud recorrida sobre la trayectoria es $s = 2t + t^2$, en metros. Calcular la aceleración (en m/s^2) de la partícula en el instante t = 2 s.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) 2 E) 4

18. ¿Qué aceleración angular, en rad/s^2, debe tener un disco para que aumente uniformemente su velocidad desde 130 hasta 250 r.p.m. en 5 segundos?

A) $\frac{4\pi}{5}$ B) $\frac{3\pi}{5}$ C) $\frac{2\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) π

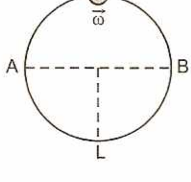
19. ¿Qué distancia recorrería un auto con MRUV que partió del reposo durante los 2 primeros segundos de su movimiento si su aceleración tiene igual valor que la aceleración tangencial de un disco de 50 cm de radio que tardó 24 segundos en aumentar su frecuencia, uniformemente, desde 90 hasta 210 r.p.s.?

A) 314 m B) 31,4 m C) 3,14 m
D) 5 m E) 10 m

20. Un disco que parte del reposo con movimiento de rotación uniformemente variado, da las primeras vueltas en 6 s. ¿Cuántas vueltas dio durante los 2 primeros segundos de su movimiento?

A) 1/5 B) 3/5 C) 1/9
D) 2/9 E) 5/9

21. Un cuerpo describe un movimiento circular con aceleración angular constante. Determinar la velocidad tangencial en el punto L, sabiendo que la velocidad angular en A es 3 s^{-1}; la velocidad angular en B es 5 s^{-1} y el diámetro de la trayectoria es 2 m.



A) $\sqrt{33}$ m/s; hacia la derecha.
B) $\sqrt{33}$ m/s; hacia la izquierda.
C) $\sqrt{33}$ m/s; hacia la arriba.
D) $\sqrt{17}$ m/s; hacia la izquierda
E) $\sqrt{17}$ m/s; hacia la derecha

22. Un punto material describe una circunferencia de 27 cm de radio, aumentando su velocidad de una forma constante. En un momento dado, su velocidad es de 9 cm/s y 0,25 segundos más tarde es de 10 cm/s. Calcular el módulo de la aceleración en el primer instante.

A) 1 cm/s^2 B) 3 cm/s^2 C) 4 cm/s^2
D) 5 cm/s^2 E) 7 cm/s^2

23. Mientras que una partícula se desplaza por una circunferencia C con una rapidez constante y con un periodo de 5 s, otra partícula parte del reposo con una aceleración de 2 m/s^2. La segunda partícula al recorrer una distancia igual a la longitud de la circunferencia C tarda 2 s. ¿Qué valor tiene la velocidad tangencial de la primera partícula?

A) 0,8 m/s B) 0,6 m/s C) 0,5 m/s
D) 0,4 m/s E) 0,2 m/s

24. Una partícula gira con un MCUV partiendo del reposo y alcanza una rapidez de 40 cm/s en 8 segundos. Si el radio de su trayectoria circular es 10 cm, halle el valor de la aceleración de la partícula (en cm/s^2) en el instante en que su rapidez es de 10 cm/s.

A) $\sqrt{125}$ B) $\sqrt{25}$ C) $\sqrt{49}$
D) $\sqrt{180}$ E) $\sqrt{225}$

25. Un disco parte del reposo con aceleración angular constante $\alpha_1 = 2$ rev/min^2. Luego de 12 minutos de iniciado su movimiento de rotación desacelera con $\alpha_2 = 4$ rev/min^2. Determinar el número de vueltas que realizó hasta detenerse.

A) 112 B) 162 C) 198
D) 216 E) 234

26. La velocidad de una rueda que gira con MCUV disminuye al ser frenada durante 1 minuto, desde 300 r.p.m. hasta 80 r.p.m. Halle el número de vueltas que dio durante este tiempo.

A) 90 B) 100 C) 180
D) 190 E) 380

27. Un disco de 2 m de radio gira con una frecuencia de 3 r.p.s. Calcular su aceleración centrípeta.

A) 72π cm/s^2 B) $72\pi^2$ cm/s^2 C) $36\pi^2$ cm/s^2
D) 36π cm/s^2 E) 24π cm/s^2

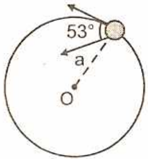
28. Un disco parte del reposo con MCUV y da las 3 primeras vueltas en 2 s. ¿Cuántas vueltas dio durante el primer segundo de su movimiento?

A) $\frac{1}{4}$ Vuelta B) $\frac{3}{4}$ Vuelta C) $\frac{1}{2}$ Vuelta
D) 1 Vuelta E) $\frac{3}{2}$ Vuelta

29. Un disco en 3 s gira un ángulo de 180 rad siendo 108 rad/s su velocidad angular al cabo de este tiempo. Calcular su aceleración constante.

A) 32 rad/s^2 B) 64 rad/s^2 C) 16 rad/s^2
D) 8 rad/s^2 E) 42 rad/s^2

30. Una partícula gira con MCUV, para el instante indicado, su velocidad v y aceleración a son 20 m/s y 20 m/s^2, respectivamente. Calcule su velocidad angular y su aceleración angular.



A) 1,2 rad/s y 2,42 rad/s^2
B) 0,6 rad/s y 0,81 rad/s^2
C) 0,8 rad/s y 0,48 rad/s^2
D) 0,6 rad/s y 1,41 rad/s^2
E) 0,5 rad/s y 3,63 rad/s^2

CLAVES

1. D	5. E	9. A	13. C	17. B	21. B	25. D	29. A
2. D	6. E	10. B	14. A	18. A	22. D	26. D	30. C
3. B	7. C	11. D	15. C	19. B	23. A	27. B	
4. D	8. C	12. A	16. E	20. E	24. A	28. B	

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - II)

La velocidad angular de la hélice de un motor desciende uniformemente de 800 r.p.m. hasta 400 r.p.m., efectuando en ese lapso 60 revoluciones. Entonces la aceleración angular, en rad/s^2, que experimenta la hélice será:

A) $-2{,}22\pi$ B) $-3{,}33\pi$ C) $-2{,}11\pi$
D) $-2{,}52\pi$ E) $-3{,}42\pi$

Resolución:

De la expresión: $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$

Despejando α: $a = \dfrac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\theta}$ ...(1)

Sabemos: 1 r.p.m $= \dfrac{\pi}{30}$rad/s; 1 rev $= 2\pi$ rad

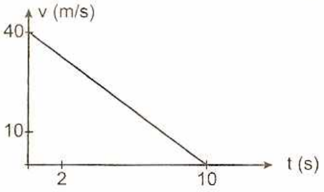
Luego: $\alpha = \dfrac{400^2(1-4)(\pi/30)^2}{2(60)(2\pi)}$

$\therefore\ \alpha = -2{,}22\pi$ rad/s

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2001 - II)

La figura muestra la gráfica velocidad versus tiempo de un vehículo que se mueve en linea recta. La distancia que recorre, en m, entre los instantes t = 2 s y t = 6 s, es:



A) 36 B) 96 C) 100 D) 106 E) 224

Resolución:

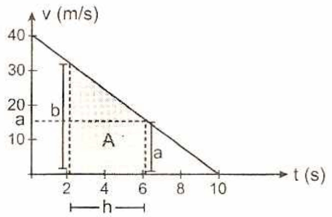
El área bajo la curva, en el intervalo [2;6] es igual a la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [2;6]
Calculando a, b y h; usando triángulos semejantes:

$\dfrac{40}{10} = \dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{8} \Rightarrow a = 16;\ b = 32;\ h = 4$

Luego: $A = \dfrac{1}{2}(a+b)h$

Reemplazando: $A = \dfrac{1}{2}(4)(16+32)$

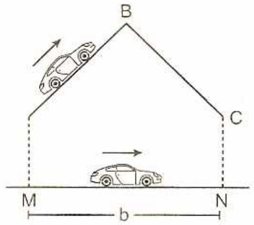
$A = 96 \quad \therefore\ d = 96$ m



Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2001 - II)

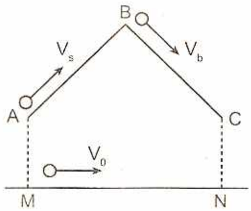
Una pista ABC tiene la forma de un triángulo isósceles de base b = 5000 m, y lados de longitud L = 2750 m. Otra pista horizontal está paralela a la base del triángulo. Un auto sube con velocidad v_s = 70 km/h que es el 75% de la velocidad con la que realiza la bajada. Un segundo auto avanza por la pista horizontal con velocidad v_0. ¿Cuánto debe valer v_0, aproximadamente, en m/s, para que partiendo en un mismo instante desde A y M, los dos autos lleguen simultáneamente a C y N, respectivamente.



A) 192,5 B) 94,5 C) 72,7
D) 61,2 E) 20,2

Resolución:

Del gráfico: $AB + BC = v_s t_s + v_b t_b$



Reemplazando los datos:

$2(2{,}75) = 70t_s + (70/075)t_b$

$5{,}5 = 70t_s + (70/{,}075)t_b$

Luego: $v_0t_0 = MN$

${}_0t_0V = 5$

Por condición del problema, $t_0 = t_s + t_b$, entonces:

$v_0(t_s + t_b) = 5$

$v_0\left(\dfrac{2{,}75}{70} + \dfrac{2{,}75}{70/0{,}75}\right) = 5 \Rightarrow v_0\left(\dfrac{2{,}75}{70}\right)(1{,}75) = 5$

$V_0 = \dfrac{800}{11}$ km/h

Convirtiendo a m/s: $v_0 = \dfrac{800}{11}\left(\dfrac{5}{18}\right)$

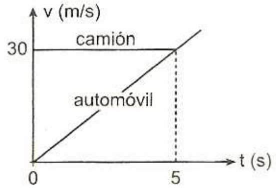
$\therefore\ v_0 = 20{,}2$ m/s

Clave E

PROBLEMA 4 (UNI 2005 - I)

Un automóvil y un camión se encuentran en el mismo lugar en el instante t= 0. Ambos vehículos se desplazan en línea recta y en el mismo sentido. El gráfico muestra

la dependencia de la rapidez de cada uno de ellos con el tiempo. Determine la distancia, en metros, que deben recorrer para encontrarse nuevamente.



A) 150 B) 300 C) 450
D) 600 E) 800

Resolución

Analizando el gráfico:

Camión: $v_c = 30$ m/s (MRU)

Automóvil: MRUV

$a_A = \dfrac{30-0}{5} = 6\text{ m/s}^2$ ...(I)

Como se encuentran en un mismo lugar, entonces ambos recorrerán la misma distancia en el mismo tiempo:

$d_C = d_A$

$30t = \dfrac{1}{2}a_A t^2$ ...(II)

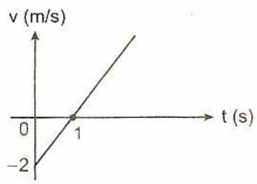
De (I) y (II): $t = 10$ s

$\therefore\ d = 30(10) = 300$ m

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2005 - I)

La gráfica muestra la velocidad en función del tiempo de un objeto que se mueve en trayectoria rectilínea. Calcule el desplazamiento (en metros) del objeto durante el intervalo de $t_1 = 2{,}0$ s a $t_2 = 4{,}0$ s.

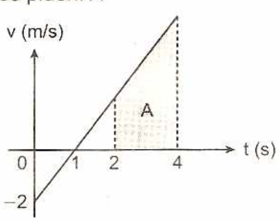


A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Resolución

Por teoría sabemos que el desplazamiento en el intervalo está dado por el área bajo la curva:

Del gráfico nos piden: A



La ecuación de la recta sería:

$v - 0 = \dfrac{-2-0}{0-1}(t-1) \Rightarrow v = 2(t-1)$

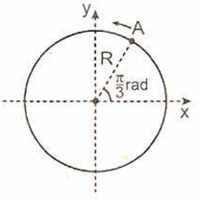
Para: $t = 2\text{s} \Rightarrow v = 2$ m/s

$t = 4$ s $\Rightarrow v = 6$ m/s $\quad \therefore\ A = \left(\dfrac{2+6}{2}\right)2 = 8$ m

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2005 - II)

Una partícula inicialmente en reposo realiza una MCUA iniciando su movimiento en el punto A con aceleración angular $\alpha = \dfrac{17\pi}{12}$ rad/s². Si el radio de la trayectoria es 4,0 cm, halle la velocidad media de la partícula, en cm/s, en los primeros 2,0 segundos de su movimiento.



A) $(\sqrt{3}+1)(\hat{i}+\hat{j})$

B) $-(\sqrt{3}+1)(\hat{i}+\hat{j})$

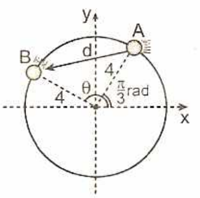
C) $-2(\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j})$

D) $-(\sqrt{3}-1)(\hat{i}+\hat{j})$

E) $-(\sqrt{3}+1)\hat{i}+(1-\sqrt{3})\hat{j}$

Resolución

Calculando θ:



$\theta = \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$

$\theta = 0(2) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)(2)^2$

$\theta = \dfrac{17\pi}{6}$ rad

Calculando el punto A:

$A = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}; \text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right) = (2; 2\sqrt{3})$

Calculando el punto B:

$B = 4\left(\cos\dfrac{17\pi}{6}; \text{sen}\dfrac{17\pi}{6}\right) = (-2\sqrt{3}; 2)$

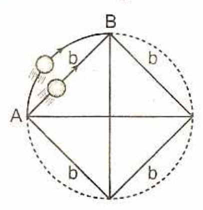
La velocidad media se define: $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{d}}{\Delta t}$

$\vec{v}_m = \dfrac{B-A}{\Delta t} \Rightarrow m = \dfrac{(-2\sqrt{3}-2)\hat{i}+(2-2\sqrt{3})\hat{j}}{2}$

Clave: E

PROBLEMA 7 (UNI 2006 - II)

La figura muestra las trayectorias de dos partículas que salen simultáneamente del punto A y llegan, también simultáneamente al punto B (las flechas indican las direcciones de los movimientos). La primera realiza un movimiento circular uniforme y la segunda un movimiento rectilíneo uniforme. La razón de la rapidez de la primera partícula a la rapidez de la segunda es:

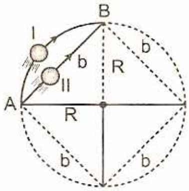


A) 0,78 B) 1,00 C) 1,11
D) 2,22 E) 4,42

Resolución:

Instante en que las partículas (I) y (II) parten del punto A al mismo tiempo y llegan a B.

Podemos notar en el gráfico:



$d_{AB} = b$

De otro lado, por geometría:

$d_{AB} = \sqrt{2}R$

Con (I): $v = \dfrac{l_{\widehat{AB}}}{t_{AB}}$

Reemplazando:

$$v = \frac{1/4(2\pi R)}{t_{AB}} \Rightarrow v_1 = \frac{\pi R}{2t_{AB}} \quad \ldots(a)$$

Con (II): $v = \dfrac{\sqrt{2}R}{t_{AB}} \quad \ldots(b)$

Nos piden la razón de la rapidez de la primera partícula a la rapidez de la segunda: entonces vamos a dividir (α) entre (β):

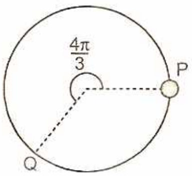
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\dfrac{\pi R}{2t_{AB}}}{\dfrac{\sqrt{2}R}{t_{AB}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2007 - I)

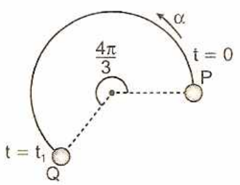
Una partícula describe un movimiento circular, con una aceleración angular α partiendo del reposo en el punto P mostrado en la figura. Cuando llega al punto Q su aceleración cambia repentinamente a -2α, llegando nuevamente a P con velocidad angular cero. Si la partícula tarda 1 s en dar la vuelta completa, el valor de la aceleración angular α, en rad/s^2, es:

A) 6π
B) 5π
C) 4π
D) 3π
E) 2π

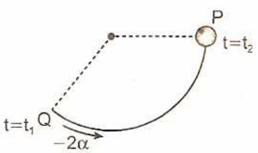


Resolución:

Sea: t_1: tiempo de P a Q.
t_2: tiempo de Q a P.



Tramo P → Q:



$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

$$\frac{4\pi}{3} = (0)t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

Entonces: $t_1 = \sqrt{\dfrac{8\pi}{3\alpha}} \quad \ldots(1)$

Tramo Q → P: $0 = \alpha t_1 - 2\alpha t_2 \Rightarrow t_1 = 2t_2$

Ademas: $t_1 + t_2 = 1 \Rightarrow t_1 = 1 - t_2$

Resolviendo: $t_1 = \dfrac{2}{3} \wedge t_2 = \dfrac{1}{3}$

Reemplazando en (1): $\dfrac{2}{3} = \sqrt{\dfrac{8\pi}{3\alpha}} \quad \therefore \alpha = 6\pi$

Clave: A

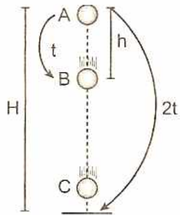
PROBLEMA 9 (UNI 2010 - I)

Se deja caer del reposo un cuerpo desde una altura H. Un observador pone en marcha su cronómetro cuando el cuerpo ya ha hecho parte de su recorrido y lo apaga justo en el instante en el que llega al suelo. El tiempo medido por el observador es la mitad del tiempo que transcurre desde que se suelta el cuerpo hasta que llega al suelo. El porcentaje de la altura H que recorrió el cuerpo antes de que el observador encienda su cronómetro es:

A) 10 B) 20 C) 25 D) 35 E) 50

Resolución

Del enunciado:



Nos piden el porcentaje de la altura que recorrió el cuerpo antes de encender el cronómetro respecto de H, este será:

$$C = \frac{h}{H}(100\%) \quad \ldots(I)$$

Ahora aplicando MVCL en los tramos A − B y A − C

Tramo A − B

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots(II)$$

Tramo A − C

$$H = v_0(2t) + \frac{1}{2}g(2t)^2 \Rightarrow H = 2gt^2 \quad \ldots(III)$$

Reemplazando (II) y (III) en (I):

$\therefore$ C = 25%

Clave: C

PROBLEMA 10 (UNI 2011 - I)

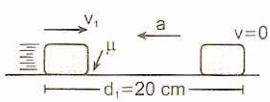
Considere una moneda colocada sobre una superficie horizontal rugosa. Cuando a la moneda se le da una rapidez inicial horizontal v_1, se desplaza una distancia de 20 cm y cuando se le da una rapidez inicial horizontal v_2 se desplaza 45 cm. Calcule la distancia, en cm, que se desplazará la moneda cuando se le dé una rapidez inicial igual a $v_1 + v_2$.

A) 100 B) 125 C) 150
D) 175 E) 200

Resolución:

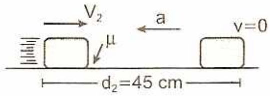
Como se trata de un MRUV: $v_f^2 = v_o^2 - 2ad$

Caso 1:



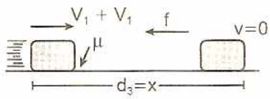
$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2a(20)} \quad \ldots(1)$

Caso 2:



$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2a(45)}$ ...(2)

Caso 3:



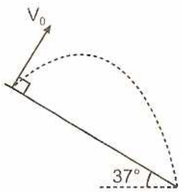
$\Rightarrow v_1 + v_2 = \sqrt{2ax}$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3) $\therefore$ x = 125 cm

Clave: B

PROBLEMA 11 (UNI 2011 - I)

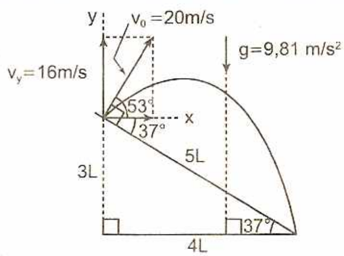
Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 20 m/s desde la parte superior de un plano inclinado que hace un ángulo de 37° con la horizontal. Encuentre el tiempo de vuelo del proyectil, en s, al impactar sobre el plano como se indica en la figura, si su velocidad inicial es perpendicular al plano inclinado ($g = 9{,}81\ m/s^2$).



A) 1,42 B) 4,89 C) 5,09
D) 6,52 E) 7,04

Resolución:

Considerando que el móvil describe un M.P.C.L



Eje x: MRU

$d = v_x t \Rightarrow 4L = 12\,t \Rightarrow L = 3t$ ...(1)

Eje y: MVCL: $h = v_{oy}t - \frac{g}{2}t^2$

$\Rightarrow -3L = 16t - \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow -3\,(3t) = 16t - \frac{gt^2}{2}$

$\therefore\ t = 5{,}09$ s

Clave: C

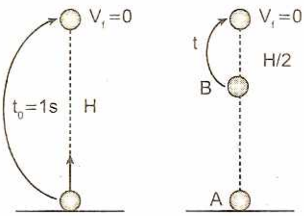
PROBLEMA 12 (UNI 2011 - II)

Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo y alcanza su altura máxima en 1 s. Calcule el tiempo, en s, que transcurre desde que pasa por la mitad de su altura máxima hasta que vuelve a pasar por ella ($g = 9{,}81\ m/s^2$)

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

Resolución:

Del gráfico:



El problema se puede analizar de subida o bajada ya que el tiempo empleado será el mismo.

En ambos gráficos tenemos:

$H = g\frac{t_0^2}{2};\quad \frac{H}{2} = \frac{gt^2}{2}$

Dividiendo ambas expresiones:

$2 = \frac{t_0^2}{t^2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}s$

El tiempo que se pide es el que emplea la partícula de "B" a "C" y nuevamente de regreso a "B".

$t_v = 2t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ s

Clave: B

PROBLEMA 13 (UNI 2011 - II)

Un ciclista decide dar una vuelta alrededor de una plaza circular en una trayectoria de radio constante $R = 4\pi$ metros en dos etapas: la primera media vuelta con una rapidez constante de 3π m/s, y la segunda media vuelta con una rapidez constante de 6π m/s.

Calcule con qué aceleración tangencial constante, en m/s^2, debería realizar el mismo recorrido a partir del reposo para dar vuelta completa en el mismo tiempo.

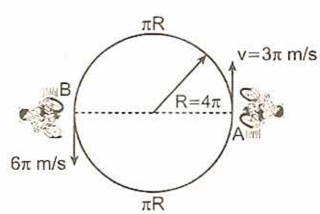
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución:

En el M.C.U. la rapidez tangencial es constante por ese motivo: $t = \frac{s}{v}$

$t_{AB} = \frac{\pi R}{3\pi} = \frac{4\pi}{3}s$

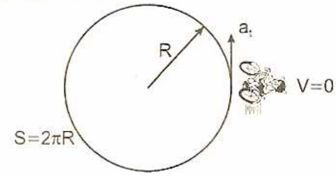
$t_{BA} = \frac{\pi R}{6\pi} = \frac{2\pi}{3}s$



Si ahora experimenta M.C.U.V.

$S = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$

$S = \frac{a_t t^2}{2}$



Por condición del problema $t = t_{AB} + t_{BA}$

Reemplazando:

$$S = \frac{a_t}{2}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)^2 = 2\pi(4\pi)$$

$\therefore\ a_t = 4\ m/s^2$

Clave: B

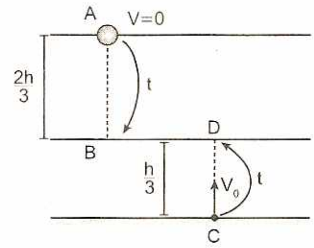
PROBLEMA 14 (UNI 2012 - I)

Una piedra se deja caer desde cierta altura h. Después de descender la distancia 2h/3, desde el punto inicial de su movimiento, choca con otra piedra que había partido en el mismo instante lanzada desde el piso verticalmente hacia arriba. Calcule la altura máxima a la que habría llegado la segunda piedra si no hubiese chocado con la primera.

A) 3h/8 B) 5h/4 C) h/2
D) 3h/4 E) h/3

Resolución:

Del gráfico:



Tramo AB: $h = v_0t \pm g\frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2h}{3} = g\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4h}{3g}}$$

Tramo CD: $h = v_0t \pm g\frac{t^2}{2}$

$$\frac{h}{3} = v_0\sqrt{\frac{4h}{3g}} - \frac{g}{2}\left(\frac{4h}{3g}\right) \Rightarrow v_0^2 = \frac{3gh}{4}$$

Se sabe que:

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\frac{3gh}{4}}{2g} \qquad \therefore\ H_{max} = \frac{3}{8}h$$

Clave: A

PROBLEMA 15 (UNI 2012 - II)

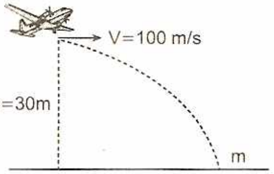
Un avión está volando horizontalmente a una altura constante de 30 m con una velocidad de 100 $\hat{\imath}$ m/s. Si desde el avión se deja caer un paquete, determine el tiempo, en s, que demora el paquete en alcanzar el piso.

($g = 9{,}81\ m/s^2$)

A) 1,80 B) 2,00 C) 2,47
D) 3,00 E) 3,20

Resolución:

Del gráfico:



Analizamos el movimiento vertical

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad 30 = \frac{1}{2}(9{,}81)t^2 \quad \therefore\ t = 2{,}47\ s$$

Clave: C

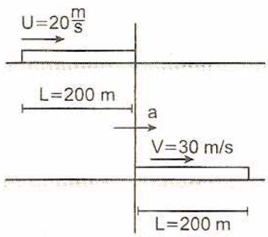
PROBLEMA 16 (UNI 2012 - II)

Los extremos de un tren bala que viaja horizontalmente a aceleración constante pasan por un mismo punto con velocidades "U" y "V", respectivamente. Determine qué parte de la longitud "L" del tren, en m, pasaría por ese punto en la mitad del tiempo que ha necesitado para pasar el tren entero, si: U=20 m/s, V=30 m/s, L = 200 m

A) 20 B) 80 C) 90
D) 100 E) 120

Resolución:

Del gráfico:



Cálculo del tiempo transcurrido

Usaremos: $d = \left(\frac{v_o + v_f}{2}\right)t$

$$200 = \left(\frac{20+30}{2}\right)t \Rightarrow t = 8\ s$$

Cálculo de la aceleración (en módulo)

Usaremos: $v_f^2 = v_o^2 \pm 2ad$

$$30^2 = 20^2 + 2a(200) \Rightarrow a = \frac{5}{4}\ m/s^2$$

Luego en la mitad del tiempo anterior

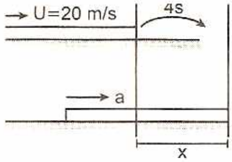
$$t_1 = \frac{t}{2} \Rightarrow t_1 = 4\ s$$

Usaremos:

$$d = v_ot \pm \frac{at^2}{2}$$

$$x = 20(4) + \frac{5}{4}\left(\frac{4^2}{2}\right)$$

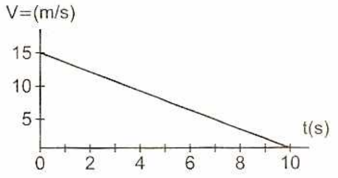
$\therefore\ x = 90\ m$



Clave: C

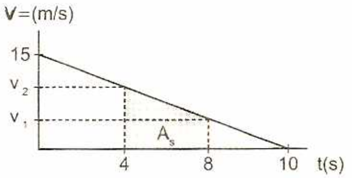
PROBLEMA 17 (UNI 2013 - I)

La figura muestra el gráfico velocidad versus tiempo de un automóvil. ¿Qué distancia, en m, recorre el automóvil entre los instantes t = 4 s y t = 8 s?



A) 6 B) 9 C) 15
D) 20 E) 24

Resolución:



Sabemos que: $d = A_{sombreada} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)4$

$\Rightarrow d = 2(v_1 + v_2)$ ...(1)

- Cálculo de v_1: $\frac{15}{10} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 3$ m/s
- Cálculo de v_2: $\frac{15}{10} = \frac{v_2}{6} \Rightarrow v_2 = 9$ m/s

En (1): $\therefore d = 24$ m

Clave: E

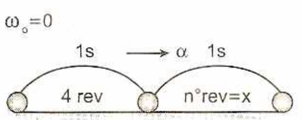
PROBLEMA 18 (UNI 2013 - I)

Una partícula realiza un movimiento circular uniformemente variado partiendo del reposo. Si la partícula efectuó 4 vueltas en el 1.er segundo, halle el número de vueltas que realizó en el siguiente segundo.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución:

Usando los números de Galileo



Se observa que: $\alpha = 8$ rev/s^2 $\Rightarrow x = 4 + \alpha$

$\therefore x = 12$ rev

Clave: C

PROBLEMA 19 (UNI 2013 - II)

Un astronauta, en la Luna, arrojo un objeto verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 4 m/s. El objeto tardó 2,5 s para alcanzar el punto más alto de su trayectoria. Con respecto a este evento se hacen las siguientes proposiciones:

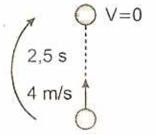
I. La magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es 1,6 m/s^2.
II. La altura que alcanzo el objeto fue de 5 m.
III. La rapidez del objeto después de 2 s de su lanzamiento fue de 0,4 m/s.

Señala la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) FVF B) VVF C) VFV
D) FFV E) VVV

Resolución:

Gráficamente:



I. $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$0 = 4\,\hat{j} + \vec{a}(2,5) \Rightarrow \vec{a} = -1,6\,\hat{j}$ m/s^2

$a = 1,6$ m/s^2 ...(V)

II. $\vec{Y}_f = \frac{\vec{a}}{2}t^2$

$H = \frac{1,6}{2}(2,5)^2 = 5$ m ...(V)

III. $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

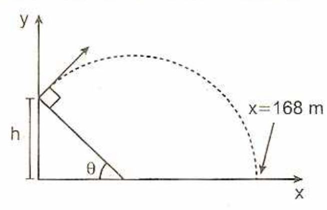
$\vec{V}_f = 4\,\hat{j} - 1,6(2)\,\hat{j} = 0,8\,\hat{j}$ m/s ...(F)

$\therefore$ VVF

Clave: B

PROBLEMA 20 (UNI 2013 - II)

Un proyectil se lanza desde la parte superior de un plano inclinado con una rapidez de v = 40 m/s y recorre una distancia horizontal de 168 m. Si el tiempo de vuelo del proyectil fue de 7 s, calcule aproximadamente la altura h, en m, desde la cual fue lanzado (g = 9,81 m/s^2).



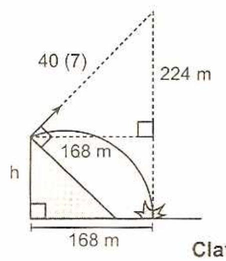
A) 16,3 B) 25,3 C) 32,3
D) 56,2 E) 76,3

Resolución:

Considerando g = 0

$224 + h = \frac{1}{2}(9,81)(7)^2$

$\therefore h = 16,3$ m



Clave: A

PROBLEMA 21 (UNI 2014 - I)

Una partícula partiendo del reposo se desplaza con movimiento rectilíneo de aceleración constante terminando su recorrido con rapidez v_1. Para que la partícula se desplace 3 veces la distancia del recorrido anterior con rapidez constante v_2, empleando el mismo tiempo, es necesario que la relación v_1/v_2 sea:

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3
D) 3/2 E) 3/4

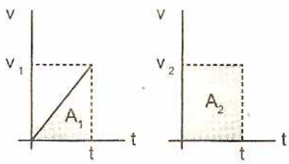
Resolución:

Graficando:

$A_2 = 3A_1$

$v_2 t = 3\frac{1}{2}v_1 t$

$\therefore\ v_1/v_2 = 2/3$



Clave: B

PROBLEMA 22 (UNI 2014 - I)

Un proyectil se lanza desde el origen de coordenadas con una rapidez de 50 m/s formando un ángulo de 53° con la horizontal. Si después de un cierto tiempo alcanza una altura h = 60,38 m, calcule aproximadamente el otro instante de tiempo en que volverá a tener la misma altura ($g = 9{,}81\ ms^{-2}$).

A) 2,99 s B) 4,15 s C) 6,15 s
D) 8,15 s E) 9,45 s

Resolución:

Graficando:

$\vec{Y} = \vec{Y}_o + \vec{v}_o T + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

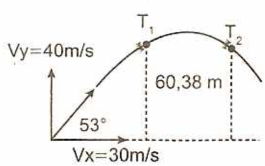
$60{,}38 = 40t - 4{,}905t^2$

$4{,}905t^2 - 40t + 60{,}38 = 0$

Resolviendo: $t_1 = 2$ s

$t_2 = 6{,}15$ s

Nos piden: t_2 $\quad\therefore\ t_2 = 6{,}15$ s



Clave: C

PROBLEMA 23 (UNI 2014 - I)

Un alumno estudia los cuerpos en caída libre luego de lanzarlos verticalmente hacia arriba y llega a las siguientes conclusiones:

I. El tiempo que el cuerpo demora en subir hasta el punto más alto es mayor que el que demora en bajar, debido a que durante la bajada la fuerza de gravedad acelera el cuerpo.

II. En el instante en el que el objeto llega al punto más alto de su trayectoria su energía mecánica total es máxima.

III. En el punto más alto de su trayectoria, el objeto se encuentra en equilibrio.

Indique la secuencia correcta después de determinar si las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) FVF

Resolución

I. (F), ya que los tiempo son iguales.

II. (F), ya que la energía mecánica permanece constante (no se puede hablar de máximo ni mínimo).

III. (F), ya que tiene aceleración (a = g) y un cuerpo con aceleración no está en equilibrio.

$\therefore$ FFF

Clave: D

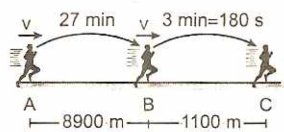
PROBLEMA 24 (UNI 2014 - II)

Un corredor espera completar la carrera de 10 000 m en 30 min. Después de 27 min, corriendo a velocidad constante, todavía le falta por recorrer 1100 m. Calcule, aproximadamente, el tiempo, en s, que debe acelerar a $0{,}2\ m/s^2$, a partir de los 27 min con la finalidad de obtener el tiempo deseado.

A) 2,8 B) 3,1 C) 4,2 D) 4,8 E) 5,2

Resolución

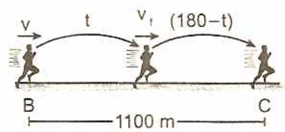
Según la información del problema:



Calculando el valor de v:

$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{8900}{27(60)} = 5{,}493$ m/s

Analizando el tramo BC: $\Rightarrow$ $a = 0{,}2\ m/s^2$



$$1100 = \left(\frac{v + v_f}{2}\right)t + v_f(180 - t) \wedge v_f = v + 0{,}2t$$

$$1100 = \frac{(5{,}49 + 5{,}49 + 0{,}2t)t}{2} + (5{,}49 + 0{,}2t)(180 - t)$$

Resolviendo: t = 3,1 s

Clave: B

PROBLEMA 25 (UNI 2014 - II)

Se lanza un proyectil desde el origen de coordenadas. Si en el punto más alto de su trayectoria, la relación entre sus coordenadas de posiciones es y/x = 0,375, determine el ángulo de tiro ($g = 9{,}81\ m/s^2$).

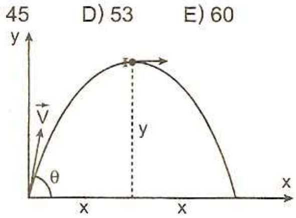
A) 30 B) 37 C) 45 D) 53 E) 60

Resolución:

Graficando:

$\tan\theta = \frac{4y}{2x} = \frac{4}{2}(0{,}375)$

$\therefore\ \theta = 37°$



Clave: B

Estática | 04 capítulo

Pierre Varignon (Caen, 1654-París, 23 de diciembre de 1722) fue uno de los primeros matemáticos franceses que aceptaron los principios del análisis infinitesimal. En el Récueil de l'Académie des Sciences publicó numerosas memorias originales sobre el equilibrio de los líquidos, la resolución de las ecuaciones, la dureza de los cuerpos, las leyes del movimiento y de la aceleración, las fuerzas centrales y la gravedad de los planetas.

Pero Varignon debe fundamentalmente su fama a la obra de dos volúmenes: *Nueva mecánica o estática*, publicada póstumamente por Fontenelle (1725). El matemático francés se había ocupado desde muy joven de cuestiones relativas a la mecánica y en 1687 había dado a la prensa el ya citado *Projet d'une nouvelle mécanique*, obra notable porque el autor hace frecuente uso del moderno principio de composición de las fuerzas, aunque dio de él una demostración inexacta. Varignon enseña, en primer lugar, a componer las fuerzas mediante el conocido polígono (reproducido hoy en todos los tratados elementales de mecánica) y enuncia el teorema de los momentos o teorema de Varignon: «El momento de la resultante de dos fuerzas respecto a un punto cualquiera de su plano es igual a la suma de los momentos análogos de las fuerzas componentes».

INTERACCIÓN GRAVITACIONAL

La primera interacción estudiada por el hombre fue la interacción gravitacional. Sabemos que toda masa ejerce una fuerza de atracción sobre cualquier otro cuerpo masivo, de modo que la fuerza entre ellos está dada por:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}} \qquad ...(4.1)$$

Donde m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos 1 y 2, separados por una distancia R, y G es la constante de gravitación universal. La ley de fuerza dada por la ecuación es la fuerza fundamental entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia R.

INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Posteriormente, se descubrieron las cargas eléctricas y las interacciones entre ellas. Fue Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806), quien demostró que dos cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia R se atraen o se repelen con una fuerza dada por:

$$\boxed{F = \pm k\frac{|q_1||q_2|}{R^2}} \qquad ...(4.2)$$

Esta ley de fuerzas tiene la misma forma funcional que la ley de gravitación, pero difiere de ésta en la constante "k" y en el hecho de que existen tanto cargas eléctricas positivas como negativas, lo que determina la presencia de ambos signos en la ecuación.

INTERACCIÓN FUERTE

Cuando se hizo evidente que los núcleos de todos los átomos están compuestos por protones y neutrones (nucleones) fuertemente ligados entre sí, se abrió un nuevo capítulo en la historia de la Física. Este consistió en el estudio de las fuerzas que mantienen unidos a los nucleones en los núcleos atómicos. Tales fuerzas, a diferencia de las anteriores, tienen un alcance finito del orden de 10^{-13} cm. La ley de fuerza entre los nucleones fue propuesta por Hideki Yukawa (Premio Nobel de Física 1949) a comienzos de la década del 30. Haciendo uso de los resultados experimentales que mostraban que las fuerzas nucleares tienen un alcance de alrededor de 10^{-13} cm, Yukawa predijo la existencia de partículas masivas que mediarían las interacciones nucleares de la misma manera como lo hacen los fotones en las interacciones electromagnéticas y presumiblemente los gravitones en las interacciones gravitacionales. De acuerdo a lo anterior, la masa de estas partículas debía ser del orden de 130 mil electronvoltios. Inicialmente se pensó que podrían ser los mesones μ (partícula idéntica al electrón, pero 270 veces más masiva); pero pronto se comprendió que se trataba de otro tipo de partículas llamadas mesones π que fueron, en efecto, observadas. Es interesante hacer notar que en la época se supuso que las fuerzas nucleares eran de origen electromagnético, es decir, que en los núcleos atómicos habría una distribución de carga tal que generaría la fuerza propuesta por Yukawa. Sin embargo, pronto se descubrió que las fuerzas entre los nucleones son en realidad independientes de la carga eléctrica.

Se trataba, por lo tanto, de un nuevo tipo de fuerzas cuyas fuentes no son las cargas eléctricas, sino un nuevo tipo de cargas que recibieron el nombre de isospin o spin isotópico. Estas interacciones son las llamadas interacciones fuertes o fuerzas nucleares.

INTERACCIÓN DÉBIL

En la misma época se comprobó que el neutrón no es una partícula estable, sino que tiene una vida media de aproximadamente 1000 segundos y decae en un protón y un electrón. Sin embargo, se observó que el decaimiento violaba el principio de conservación de la energía a menos que en el decaimiento participara un nuevo tipo de partículas con masa y carga eléctrica cero. Estas partículas fueron propuestas y llamadas neutrinos por Wolfgang Pauli (1900 - 1958).

Si la fuerza responsable del decaimiento del neutrón fuera fuerte, su vida media debería ser mucho más corta. Así, a pesar de que en el decaimiento del neutrón interviene el protón, no se trata de una fuerza fuerte, sino de una fuerza mucho más débil.

Esta era la situación hasta el comienzo de la década del cincuenta, en la que nuevas partículas comenzaron a ser descubiertas. Todas ellas experimentaban interacciones fuertes. El número de partículas descubiertas proliferó rápidamente sin que éstas tuvieran aparentemente ninguna razón de existencia y menos aún parecían obedecer algún orden. A pesar de que las partículas más pesadas decaen en las más livianas, teorías que trataban de explicar a las primeras como compuestas por las segundas no prosperaron.

CONCEPTO DE FUERZA

Se llama fuerza a la magnitud vectorial que sirve de medida de la acción mecánica que sobre el cuerpo (A) considerado, ejercen otros cuerpos.

La interacción mecánica puede efectuarse tanto entre cuerpos en contacto directo (por ejemplo, en el rozamiento o cuando los cuerpos presionan entre sí), como entre cuerpos separados unos de otros (por ejemplo entre la Tierra y la Luna).

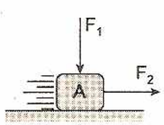


Fig. 4.1.a

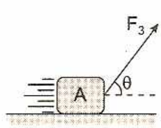
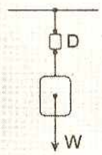


Fig. 4.1.b

Una fuerza F está totalmente definida si se dan su módulo, su dirección en el espacio, sentido y su punto de aplicación, figura (4.1.b). La recta a lo largo de la cual está dirigida la fuerza, se llama línea de acción de la fuerza.

¡Importante!
El dinamómetro D instalado en el cable indica directamente la tensión en el cable.
W: peso del bloque



FUERZAS INTERNAS

Tensión

Es aquella fuerza generada internamente en un cuerpo (cable, soga, barra) cuando tratamos de estirarlo.

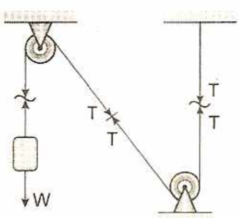


Fig. 4.2

Si el peso de la cuerda es despreciable, la tensión T tiene el mismo valor en todos los puntos. Para graficar la tensión T se realiza previamente un corte imaginario. El vector tensión apunta a la línea de corte.

Compresión

Es aquella fuerza interna que se opone a la deformación por aplastamiento de los cuerpos rígidos (barras). Para graficar la compresión C se realiza previamente un corte imaginario. Se caracteriza por alejarse de la línea de corte. Si el peso es despreciable del cuerpo rígido (barra), la compresión es colineal con el cuerpo y tiene el mismo valor en todos los puntos.

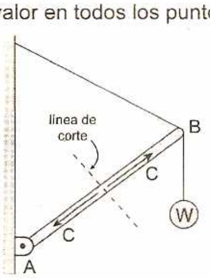
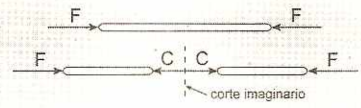


Fig 4.3

¡Importante!
La compresión C se opone a la fuerza deformadora F.



Fuerza elástica

Es aquella fuerza interna manifiesta en los cuerpos elásticos o deformables, tales como los resortes.
La fuerza elástica se opone a la deformación longitudinal por compresión o alargamiento, haciendo que el resorte recupere su dimensión original.

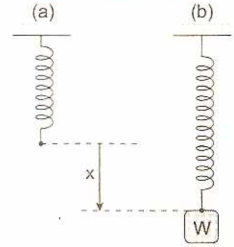
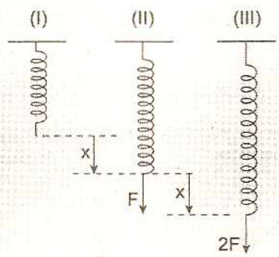


Fig. 4.4

¡Importante!



A mayor fuerza, mayor deformación del resorte.

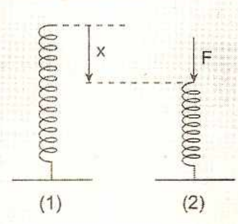
LEY DE HOOKE

La fuerza generada en el resorte es directamente proporcional a la deformación longitudinal.

$\boxed{F = kx}$ ...(4.3)

k: constante de elasticidad del resorte se mide en (N/m)
x: deformación longitudinal, se mide en (m)
F: fuerza deformadora, se mide en (N)

Representación gráfica de la ley de Hooke:



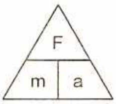
LEYES DE NEWTON

1.ª Principio de inercia

En ausencia de la acción de fuerzas, un cuerpo en reposo continuará en reposo, y uno en movimiento se moverá en línea recta y con velocidad constante.

2.ª Ley de aceleración

La aceleración que un cuerpo adquiere es directamente proporcional a la resultante de las fuerzas que actúan en él, y tiene la misma dirección y el mismo sentido que dicha resultante.



$$\text{aceleración} = \frac{\text{fuerza resultante}}{\text{masa}}$$

1. $\boxed{F = ma}$ ...(4.4)
2. $\boxed{a = \frac{F}{m}}$ ...(4.5)
3. $\boxed{m = \frac{F}{a}}$ ...(4.6)

3.ª Ley de acción y reacción

Cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, éste reacciona sobre A con una fuerza de la misma magnitud, misma dirección y de sentido contrario.

PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Un cuerpo se mantiene en equilibrio, cuando la fuerza resultante aplicada al cuerpo es igual a cero.

Un cuerpo está en equilibrio cuando carece de todo tipo de aceleración. $\vec{F}_R = 0$ y $\vec{a} = 0$

> **Equilibrio**
> Decimos que un cuerpo está en equilibrio cuando permanece en reposo o se mueve con velocidad constante (MRU).

La figura 4.5 muestra un bloque sobre una mesa, donde R_2 es la acción del bloque sobre la mesa y R_1 es la fuerza de reacción de la mesa sobre el bloque. Las fuerzas de acción y reacción actúan en cuerpos diferentes.

$\boxed{R_1 = R_2}$ ...(4.7)

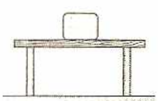


Fig. 4.5.a

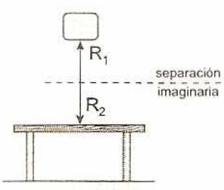


Fig. 4.5.b

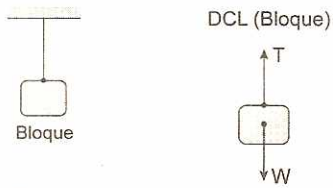
DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (DCL)

Consiste en aislar imaginariamente uno o más cuerpos del sistema en estudio, donde se grafican todas las fuerzas externas que actúan sobre la parte aislada. Las fuerzas internas se cancelan entre sí, siempre.

Ejemplos:

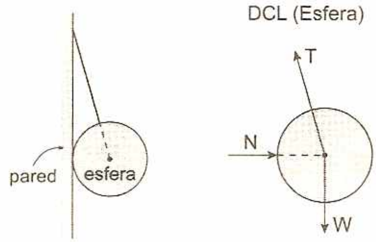
Realizar el diagrama del cuerpo libre, de cada cuerpo (esfera, barra, nudo, bloque) en los sistemas mostrados en equilibrio.

1.



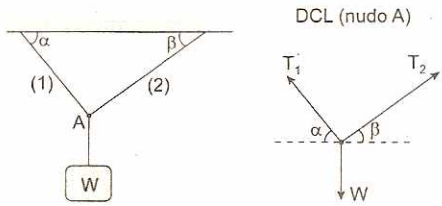
T: tensión
W: peso del bloque

2.



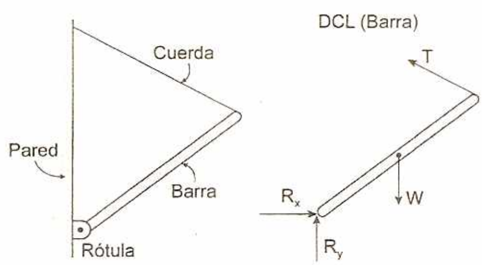
W: peso de la esfera
T: tensión en la cuerda
N: reacción de la pared sobre la esfera

3.



T_1: tensión en la cuerda (1)
T_2: tensión en la cuerda (2)
W: peso del bloque (vector vertical hacia abajo)

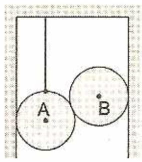
4.



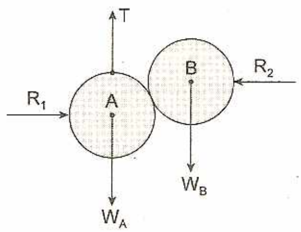
R_x: componente horizontal en la rótula, sobre la barra.

R_y: componente vertical en la rótula, sobre la barra.

Sistema físico. Es aquel conjunto de cuerpos considerados en estudio, elegidos arbitrariamente.



Consideremos nuestro sistema físico las esferas A y B, y realicemos el diagrama de cuerpo libre.



Para nuestro sistema físico, las fuerzas de acción y reacción entre A y B son fuerzas internas, por consiguiente no se grafican. De otro modo, las fuerzas internas siempre se cancelan.

TEOREMA DE LAMY O DE LAS TRES FUERZAS

"Si tres fuerzas coplanarias actúan sobre un cuerpo en equilibrio, éstas necesariamente son concurrentes. El módulo de cada fuerza es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto".

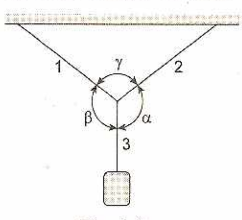


Fig. 4.6.a

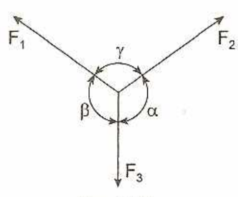
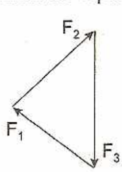


Fig. 4.6.b

$$\boxed{\frac{F_1}{\text{sen}\alpha}=\frac{F_2}{\text{sen}\beta}=\frac{F_3}{\text{sen}\gamma}} \qquad ...(4.8)$$

Con los vectores $\vec{F}_1;\vec{F}_2;\vec{F}_3$, se forma necesariamente un triángulo, de la condición de equilibrio:

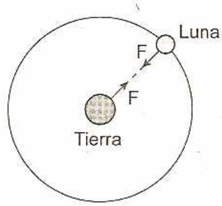


$$\boxed{\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0} \qquad ...(4.9)$$

Polígono (triángulo) cerrado, de la condición de equilibrio.

Fuerza interna. Es aquella fuerza debido a la interacción de cuerpos considerados dentro del sistema físico.

Si consideramos a la Tierra y la Luna dentro de nuestro sistema físico, entonces la fuerza de atracción entre masas es una fuerza interna.



CENTRO DE MASA (CM)

En un tratamiento de sistemas de masas puntuales el centro de masa es el punto donde, a efectos inerciales, se supone concentrada toda la masa del sistema. El concepto se utiliza para análisis físicos en los que no es indispensable considerar la distribución de masa. Por ejemplo, en las órbitas de los planetas.

En la Física, el centroide, el centro de gravedad y el centro de masa pueden, bajo ciertas circunstancias, coincidir entre sí. En estos casos se suele utilizar los términos de manera intercambiable, aunque designan conceptos diferentes. El centroide es un concepto puramente geométrico que depende de la forma del sistema; el centro de masa depende de la distribución de materia, mientras que el centro de gravedad depende también del campo gravitatorio. Así tendremos que:

- El centro de masa coincide con el centroide cuando la densidad es uniforme o cuando la distribución de materia en el sistema de tiene ciertas propiedades, tales como simetría.
- El centro de masa coincide con el centro de gravedad, cuando el sistema se encuentra en un campo gravitatorio uniforme (el módulo y la dirección de la fuerza de gravedad son constantes).

Cálculo del CM de un sistema

Distribución discreta de materia. Para un sistema de masas discreto, formado por un conjunto de masas puntuales, el centro de masa se puede calcular como:

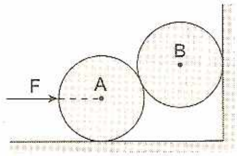
$$\boxed{r_{CM}=\frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}=\frac{1}{M}\sum m_i r_i} \qquad ...(4.10)$$

m_i: masa de la partícula i-ésima.

r_i : vector de posición de la masa i-ésima respecto al sistema de referencia asumido.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el sistema físico mostrado cada esfera pesa 30 N. Si la fuerza F = 40 N, determinar la fuerza de interacción entre las esferas. Existe equilibrio.

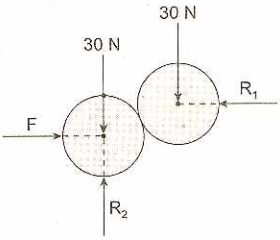


Resolución:

Realizamos el DCL del sistema (A + B):

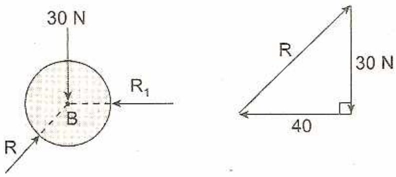
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_1 = 40$ N

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_2 = 60$ N



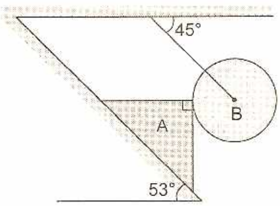
Luego realizamos el DCL de la esfera B:

Del triángulo de fuerzas deducimos que: R = 50 N



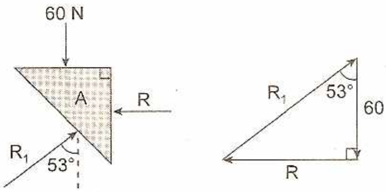
Del triángulo de fuerzas deducimos que: R = 50 N

2. La cuña A pesa 60 N y todas las superficies son lisas. Hallar el peso de la esfera B para el equilibrio.



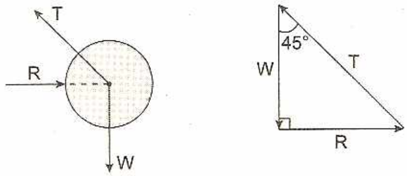
Resolución:

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la cuña:



$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow R = 80$ N

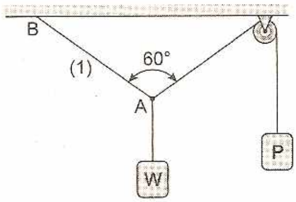
Luego realizamos el DCL de la esfera:



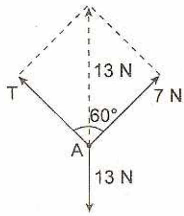
$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow W = R \quad \therefore W = 80$ N

3. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio, hallar la tensión en la cuerda (1).

Donde: W = 13 N y P = 7 N.



Resolución:



Método del paralelogramo:

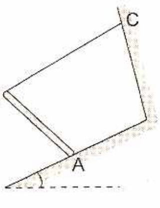
$(13)^2 = T^2 + 7^2 + 2(T)(7)\cos 60°$

$\Rightarrow 169 = T^2 + 49 + 7T$

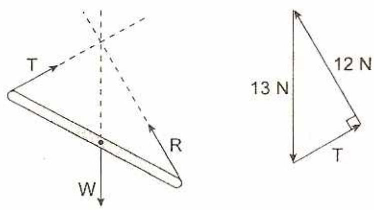
Luego: $T^2 + 7T - 120 = 0$

Resolviendo la ecuación: T = 8 N

4. Si la barra AB mostrada en la figura, de 13 N de peso, se encuentra en equilibrio apoyada en un plano inclinado completamente liso, siendo la fuerza de reacción en el apoyo A de 12 N, hallar la tensión en la cuerda BC paralela al plano inclinado.

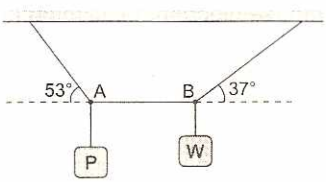


Resolución:

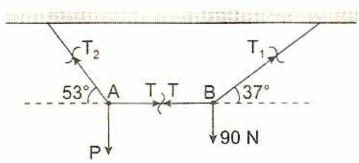


Realizamos el DCL de la barra AB y construyendo el triángulo de fuerzas: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow T = 5\ N$

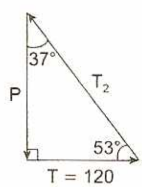
5. La figura muestra un sistema mecánico en equilibrio, si W = 90 N, ¿cuál es el valor del bloque P?



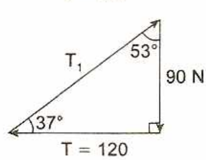
Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de los nudos A y B, y construimos el triángulo de fuerzas:



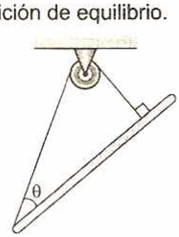
Donde:
$T = 120 = 3Q$
$T = 4K = 120\ N$
$T_1 = 5K = 150\ N$
$T_2 = 5Q = 200\ N$



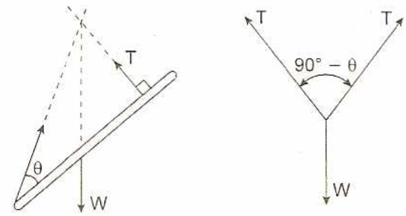
Donde:
$90 = 3K \Rightarrow K = 30$
$\Rightarrow Q = 40$
$P = 4Q = 160$
$\therefore\ P = 160\ N$



6. Una viga de 60 N es mantenida en equilibrio, tal como se indica en la figura. Si la tensión en la cuerda es $20\sqrt{3}$, determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

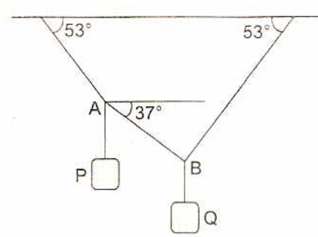


Resolución:

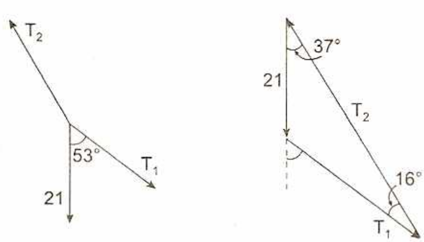


Realizamos el DCL de la viga y haciendo concurrir en un punto las fuerzas:
Pero: $\Sigma\vec{F} = 0$, entonces, se cumple que:
$W^2 = T^2 + T^2 + 2T^2\cos(90° - \theta)$
Reemplazando los datos se obtiene: $\theta = 30°$

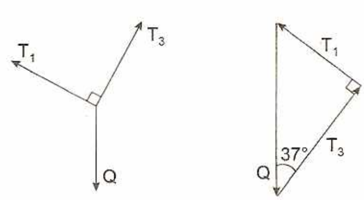
7. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio y el bloque P pesa 21 N, determinar el peso del bloque Q.



Resolución:

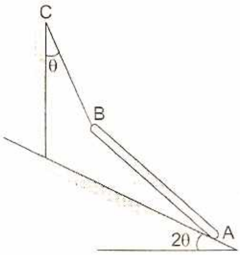


Haciendo el DCL del nudo A y construyendo el triángulo de fuerzas:
Aplicando el teorema de Lamy: $T_1 = 45\ N$
Realizamos el DCL del nudo B y construyendo el triángulo de fuerzas:

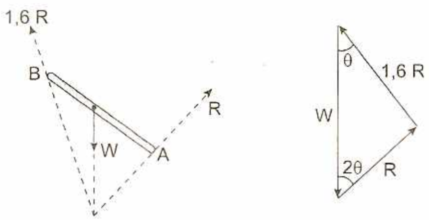


Del triángulo rectángulo:
$Q = T_1\csc 37° \quad \therefore\ Q = 75\ N$

8. La barra AB homogénea está en equilibrio, si la tensión en la cuerda BC es 1,6 veces la reacción en A, determinar la medida del ángulo θ. No hay fricción.



Resolución:
Haciendo el DCL de la barra AB y construyendo el triángulo de fuerzas:



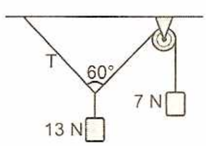
Aplicando el teorema de Lamy:

$$\frac{R}{\text{sen}\theta} = \frac{1,6R}{\text{sen}2\theta}$$

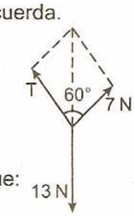
$\therefore\ \theta = 37°$

9. Se muestra un sistema en equilibrio. Sabiendo que la polea no ofrece rozamiento determinar el módulo de la tensión en la cuerda T.

Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre del nudo. La resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el nudo es nula.



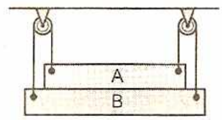
Aplicamos el método del paralelogramo para determinar el módulo de la tensión en la cuerda.



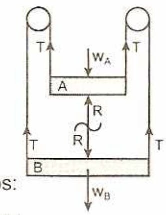
$(13)^2 = T^2 + 7^2 + 2(T)(7)\cos 60°$
$169 = T^2 + 49 + 7T$
$T^2 + 7T - 120 = 0$

Resolviendo la ecuación tenemos que:
$T = 8\ N$

10. Se muestra dos bloques A y B en equilibrio. Si la masa de A excede a la masa de B en 3,0 kg, determinar el módulo de la fuerza de reacción entre los bloques A y B. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de cada bloque. La resultante de las fuerzas que actúan sobre cada bloque es nula.



Para el bloque A:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T + R = W_A$ ...(1)

Para el bloque B:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T = W_B + R$ ...(2)

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$4T = W_A + W_B \Rightarrow 2T = \dfrac{W_A + W_B}{2}$ ...(3)

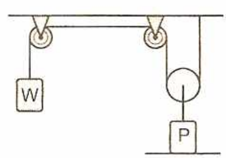
Reemplazando (3) en (1):

$$\frac{W_A + W_B}{2} = W_B + R \Rightarrow R = \frac{W_A - W_B}{2}$$

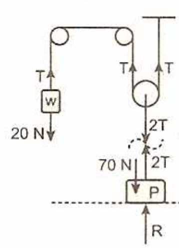
Reemplazando el dato:

$$R = \frac{W_A - W_B}{2} = \frac{30}{2} = 15\ N$$

11. La figura muestra dos cuerpos W = 2 kg y P = 7 kg, en reposo. Si la polea tiene masa despreciable, determinar el módulo de la fuerza de reacción del piso sobre el bloque P. No hay rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de cada cuerpo. La resultante de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo es nula.

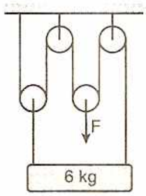


Analizando el bloque W:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = 20\ N$ ...(1)

Analizando el bloque P:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R + 2T = 70$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$R + 40 = 70 \Rightarrow R = 30\ N$

12. El bloque de 6 kg se encuentra en reposo. Si las poleas móviles tienen masas despreciables y no ofrecen rozamiento, determine el módulo de la fuerza F. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de cada cuerpo. La resultante de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo es nula.

Analizando la polea móvil:

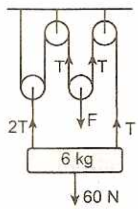
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = 2T$ ...(1)

Analizando el bloque W:

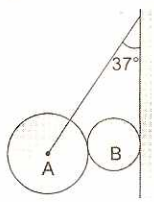
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T + T = 60$ ...(2)

El módulo de la tensión es:

$T = 20\ N \Rightarrow F = 2T = 40\ N$

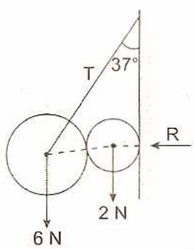


13. La figura muestra dos esferas A y B de pesos 6 N y 2 N respectivamente, en equilibrio. Determinar la reacción de la pared lisa sobre la esfera B y la tensión en la cuerda.

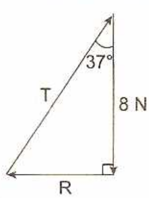


Resolución:

1. DCL (A + B):

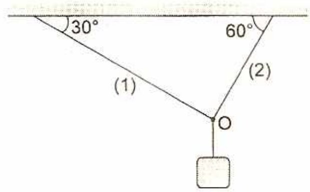


2. Formando el polígono cerrado:

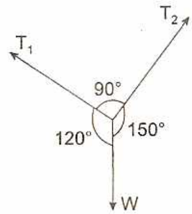


Resolviendo del triángulo de fuerzas:
$R = 6\ N$
$T = 10\ N$

14. En el sistema mecánico mostrado, la tensión en la cuerda (1) es de 40 N, determinar el peso del bloque.



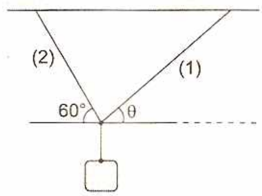
Resolución:
Diagrama del cuerpo libre del nudo O:



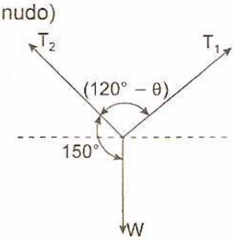
Teorema de Lamy: $\dfrac{W}{\text{sen}90°} = \dfrac{T_1}{\text{sen}150°}$

$\dfrac{W}{1} = \dfrac{40\,N}{\frac{1}{2}}$ $\quad \therefore W = 80\ N$

15. Un bloque se encuentra sostenido como muestra la figura. Calcular la medida del ángulo θ, para el cual la tensión en la cuerda 1 resulte ser mínima.



Resolución:
DCL (del nudo)

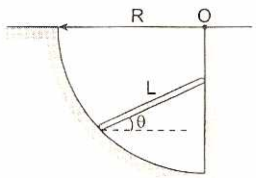


Teorema de Lamy:

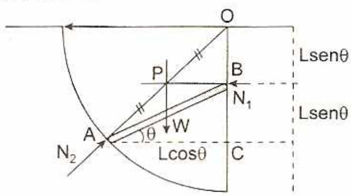
$\dfrac{T_1}{\text{sen}150°} = \dfrac{W}{\text{sen}(120° - \theta)} \Rightarrow T_1 = \dfrac{W}{2\text{sen}(120° - \theta)}$

T_1, será mínima, cuando la función seno tome su máximo valor, es decir igual a la unidad.
$\text{sen}(120° - \theta) = 1$
Entonces: $120° - \theta = 90°$ $\quad \therefore \theta = 30°$

16. Una barra homogénea de longitud L = 2 m se apoya en una pared vertical y una superficie cilíndrica de radio $R = \sqrt{7}$ m. Calcular el ángulo θ que define la posición de equilibrio. No hay fricción.



Resolución:
Del teorema de Lamy, las tres fuerzas concurren en el punto P.



En el triangulo ACO, P es punto medio, por consiguiente:

$OB = BC = L\text{sen}\theta$ ...(1)

Teorema de Pitágoras en el triangulo ACO:

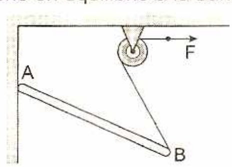
$R^2 = (L\cos\theta)^2 + (2L\text{sen}\theta)^2$

$R^2 = L^2\cos^2\theta + L^2\text{sen}^2\theta + 3L^2\text{sen}^2\theta$

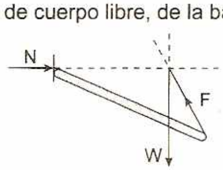
$R^2 = L^2 + 3L^2\text{sen}^2\theta \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \dfrac{R^2 - L^2}{3L^2}$

Reemplazando datos: $\text{sen}\theta = 1/2$ $\quad\therefore\ \theta = 30°$

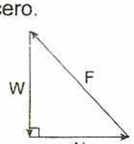
17. Si la reacción en A de la pared lisa sobre la barra es de 5 N y la barra uniforme y homogénea AB pesa 12 N, hallar la magnitud de la fuerza horizontal F que mantiene en equilibrio a la barra.



Resolución:
Diagrama de cuerpo libre, de la barra:



Equilibrio de traslación: fuerza resultante igual a cero.



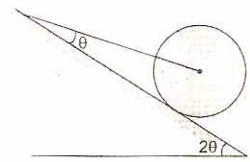
Teorema de Pitágoras:

$F^2 = W^2 + N^2$

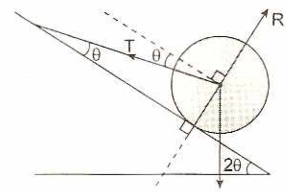
$F^2 = 144 + 25$

$\therefore\ F = 13\text{ N}$

18. Determinar la reacción que ejerce el plano inclinado sobre la esfera de peso 20 N. No hay fricción.



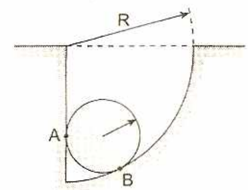
Resolución:
Diagrama de fuerzas sobre la esfera:



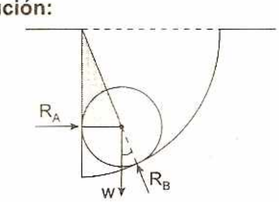
Teorema de Lamy: $\dfrac{R}{\text{sen}(90° + \theta)} = \dfrac{W}{\text{sen}(90° + \theta)}$

$\therefore\ R = W \Rightarrow R = 20\text{ N}$

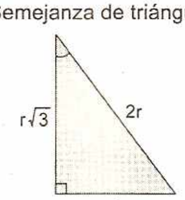
19. La figura muestra una esfera de radio "r" y peso W = 6 N, apoyado en una superficie cilíndrica de radio de curvatura R. Hallar la reacción sobre la esfera en el punto A, sabiendo que R = 3r.

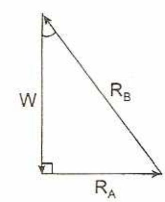


Resolución:



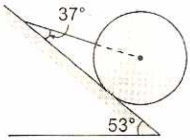
DCL (esfera):
Semejanza de triángulos:



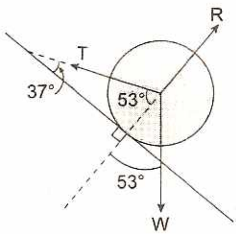


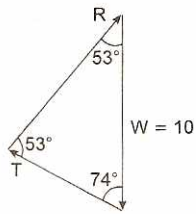
$\dfrac{R_A}{r} = \dfrac{W}{r\sqrt{3}}$ $\quad\therefore\ R_A = 2\sqrt{3}\text{ N}$

20. Si el peso de la esfera mostrada en la figura es de 10 N, hallar la tensión en la cuerda y la fuerza de reacción que ejerce el plano inclinado sobre la esfera.



Resolución:
Haciendo DCL y construyendo el triángulo de fuerzas:



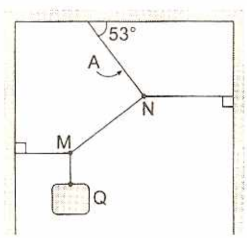


Por ley de senos:

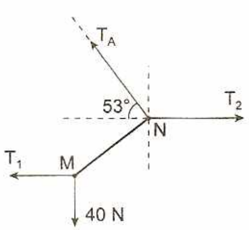
$$\frac{10}{\text{sen}53^\circ} = \frac{T}{\text{sen}53^\circ} = \frac{R}{\text{sen}74^\circ}$$

Despejando: $T = 10$ N y $R = 12$ N

21. Si el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determinar la tensión en la cuerda oblicua A. El bloque Q pesa 40 N.



Resolución:
Haciendo DCL de la cuerda MN:

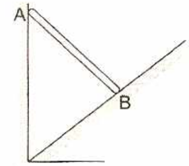


$\Sigma F_y = 0$

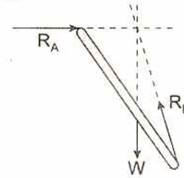
T_A sen$53^\circ = 40$ N

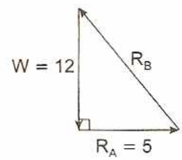
$\therefore\ T_A = 50$ N

22. La barra AB mostrada en la figura, de 12 N de peso, se encuentra en equilibrio apoyado en una pared vertical y en un plano inclinado completamente lisos. Si la fuerza de reacción en el apoyo A es de 5 N, hallar la fuerza de reacción en el apoyo B.



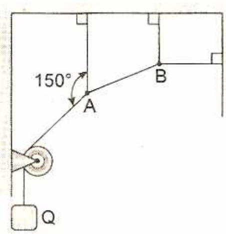
Resolución:
Haciendo DCL de la barra y construyendo el triangulo de fuerza:



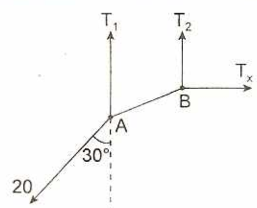


Donde, por teorema de Pitágoras deducimos que: $R_B = 13$ N

23. Si en el sistema físico mostrado en la figura, el peso del bloque Q es de 20 N y en la polea fija no existe rozamiento, determinar la tensión en la cuerda horizontal.



Resolución:
Haciendo DCL de la cuerda AB:

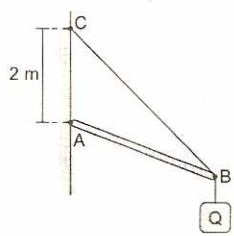


$\Sigma F_x = 0$

$T_x = 20$sen30°

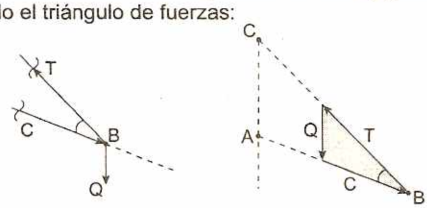
$\therefore\ T_x = 10$ N

24. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, hallar la tensión en la cuerda BC; y la fuerza de compresión en la barra AB, de peso despreciable, sabiendo que: AB = 3 m; BC = 4 m; además Q = 8 N.



Resolución:

Haciendo DCL de una porción de barra y graficando el triángulo de fuerzas:

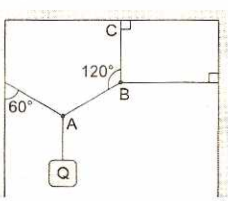


Como el triángulo de fuerzas es semejante al triángulo geométrico ABC, se tiene la siguiente razón de proporcionalidad:

$$\frac{Q}{AC} = \frac{T}{BC} = \frac{C}{AB} \Rightarrow \frac{8}{2} = \frac{T}{4} = \frac{C}{3}$$

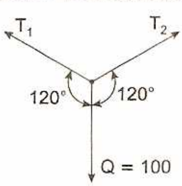
De donde: $T = 16$ N y $C = 12$ N

25. Si en el sistema físico mostrado en la figura, el peso del bloque Q es de 100 N, determinar la tensión en la cuerda vertical BC.



Resolución:

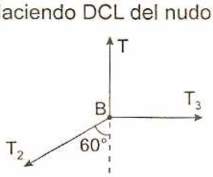
Haciendo DCL del nudo A:



Teorema de Lamy:

$T_1 = T_2 = 100$ N

Haciendo DCL del nudo B:



$\Sigma F_y = 0$

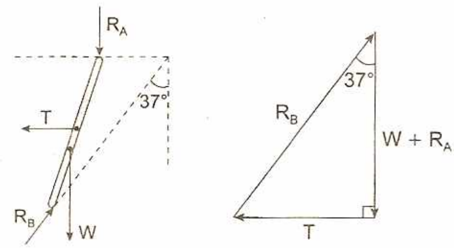
$T = T_2 \cos 60°$

Donde: $T = 50$ N

26. La barra AB mostrada en la figura se encuentra en equilibrio por acción de la cuerda horizontal. Sabiendo que el peso de la barra es de 40 N y que la tensión en la cuerda es numéricamente igual a la reacción en el punto A, determinar la reacción en el punto B. No existe rozamiento.

Resolución:

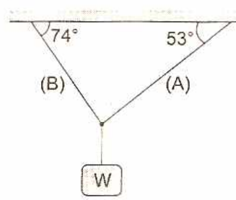
Haciendo DCL de la barra. Sabemos que: $R_A = T$:



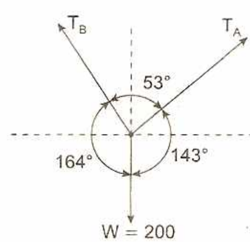
Resolviendo el triángulo:

$R_A = T = 120$ N $\wedge$ $R_B = 200$ N

27. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, hallar las tensiones en las cuerdas A y B. El bloque pesa 200 N.



Resolución:

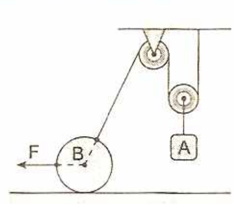


Haciendo DCL del nudo y aplicando el teorema de Lamy, tenemos:

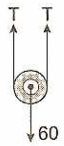
$$\frac{200}{\text{sen}53°} = \frac{T_A}{\text{sen}164°} = \frac{T_B}{\text{sen}143°} \Rightarrow \frac{200}{\frac{4}{5}} = \frac{T_A}{\frac{7}{25}} = \frac{T_B}{\frac{3}{5}}$$

De donde: $T_A = 70$ N $\wedge$ $T_B = 150$ N

28. En el siguiente sistema en equilibrio, hallar la fuerza de reacción del piso sobre la esfera. Se sabe que no existe rozamiento y que el peso del bloque A y de la esfera B son de 60 N y 100 N respectivamente (la polea móvil es de peso despreciable). $F = 24$ N.

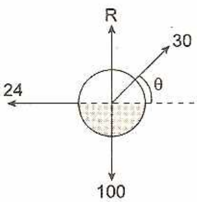


Resolución:
Haciendo DCL de la polea móvil:



$$\sum F_y^+ = \sum F_y^-$$
$$2T = 60$$
$$\therefore\ T = 30\ N$$

DCL (esfera)



Haciendo DCL de la esfera:

$\Sigma F_x^+ = \Sigma F_x^- \Rightarrow 24 = 30\cos\theta$

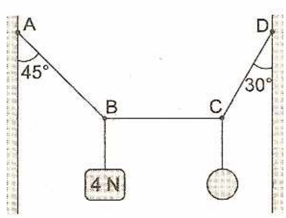
$\cos\theta = 4/5$

$\therefore\ \theta = 37°$

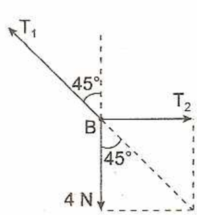
$$\sum F_y^+ = \sum F_y^-$$

$R + 30\text{sen}37° = 100 \qquad \therefore\ R = 82\ N$

29. Si el sistema físico mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, siendo BC una cuerda horizontal, determinar la tensión en la cuerda CD.



Resolución:
Haciendo DCL del nudo B:

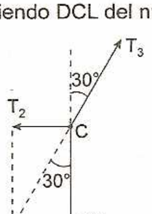


$\vec{F}_R = \vec{0}$

$\Rightarrow T_2 = 4\ N$

$T_1 = 4\sqrt{2}\ N$

Haciendo DCL del nudo C:

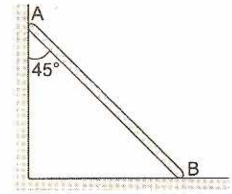


$\Sigma F_x = 0$

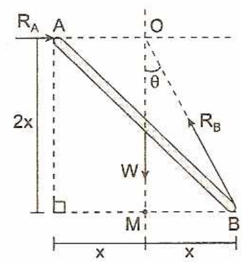
$T_3\text{sen}30° = T_2$

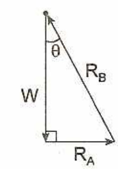
$T_3 = 8\ N$

30. La figura muestra una barra AB uniforme y homogénea de 2 N de peso, apoyada en una pared vertical lisa y en una superficie horizontal rugosa. Determinar las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo A y B.



Resolución:
Haremos el DCL de la barra teniendo presente el criterio de concurrencia de las tres fuerzas actuantes.



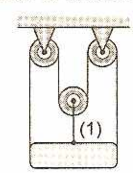


Como el triángulo de fuerzas es semejante al triángulo OBM, tenemos que:

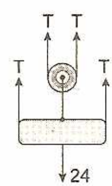
$$\frac{2}{2x} = \frac{R_A}{x} = \frac{R_B}{x\sqrt{5}}$$

Resolviendo: $R_A = 1\ N \quad \wedge \quad R_B = \sqrt{5}\ N$

31. La figura muestra un bloque de 20 N de peso en posición de equilibrio. Si el peso de cada polea es de 4 N, determinar la tensión en la cuerda (1).



Resolución:
Hagamos DCL de todo el sistema: $\sum F_y^+ = \sum F_y^-$



$4T = 24$

$\therefore\ T = 6\ N$

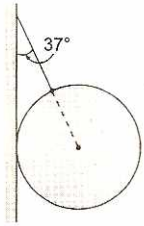
Hagamos DCL en la polea central: $\sum F_y^+ = \sum F_y^-$

$2T = T_1 + 4$

$12 = T_1 + 4$

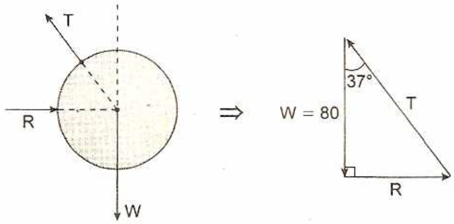
$\therefore\ T_1 = 8\ N$

32. Si la esfera mostrada en la figura pesa 80 N, determinar la tensión en la cuerda y la reacción en la pared vertical. No existe rozamiento.



Resolución:

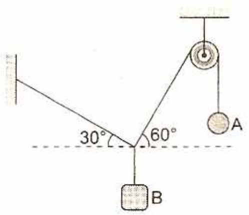
Haciendo DCL de la esfera y construyendo el triángulo de fuerzas.



Resolviendo el triángulo rectángulo notable:

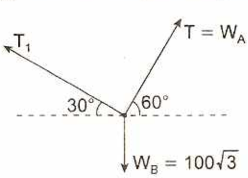
$T = 100$ N; $R = 60$ N

33. Determinar el peso de la esfera A (en N) necesario para que el sistema se encuentre en equilibrio. El bloque B pesa $100\sqrt{3}$ N y las cuerdas y poleas son ideales.

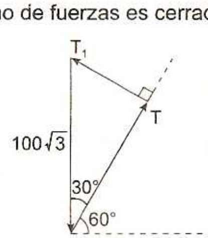


Resolución:

Por el diagrama de cuerpo libre (nudo) se tiene:



Primera condición de equilibrio: $\sum \vec{F} = 0$, el polígono de fuerzas es cerrado.



El valor de la tensión es:

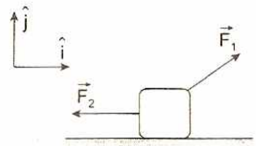
$T_1 = 50\sqrt{3}$ N

$T = W_A = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow W_A = 150$ N

34. El objeto mostrado en la figura tiene una masa de 0,5 kg y se encuentra a punto de deslizar. Hallar el coeficiente estático de rozamiento.

Datos: $F_1 = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ N y $F_2 = -3\hat{i}$ N



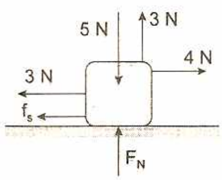
Resolución:

Datos: $\vec{F}_1 = (4\text{ N};\ 3\text{ N})$; $\vec{F}_2 = (-3\text{ N};\ 0)$

$m = 0{,}5$ kg; $W = mg = 5$ N

$g = 10$ m/s^2

I. Diagrama de cuerpo libre:



Recordar:

Cuando un cuerpo esta a punto de deslizar la fuerza de rozamiento estático es máximo.

$f_{s(máx)} = F_N\,\mu_s \;\wedge\; 0 \le f_s \le f_{s(máx)}$

II. Primera condición de equilibrio: $\sum \vec{F} = 0$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_s = 1$ N

f_s: fuerza de rozamiento estático

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 = 3 + F_N \Rightarrow F_N = 2$ N

III. Coeficiente de rozamiento estático: μ_s

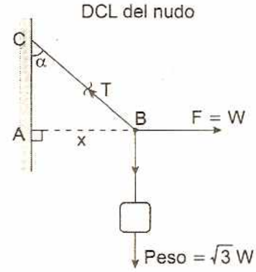
se sabe: $f_s = F_N\,\mu_s$

Despejando: $\mu_s = \dfrac{f_s}{F_N} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \therefore\ \mu_s = 0{,}5$

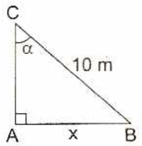
35. Un bloque cuelga de una cuerda que tiene 20 m de longitud, en el medio de esta cuerda se ata otra cuerda que tira horizontalmente con una fuerza igual a $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ veces el peso del bloque. ¿Qué distancia será desplazado el bloque hacia un lado cuando queda en equilibrio?

Resolución:

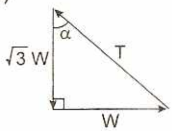
DCL del nudo



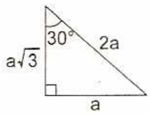
Del triángulo ABC



De la concurrencia de fuerzas en el punto B (Teorema de Lamy)



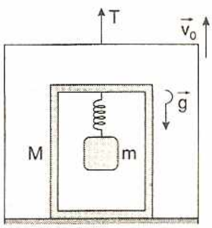
Comparando el triángulo de fuerzas con el triángulo ABC



El cateto opuesto al ángulo α es la mitad de la hipotenusa.

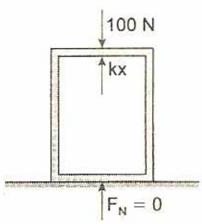
$\therefore$ x = 5 m

36. La figura muestra una caja de M = 10 kg sobre el piso de un ascensor que se desplaza con una velocidad constante de $\vec{v}_0 = +10\hat{j}$ m/s. En la caja se encuentra suspendida una carga de m = 4 kg por medio de un resorte de k = 400 N/m. ¿Qué medida de la deformación en longitud experimenta el resorte a partir de la posición inicial mostrada, para que el conjunto caja esté a punto de saltar del piso del ascensor?



Resolución:

DCL de la caja. Se muestra el instante en que está a punto de elevarse.



a. Ley de Hooke para el resorte. El valor de la fuerza de compresión es C = kx

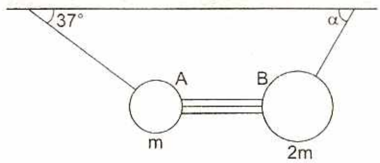
b. Equilibrio instantáneo: $\Sigma F_y = 0$

$C = 100\text{ N} \Rightarrow kx = 100$

$400x = 100 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\text{ m}$

$\therefore x = 25\text{ cm}$

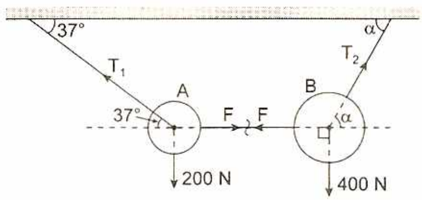
37. Dos esferas de masas m = 20 kg y 2 m están suspendidas por cables, como se muestra en la figura. Si la barra AB es horizontal, hallar tanα.



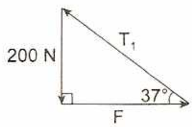
Resolución:

De acuerdo a la figura realizamos el DCL de cada esfera. ($g = 10\text{ m/s}^2$)

W = mg



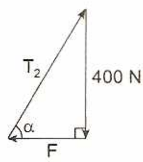
i. Analizamos a la esfera A. Resolvemos el triángulo de fuerzas.



$\tan 53° = \frac{F}{200} = \frac{4}{3}$

$F = \frac{800}{3}\text{ N}$

ii. Analizamos a la esfera B. Resolvemos el triángulo de fuerzas.

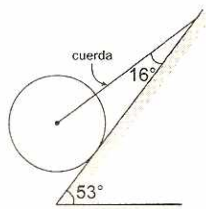


$\tan\alpha = \frac{400}{F} = \frac{400}{\left(\frac{800}{3}\right)}$

$\tan\alpha = 1{,}5$

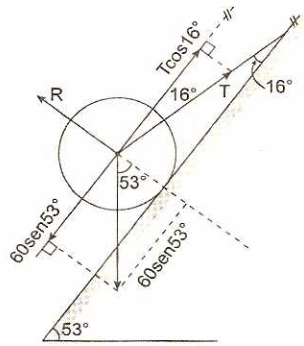
$\therefore \alpha = 56°$

38. Halle el módulo de la tensión de la cuerda, de tal manera que la esfera homogénea y lisa de 60 N de peso se encuentra en equilibrio en la posición mostrada.



Resolución:

I. DCL a la esfera:

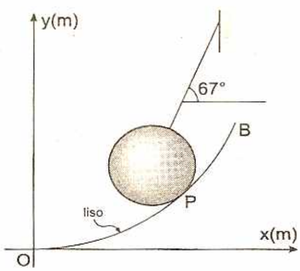


II. La sumatoria de fuerzas paralelas al plano es nula.

$T\cos 16° = 60\text{sen}53°$

$$T\left(\frac{24}{25}\right) = 60\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow T = 50\ \text{N}$$

39. La esfera pequeña de masa "m" se encuentra en contacto con la superficie curva OPB que esta en equilibrio. Si la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Hallar la tensión de la cuerda.

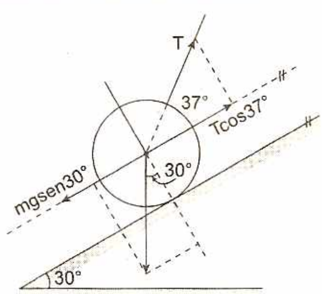


Resolución:

a. Trazamos una línea tangente a la curva en el punto P, cuya pendiente es:

$$m = \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$$

b. Realizamos el DCL a la esfera.



c. Condición de equilibrio. La sumatoria de fuerza paralela al plano inclinado, es nula.

$T\cos 37° = mg\text{sen}30°$

$$T\left(\frac{4}{5}\right) = mg\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow T = \left(\frac{5}{8}\right)mg$$

ROZAMIENTO O FRICCIÓN

La fuerza de rozamiento, es un tipo de fuerza interna, aparece cuando dos cuerpos interactúan por contacto, manifestándose entre ellos un movimiento relativo, surgiendo la fuerza de fricción paralelamente a las superficies en contacto. En la figura 4.7, al bloque mostrado se le aplica una fuerza externa F que trata de moverlo, pero que debido a la reacción del piso R se le impide la traslación.

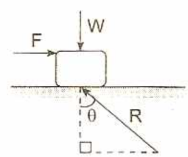


Fig. 4.7.a

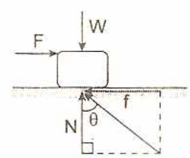
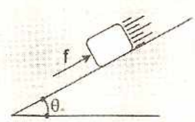


Fig. 4.7.b

Es importante hacer notar que, cuando existe rugosidad entre las superficies en contacto, a la acción de la fuerza externa F, la reacción R (del piso sobre el bloque) se inclina respecto a la línea normal trazada a la superficie en contacto.

¡Importante!
La fuerza de rozamiento se opone al movimiento o posible movimiento relativo.



La fuerza de rozamiento es una componente de la reacción R, tangente a la superficie en contacto.
El ángulo θ de desviación que experimenta la reacción R respecto a la normal o perpendicular al plano, se le llama ángulo de rozamiento.

Leyes empíricas del rozamiento por deslizamiento

1.ª El valor de la fuerza de fricción es directamente proporcional a la fuerza de reacción normal.

$\boxed{f\ \alpha\ N}$ ...(4.11)

2.ª El valor de la fuerza de fricción es independiente del área de las superficies en contacto, figura 4.8.

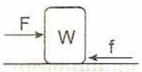


Fig. 4.8.a

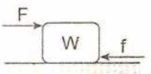


Fig. 4.8.b

3.ª La fuerza de fricción es independiente de la velocidad relativa de deslizamiento, siempre que esta sea pequeña (movimientos lentos).

4.ª La fuerza de fricción se opone a la velocidad relativa de deslizamiento.

Coeficiente de rozamiento (μ)

Es aquella magnitud adimensional que se define como la tangente trigonométrica del ángulo máximo de rozamiento.

De la figura 4.7: $\mu = \tan\theta = \frac{f}{N} \Rightarrow \boxed{f = \mu N}$ ...(4.12)

El valor del coeficiente de rozamiento, es característica de las superficies en contacto.

Clases de rozamiento

Rozamiento estático (f_s). Es la fuerza que se presenta cuando las superficies en contacto tienen un reposo relativo. Se comprueba experimentalmente que la fuerza de fricción está comprendida entre un valor mínimo (cero) y un máximo que se presenta cuando el movimiento relativo es inminente.

$\boxed{0 \leq f \leq f_{s(máx)}}$ ...(4.13)

$\boxed{f_s = \mu_s N}$ ...(4.14)

La ecuación 4.14 se aplica cuando el cuerpo está pronto a moverse respecto a la superficie en contacto, donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático.

Rozamiento cinético (f_k). Es la fuerza que se presenta cuando las superficies en contacto están en movimiento relativo, comprobándose que la fuerza de fricción cinética es prácticamente constante.

$\boxed{f_k = \mu_k N}$ ...(4.15)

En la ecuación (4.15), μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético.

Observaciones del rozamiento por deslizamiento

I. Experimentalmente se comprueba que el valor del coeficiente de rozamiento cinético es menor que el coeficiente de rozamiento estático.

$\boxed{\mu_k < \mu_s}$ ...(4.16)

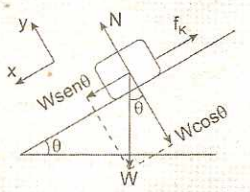
II. De la ecuación 4.16, se verifica que es más difícil sacar del reposo a un cuerpo que mantenerlo en movimiento.

$\boxed{f_k < f_s}$ ...(4.17)

Plano inclinado

Consideremos un bloque de peso W en movimiento acelerado sobre un plano inclinado. Entonces la reacción normal es una componente del peso, en el eje Y:

$$N = W\cos\theta$$



La fuerza de rozamiento cinético f_k es menor que la componente del peso sobre el plano inclinado.

$$W\mathrm{sen}\theta > f_k$$

III. La experiencia de la fricción entre dos superficies nos muestra que los valores del coeficiente de rozamiento son generalmente menores que la unidad.

$\boxed{0 \leq \mu_k < \mu_s < 1}$ ...(4.18)

IV. La fuerza de rozamiento disminuye debido a la humedad, calentamiento (aumento de temperatura), grasas, aceites y cualquier otro lubricante.

Ejemplos:

1. Si al bloque mostrado le aplicamos una fuerza externa horizontal F = 12 N y no se mueve, figura 4.9, entonces, es cierto que:

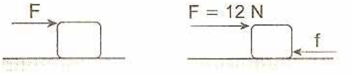


Fig. 4.9.a Fig. 4.9.b

Resolución:

Debemos recordar que la figura de rozamiento estático es variable, desde cero hasta un valor máximo cuando el cuerpo está pronto a moverse. Entonces, podemos deducir que, la fuerza de rozamiento estático es igual a la fuerza externa:

f = 12 N

f_s: fuerza de rozamiento estático máximo.

2. La figura 4.10 muestra un bloque de peso 50 N, al cual le aplicamos una fuerza horizontal F = 20 N, entonces, el cuerpo ¿se mueve? μ_s: 0,5 y $\mu_k = 0,3$.

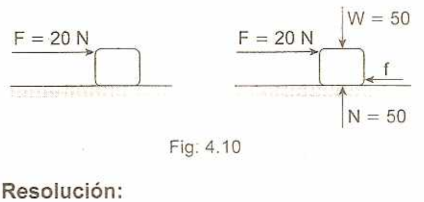


Fig. 4.10

Resolución:

Calculemos antes la fuerza de rozamiento estático máximo: $f_s = \mu_s N = 0,5(50) = 25$

Para lograr mover el bloque, la fuerza externa debe ser ligeramente mayor a la fuerza de rozamiento estático máximo. Entonces el bloque no se mueve. Luego la suma de las fuerzas es igual a cero:

$$\Sigma F_{\text{horizontales}} = 0 \Rightarrow F = f = 20\text{ N}$$

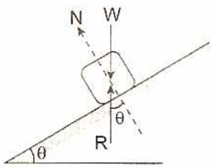
Entonces la fuerza de rozamiento estático es 20 N.

Movimiento inminente

Cuando el bloque está pronto a moverse, el peso W y la reacción del plano R son vectores colineales de igual módulo y sentidos opuestos.

Se demuestra analíticamente que el coeficiente de rozamiento estático μ_s es igual a la tangente del ángulo θ.

$$\mu_s = \tan\theta$$



θ : ángulo máximo de inclinación.

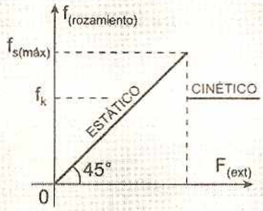
¡Importante!

Cuando intentamos desplazar un cuerpo se comprueba que el valor de la fuerza de rozamiento, inicialmente estático, va en aumento, alcanza un valor máximo un instante antes del deslizamiento y a continuación disminuye bruscamente su valor para luego mantenerse constante mientras existe movimiento.

$f_{s(máx)}$: fuerza de rozamiento estático máximo

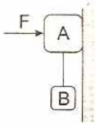
f_k: fuerza de rozamiento cinético

$$f_k < f_{s(máx)}$$



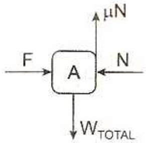
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los bloques mostrados tienen los siguientes pesos A = 14 N y B = 6 N, hallar el mínimo valor de la fuerza F que se debe aplicar al bloque A con la condición de que conserve su estado de reposo. El coeficiente de rozamiento estático en la pared vertical es 0,4.



Resolución:

Realizamos el DCL del bloque A:



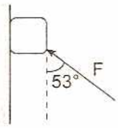
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = N$ ...(I)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mu N = 20$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):

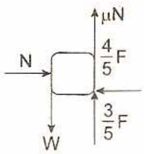
$0{,}4F = 20 \quad \therefore\ F = 50\text{ N}$

2. Si el peso del bloque mostrado es 10 N, hallar el mínimo valor de la fuerza F que se debe aplicar al bloque con la condición de que conserve su estado de equilibrio estático. El coeficiente de rozamiento estático en la pared vertical es 0,5.



Resolución:

Realizamos el DCL del bloque y descomponemos a F rectangularmente:



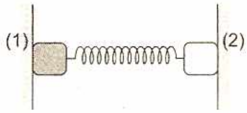
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = \frac{4}{5}F$ ...(I)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mu N + \frac{3}{5}F = W$ ...(II)

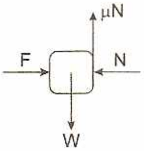
Reemplazando (I) en (II):

$(0{,}5)\frac{4}{5}F + \frac{3}{5}F = 10 \quad \therefore\ F = 10\text{ N}$

3. La figura muestra dos bloques idénticos de peso 50 N cada uno, unidos mediante un resorte de masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento estático entre las paredes verticales (1) y (2), son 0,5 y 0,4 respectivamente. Determinar la fuerza mínima desarrollada en el resorte, para mantener el equilibrio.



Resolución:
Sea F la fuerza interna generada en el resorte. Realizamos el DCL del bloque que se encuentra en la pared (2) que ofrece menos fricción.



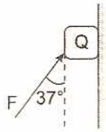
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = N$ ...(I)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mu N = W$ ...(II)

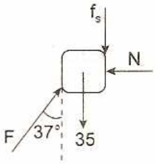
Reemplazando (I) en (II): $(0,4)F = 50$

$\therefore\ F = 125\ N$

4. Si el bloque Q que muestra la figura pesa 35 N y es presionado en la pared vertical de coeficiente de rozamiento 0,75 debido a la acción de la fuerza oblicua F, determinar el intervalo en que puede variar el valor de dicha fuerza manteniéndose el equilibrio.



Resolución:



Hallaremos el máximo valor de F analizando el estado en que el bloque está a punto de moverse hacia arriba.

$$\sum F_x^+ = \sum F_x^-$$

$N = F\text{sen}37° \Rightarrow N = 0,6F$ ...(I)

$\sum F_y^- = \sum F_y^+$

$F\cos 37° = 35 + 0,75N$

$0,8F = 35 + 0,75N$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II) y resolviendo:

$F_{máx} = 100\ N$

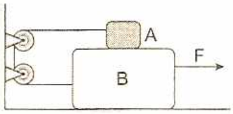
Para hallar el mínimo valor de F se analiza el estado en que el bloque está a punto de moverse hacia abajo. Este procedimiento es análogo al seguido en el caso anterior obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$N = 0,6F \Rightarrow 0,8F = 35 - 0,75N$

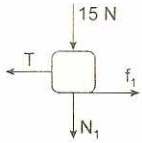
De donde resolviendo obtenemos que: $F_{min.} = 28\ N$

El intervalo en que se encuentra F será en consecuencia: $F \in [28;\ 100]\ N$

5. Si los bloques A y B del sistema mostrado en la figura son de 15 N y 45 N de peso y el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies planas en contacto es de 0,4, determinar el máximo valor que puede tomar la fuerza horizontal F con la condición que el sistema se encuentre en reposo.



Resolución:
Haciendo DCL de A y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:



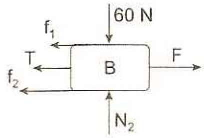
$\sum F_y^- = \sum F_y^+$

$N_1 = 15\ N$

$\therefore\ f_1 = 6\ N$

$\sum F_x^- = \sum F_x^+ \Rightarrow T = 6\ N$

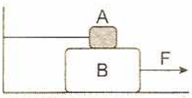
Haciendo DCL de B y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:



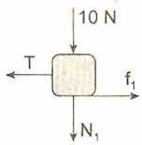
$\sum F_y^- = \sum F_y^+ \Rightarrow N_2 = 60\ N$ $\quad\therefore\ f_2 = 24\ N$

$\sum F_x^- = \sum F_x^+ \Rightarrow F = f_1 + T + f_2$ $\quad\therefore\ F = 36\ N$

6. En la figura, si los pesos de los bloques A y B son de 10 N y 20 N respectivamente y el coeficiente de rozamiento estático entre todas las superficies en contacto es 0,2, determinar la mínima fuerza horizontal F capaz de iniciar el movimiento de B.



Resolución:
Haciendo DCL de A y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:



$\sum F_y^- = \sum F_y^+$

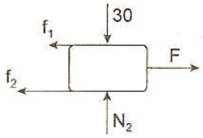
$N_1 = 10\ N$

$\therefore\ f_1 = 2\ N$

Haciendo DCL de B y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:

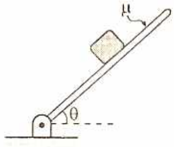
$$\sum F_y^- = \sum F_y^+$$

$N_2 = 30\ N \Rightarrow f_2 = 6\ N$

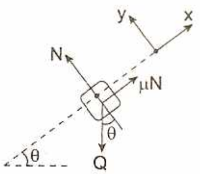


$$\sum F_x^- = \sum F_x^+$$
$$F = f_1 + f_2$$
$$\therefore\ F = 8\ N$$

7. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque Q y el plano inclinado es 0,75, determinar el máximo ángulo θ con la condición de que el bloque no resbale sobre el plano.



Resolución:
Haciendo DCL del bloque en el instante que está a punto de deslizarse y aplicando la primera condición de equilibrio, tenemos:



$\sum F_y^- = \sum F_y^+ \Rightarrow N = Q\cos\theta$ ...(I)
$\sum F_x^- = \sum F_x^+ \Rightarrow \mu N = Q\operatorname{sen}\theta$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):
$\mu Q\cos\theta = Q\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \tan\theta = \mu$
Reemplazando el dato: $\theta = 37°$

8. La figura (1) muestra dos bloques A y B de igual peso, en posición de equilibrio, sobre un plano que se va inclinando lentamente. Hallar el valor del máximo ángulo θ de inclinación, tal que, el bloque B se mantenga en equilibrio. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es $\mu = 1/4$.

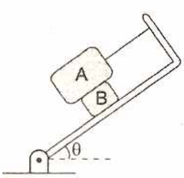
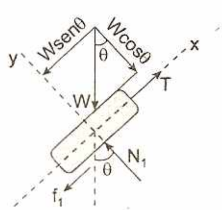
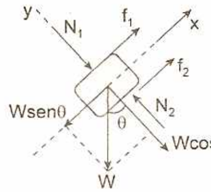


Fig. (1)



DCL (bloque A)

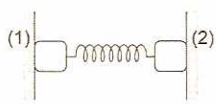
Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de A:
$\Sigma F_y = 0$, entonces, $N_1 = W\cos\theta$ ...(I)
$\Sigma F_x = 0$, entonces, $T = W\operatorname{sen}\theta + f_1$ ...(II)
Pero: $f_1 = \mu N_1 = \mu W\cos\theta$ ...(III)
Realizamos el diagrama del cuerpo libre del bloque B:



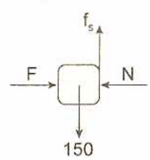
$\Sigma F_y = 0$, entonces, $N_2 = W\cos\theta + N_1$ ...(IV)
Reemplazando (I) en (IV): $N_2 = 2W\cos\theta$ ...(V)
Pero: $f_2 = \mu N_2 = 2\mu W\cos\theta$ ...(VI)
$\Sigma F_x = 0$, entonces: $f_1 + f_2 = W\operatorname{sen}\theta$ ...(VII)
Reemplazando (III) y (VI) en (VII):
$\mu W\cos\theta + 2\mu W\cos\theta = W\operatorname{sen}\theta$
Luego: $3\mu\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ ...(VIII)
$\tan\theta = 3\mu$, pero: $\mu = \dfrac{1}{4}$

$\tan\theta = 3/4 \quad \therefore\ \theta_{(\text{máximo})} = 37°$

9. La figura muestra dos bloques idénticos de peso 150 N cada uno, unidos mediante un resorte de masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento estático en las paredes verticales (1) y (2) son 0,5 y 0,4 respectivamente. Determinar la fuerza mínima desarrollada en el resorte, para mantener el equilibrio.



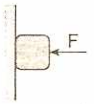
Resolución:
Realizamos el DCL del bloque que se encuentra en contacto con la superficie (2) de menor fricción:
1.ª condición de equilibrio:



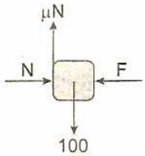
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = N$ ...(I)
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_{s(\text{máx})} = 150$ ...(II)
Pero: $f_{s(\text{máx})} = \mu N$ ...(III)

Reemplazando en (III):
$150 = 0{,}4F \Rightarrow F_{(\text{mínimo})} = 375\ N$

10. El bloque Q de 100 N de peso mostrado en la figura es presionado en la pared vertical por acción de una fuerza horizontal F. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la pared es 0,5, determinar el mínimo valor de F que permite al bloque conservar su estado de equilibrio.



Resolución:



Haciendo DCL del bloque en el instante que está a punto de deslizarse:

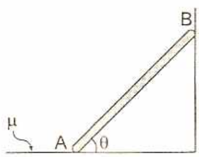
$\Sigma F_x^+ = \Sigma F_x^- \Rightarrow N = F$ ...(I)

$\Sigma F_y^+ = \Sigma F_y^- \Rightarrow \mu N = 100$ ...(II)

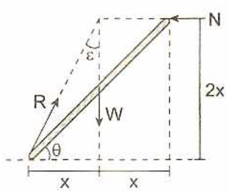
Reemplazando (I) en (II): $0{,}5F = 100$

$\therefore\ F = 200\ N$

11. La barra AB uniforme y homogénea que muestra la figura se encuentra apoyada en una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento $\mu_s = 0{,}5$ y en una pared vertical completamente lisa. Determinar el mínimo ángulo $\theta \neq 0°$ conservando la barra su estado de equilibrio.



Resolución:
Hacemos el DCL de la barra AB teniendo presente el criterio de concurrencia.
Se cumple que: $\tan\varepsilon = \mu$
Denominándose a ε, ángulo de rozamiento.

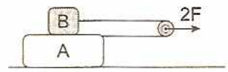


En este caso: $\tan\varepsilon = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan\varepsilon = \dfrac{x}{2x}$

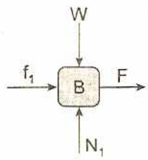
de donde: $\tan\theta = \dfrac{2x}{2x} \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\therefore\ \theta = 45°$

12. Los bloques A y B mostrados en la figura se mueven hacia la derecha con velocidades constantes de 2 m/s y 3 m/s respectivamente. Si el peso del bloque A es de 10 N y el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es 0,6, hallar el valor de F.



Resolución:
Como el movimiento relativo de B respecto de A es hacia la derecha, la fuerza de rozamiento (cinético) que actúa sobre B es hacia la izquierda. Haciendo DCL de B y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:

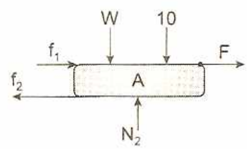


$\Sigma F_x^+ = \Sigma F_x^-$

$N_1 = W$

$\therefore\ f_1 = 0{,}6W$

Haciendo DCL de A y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:

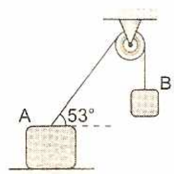


$\Sigma F_y^+ = \Sigma F_y^- \Rightarrow N_2 = W + 10 \quad \therefore\ f_2 = 0{,}6(W + 10)$

$\Sigma F_x^+ = \Sigma F_x^- \Rightarrow F + f_1 = f_2$

$\Rightarrow F + 0{,}6W = 0{,}6(W + 10) \quad \therefore\ F = 6\ N$

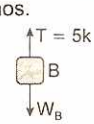
13. Los bloques A y B se encuentra en equilibrio en la posición mostrada, la magnitud del peso del bloque A es 80 N. La intensidad de la reacción del piso sobre el bloque A es 50 N. Calcular la masa del bloque B.



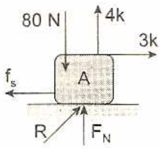
Resolución:

I. El sistema esta en equilibrio, la tensión en la cuerda es igual al peso del bloque B.
$T = W_B = mg$ ...(1)

Hacemos que $T = 5k$ para descomponer en los ejes cartesianos.



II. Realizamos el DCL bloque B

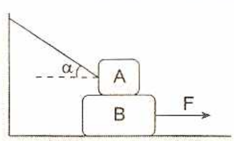


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_s = 3k$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_N + 4k = 80$
$F_N = 80 - 4k$

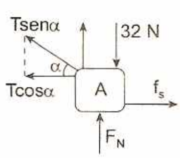
III. Pero: $R^2 = F_N^2 + f_s^2$ (reacción del piso)
$(50)^2 = (80 - 4k)^2 + (3k)^2 \Rightarrow k = 10$

IV. La tensión en la cuerda es T: 50 N
Remplazando en (1): $50 = m(10)$
$\therefore\ m = 5$ kg

14. Los pesos de los bloques A y B son 32 N y 40 N respectivamente y el coeficiente de rozamiento para todas las superficies en contacto es 0,25. La mínima magnitud de la F capaz de iniciar el movimiento en B es F = 22 N. Calcular el ángulo mínimo α para que exista el equilibrio.



Resolución:
Realizamos el DCL del bloque A:



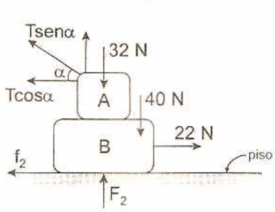
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = f_s$ ...(1)
$\Sigma F_y = 0$
$F_N + T\text{sen}\alpha = 32$
$F_N = 32 - T\text{sen}\alpha$

En (1): $f_s = \mu_s F_N$

$T\cos\alpha = \frac{1}{4}(32 - T\text{sen}\alpha)$

Despejando tenemos que: $T = \dfrac{32}{4\cos\alpha + \text{sen}\alpha}$ ...(2)

Ahora DCL del sistema (A + B)



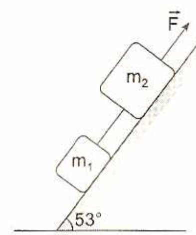
Equilibrio de fuerzas:
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos\alpha + f_2 = 22$ ...(3)
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 + T\text{sen}\alpha = 32 + 40$
$\Rightarrow F_2 = 72 - T\text{sen}\alpha$
f_2: fuerza de rozamiento estático
$f_2 = \mu_s F_2 \Rightarrow f_2 = \frac{1}{4}(72 - T\text{sen}\alpha)$ ...(4)

Reemplazando (2) y (4) en (3):

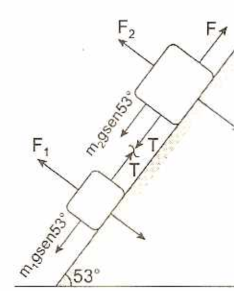
$$\frac{32\cos\alpha}{4\cos\alpha + \text{sen}\alpha} + 18 - \frac{1}{4}\left(\frac{32\text{sen}\alpha}{4\cos\alpha + \text{sen}\alpha}\right) = 22$$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53°$

15. La figura muestra dos cuerpos de masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg unidos por una cuerda y apoyados sobre un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo de 53° con la horizontal. La magnitud de fuerza máxima que puede aplicarse al bloque de masa m_2 sin que se rompa la cuerda es F. Determinar la magnitud de la máxima tensión (en N) que soporta dicha cuerda antes de romperse.



Resolución:
I. DCL de los bloques:



II. Sumatoria de fuerzas paralela al plano para cada cuerpo es nula.
$T = m_1 g\text{sen}53°$ ...(α)
$T + m_2 g\text{sen}53° = F$ ...(β)

Reemplazando (α) en (β), tenemos:
$F = (m_1 + m_2)g\text{sen}53°$
$F = 3 \times 10 \times \frac{4}{5} \Rightarrow F = 24$ N

III. $T = m_1 g\text{sen}53° \Rightarrow T = 8$ N

$T = \frac{1}{3}F$

MOMENTO DE UNA FUERZA

El efecto rotatorio de una fuerza se caracteriza por su momento o torque.

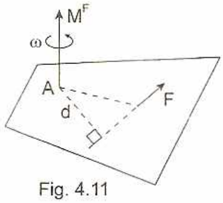


Fig. 4.11

El momento de una fuerza, es una magnitud vectorial y tiene los siguientes elementos:

Módulo

Es igual al producto de la fuerza F, por la distancia trazada desde el centro de giro A, perpendicularmente a la línea de acción de la fuerza.

$$\boxed{M^F = Fd} \qquad ...(4.19)$$

Unidades: Nm; Ncm

Dirección

Es perpendicular al plano de rotación, determinado por la línea de acción de la fuerza y el centro de giro.

Sentido

Se determina aplicando la Regla de la Mano Derecha, los dedos indican el sentido de giro y el pulgar el sentido del vector momento de una fuerza. Tiene la misma dirección y sentido de la velocidad angular.

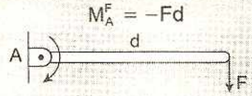
Signos

El momento es positivo si el giro es antihorario (+) y negativo si el giro es horario (−).

Torque o momento de una fuerza (Nm, Ncm):

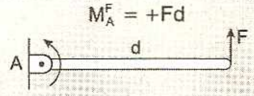
1. Giro horario, el momento es negativo.

$$M_A^F = -Fd$$



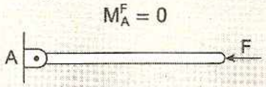
2. Giro antihorario, el momento es positivo.

$$M_A^F = +Fd$$



3. Si la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de giro, entonces el momento es nulo.

$$M_A^F = 0$$



Casos particulares

I. Cuando la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de giro, el momento de la fuerza es cero.

$M^F = Fd$, donde $d = 0 \Rightarrow M^F = 0$

Fig. 4.12.a

II. Cuando la fuerza actúa perpendicularmente a la barra.

a) $M^F = +Fd$ giro antihorario

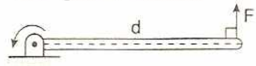


Fig. 4.12.b

b) $M^F = -Fd$ giro horario

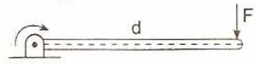


Fig. 4.12.c

Ejemplo:

En la figura (4.12.d) determinar el momento resultante respecto del punto A.

$F_1 = 3$ N; $F_2 = 7$ N; $F_3 = 5$ N

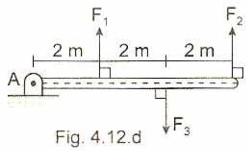


Fig. 4.12.d

Resolución:

$$M_A^R = \sum M_A^F = M_A^{F_1} + M_A^{F_2} + M_A^{F_3}$$

$$\Rightarrow M_A^R = \sum M_A^F = 3(2) + 7(6) - 5(4)$$

$$M_A^R = 6 + 42 - 20 \Rightarrow M_A^R = +28 \text{ Nm (giro antihorario)}$$

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO

Cuando las fuerzas están actuando sobre un cuerpo rígido (por ejemplo: una puerta, ventana, barra) es necesario considerar el equilibrio en relación a la traslación (desplazamiento), como a la rotación (giro), por lo tanto, se requiere las siguientes condiciones:

Primera condición (Equilibrio de traslación)

La suma de todas las fuerzas debe ser cero.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0$$

Segunda condición (Equilibrio de rotación)

La suma de momentos respecto a cualquier punto debe ser cero.

$$\Sigma M = 0$$

Ejemplo:

En la figura 4.13,¿el cuerpo rígido está en equilibrio?

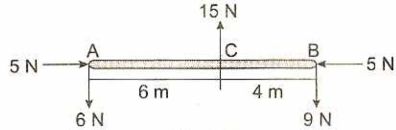


Fig. 4.13

Resolución:

a) Suma de fuerzas:

$\Sigma F_x = 5 - 5 = 0$; $\Sigma F_y = 15 - 6 - 9 = 0$

Convención de signos

Cumple con la primera condición.

b) Suma de momentos:

$\Sigma M_A = 15(6) - 9(10) \Rightarrow \Sigma M_A = 90 - 90 = 0$

$\Sigma M_C = 6(6) - 9(4) \Rightarrow \Sigma M_C = 36 - 36 = 0$

Cumple la segunda condición.

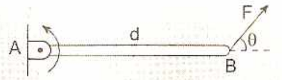
Entonces el cuerpo rígido está en equilibrio.

Respuesta: Sí.

Fórmula general

Si la fuerza F forma un ángulo agudo θ con la barra, entonces el momento producido es:

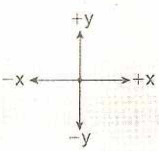
$$M_A^F = Fd\operatorname{sen}\theta$$



d: distancia del centro de giro de A hasta el punto de aplicación B.

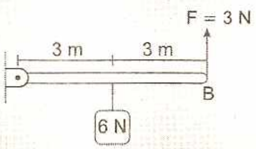
Signos

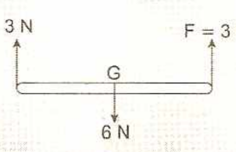
Convencionalmente, las fuerzas con sentido hacia la derecha son positivas (+), a la izquierda negativas (−). Las fuerzas con sentido hacia arriba son positivas (+), hacia abajo son negativas (−).



Equilibrio de un cuerpo rígido

Cuando las fuerzas están actuando sobre un cuerpo rígido, es necesario considerar el equilibrio en relación, tanto a la traslación como a la rotación. Por tanto, se requieren las condiciones siguientes:





DCL (Barra)

CUPLA O PAR DE FUERZAS

Es un sistema de dos fuerzas, que tienen el mismo módulo, rectas de acción paralelas y sentidos opuestos. El momento producido por una cupla es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia entre sus líneas de acción.

$$\boxed{M^{PAR} = +Fd} \quad \ldots(4.20)$$

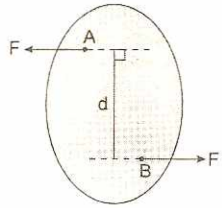


Fig. 4.14

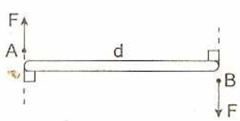
(+): giro antihorario. (−): giro horario.

El momento producido por una cupla es igual respecto a cualquier punto. La fuerza resultante de una cupla es igual a cero, esto significa que no produce traslación, solo rotación.

Cupla. Cuando abres o cierras la llave del caño de agua estás produciendo una cupla.

Cuando el chofer de un auto vira a la derecha o a la izquierda, está produciendo una cupla.

La cupla puede ser positivo o negativo.



TEOREMA DE VARIGNON

El momento producido por la fuerza resultante F_R de un sistema de fuerzas coplanares respecto a un punto A, es igual a la suma de momentos de las fuerzas F_1, F_2, F_3, ... respecto del mismo punto A.

$$\boxed{M_A^{F_R} = M_A^{F_1} + M_A^{F_2} + M_A^{F_3} + \ldots} \quad \ldots(4.21)$$

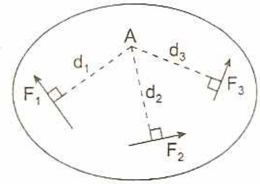


Fig. 4.15

CENTRO DE GRAVEDAD (G)

Es el punto donde se concentra el peso de un cuerpo.

- El centro de gravedad puede estar dentro o fuera del cuerpo.
- El centro de gravedad de un cuerpo quedará perfectamente con respecto a un sistema de ejes coordenados por una abscisa $(\overline{x})$ y una ordenada $(\overline{y})$.

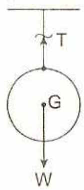


Fig. 4.16.a

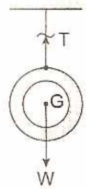


Fig. 4.16.b

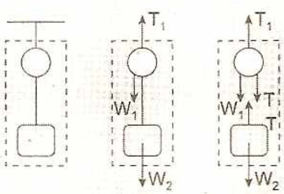
En la posición de equilibrio, la tensión T en la cuerda y el peso W, son vectores colineales (en la línea de acción).

CONCEPTOS ADICIONALES

Sistema físico

Es el cuerpo o conjunto de partículas consideradas en estudio, elegido en forma arbitraria.

Primer ejemplo:
La figura (1) muestra una esfera de peso W_1 y un bloque de peso W_2 unidos mediante una cuerda de peso despreciable. Elegimos nuestro sistema físico: (esfera + cuerda + bloque).



(1) (2) (3)

Fuerza externa al sistema

Es aquella fuerza que actúa sobre el sistema debido a la interacción del sistema con cuerpos o partículas externas al sistema.
En la figura (2) se indica las fuerzas externas al sistema físico elegido, ellos son: los pesos W_1 y W_2, la tensión en la cuerda (T_1) que une la esfera con la viga.

Fuerza interna al sistema

Es aquella fuerza debido a la interacción de cuerpos o partículas considerados dentro del sistema físico. La sumatoria de todas las fuerzas internas siempre es igual a cero.
La figura (3) muestra la fuerza interna (T) al sistema físico elegido.

Sistema aislado

Es aquel sistema físico cuya resultante de fuerzas externas, es igual a cero.

Fórmulas para hallar el centro de Gravedad

Para cuerpos rígidos homogéneos:

I. Linealmente homogéneos: $G = (\bar{x};\ \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3}{L_1 + L_2 + L_3}} \quad ...(4.22)$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3}{L_1 + L_2 + L_3}} \quad ...(4.23)$$

II. Superficialmente homogéneos: $G = (\bar{x};\ \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3}} \quad ...(4.24)$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3}} \quad ...(4.25)$$

III. Volumétricamente homogéneos: $G = (\bar{x};\ \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3}{V_1 + V_2 + V_3}} \quad ...(4.26)$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + V_3y_3}{V_1 + V_2 + V_3}} \quad ...(4.27)$$

Ejemplo:
Encontrar el centro de gravedad de la barra homogénea mostrada en la figura (4.17), AB = 6 m y BC = 4 m.

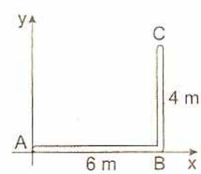


Fig. 4.17.a

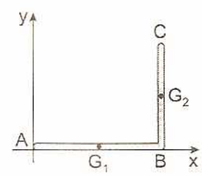


Fig. 4.17.b

Resolución:
Centro de gravedad de AB: $G_1 = (x_1 = 3;\ y_1 = 0)$
Centro de gravedad de BC: $G_2 = (x_2 = 6;\ y_2 = 2)$

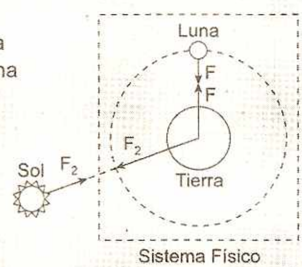
$$\bar{x} = \frac{L_1x_1 + L_2x_2}{L_1 + L_2} = \frac{6(3) + 4(6)}{6 + 4} = 4{,}2 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{L_1y_1 + L_2y_2}{L_1 + L_2} = \frac{6(0) + 4(2)}{6 + 4} = 0{,}8 \text{ m}$$

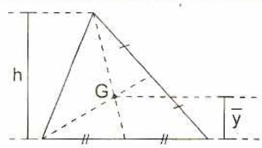
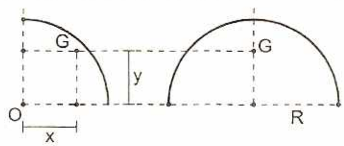
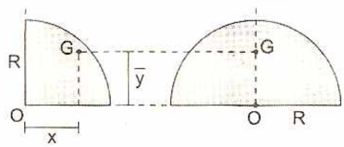
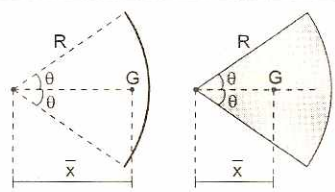
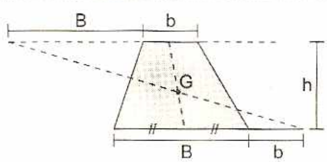
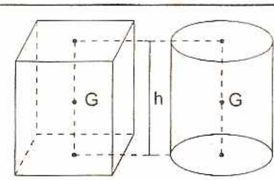
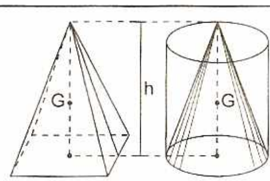
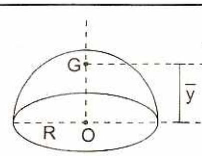
Luego: G = (4,2; 0,8)

Segundo ejemplo:
Consideramos nuestro sistema físico al planeta Tierra más su satélite la Luna, como muestra la figura.

F: fuerza interna
F_2: fuerza externa



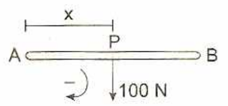
Centro de gravedad de algunas figuras geométricas conocidas:

Nombre	Figura	x	y
Triángulo			$\frac{h}{3}$
Cuarto de circunferencia		$\frac{2R}{\pi}$	$\frac{2R}{\pi}$
Semi circunferencia		0	$\frac{2R}{\pi}$
Cuarto de círculo		$\left(\frac{4}{3}\right)\frac{R}{\pi}$	$\left(\frac{4}{3}\right)\frac{R}{\pi}$
Semicírculo		0	$\left(\frac{4}{3}\right)\frac{R}{\pi}$
Arco de semicircunferencia		$\frac{(R)\operatorname{sen}\theta}{\theta}$	0
Sector circular		$\frac{(2R)\operatorname{sen}\theta}{3\theta}$	0
Trapecio			$\left(\frac{B+2b}{B+b}\right)\frac{h}{3}$
Prisma			$\frac{h}{2}$
Cilindro			$\frac{h}{2}$
Pirámide			$\frac{h}{4}$
Cono			$\frac{h}{4}$
Hemisferio		0	$\frac{3}{8}R$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La figura muestra una barra ingrávida AB, de longitud 2 m. ¿A qué distancia del punto A se debe colocar un apoyo fijo para establecer el equilibrio de la barra?

Resolución:

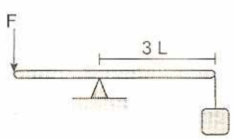


Cálculo de la figura resultante:
$F_R = 60 + 40 = 100$ N
Cálculo de x mediante el teorema de Varignon:

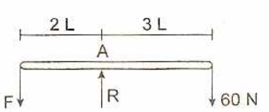
$$M_A^{F_R} = \Sigma M_A$$

$-100(x) = -40(2) \Rightarrow x = 0{,}8$ m
Luego, el apoyo fijo se debe colocar a 0,8 m del extremo A.

2. La figura muestra una barra de longitud 5L y peso despreciable. Determinar la magnitud de la fuerza F que produce el equilibrio del bloque de peso 60 N.

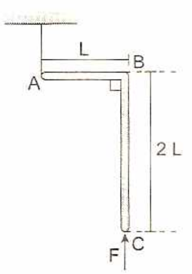


Resolución:
Haciendo el diagrama de cuerpo libre de la barra:
De la segunda condición de equilibrio: $\Sigma \vec{M}_A = \vec{0}$

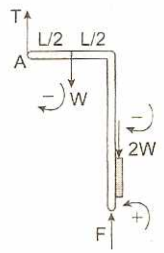


$M_A^F + M_A^{60\,N} = 0$
$F(2L) - 60(3L) = 0$
Resolviendo:
$F = 90$ N

3. La barra quebrada en forma de L, es homogénea de peso 3W. Determinar la magnitud de la fuerza F, para mantener el segmento BC en posición vertical. BC = 2(AB).

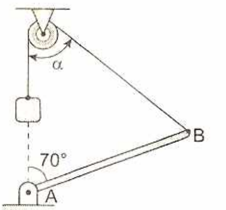


Resolución:
El peso de los lados AB y BC, son proporcionales a su longitud respectiva.
Diagrama de fuerzas sobre la barra.

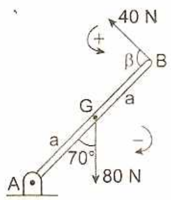


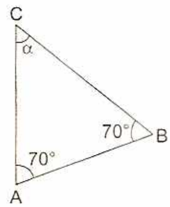
Equilibrio de rotación:
$\Sigma M_A = 0$
$M_A^F = M_A^W + M_A^{2W}$
$FL = W\dfrac{L}{2} + 2WL$
$F = \dfrac{5}{2}W$

4. La barra homogénea de 80 N de peso y el bloque de 40 N se encuentran en equilibrio. Calcular la medida del ángulo α.



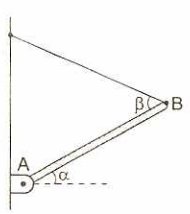
Resolución:





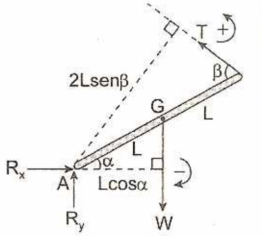
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 40(2a)\text{sen}\beta = 80(a)\text{sen}70°$
$\text{sen}\beta = \text{sen}70° \Rightarrow \beta = 70°$
Luego: $\alpha = 40°$

5. Si la barra homogénea que muestra la figura tiene un peso de 80 N, hallar la tensión en la cuerda. Los ángulos "a" y "b" son complementarios.



Resolución:

Diagrama de fuerzas, sobre la barra.



Equilibrio de rotación:

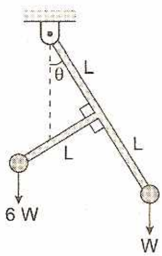
$\Sigma M_A = 0$

$M_A^T = M_A^W$

$T(2L\text{sen}\beta) = W(L\cos\alpha)$

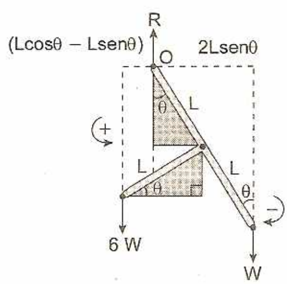
$\Rightarrow T = \dfrac{W}{2} \quad \therefore T = 40 \text{ N}$

6. Si la barra doblada en forma de T es de peso despreciable y en sus extremos están soldados dos esferas de pesos W y 6W, hallar el ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema.



Resolución:

Haciendo DCL de todo el sistema:

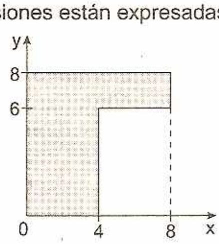


Por 2.ª condición de equilibrio: $M_O^{6W} = M_O^W$

$6(L\cos\theta - L\text{sen}\theta) = 2L\text{sen}\theta$

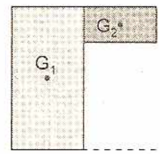
$3\cos\theta = 4\text{sen}\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{3}{4} \quad \therefore \theta = 37°$

7. Ubicar el centro de gravedad de la placa mostrada. Las dimensiones están expresadas en cm.



Resolución:

Descomponiendo la placa en dos figuras simples:



$G_1 = (2; 4) \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = 4$

$A_1 = 32 \text{ cm}^2$

$G_2 = (6; 7) \Rightarrow x_2 = 6; y_2 = 7$

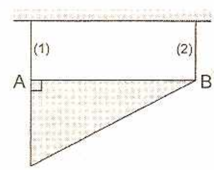
$A_2 = 8 \text{ cm}^2$

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2} = 2{,}8 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 - A_2} = 3{,}9 \text{ cm}$$

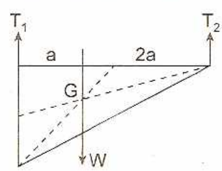
Por lo tanto, la posición del centro de gravedad se encuentra en: G = (2,8; 3,9)

8. Calcular la tensión en las cuerdas (1) y (2) que mantienen en equilibrio a la placa triangular homogénea de peso 6 N.



Resolución:

El centro de gravedad de una lámina homogénea de forma triangular se encuentra en el baricentro G, en la intersección de las medianas.



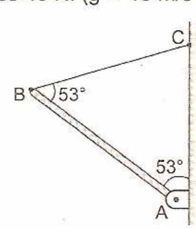
$\Sigma M_G = 0$

$T_1(a) = T_2(2a) \Rightarrow T_1 = 2T_2 \quad$ ...(I)

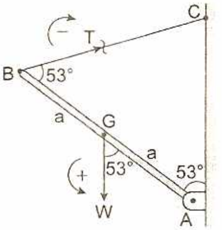
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = 6 \text{ N} \quad$ ...(II)

Resolviendo de (I) y (II): $T_1 = 4$ N y $T_2 = 2$ N

9. La barra homogénea se mantiene en equilibrio. Determine su masa, sabiendo que la tensión en la cuerda BC es 40 N. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución:

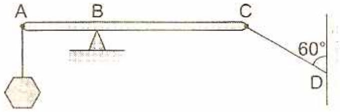


$\Sigma M_A = 0$

$W(a)\text{sen}53° - T(2a)\text{sen}53° = 0 \Rightarrow W = 2T$

$W = 2(40) \Rightarrow W = 80\text{ N} \Rightarrow m = \dfrac{W}{g} \Rightarrow m = 8\text{ kg}$

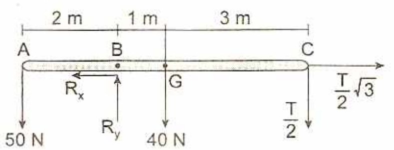
10. Una viga ABC es de sección uniforme, su peso propio es de 40 N y se apoya en una articulación (punto B). En el extremo C se halla sometida a la tensión de un cable. En el extremo A se suspende un bloque de peso 50 N. Considerando el sistema en equilibrio, determinar la tensión en el cable CD. Donde: AB = 2 m y BC = 4 m.



Resolución:

Haciendo el DCL de la viga homogénea ABC, la suma de momentos respecto del punto B es igual a cero:

$\Sigma M_B (+) = \Sigma M_B (-)$

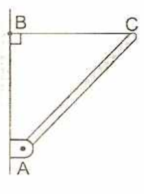


$50(2) = 40(1) + \frac{T}{2}(4)$

$\therefore\ T = 30\text{ N}$

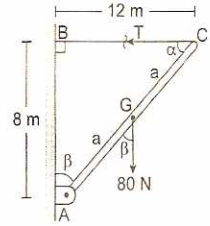
Debemos aclarar, que las fuerzas colineales a la viga no producen momentos, éstas pasan por el centro de giro B.

11. La barra homogénea de 80 N de peso se encuentra en equilibrio. Determinar la tensión en el cable, si AB = 8 m y BC = 12 m.



Resolución:

DCL (Barra)



$\Sigma M_A = 0$

$T(2a)\text{sen}\alpha = 80(a)\text{sen}\beta$

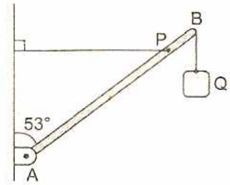
Pero: $\alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \text{sen}\beta = \cos\alpha$

$T = 40\left(\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)$

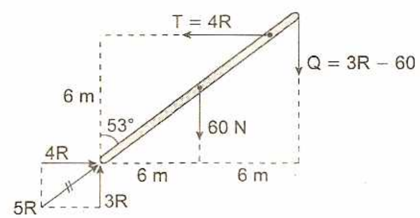
$T = 40\cot\alpha \Rightarrow T = 40\left(\dfrac{12}{8}\right) \Rightarrow T = 60\text{ N}$

12. Si la barra AB pesa 60 N y mide 15 m, determinar el peso del bloque Q para que la reacción en A sea colineal a la barra homogénea (AP = 10 m).



Resolución:

Haciendo el DCL de la barra homogénea AB:



Debemos aclarar que hemos asumido, por conveniencia, que la reacción en A es 5R.

La suma de momentos respecto de A es igual a cero:

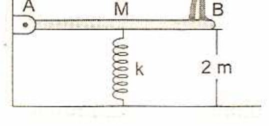
$$\Sigma M_A (+) = \Sigma M_A (-)$$

$4R(6) = 60(6) + (3R - 60)(12)$

de donde: $R = 30\text{ N}$

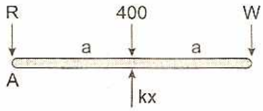
Pero: $Q = 3R - 60 \quad \therefore\ Q = 30\text{ N}$

13. En el sistema físico en equilibrio, la barra homogénea pesa 400 N. En el punto medio M se encuentra un resorte de constante elástica k = 800 N/m. Si la longitud natural del resorte es 4 m, determinar el peso del hombre que se encuentra en el extremo de la barra horizontal.



Resolución:

Haciendo el DCL de la barra homogénea AB:



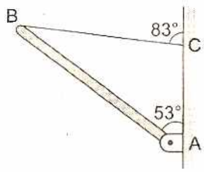
Suma de momentos respecto del punto A es igual a cero. Además: $kx = 1600$ N

$$\Sigma M_A \circlearrowright = \Sigma M_A \circlearrowleft$$

$kx(a) = 400(a) + W(2a) \Rightarrow 1600 = 400 + 2W$

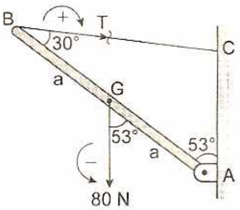
$\therefore\ W = 600$ N

14. La barra homogénea de 80 N de peso se encuentra en equilibrio. Calcular la tensión en la cuerda BC.



Resolución:

DCL (Barra)

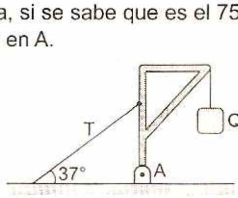


$\Sigma M_A = 0$

$T(2a)\text{sen}30° = 80(a)\text{sen}53°$

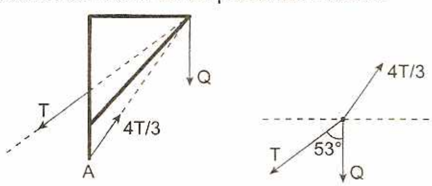
$T(2a)\frac{1}{2} = 80(a)\frac{4}{5} \Rightarrow T = 64$ N

15. Si el bloque Q pesa 70 N y la estructura es de peso despreciable, determinar el valor de la tensión T en la cuerda, si se sabe que es el 75% del valor de la reacción en A.



Resolución:

Realizamos el DCL de la estructura ingrávida y haciendo concurrir en un punto las fuerzas:



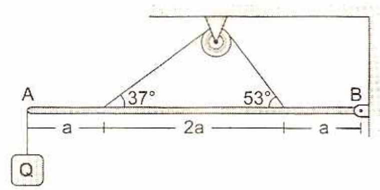
$\Sigma F = 0$

Entonces se cumple que:

$$\left(\frac{4T}{3}\right)^2 = T^2 + Q^2 + 2TQ\cos53°$$

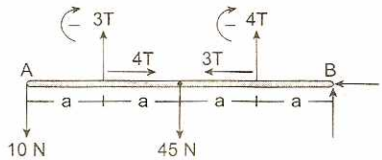
Reemplazando los datos tenemos: $T = 150$ N

16. Si el peso de la barra horizontal AB, uniforme y homogénea es de 45 N, determinar la tensión de la cuerda que lo sostiene. $Q = 10$ N.



Resolución:

Haciendo DCL de la barra:



Por 2.ª condición de equilibrio:

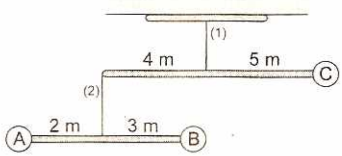
$$\Sigma M_B \circlearrowright = \Sigma M_B \circlearrowleft$$

$10(4a) + 45(2a) = 3T(3a) + 4T(a)$

$T = 10 \Rightarrow 5T = 50$ N

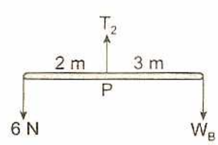
Debemos aclarar que hemos asumido, por conveniencia que la tensión de la cuerda es 5T.

17. La figura muestra tres esferas A; B y C en equilibrio. Cada varilla es ingrávida (peso despreciable). Determinar la tensión en la cuerda (1), sabiendo que la esfera A pesa 6 N.



Resolución:

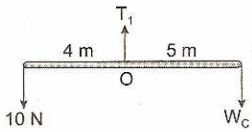
Analizando la varilla inferior:



$\Sigma M_P = 0 \Rightarrow W_B = 4$ N

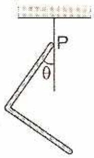
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 = 10$ N

Analizando la varilla superior:



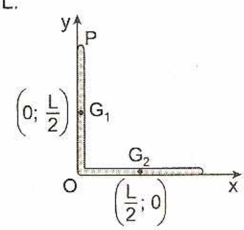
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow W_C = 8\text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = 18\text{ N}$$

18. Una barra homogénea se dobla en dos partes iguales, formando ángulo recto. Se suspende de un extremo, hallar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.



Resolución:

Determinemos previamente la posición del centro de gravedad G de la barra homogénea doblada en forma de L.

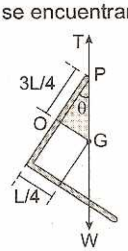


$$\bar{x} = \frac{L_1x_1 + L_2x_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow \frac{L(0) + L(L/2)}{L + L} = \frac{L}{4}$$

Del mismo modo:

$$\bar{y} = \frac{L_1y_1 + L_2y_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{L(L/2) + L(0)}{L + L} = \frac{L}{4}$$

En la posición de equilibrio, el peso W y la tensión T son colineales, por consiguiente los puntos P y G se encuentran en la misma línea vertical.

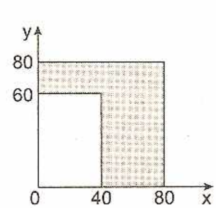


En el triángulo rectángulo POG, tenemos:

$$\tan\theta = \frac{L/4}{3L/4} = \frac{1}{3}$$

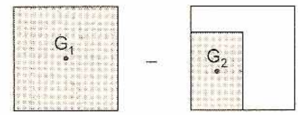
$$\therefore\ \theta = \frac{37°}{2}$$

19. Ubicar el centro de gravedad de la placa mostrada. Las dimensiones están expresadas en cm.



Resolución:

Descomponiendo la placa en dos figuras simples:



$G_1 = (40; 40)$; $G_2 = (20; 30)$

$A_1 = 6400\text{ cm}^2$; $A_2 = 2400\text{ cm}^2$

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 - A_2x_2}{A_1 - A_2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{6400(40) - 2400(20)}{4000}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 52$$

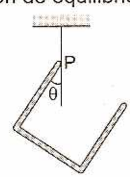
Del mismo modo:

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 - A_2y_2}{A_1 - A_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{6400(40) - 2400(30)}{4000}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 46\text{ cm}$$

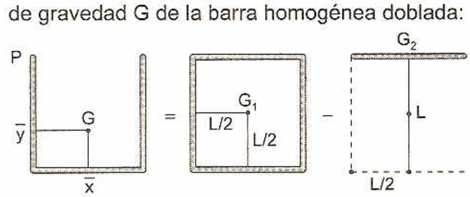
Por lo tanto, la posición del centro de gravedad se encuentra en: G = (52; 46)

20. Una barra homogénea se dobla en tres partes iguales formando ángulos rectos. Se suspende de un extremo, hallar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.



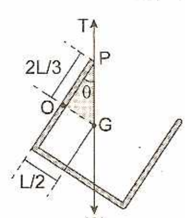
Resolución:

Determinemos previamente la posición del centro de gravedad G de la barra homogénea doblada:



Por simetría: x = L/2

$$\bar{y} = \frac{L_1x_1 - L_2x_2}{L_1 - L_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4L(L/2) - L(L)}{4L - L} = \frac{L}{3}$$

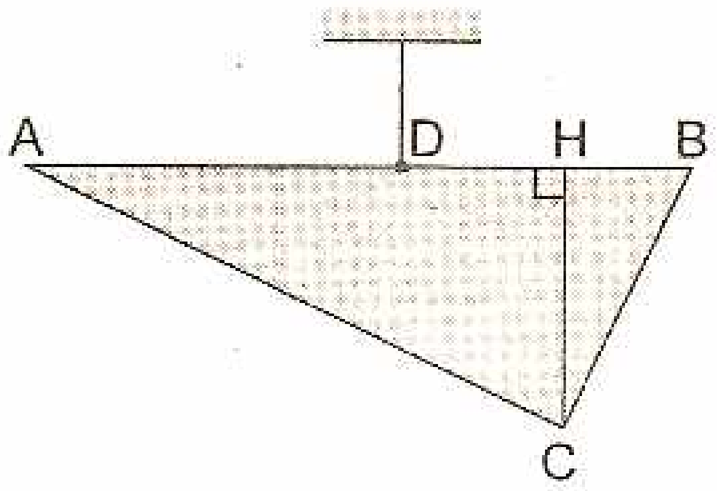


En la posición de equilibrio, el peso W y la tensión T son colineales, por consiguiente los puntos P y G se encuentran en la misma línea vertical.

En el triángulo rectángulo POG, tenemos:

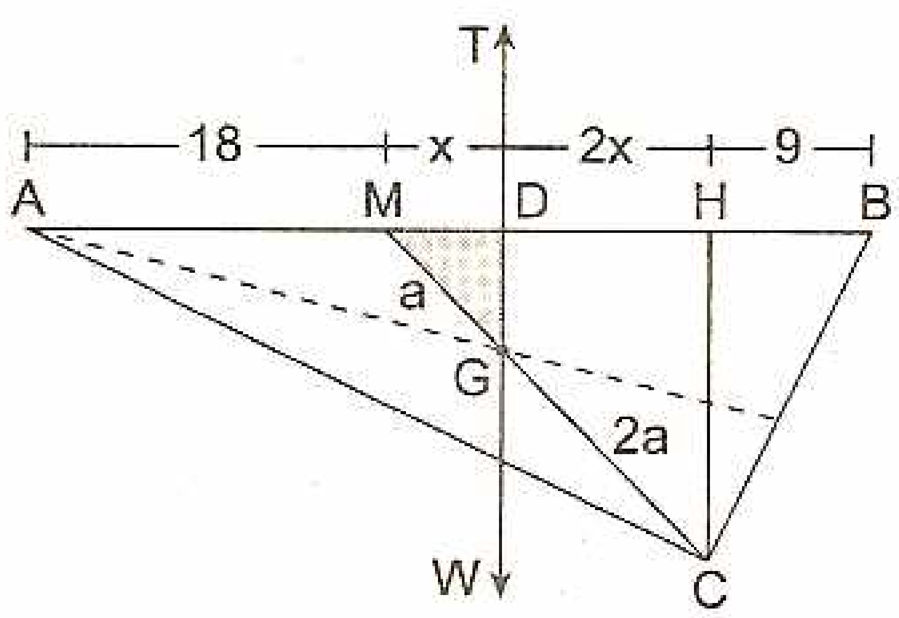
$$\tan\theta = \frac{L/2}{2L/3} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$$

21. Una lámina de forma triangular está colgada de un punto D del lado AB mediante un hilo. Determinar el valor de AD, para que en la posición de equilibrio AB quede horizontal. La altura HC sobre el lado AB divide al lado en dos segmentos de 27 cm y 9 cm respectivamente.



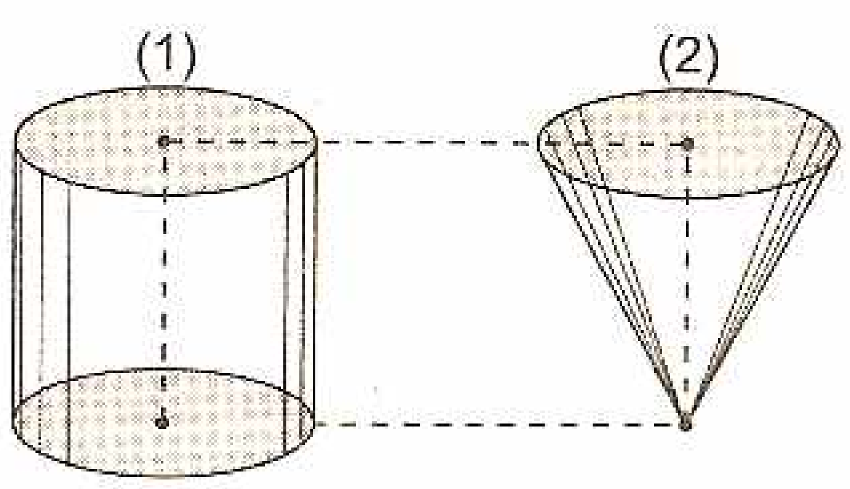
Resolución:

El centro de gravedad de una lámina homogénea de forma triangular se encuentra en el baricentro del triángulo. En la posición de equilibrio, el peso W y la tensión T son colineales, por consiguiente los puntos D y G se encuentran en la misma línea vertical.



Aplicando la propiedad del baricentro G en un triángulo, deducimos que x = 3 cm. Por consiguiente, el segmento AD mide 21 cm.

22. La figura muestra un cilindro (1) de altura 8 m, al cuál se le ha sustraído un cono (2) teniendo como base la cara superior. ¿A qué altura se encuentra el centro de gravedad del sólido resultante?



Resolución:

Ubicamos el centro de gravedad de cada sólido. Para el cálculo del volumen, sea A el área de la base del cilindro.

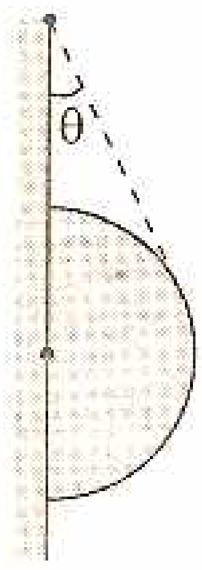
Cilindro	**Cono**
$G_1 = (0; 0; 4)$	$G_2 = (0; 0; 6)$
$v_1 = 4A$	$v_2 = 4A/3$

Cálculo de la altura en donde se encuentra G:

$$\bar{z} = \frac{v_1 z_1 - v_2 z_2}{v_1 - v_2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{4A(4) - (4A/3)(6)}{4A - 4A/3}$$

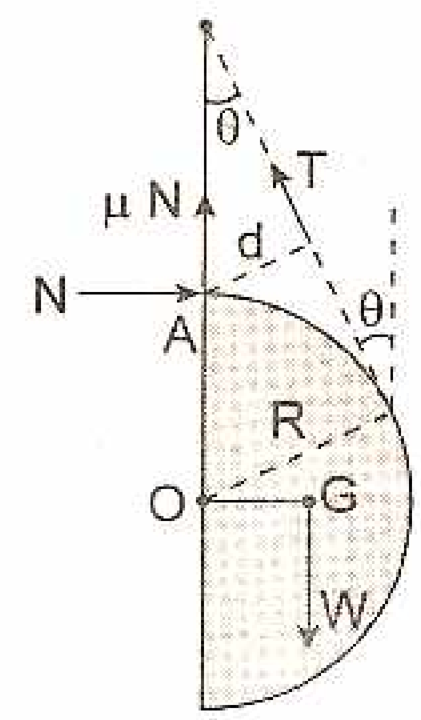
Resolviendo: $\bar{z} = 3$ m

23. Sobre una pared vertical se apoya una semiesfera que se sujeta mediante una cuerda, donde $\theta = 37°$. Si el hemisferio está pronto a resbalar, hallar el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la pared.



Resolución:

Realizamos el DCL de la semiesfera, donde el centro de gravedad G se encuentra a una distancia 3R/8 de la pared vertical.



La suma de momentos respecto del punto A es igual a cero:

$$\Sigma M_A \circlearrowleft = \Sigma M_A \circlearrowright$$

$$Td = W\left(\frac{3}{8}R\right)$$

Donde: $d = \frac{2}{5}R$. Entonces: $T = \frac{15}{16}W$ ...(I)

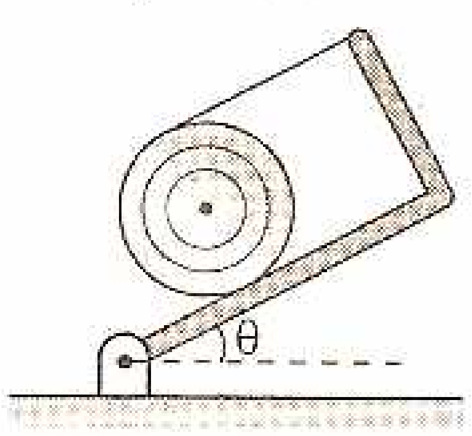
La suma de fuerzas es igual a cero en cada eje:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = \frac{3}{5}T$ ...(II)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mu N + \frac{4}{5}T = W$ ...(III)

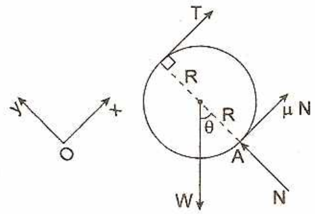
Reemplazando (I) y (II) en (III): $\mu = \frac{4}{9}$

24. En un cilindro se enrolla un hilo, cuyo cabo se sujeta en el punto superior del plano móvil. El coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano es 0,5. ¿Hasta que ángulo máximo θ el cilindro no resbalará sobre el plano?



Resolución:

Realizamos el DCL del cilindro. Las fuerzas se descomponen rectangularmente en los ejes, X paralelo al plano inclinado, Y perpendicularmente al plano.



La suma de momentos respecto del punto A es igual a cero:

$$\Sigma M_A \circlearrowright = \Sigma M_A \circlearrowleft$$

$T(2R) = W(R\operatorname{sen}\theta)$

$T = \dfrac{W}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(I)

La suma de fuerzas en cada eje es igual a cero:

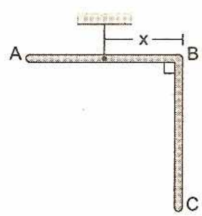
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W\cos\theta$ ...(II)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + \mu N = W\operatorname{sen}\theta$ ...(III)

Reemplazando (I) y (II) en (III): $\tan\theta = 1$

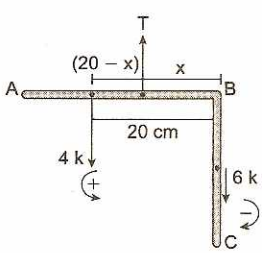
$\therefore\ \theta = 45°$

25. Una barra homogénea de 100 cm es doblada en ángulo recto, tal que AB = 40 cm y BC = 60 cm. Calcular la distancia "x" del cual se debe sostener, para mantener el lado AB en posición horizontal.



Resolución:

DCL (Barra homogénea)



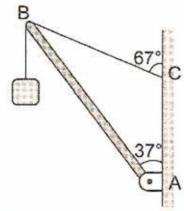
Los pesos de los lados AB y BC son proporcionales a su longitud respectiva:

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M_O^{4k} = M_O^{6k}$

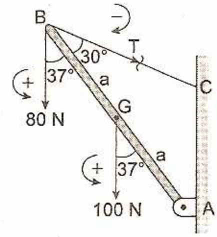
$4k(20 - x) = 6k(x)$

$\Rightarrow 2(20 - x) = 3x \quad \therefore\ x = 8\text{ cm}$

26. La barra homogénea de 100 N de peso se encuentra en equilibrio. Calcular la tensión en la cuerda, BC, si el bloque pesa 80 N.



Resolución:



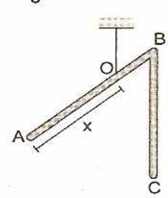
$\Sigma M_A = 0$

$100(a)\operatorname{sen}37° - T(2a)\operatorname{sen}30° + 80(2a)\operatorname{sen}37° = 0$

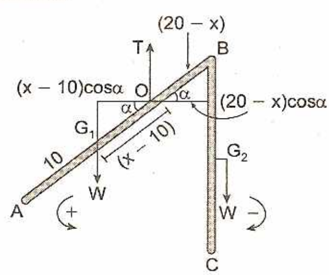
$100(a)\left(\frac{3}{5}\right) + 160(a)\left(\frac{3}{5}\right) = T(2a)\left(\frac{1}{2}\right)$

$60 + 96 = T \quad \therefore\ T = 156\text{ N}$

27. Una varilla de 40 cm de longitud es doblada en su punto medio (B) formando un ángulo agudo. Hallar el valor de x, para que el lado BC permanezca en posición vertical. La varilla es de un material uniforme y homogéneo.



Resolución:



Los lados AB y BC, tienen igual tamaño, por consiguiente igual peso W.

El peso de cada lado actúa en su centro geométrico G_1 y G_2, respectivamente.

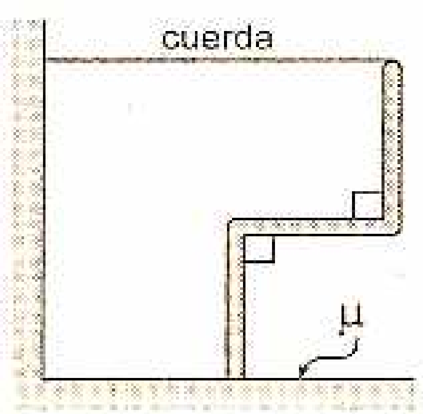
DCL (Varilla doblada)

Suma de momentos respecto del punto O igual a cero: $M_O^{AB} = M_O^{BC}$

$W(x - 10)\cos\alpha = W(20 - x)\cos\alpha$

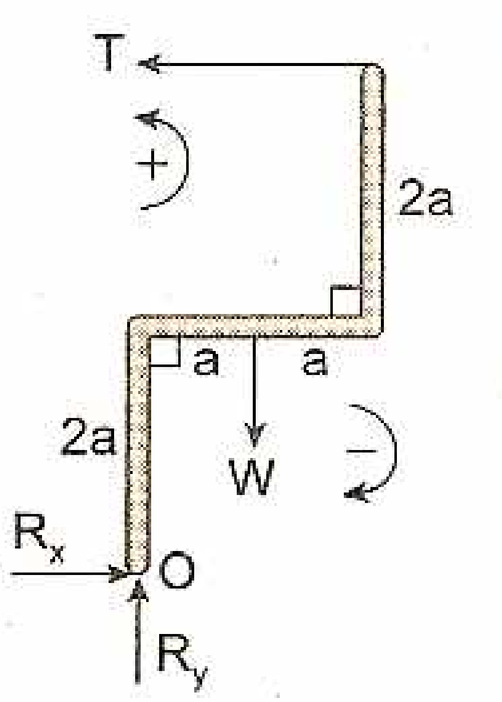
$\Rightarrow x - 10 = 20 - x \quad \therefore\ x = 15\text{ cm}$

28. Una barra homogénea de peso $\sqrt{17}$ N, ha sido doblada en tres partes iguales, tal como indica la figura; si se mantiene en equilibrio, determinar la reacción del piso rugoso sobre la barra.



Resolución:

DCL (Barra):



Equilibrio de rotación y traslación:

a) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = T$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = W$

b) $\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^T = W_O^M$

$T(4a) = W(a) \Rightarrow T = \dfrac{W}{4}$.

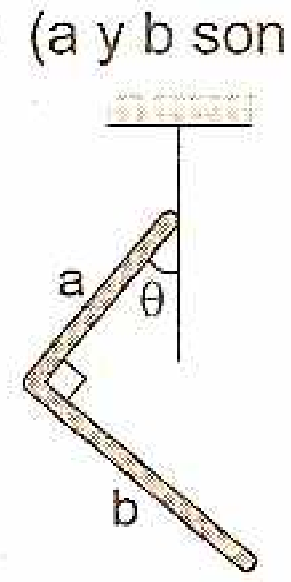
$\therefore\ R_x = \dfrac{W}{4}$

Del teorema de Pitágoras:

$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \Rightarrow R = \dfrac{W}{4}\sqrt{17}$

Del dato: R = 4,25 N

29. La figura muestra una barra homogénea doblada en forma de L. Hallar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio, si se cumple que: $a^2 + 2ab - b^2 = 0$ (a y b son las dimensiones).



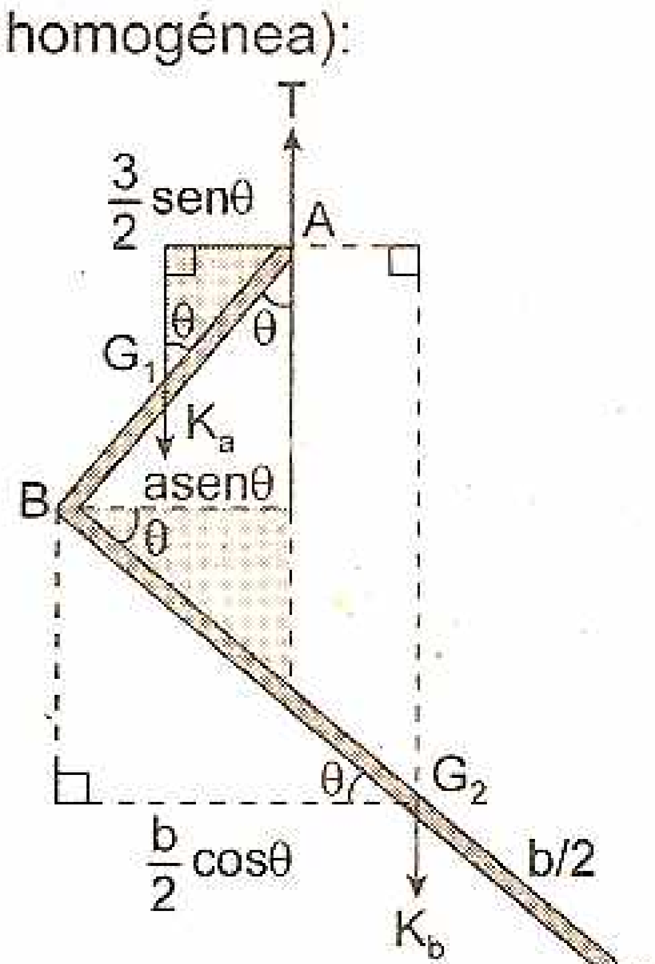
Resolución:

El peso de los lados AB y BC, son directamente proporcionales a sus longitudes

Peso = (K)(Longitud)

El peso de cada lado actúa en su centro geométrico G_1 y G_2, respectivamente.

DCL (Barra homogénea):



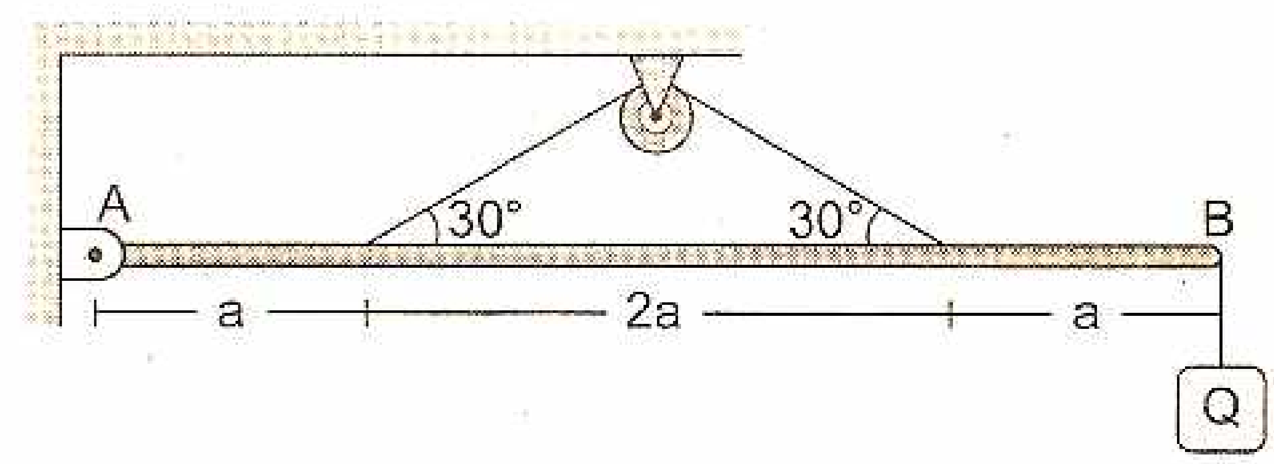
$\Sigma M_A = 0$: $M_A^{K_a} = M_A^{K_b} \Rightarrow W_1d_1 = W_2d_2$

$K_a\left[\left(\dfrac{a}{2}\right)\text{sen}\theta\right] = K_b\left[\left(\dfrac{b}{2}\right)\cos\theta - \text{sen}\theta\right]$

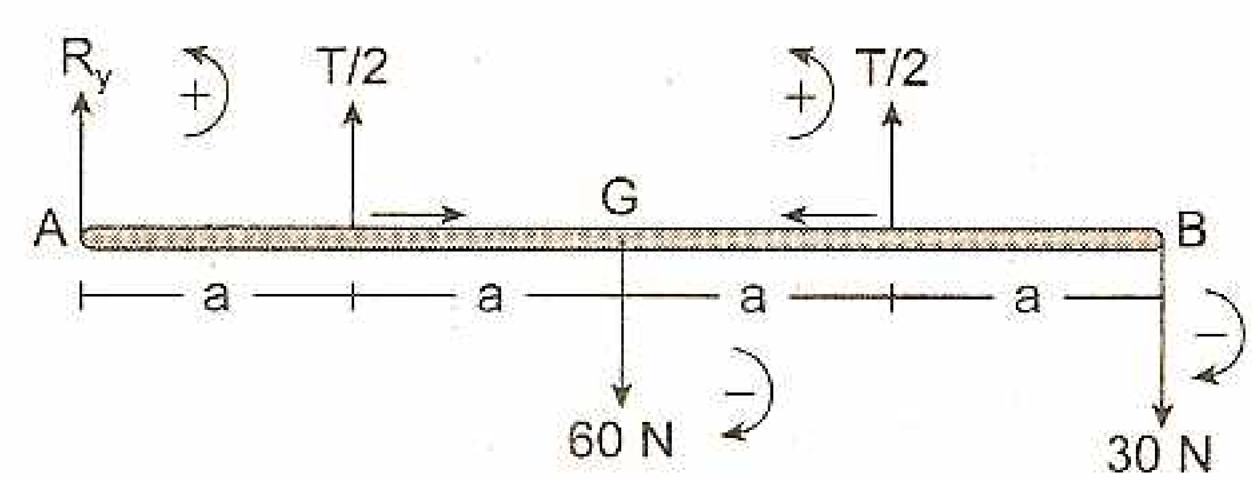
$(a^2 + 2ab)\text{sen}\theta = b^2\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{b^2}{a^2 + 2ab}$

De la condición: θ = 45°

30. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, los pesos de la barra AB y el bloque Q de 60 N y 30 N respectivamente, hallar la tensión del cable que sostiene a la barra.



Resolución:



Haciendo DCL de la barra:

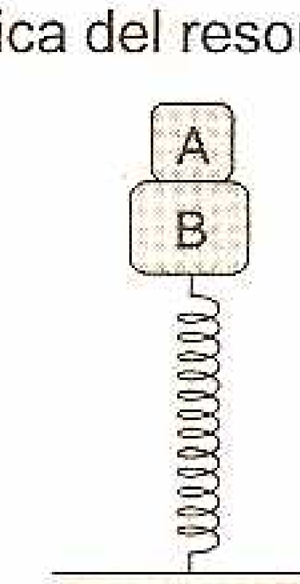
Por la 2.ª condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

$\dfrac{T}{2}(a) + \dfrac{T}{2}(3a) = 60(2a) + 30(4a)$

$2Ta = 240a \quad \therefore\ T = 120$ N

31. Los bloques A y B se encuentran en equilibrio en la posición mostrada. Si se retira lentamente el bloque A de peso 20 N, ¿qué distancia ascenderá el bloque B?

Constante elástica del resorte, k = 100 N/m.



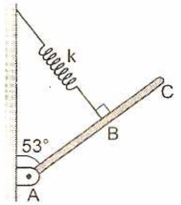
Resolución:

El peso del bloque A, produce una deformación x en el resorte. Ley de Hooke: F = kx

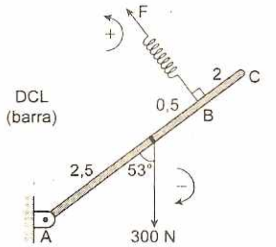
$20 = 100x \Rightarrow x = 0{,}2$ m

Luego: Al retirar el bloque A, el bloque B ascenderá 20 cm.

32. La barra homogénea de 300 N de peso se encuentra en equilibrio. Calcular la deformación del resorte de constante elástica k = 100 N/cm. Además: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{5}$.



Resolución:



$\Sigma M_A = 0$

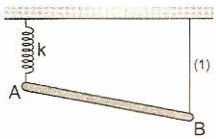
$F(3)\text{sen}90° = 300(2,5)\text{sen}53°$

$F(3) = 300(2,5)\frac{4}{5} \Rightarrow F = 200\text{ N}$

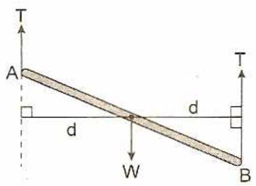
Ley de Hooke: $F = kx$

$200 = 100x \Rightarrow x = 2\text{ cm}$

33. La barra homogénea AB se encuentra en equilibrio. El resorte de constante elástica $k = 20$ N/cm está deformado 3 cm. Calcular la tensión en la cuerda (1).



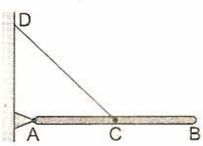
Resolución:



Ley de Hooke: $T = kx$

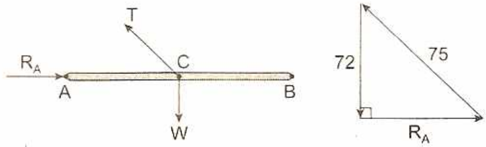
$T = 20 \times 3 \Rightarrow T = 60\text{ N}$

34. Si el peso de la barra uniforme y homogénea AB es de 72 N y la tensión en la cuerda CD es de 75 N, hallar la fuerza de reacción en el pasador A (C es punto medio de AB).



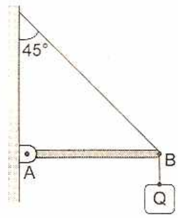
Resolución:

Hagamos DCL de la barra AB considerando que las tres fuerzas que actúan sobre la barra deben ser concurrentes:



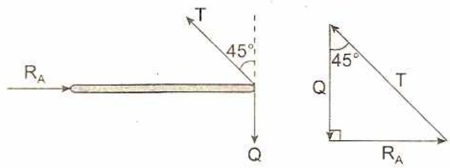
Por teorema de Pitágoras: $R_A = 21\text{ N}$

35. Si la barra imponderable AB se encuentra en equilibrio, en la posición indicada, hallar la fuerza de reacción en el gozne A. El peso del bloque Q es 4 N.



Resolución:

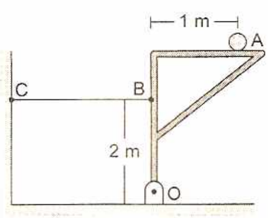
Haciendo DCL de la barra AB y construyendo el triángulo de fuerzas:



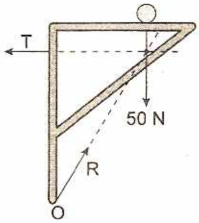
De donde: $R_A = Q = 4\text{ N}$

Conviene señalar que hemos deducido que la dirección de R_A es horizontal porque las tres fuerzas que actúan sobre la barra deben ser concurrentes.

36. El sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio. Si la estructura es de peso despreciable y la esfera A pesa 50 N, hallar la tensión en la cuerda horizontal BC.



Resolución:

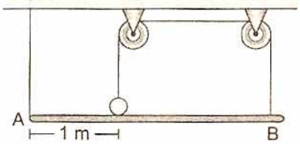


Haciendo DCL del sistema:

Por segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_o = 0$

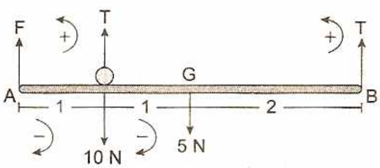
$T(2) - 50(1) = 0 \quad \therefore\ T = 25\ N$

37. La figura muestra una barra AB uniforme y homogénea de 5 N de peso y 4 m de longitud. Si la esfera de 10 N de peso se encuentra apoyada sobre la barra, hallar la fuerza de reacción entre la barra y la esfera.



Resolución:

Haciendo DCL de todo el sistema:

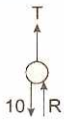


Por segunda condición de equilibrio:

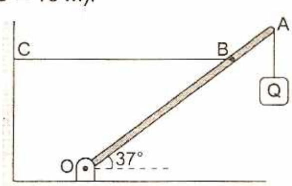
$$\Sigma M_A \overset{\curvearrowleft}{+} = \Sigma M_A \overset{\curvearrowright}{-}$$

$T(1) + T(4) = 10(1) + 5(2) \quad \therefore\ T = 4\ N$

Haciendo DCL de la esfera y aplicando la primera condición de equilibrio: $R = 6\ N$

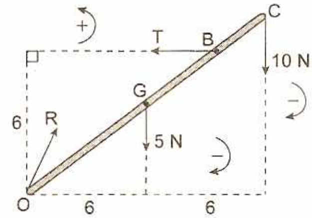


38. La figura muestra una barra OA uniforme y homogénea de 5 N de peso y 15 metros de longitud en estado de equilibrio. Si el peso del bloque Q es de 10 N, hallar la tensión de la cuerda horizontal BC (OB = 10 m).



Resolución:

Haciendo DCL de la barra:



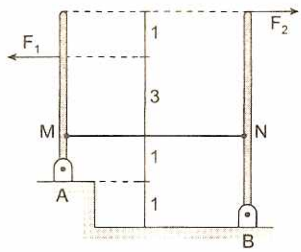
Por segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_o \overset{\curvearrowleft}{+} = \Sigma M_o \overset{\curvearrowright}{-}$$

$T(6) = 5(6) + 10(12) \quad \therefore\ T = 25\ N$

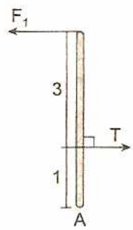
39. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, hallar en qué relación se encuentra los módulos de las fuerzas horizontales F_1 y F_2 aplicadas.

La cuerda MN es horizontal.



Resolución:

DCL de la barra izquierda:

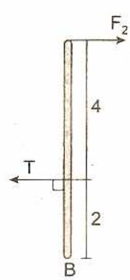


$\Sigma M_A^F = 0$

$\Rightarrow F_1(4) - T(1) = 0$

$\therefore\ T = 4F_1 \quad ...(\alpha)$

DCL de la barra derecha:



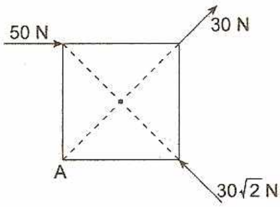
$\Sigma M_B^F = 0$

$T(2) - F_2(6) = 0$

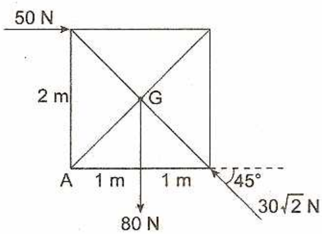
$T = 3F_2 \quad ...(\beta)$

De: $(\alpha) = (\beta)$: $4F_1 = 3F_2 \Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{3}{4}$

40. Calcular el momento resultante respecto de la rótula en A, sabiendo que la placa cuadrada de lado 2 m es homogénea y pesa 80 N.



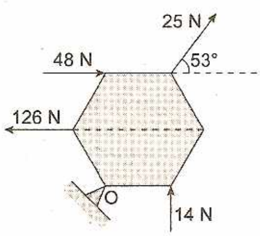
Resolución:



$\Sigma M_A = -80(1) - 50(2) + 30(\sqrt{2})(2)\text{sen}45°$

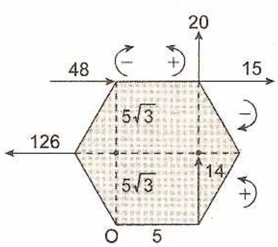
$\Sigma M_A = -80 - 100 + 60 \Rightarrow \Sigma M_A = -120$ Nm

41. La figura muestra una placa, que tiene la forma de un hexágono regular de 5 cm de lado, sobre el cual se encuentran actuando cuatro fuerzas. Encontrar el momento resultante con respecto al punto O.



Resolución:

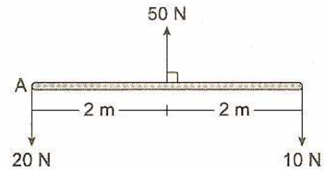
Descomponiendo las fuerzas:



$M_O^{R_O} = 126(5\sqrt{3}) - 15(10\sqrt{3}) - 48(10\sqrt{3}) + 14(5) + 20(5)$

$M_O^{R_O} = 170$ Ncm $\quad \therefore M_O^{R_O} = 1{,}7$ Nm

42. Determinar el punto de aplicación de la fuerza resultante del conjunto de fuerzas mostrado en la figura. Dar la distancia al punto A.

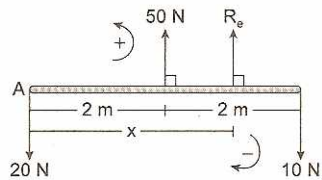


Resolución:

El módulo de la resultante: $R_e = \Sigma F$

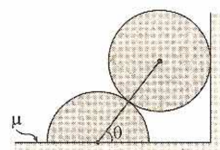
$\Rightarrow R_e = 50 - 20 - 10 \Rightarrow R_e = 20$ N

Su punto de aplicación se determina mediante el teorema de Varignon: $M_A^{Re} = \Sigma M_A^F$



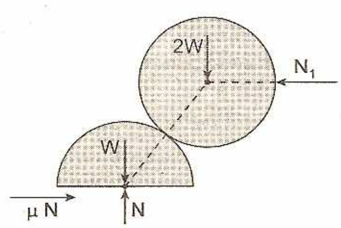
$20x = 50(2) - 10(4) \Rightarrow 20x = 60 \quad \therefore x = 3$ m

43. Calcular el mínimo ángulo θ que define la posición de equilibrio, el cual consiste en un semicilindro de peso W que sostiene a un cilindro de peso 2W. El rozamiento es considerable solamente en el plano horizontal rugoso. ($\mu_s = 0{,}5$)



Resolución:

Analizando el DCL del sistema:

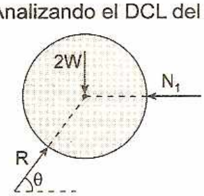


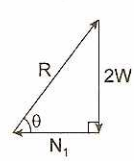
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = \mu N \qquad ...(I)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 3W \qquad ...(II)$

Reemplazando (II) en (I): $N_1 = \dfrac{3}{2}W$

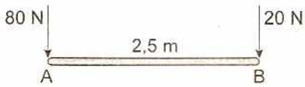
Analizando el DCL del cilindro:





$\tan\theta = \dfrac{2W}{N_1} = \dfrac{2W}{\frac{3}{2}W} = \dfrac{4}{3} \qquad \therefore\ \theta = 53°$

44. La figura muestra una barra ingrávida AB, de longitud 2,5 m. ¿A qué distancia del punto A, se encuentra aplicado la fuerza resultante?

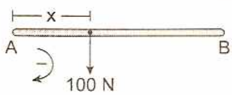


Resolución:

Cálculo del momento resultante, respecto del punto A:

$\Sigma M_A = -50$ Nm $\Rightarrow$ (−): giro horario

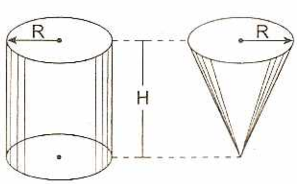
Cálculo de la fuerza resultante: $F_R = 100$ N



Teorema de Varignon: $M_A^{F_R} = \Sigma M_A$

$-F_R d = \Sigma M_A \Rightarrow -(100)x = -50 \text{ Nm} \quad \therefore\ x = 0{,}5 \text{ m}$

45. En un cilindro de radio R y altura H se realiza una perforación cónica. El cono tiene su base en la parte superior del cilindro y su vértice cae en el centro geométrico de la base del cilindro. Determinar el centro de gravedad del cuerpo que queda.



Resolución:

Consideremos el cilindro como el cuerpo total (1) y el cono como el volumen (2) que tenemos que restar.

$v_1 = \pi R^2 H;\ v_2 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$

$G_1 = (0;\ H/2);\ G_2 = (0;\ 3H/4)$

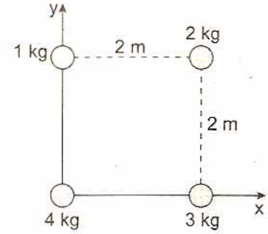
Por simetría de la figura, el centro de gravedad estará en el eje del cilindro.

$$\bar{y} = \frac{y_1 v_1 - y_2 v_2}{v_1 - v_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{(H/2)(\pi R^2 H) - (3H/4)(\pi R^2 H/3)}{2\pi R^2 H/3}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8}H$$

El centro de gravedad se encuentra a una altura 3H/8, respecto de la base, del cuerpo resultante.

46. En los vértices de un cuadrado de lado 2 m se han colocado cuatro partículas puntuales. Determinar el centro de masa (CM), respecto del sistema de coordenadas.



Resolución:

Sean: $m_1 = 1$ kg; $m_2 = 2$ kg; $m_3 = 3$ kg; $m_4 = 4$ kg

Consideremos la posición: r = (x; y)

$r_1 = (0;\ 2);\ r_2 = (2;\ 2);\ r_3 = (2;\ 0);\ r_4 = (0;\ 0)$

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

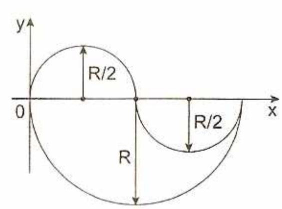
$$= \frac{(0)(1) + (2)(2) + (2)(3) + (0)(4)}{1+2+3+4} \Rightarrow x = 1{,}0 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{2(1) + 2(2) + (0)(3) + (0)(4)}{1+2+3+4} \Rightarrow y = 0{,}6 \text{ m}$$

Luego: CM = (1,0; 0,6)

47. Hallar el centro de gravedad del alambre mostrado en la figura, con respecto al sistema de coordenadas que se indica. Considere conocido R.



Resolución:

Dividimos el alambre en tres longitudes de semicircunferencias:

$L_1 = \pi R;\ L_2 = L_3 = \pi\left(\dfrac{R}{2}\right)$

$G_1 = \left(R;\ -\dfrac{2R}{\pi}\right);\ G_2 = \left(\dfrac{R}{2};\ \dfrac{R}{\pi}\right);\ G_3 = \left(\dfrac{3}{2}R;\ -\dfrac{R}{\pi}\right)$

$$\bar{x} = \frac{x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$\bar{x} = \frac{R(\pi R) + (R/2)(\pi R/2) + (3R/2)(\pi R/2)}{\pi R + \pi R} \Rightarrow \bar{x} = R$$

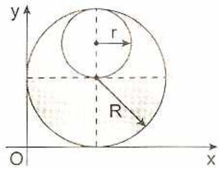
$$\bar{y} = \frac{(-2R/\pi)(\pi R) + (R/\pi)(\pi R/2) + (-R/\pi)(\pi R/2)}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = -\frac{R}{\pi}$$

El centro de gravedad estará ubicado en:

$G = (R;\ -R/\pi)$

48. Hallar el centro de gravedad, de la figura sombreada, siendo R = 36 cm y r = 18 cm.



Resolución:

Por simetría de la figura, la abscisa del centro de gravedad, estará en:

$\bar{x} = R = 36$ cm

Consideramos como área total el círculo de radio (R) y el área por restar el círculo de radio (r).

$A_1 = \pi R^2;\ A_2 = \pi r^2$

$G_1 = (R; R);\ G_2 = (R; R + r)$

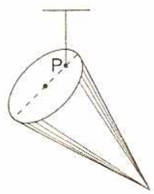
$$\bar{y} = \frac{y_1A_1 - y_2A_2}{A_1 - A_2}$$

Reemplazando:

$$\bar{y} = \frac{R(\pi R^2) - (R + r)(\pi r^2)}{\pi(R^2 - r^2)} \Rightarrow \bar{y} = 30 \text{ cm}$$

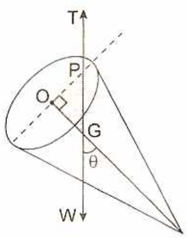
El centro de gravedad será: G = (36; 30) cm

49. La figura muestra un cono recto de altura 40 cm y radio 20 cm, suspendido desde el punto P. Si P es punto medio del radio, determinar el ángulo θ que forma el eje del cilindro con la vertical.



Resolución:

En la posición de equilibrio, el peso (W) y la tensión (T), son colineales, por consiguiente los puntos P y G, se encuentran en la misma vertical.



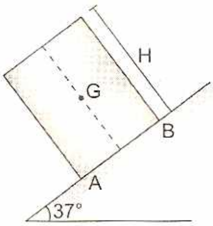
Del dato:

$OP = 10 \text{ cm} \ \wedge \ OG = \dfrac{1}{4}(h) = 10 \text{ cm}$

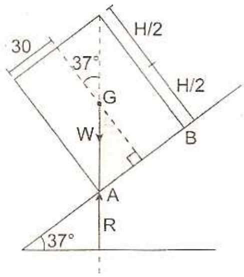
En POG: $\tan\theta = \dfrac{OP}{OG} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

50. Sobre un plano que forma con la horizontal un ángulo de 37°, se apoya un cilindro recto de radio 30 cm. ¿Qué altura máxima (H) podrá alcanzar el cilindro sin perder el equilibrio?

Existe suficiente rozamiento para no resbalar.



Resolución:



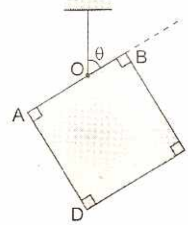
Mientras la línea de acción del peso pase por el plano de sustentación (AB), el cilindro no volcará. La máxima altura lo encontraremos cuando la línea de acción pase por A.

La reacción que ejerce el plano sobre el cilindro, es vertical y se concentra en el punto A.

De la geometría, la altura máxima será: H = 80 cm

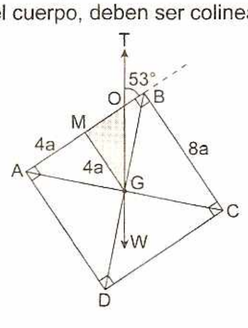
51. La figura muestra una placa cuadrada homogénea en posición de equilibrio, donde el punto O es el punto de suspensión.

Si, θ = 53°, hallar: $\dfrac{AO}{OB}$



Resolución:

En el diagrama de fuerzas, aplicadas al cuerpo, en la posición de equilibrio: La tensión en la cuerda y el peso del cuerpo, deben ser colineales.

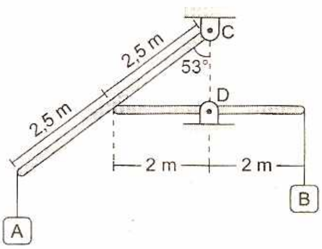


Consideremos el lado del cuadrado 8a, entonces:
AM = 4a; MO = 3a ; OB = a

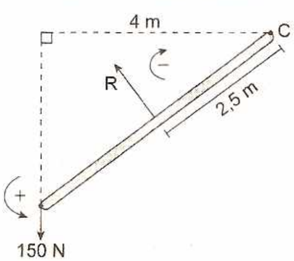
Luego: AO = 7a y OB = a

$\therefore \dfrac{AO}{OB} = 7$

52. Si el sistema mostrado en la figura se encuentra en equilibrio, determinar el peso del bloque B. El peso del bloque A es de 150 N y las barras rígidas son de peso despreciable.

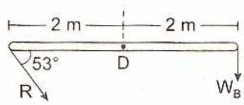


Resolución:
Haciendo DCL de la barra oblicua:



Por la segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_C = 0$
$150(4) = R(2{,}5) \Rightarrow R = 240$ N

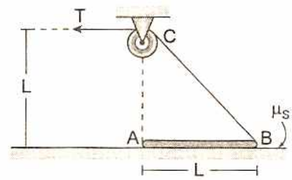
Haciendo DCL de la barra horizontal:



Por la segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_D = 0$
$R\text{sen}53°(2) = W_B(2) \Rightarrow 192(2) = W_B(2)$
$\therefore W_B = 192$ N

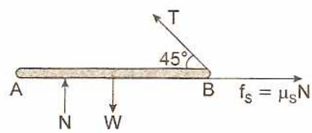
Conviene señalar que en ninguno de los DCL se han graficado las fuerzas de reacción que actúan a sus respectivas rótulas ya que al tomar momentos en éstas, dichas fuerzas se anulan.

53. La figura adjunta muestra una barra AB, uniforme y homogénea de longitud L inicialmente en reposo. Si se comienza a aumentar la tensión en la cuerda BC hasta el instante que la barra comience a deslizarse por el piso, manteniendo a partir de este momento su módulo constante, hallar la distancia que recorrerá la barra hasta el instante que comienza a levantarse con el extremo A aún deslizándose $(\mu_s = (\sqrt{6} + 1)/5)$



Resolución:
Haciendo el diagrama de cuerpo libre a la barra AB en el instante que su movimiento de traslación es inminente y aplicando la 1.ª condición de equilibrio:

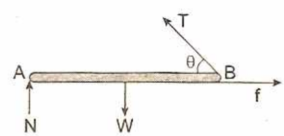
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos 45° = \mu_s N$ ...(I)
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\text{sen}45° + N = W$ ...(II)



Resolviendo las ecuaciones (I) y (II), tenemos que:

$$T = \frac{\sqrt{2}\,\mu_s W}{1 + \mu_s} \quad \text{...(III)}$$

Haciendo DCL de la barra AB en el instante que su movimiento de rotación es inminente y aplicando la segunda condición de equilibrio, ya que hasta ese momento ha mantenido su equilibrio de rotación, tenemos:



$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow T(L\text{sen}\theta) - W\left(\dfrac{L}{2}\right) = 0$

$2T\text{sen}\theta = W$ ...(IV)

Reemplazando (III) en (IV), tenemos:

$$\frac{2\sqrt{2}\,\mu_s W}{1 + \mu_s} \times \text{sen}\theta = W \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1 + \mu_s}{\sqrt{2}\,\mu_s}$$

Reemplazando datos, tenemos que:

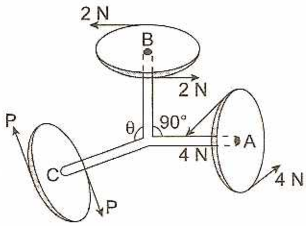
$\text{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

Analizando geométricamente, la barra resbala una distancia: $d = L - \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

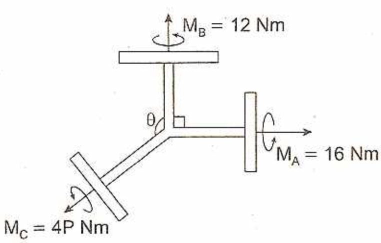
$\therefore d = \dfrac{(3 - \sqrt{3})}{3}L$

54. Tres discos circulares A, B y C de radios 2 m, 3 m y 2 m respectivamente, están fijos perpendicularmente a los extremos de tres brazos pertenecientes a un mismo plano, tal como se muestra en la figura. Si sobre los discos A y B actúan las

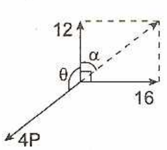
cuplas indicadas, hallar las magnitudes de las fuerzas aplicadas al disco C y el ángulo θ que forma el brazo OB con OC a fin de que el sistema esté en equilibrio.



Resolución:
El efecto de una cupla o par de fuerzas es producir solo un movimiento de rotación alrededor de un eje perpendicular al plano definido por estas fuerzas. Sabemos que el módulo del momento producido por una cupla se halla multiplicando el módulo de la fuerza por la distancia entre sus líneas de acción, su dirección es perpendicular al plano definido por éstas, su sentido se determina por la regla de la mano derecha y su punto de aplicación es cualquier punto del espacio ya que es un vector libre. Reemplazando cada una de las cuplas mostradas por el respectivo momento que produce, el sistema equivalente sería el mostrado en la figura adjunta. Por otro lado, para que el sistema esté en equilibrio de rotación la suma vectorial de los momentos que actúan sobre éste debe ser nula. Esto es equivalente a decir que la resultante de los vectores momento que actúan sobre el cuerpo debe ser cero.



De esto se deduce que: $4P = \sqrt{16^2 + 12^2} \Rightarrow P = 5$ N



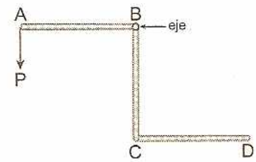
Además:

$\tan\alpha = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53°$

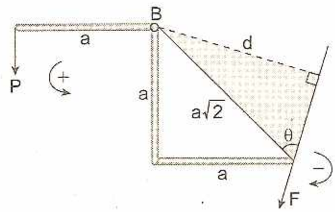
$\Rightarrow \theta = 180° - 53°$

$\Rightarrow \theta = 127°$

55. Una palanca está doblada de tal modo que sus lados AB, BC y CD son iguales y forman entre sí ángulos rectos (ver fig.). El eje de la palanca AB está en el punto B. Una fuerza P está aplicada en el punto A perpendicularmente al brazo de la palanca AB. Determinar el valor mínimo de la fuerza que es necesario aplicar el punto D, para que la palanca se encuentre en equilibrio. El peso de la palanca es despreciable.



Resolución:



Suma de momentos, respecto de B, igual a cero.

$$M_B^F = M_B^P$$

$Fd = Pa$ ...(I)

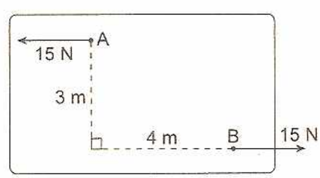
Pero: $d = a\sqrt{2}\,\text{sen}\theta$

En (I): $F = \dfrac{P\sqrt{2}}{2(\text{sen}\theta)}$ ...(II)

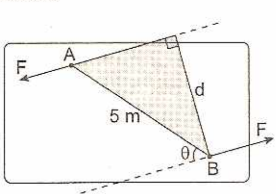
Analizando la ecuación (II), F será mínimo, cuando, senθ sea máximo, es decir, la unidad.

En (II): $F_{(min)} = P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

56. Reemplazar el par de fuerzas mostrado en la figura, por otro equivalente, de tal manera que las fuerzas que la generan también estén aplicadas en A y B, pero sean de módulo mínimo.



Resolución:
El momento producido por el nuevo par es 45 Nm, es decir:



$Fd = 45$ ...(I)

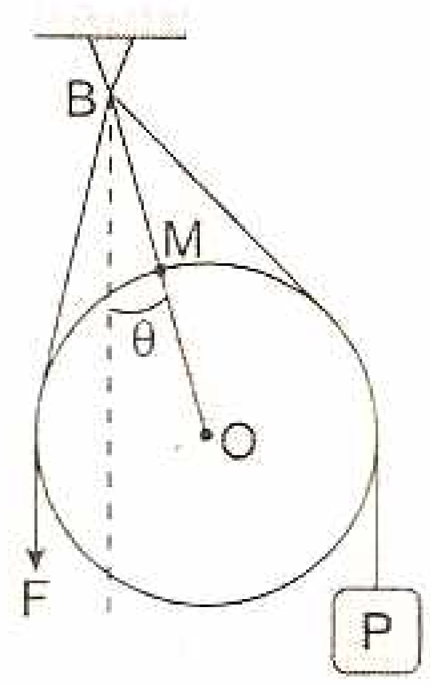
Pero: $d = (5)\text{sen}\theta$

En (I): $F = \dfrac{9}{\text{sen}\theta}$ ...(II)

Analizando la ecuación (II), F_{min}, cuando la función seno es máximo: $\text{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$

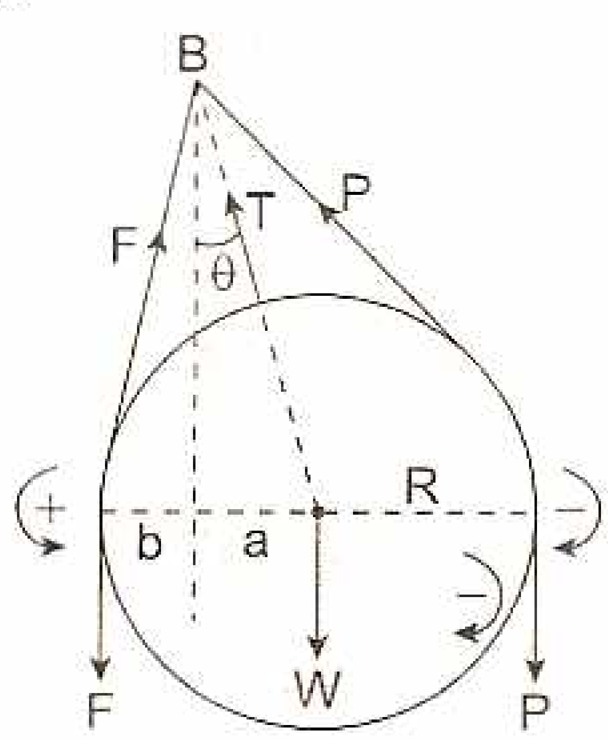
Reemplazando en (II): $F_{mín.} = 9$ N

57. La figura muestra una esfera homogénea y lisa de peso 4 N. El sistema en equilibrio presenta tres cuerdas, hallar la magnitud de la fuerza F, de modo que la cuerda BM se desvía un ángulo $\theta = \text{arcsen}(1/7)$ hacia la derecha respecto a la vertical. El bloque P tiene un peso de 8 N. Además: OM = BM.



Resolución:

Consideramos nuestro sistema físico, la esfera más la porción de cuerdas que bordean la esfera. La suma de momentos respecto del punto B es igual a cero:



$\Sigma M_B = 0$

$M_B^F = M_B^W + M_B^P$

$Fb = Wa + P(a + R)$ ...(1)

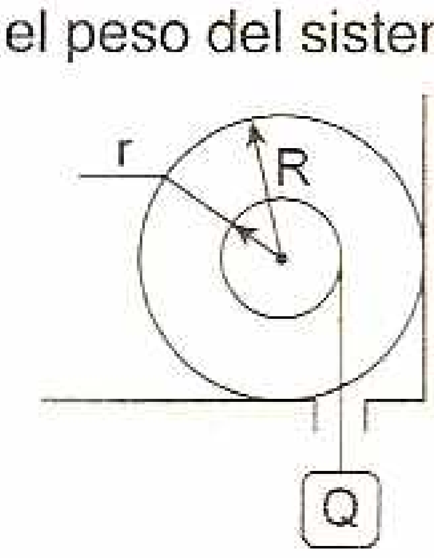
Pero: BM = MO = R

$a = 2R\text{sen}\theta \wedge b = R(1 - 2\text{sen}\theta)$

$\text{sen}\theta = \dfrac{1}{7}$

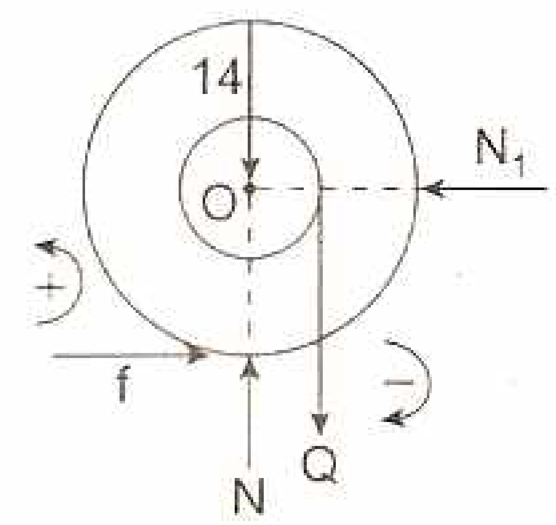
Reemplazando en (1): F = 16 N

58. La figura muestra un sistema formado por dos poleas solidarias de radios R = 80 cm y r = 40 cm apoyado en una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento $m_s = 0{,}25$ y en una pared vertical completamente lisa. Determinar el máximo peso permisible del bloque Q manteniéndose el equilibrio, sabiendo que el peso del sistema es de 14 N.



Resolución:

Haciendo DCL del sistema y aplicando condiciones de equilibrio:



$\Sigma F_y + = \Sigma F_y -$

$N = 14 + Q$ ...(I)

$\Sigma M_o \circlearrowright + = \Sigma M_o \circlearrowleft -$

$f(2r) = Q(r)$

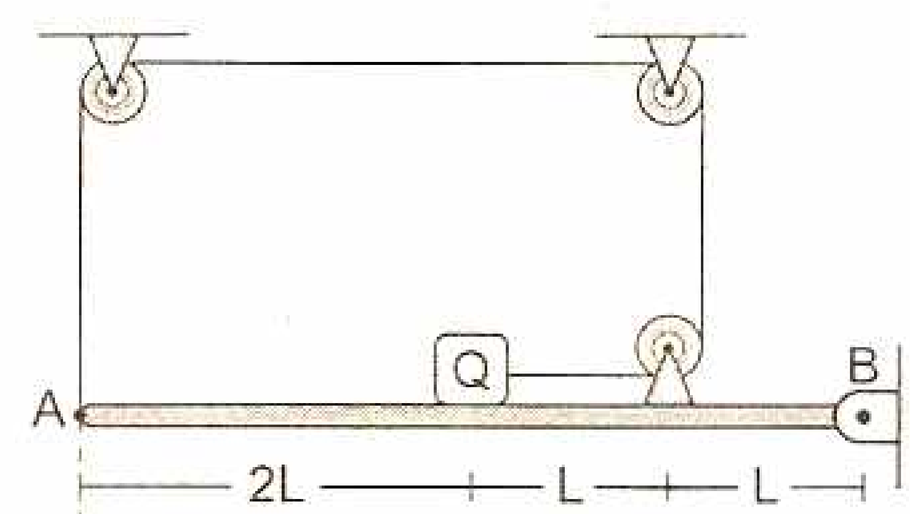
$f = \mu_s N = 0{,}25N$

$\therefore 0{,}5N = Q$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):

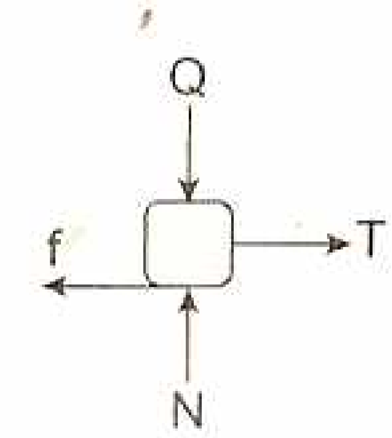
$0{,}5(14 + Q) = Q \quad \therefore Q = 14$ N

59. Si la barra AB uniforme y homogénea mostrada en la figura pesa 10 N y el coeficiente de razonamiento entre este y el bloque Q es 0,8, determinar el mínimo peso de Q para que el sistema se conserve en equilibrio.



Resolución:

Haciendo DCL del bloque Q y aplicando la primera condición de equilibrio:



$\Sigma F_y + = \Sigma F_y -$

$N = Q$

$\Sigma F_x + = \Sigma F_x -$

$T = 0{,}8N$

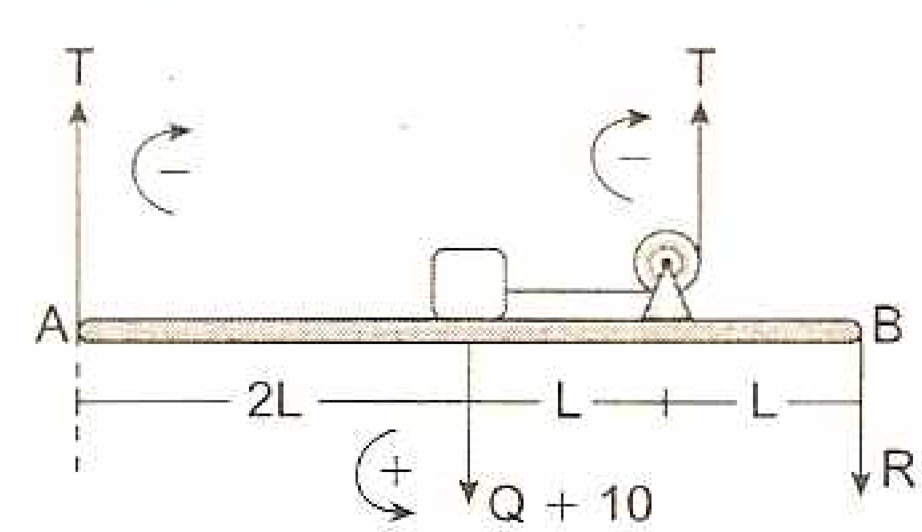
$\Rightarrow T = 0{,}8Q$ ...(I)

Haciendo DCL de todo el sistema y aplicando la segunda condición de equilibrio:

$\Sigma M_B \circlearrowright + = \Sigma M_B \circlearrowleft -$

$(Q + 10)(2L) = T(4L) + T(L)$

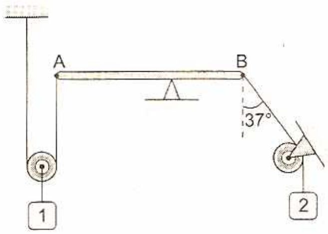
$\Rightarrow 2Q + 20 = 5T$ ...(II)



Reemplazando (I) en (II):

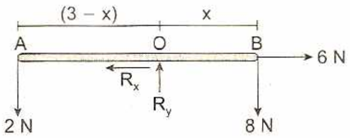
$2Q + 20 = 4Q \quad \therefore Q = 10$ N

60. ¿A qué distancia de B se debe colocar el apoyo fijo para que la barra de peso despreciable y 3 m de longitud, permanezca en equilibrio? Poleas ingrávidas. ($W_1 = 4$ N y $W_2 = 10$ N).



Resolución:

DCL de la barra AB:



Equilibrio de rotación:

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{2N} = M_O^{8N}$

$2(3 - x) = 8x \Rightarrow x = 0{,}6$ m

Aplicando el teorema de Varignon:

Cálculo del momento resultante, sin considerar a la reacción en el apoyo: $M_B = 6$ Nm

Fuerza resultante en el eje Y: $F_y = 10$ N

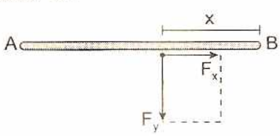
La fuerza resultante en el eje X, no produce momento respecto de B: $M_B^{F_y} = \Sigma M_B$

$F_y(x) = \Sigma M_B$

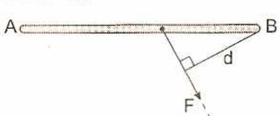
Reemplazando: $10x = 6 \Rightarrow x = 0{,}6$ m

Observaciones:

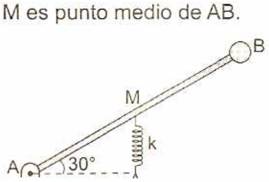
Para calcular "x":



Para calcular "d":



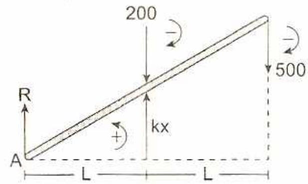
61. El sistema físico mostrado en la figura consta de una barra AB uniforme y homogénea de 200 N de peso y 2 m de longitud cuyo extremo lleva soldado una esferilla metálica de 500 N de peso. Si el sistema se encuentra en equilibrio en la posición indicada por acción del resorte cuya longitud natural es de 0,8 m, determinar la constante de elasticidad del resorte. M es punto medio de AB.



Resolución:

Debemos señalar que la fuerza recuperadora en un resorte es directamente proporcional a su deformación (Ley de Hooke), cumpliéndose que:

$F = kx \Rightarrow F = k(0{,}3)$



Haciendo DCL de la barra:

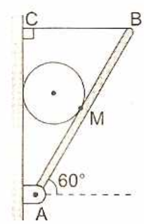
Por la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_A \circlearrowleft^{+} = \Sigma M_A \circlearrowright^{-}$$

$0{,}3k(L) = 200(L) + 500(2L)$

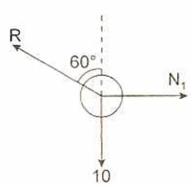
$\therefore\ k = 4000$ N/m

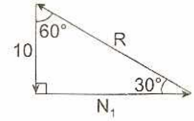
62. Si el peso de la esfera mostrada en la figura es de 10 N y el peso de la barra AB uniforme y homogénea es de 8 N, determinar la tensión en la cuerda horizontal BC. M es punto medio de AB.



Resolución:

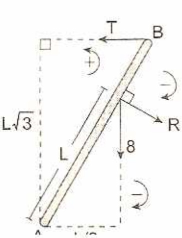
Haciendo DCL de la esfera y construyendo el triángulo de fuerzas tenemos:





De donde: R = 20 N

Haciendo DCL de la barra AB.



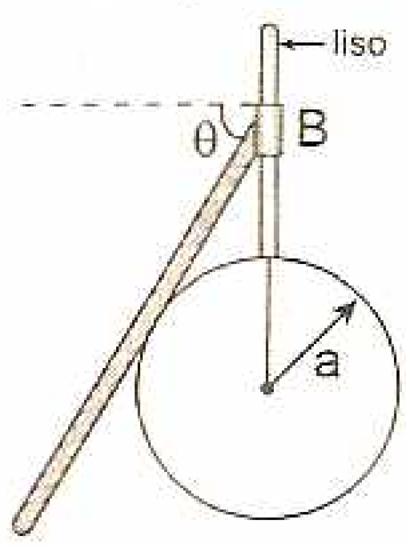
2.ª condición de equilibrio:

$$\Sigma M_A \circlearrowleft^{+} = \Sigma M_A \circlearrowright^{-}$$

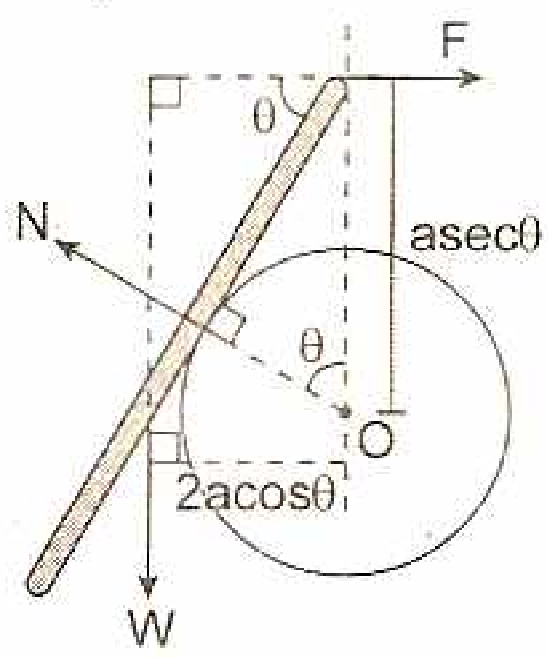
$$T(L\sqrt{3}) = 8\left(\frac{L}{2}\right) + 20(L)$$

$\therefore\ T = 8\sqrt{3}$ N

63. Una varilla uniforme y homogénea de longitud 4a está sujeta a un collarín en B y descansa sobre un cilindro liso de radio "a". Sabiendo que el collarín puede deslizarse libremente a lo largo de la guía vertical, hallar la medida del ángulo θ correspondiente al equilibrio.

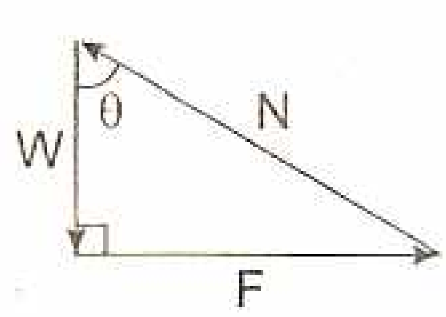


Resolución:
Realizamos el diagrama de fuerzas sobre la barra homogénea de peso W.



Fuerza resultante igual a cero:

$\tan\theta = \dfrac{F}{W}$ ...(I)

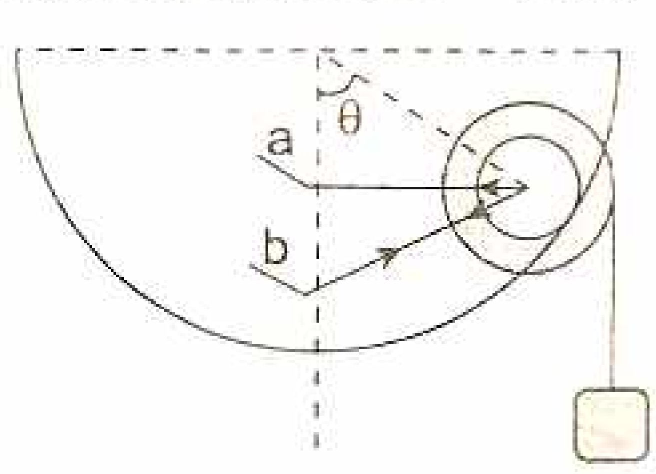


Suma de momentos respecto del centro de curvatura O es igual a cero: $\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^W = M_O^F$

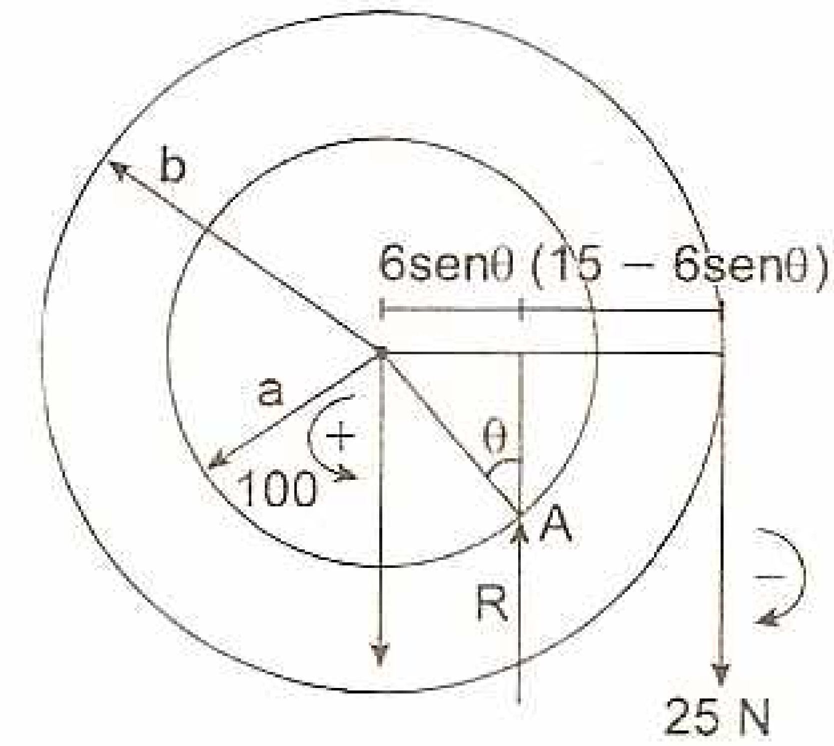
$w(2a)\cos\theta = F(a)\sec\theta \Rightarrow \dfrac{F}{W} = 2\cos^2\theta$ ...(II)

Pero, (I) = (II): $2\cos^3\theta = \operatorname{sen}\theta$
Resolviendo: $\theta = 45°$

64. Una rueda de peso 100 N gira sobre su cubo (riel circular) ascendiendo sobre la superficie curvilínea por acción del peso del bloque de 25 N que pende de una cuerda enrrollada en su superficie. Determinar la medida del ángulo θ al cual se detiene la rueda, suponiendo que el rozamiento es suficiente para impedir el deslizamiento. a = 6 cm y b = 15 cm.



Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre de la rueda. Las fuerzas que actúan sobre la rueda son los pesos de 100 N y 25 N, además la fuerza de reacción R del cubo representado por una fuerza vertical.



La sumatoria de momentos, respecto del punto A es igual a cero: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A^{100} = M_A^{25}$

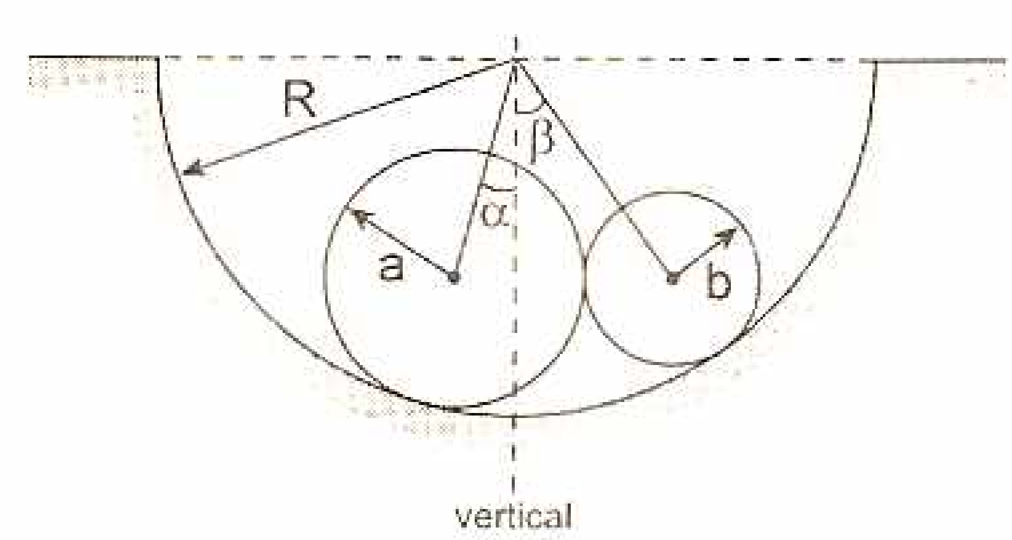
$100(6\operatorname{sen}\theta) = 25(15 - 6\operatorname{sen}\theta)$

$24\operatorname{sen}\theta = 15 - 6\operatorname{sen}\theta$

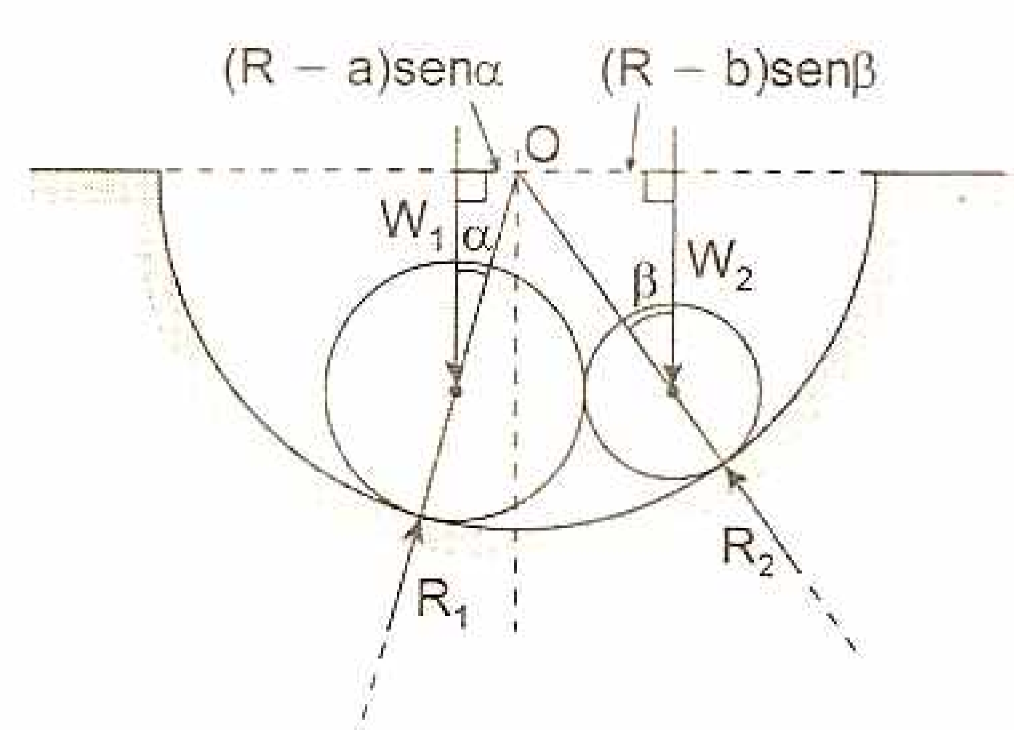
$\operatorname{sen}\theta = 1/2 \quad \therefore\ \theta = 30°$

65. La figura muestra dos esferas del mismo material de radios a = 3 cm y b = 2 cm, sobre una superficie esférica de radio de curvatura R = 11 cm. No existe rozamiento.

Hallar la razón: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$



Resolución:
Sea nuestro sistema físico, las dos esferas de radios "a" y "b".
Diagrama del cuerpo libre, del sistema físico elegido. La sumatoria de momentos respecto del centro geométrico de la superficie esférica, es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$



$M_O^{W_1} = M_O^{W_2}$

$W_1(R - a)\operatorname{sen}\alpha = W_2(R - b)\operatorname{sen}\beta$

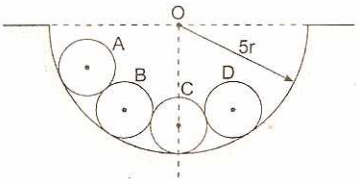
$DgV_1(R - a)\operatorname{sen}\alpha = DgV_2(R - b)\operatorname{sen}\beta$

$$\frac{4\pi}{3}a^3(R-a)\text{sen}\alpha = \frac{4\pi}{3}b^3(R-b)\text{sen}\beta$$

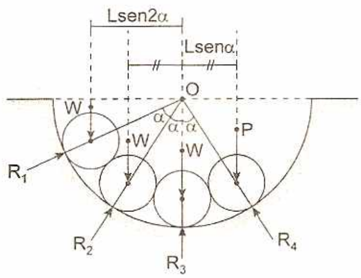
$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = \frac{b^3(R-b)}{a^3(R-a)}$$

Reemplazando valores: $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = \frac{1}{3}$

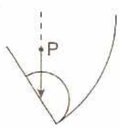
66. En la figura mostrada las esferillas son de igual "r", donde A, B y C tiene pesos iguales a 4 N cada uno. Hallar el peso de la esferilla D, tal que el sistema se encuentre en equilibrio del modo indicado, sabiendo que descansan sobre la superficie semiesférica de radio 5r.



Resolución:



Consideramos en nuestro sistema físico, las cuatro esferas. Diagrama del cuerpo libre del sistema físico elegido.



La suma de momentos respecto del centro de curvatura O es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$

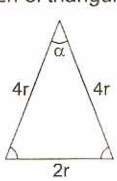
$M_O^D = M_O^A + M_O^B + M_O^C$

$P(L\text{sen}\alpha) = W(L\text{sen}2\alpha) + W(L\text{sen}\alpha) + 0$

$\Rightarrow P\text{sen}\alpha = 2W\text{sen}\alpha\cos\alpha + W\text{sen}\alpha$

$P = W(1 + 2\cos\alpha)$ ...(I)

En el triángulo isósceles formado:

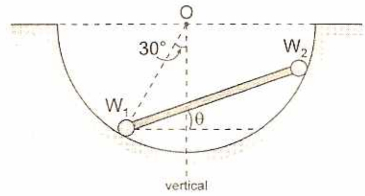


Ley de cosenos: $\cos\alpha = \frac{7}{8}$

Reemplazando en (I):

$P = \frac{11}{4}W \Rightarrow P = 11\text{ N}$

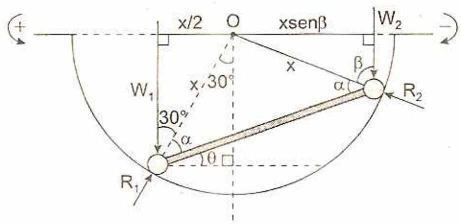
67. La figura muestra dos esferas de igual radio, unidos por una barra de peso despreciable, apoyados sobre una superficie cilíndrica. Si el peso de las esferas son: $W_1 = 6$ N y $W_2 = 5$ N, determinar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio del sistema mecánico. No existe rozamiento.



Resolución:

Sea nuestro sistema físico, las dos esferas (W_1 y W_2) unidas con la barra.

Diagrama del cuerpo libre, del sistema físico escogido.



De la segunda condición de equilibrio:

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{W_1} = M_O^{W_2}$

$(6)\frac{x}{2} = 5(x\text{sen}\beta) \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 37°$

Del diagrama del cuerpo libre:

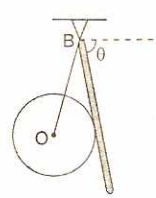
$30° + \alpha + \theta = 90°$ ...(I)

$(\alpha - \theta) + \beta = 90°$ ...(II)

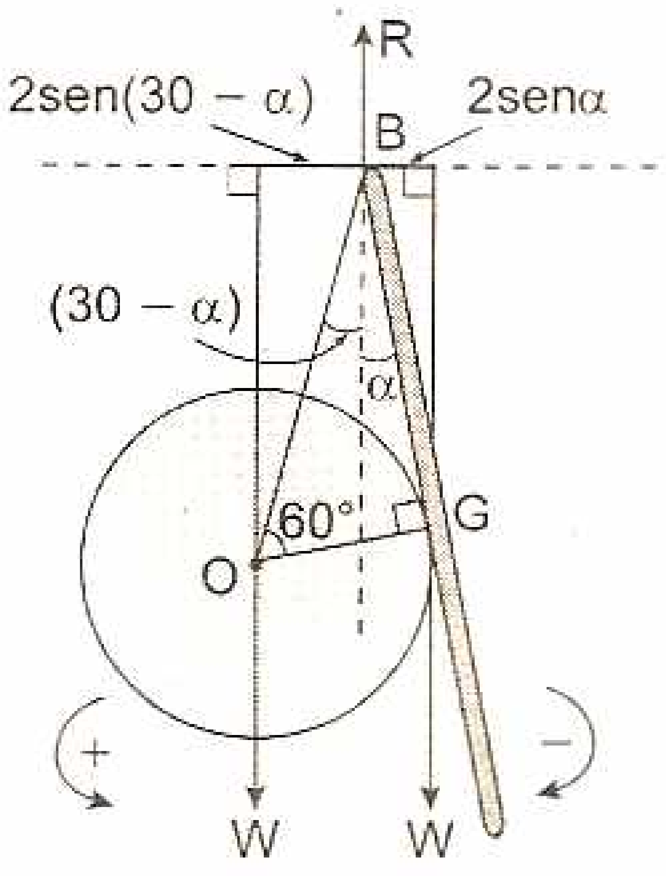
De (I) − (II): $\theta = \frac{\beta - 30°}{2}$

Reemplazando el valor de β: $\theta = 3{,}5°$

68. En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. Si, OB = 2 m, el radio de la esfera homogénea es 1,0 m y la longitud de la barra uniforme y homogénea es 4 m. Donde O es el centro de la esfera y ambos cuerpos tienen pesos iguales.



Resolución:



Consideramos nuestro sistema físico, la esfera, más, la barra y la cuerda. El diagrama de fuerzas del sistema físico elegido arbitrariamente:

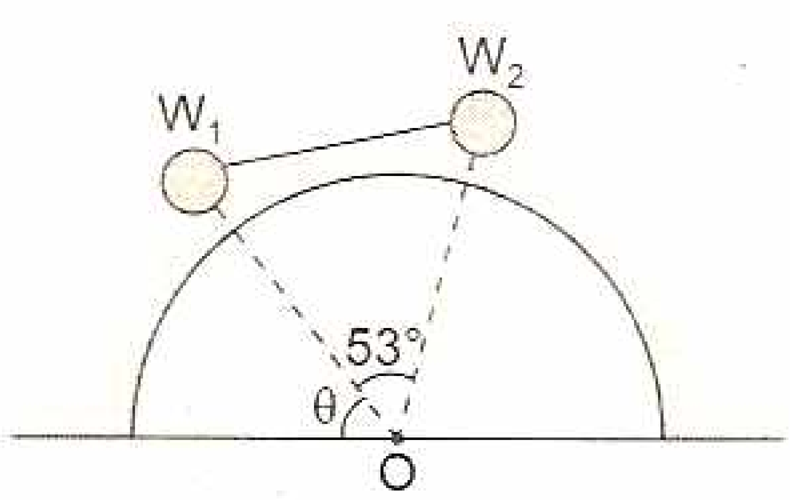
Suma de momentos respecto del punto B es igual a cero: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_B^O = M_B^G$

$W[2\text{sen}(30 - \alpha)] = W(2\text{sen}\alpha)$

$\text{sen}(30° - \alpha) = \text{sen}\alpha \Rightarrow 30° - \alpha = \alpha$

$\alpha = 15° \quad \wedge \quad \theta = 75°$

69. Determinar la medida del ángulo θ, para que el sistema mostrado se encuentre en equilibrio. Se trata de dos esferas de igual tamaño, unidos por hilo de peso despreciable y se encuentran sobre una superficie cilíndrica carente de fricción.

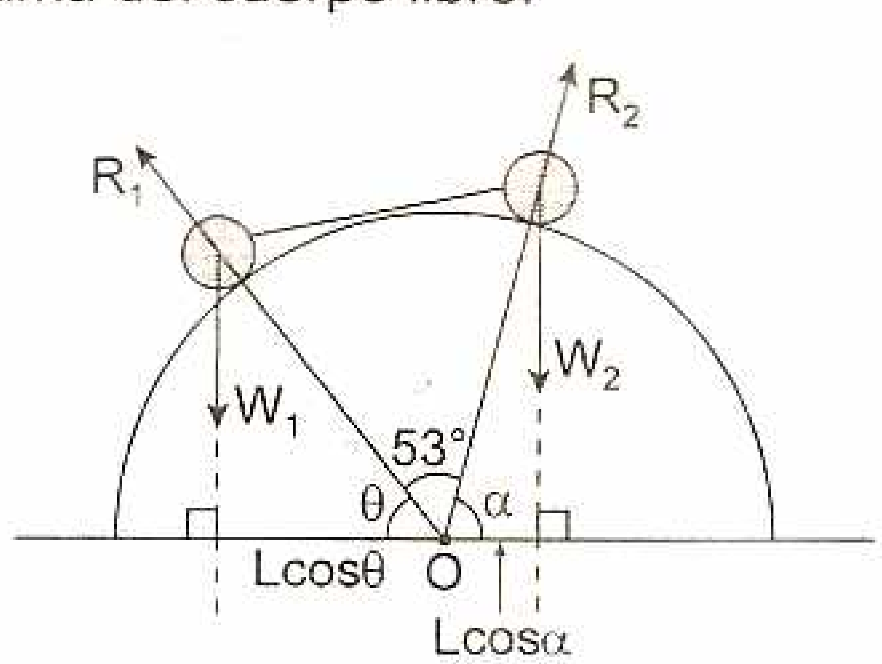


$W_1 = 15\text{ N}$ y $W_2 = 7\text{ N}$

Resolución:

Consideremos nuestro sistema físico, las dos esferas más la cuerda.

Diagrama del cuerpo libre:



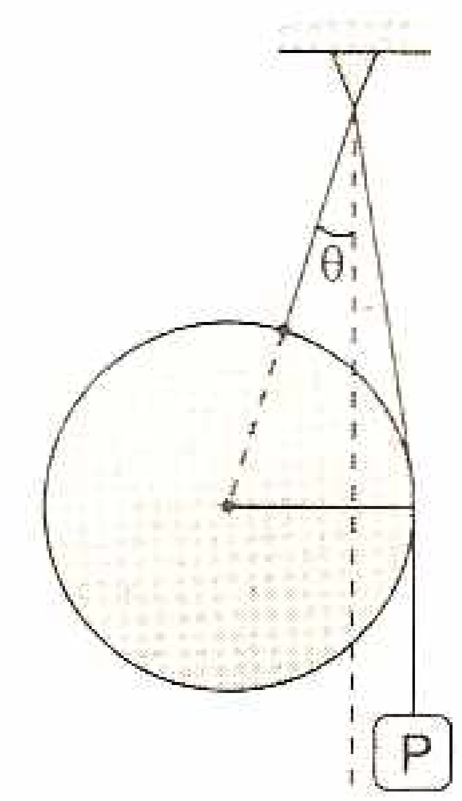
La suma de momentos, respecto del centro de curvatura O, es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$

$M_O^{W_1} = M_O^{W_2} \quad \wedge \quad W_1(L\cos\theta) = W_2(L\cos\alpha)$

$15\cos\theta = 7\cos(127° - \theta) \Rightarrow 15\cos\theta = 7\text{sen}(\theta - 37°)$

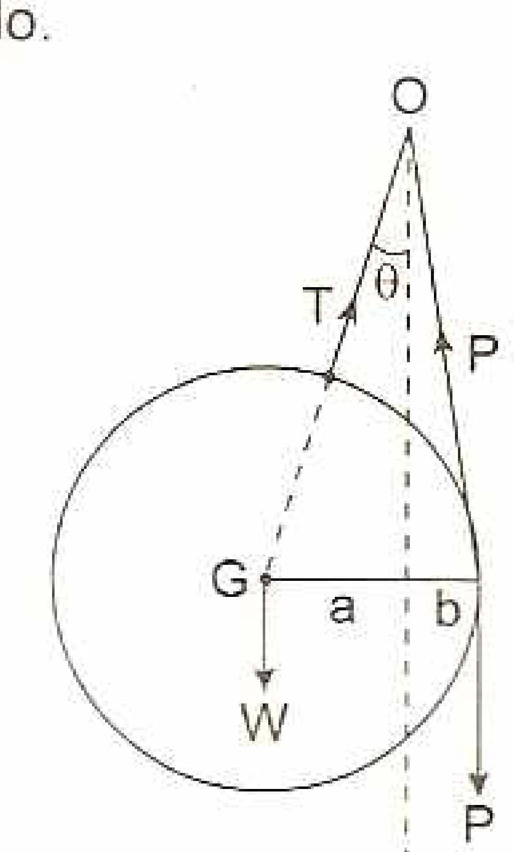
$\tan\theta = \dfrac{24}{7} \qquad \therefore\ \theta = 74°$

70. Se tiene una esfera de radio 60 cm y de peso 2 N, del punto O se suspende mediante una cuerda un bloque P de peso 10 N, haciendo que la esfera se desvíe con respecto a su posición inicial. Si la longitud de la cuerda que ata la esfera es 40 cm, calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. No hay rozamiento.



Resolución:

Consideremos nuestro sistema físico, a la esfera más una porción de cuerda que bordea la esfera. Realizamos el diagrama de fuerzas del sistema físico elegido.



$a = 100\text{sen}\theta \quad \wedge \quad b = 60 - 100\text{sen}\theta$

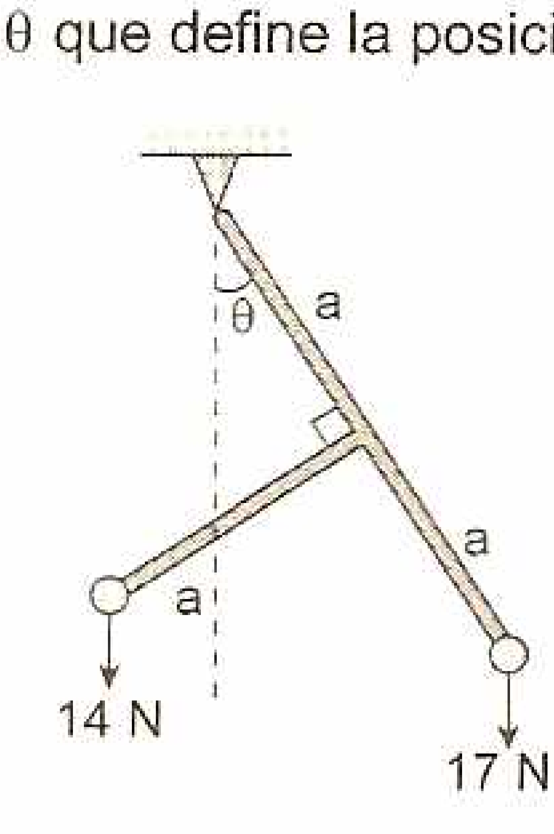
La suma de momentos respecto del punto O es igual a cero:

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^W = M_O^P$

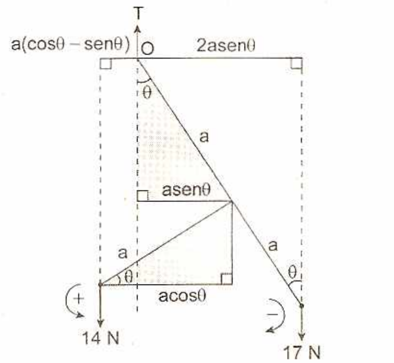
$Wa = Pb \Rightarrow 2(100\text{sen}\theta) = 10(60 - 100\text{sen}\theta)$

$\text{sen}\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 30°$

71. La figura muestra una estructura en forma de T de peso despreciable. En los extremos de la estructura se encuentran soldados dos esferas de pesos 14 N y 17 N respectivamente. Determinar el valor del ángulo θ que define la posición de equilibrio.



Resolución:
Realizamos el diagrama del cuerpo libre, del sistema físico (estructura + esferas).



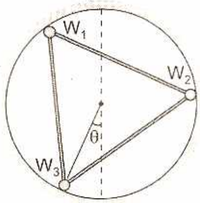
Equilibrio de rotación: $\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{14\,N} = M_O^{17\,N}$

$14a(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 17(2a\operatorname{sen}\theta)$

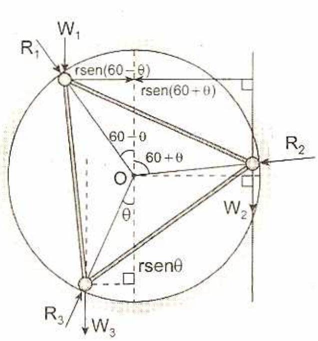
$7\cos\theta - 7\operatorname{sen}\theta = 17\operatorname{sen}\theta$

$\tan\theta = \dfrac{7}{24} \quad \therefore\ \theta = 16°$

72. Tres pequeñas esferas sólidas y rígidas de pesos: $W_1 = 1$ N; $W_2 = 2$ N; $W_3 = 3$ N, que pueden moverse en un aro circular liso, están enlazados por tres varillas de pesos despreciables y de igual longitud. Calcular la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio. Las tres esferas están contenidos en un plano vertical.



Resolución:
Consideramos nuestro sistema físico, los tres cuerpos esféricos y las varillas. Diagrama del cuerpo libre:



La sumatoria de momentos respecto del centro de curvatura O, es igual a cero: $\Sigma M_O = 0$

$M_O^{W_1} + M_O^{W_3} = M_O^{W_2}$

$W_1 r\operatorname{sen}(60° - \theta) + W_3 r\operatorname{sen}\theta = W_2 r\operatorname{sen}(60° + \theta)$

$\operatorname{sen}(60° - \theta) + 3\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}(60° + \theta)$

$\cot\theta = \sqrt{3} \quad \therefore\ \theta = 30°$

73. La figura 1 muestra tres ladrillos idénticos de longitud mayor L, colocados de manera peculiar, determinar el máximo valor de x, de tal modo que el conjunto permanezca en equilibrio.

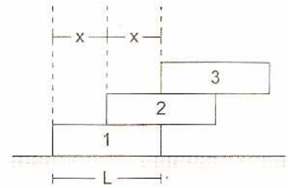
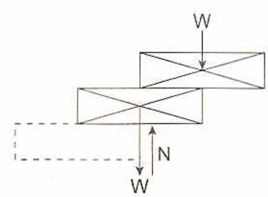


Fig. 1

Resolución:
La experiencia muestra que el primer ladrillo (el que está en contacto con el plano horizontal) no puede girar, por consiguiente cuando se produce el desequilibrio el segundo ladrillo gira con respecto al extremo derecho del primer ladrillo.



DCL del sistema de dos ladrillos

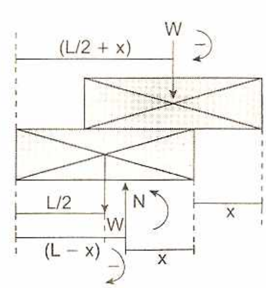
Cuando analizamos al sistema (ladrillos 2 y 3), la reacción normal N se concentra en el extremo del primer ladrillo:

$\Sigma F_y = 0$, entonces: $N = 2W$ ...(I)

Esto quiere decir que la fuerza resultante de todos los pesos se concentra en el extremo derecho del primer ladrillo.

La figura muestra el DCL del sistema de dos cuerpos (ladrillos 2 y 3):

De la segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_O = 0$



$M_O^N - M_O^W - M_O^W = 0$ ...(II)

$N(L - x) - W\left(\dfrac{L}{2}\right) - W\left(\dfrac{L}{2} + x\right) = 0$ ...(III)

Reemplazando (I) en (III):

$$2W(L-x) - W\left(\frac{L}{2}\right) - W\left(\frac{L}{2}+x\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2L - 2x - \frac{L}{2} - \frac{L}{2} - x = 0$$

Resolviendo: $L - 3x = 0$, entonces: $x = \frac{L}{3}$ ...(IV)

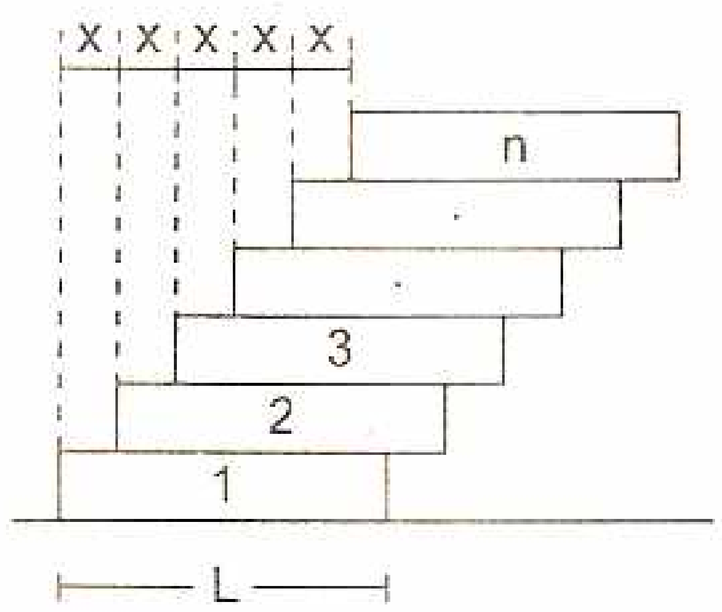


Fig. 2

La figura (2) muestra "n" ladrillos idénticos de longitud mayor L, colocados de manera peculiar, determinar el máximo valor de x, de tal modo que el conjunto permanezca en equilibrio.

Análogamente al problema anterior se demuestra que, x es igual a:

$x = \frac{L}{n}$, donde: n = 2; 3; 4; 5; 6; ...; $+\infty$

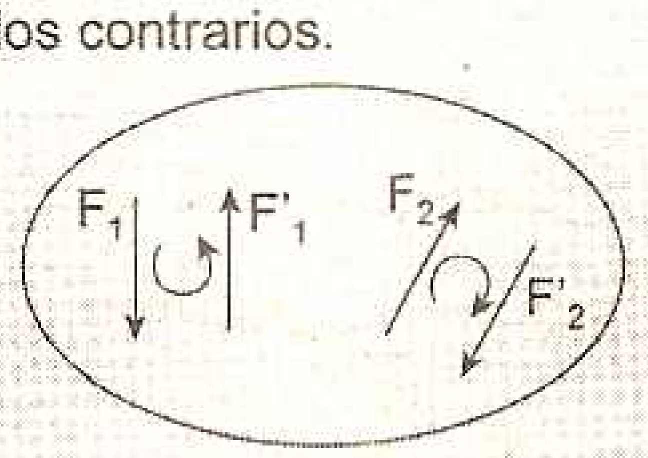
Teorema

Si un sistema se encuentra en equilibrio y sobre él actúan cuatro fuerzas coplanares, teniendo dos de ellas una dirección dada y las otras dos otra, dicho sistema de fuerzas deberá reducirse a dos cuplas de igual momento pero de sentidos contrarios.

$F_1 = F'_1$

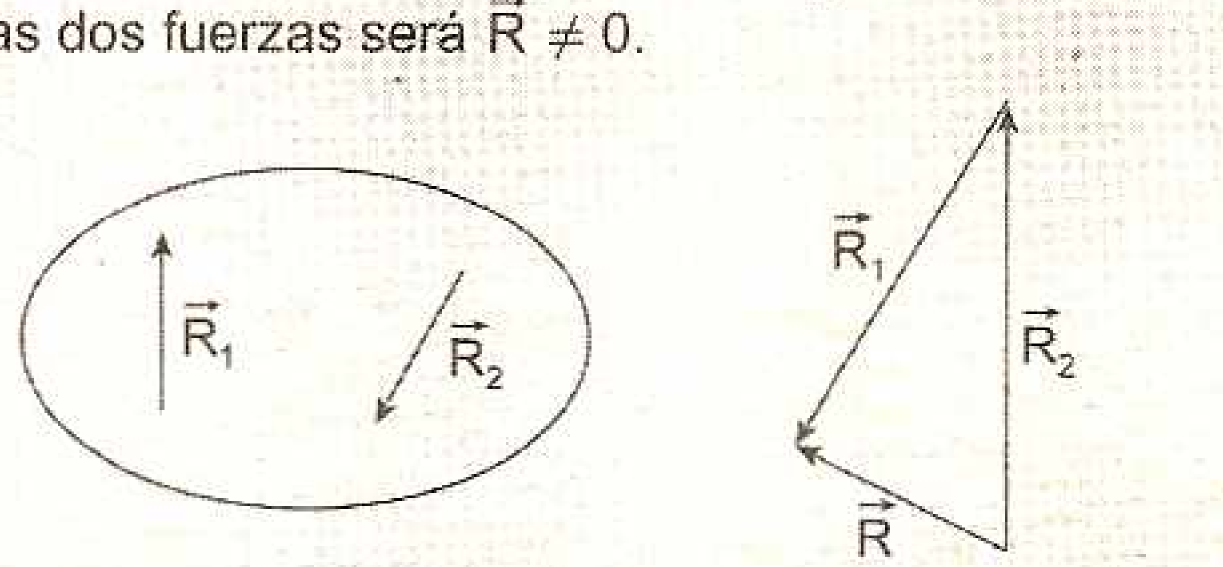
$F_2 = F'_2$

$M^{cupla_1} = M^{cupla_2}$



Demostración:

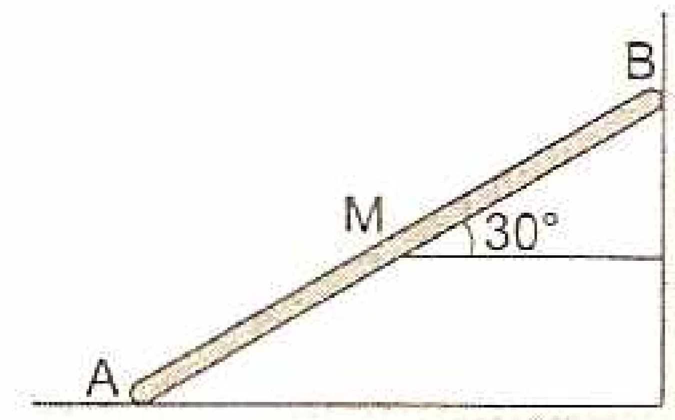
Demostraremos, por falsa suposición, que cada una de las fuerzas, del par de fuerzas paralelas, deben tener un mismo módulo y sentidos contrarios. En efecto, supongamos que la resultante del primer par de fuerzas es $\vec{R}_1$ y la del segundo es $\vec{R}_2$, la resultante de estas dos fuerzas será $\vec{R} \neq 0$.



Este resultado contradice la primera condición de equilibrio. Entonces, para que exista equilibrio, debe cumplirse que los vectores resultantes $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ deben ser nulos.

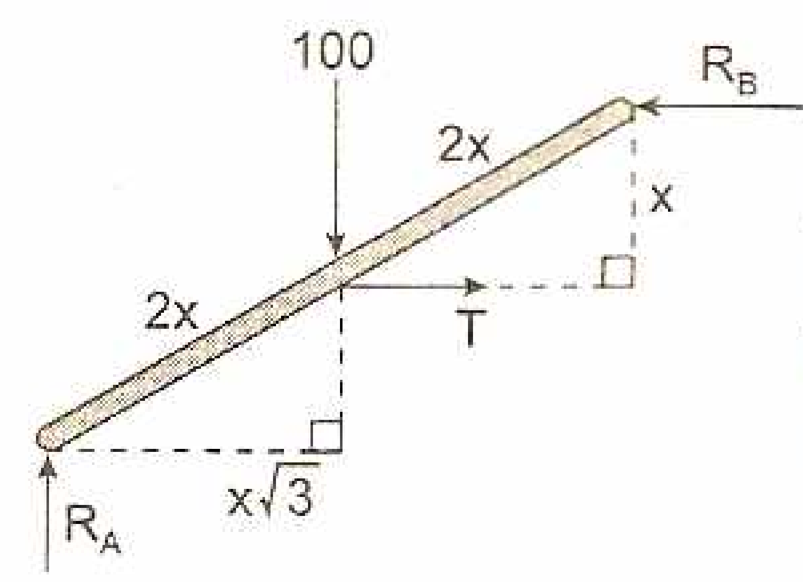
De esto concluimos que: $F_1 = -F'_1$; $F_2 = -F'_2$

74. Si la barra AB uniforme y homogénea que muestra la figura pesa 100 N, determinar el valor de la tensión y de las reacciones en los puntos de apoyo. M es punto medio de AB.



Resolución:

Haciendo DCL de la barra, vemos que sobre ellas actúan cuatro fuerzas.



Aplicando el teorema:

$R_A = 100$

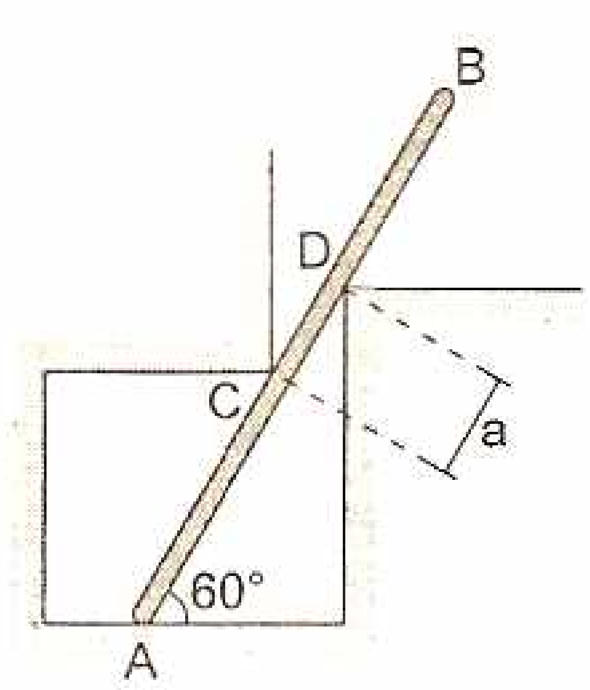
$T = R_B$

$100(x)(\sqrt{3}) = T(x)$

De estas expresiones deducimos que:

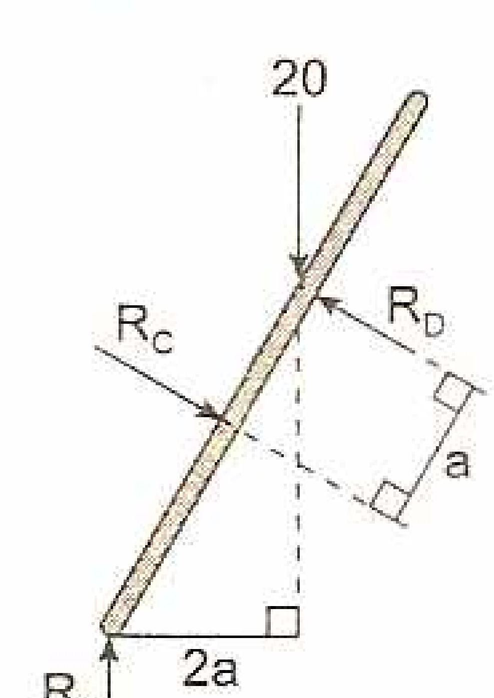
$R_A = 100$ N; $T \cong 173$ N; $R_B \cong 173$ N

75. Si la barra AB uniforme y homogénea que muestra la figura pesa 20 N, y su longitud es 8a, determinar las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo.



Resolución:

Haciendo DCL de la barra vemos que sobre ella actúan cuatro fuerzas: dos verticales y dos oblicuas.



Aplicando el teorema:

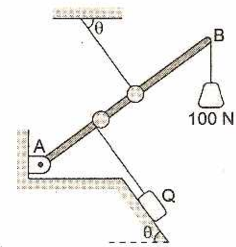
$R_A = 20$ N

$R_C = R_D$

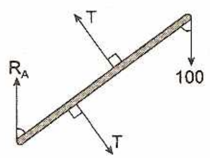
$20(2a) = R_C(a)$

$R_C = 40$ N; $R_D = 40$ N

76. Si la barra AB que muestra la figura es de peso despreciable, determinar el módulo y la dirección de la fuerza de reacción en A.

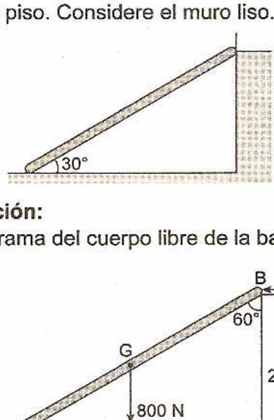


Resolución:



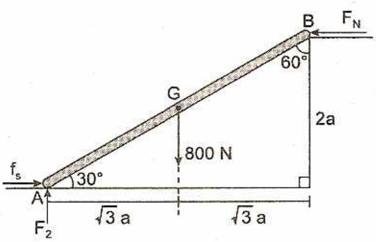
Haciendo DCL de la barra vemos que sobre ella actúan cuatro fuerzas. Como la resultante de dos de ellas es cero, entonces, la resultante de las otras dos será también cero. Según esto: $R_A = 100$ N

77. En la figura se muestra una viga homogenea de 80 kg que se encuentra en equilibrio mecánico. Determinar el valor de la fuerza de rozamiento entre la viga y el piso. Considere el muro liso.



Resolución:

a. Diagrama del cuerpo libre de la barra AB



b. Primera condición de equilibrio:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_s = F_N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 = 800$

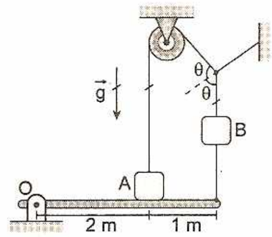
c. Segunda condición de equilibrio:

$\Sigma M_O^A = 0 \Rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2$

$800\sqrt{3}\,a = F_N(2a) \Rightarrow F_N = 400\sqrt{3}$ N

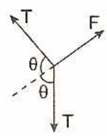
$f_s = F_N \Rightarrow f_s = 400\sqrt{3}$ N

78. Hallar la magnitud de la fuerza de reacción en el punto de apoyo O, si los pesos de los bloques A y B se diferencian en 15 N y la barra de peso despreciable se mantiene horizontal, el sistema está en equilibrio.

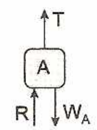


Resolución:

a. Analizamos las fuerzas aplicadas en el nudo. Aplicamos el principio de simetría deducimos que dos de las cuerdas soportan igual tensión.



b. DCL al bloque A



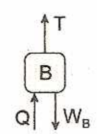
$\Sigma F_y = 0$ (equilibrio)

$T + R = W_A$ ...(I)

$W_B = x \ \wedge \ W_A = x + 15$

En (I): $T = W_A - R \Rightarrow T = x + 15 - R$ ...(II)

c. DCL al bloque B



$\Sigma F_y = 0$ (equilibrio)

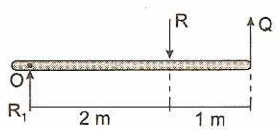
Q: tensión en la cuerda

$T = Q + W_B \Rightarrow T = Q + x$ ...(III)

Igualando las ecuaciones (II) y (III)

$x + 15 - R = Q + x \Rightarrow 15 = Q + R$ ...(IV)

d. Realizamos el DCL a la barra horizontal



La suma de momentos en el punto O es cero:

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2$

$2R = 3Q \Rightarrow R = \frac{3}{2}Q$ ...(V)

Reemplazando (V) en (IV):

$15 = R + Q \Rightarrow 15 = \frac{3}{2}Q + Q$

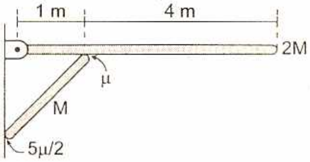
$\Rightarrow Q = 6$ N y $R = 9$ N

La suma de fuerzas en el eje vertical es cero

$F_y = 0 \Rightarrow R_1 + Q = R$

$R_1 + 6 = 9 \Rightarrow R_1 = 3$ N

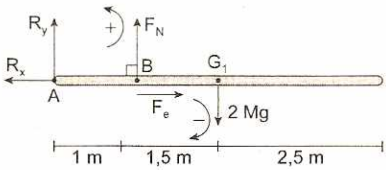
79. En la figura se muestra dos barras homogéneas en equilibrio. Si la barra de masa M está a punto de deslizar sobre las superficies de contacto. Hallar el coeficiente de rozamiento estático μ entre las barras.



Resolución:

Realizamos DCL a la barra horizontal.

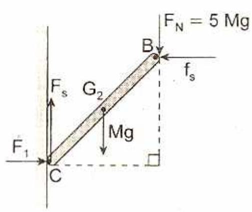
Peso = 2Mg



Aplicamos momento en el punto A:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_N(1) = 2Mg(2{,}5) \Rightarrow F_N = 5Mg$ ...(I)

Ahora realizamos DCL a la barra oblicua:



La fuerza de rozamiento en el punto B:

$f_s = \mu F_N \Rightarrow f_s = \mu(5Mg)$ ...(II)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = f_s = 5\mu_s Mg$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_s = Mg + 5Mg$

$f_s = 6Mg$

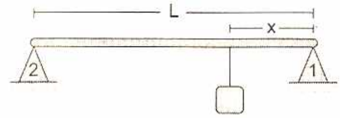
Donde f_s: fuerza de rozamiento estático en el punto C.

$f_s = \mu_s F_1$

$$6Mg = \left(\frac{5\mu}{2}\right)(5\mu Mg) \Rightarrow \mu^2 = \frac{12}{25} \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{12}{25}}$$

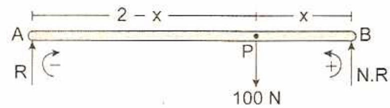
$\Rightarrow \mu = 0{,}69$

80. Un bloque de peso W = 10 kg está suspendido de una barra homogénea de peso despreciable, de longitud L = 2 m, cuyos extremos se posan en los soportes 1 y 2 como se indica en la figura. Se quiere que la reacción en el soporte 1 sea N veces la reacción en el soporte 2. Calcular la distancia "x" en metros.



Resolución:

DCL de la barra:



Primera condición de equilibrio: $\Sigma\vec{F} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R + NR = 100$

Recordar: $M_O^F = F(d)$

Segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_O^{F_1} = M_O^{F_2}$

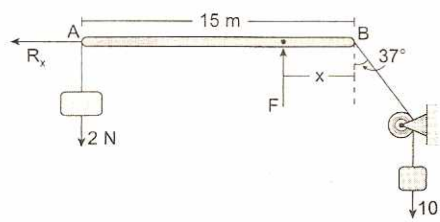
Se toma momento en el punto P:

$R(2 - x) = NRx$

$2 - x = Nx \Rightarrow 2 = (N + 1)x$

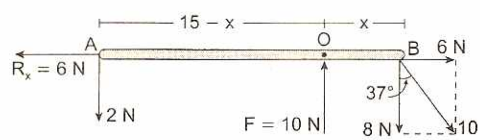
$$\Rightarrow x = \frac{2}{N+1}$$

81. El módulo de la fuerza F (en N) y la distancia (en m) del punto B a la que debe ser aplicada, para que el sistema esté en equilibrio son, respectivamente:



Resolución:

Realizamos DCL en la barra.



Primera condición de equilibrio $\Sigma\vec{F} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow Rx = 6$ N

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2 + 8 = F \Rightarrow F = 10$ N

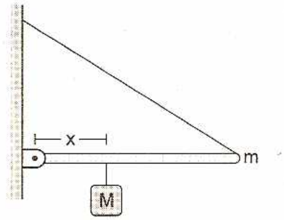
Segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_O^{F_1} = \Sigma M_O^{F_2}$

En el punto O se toma momento: $M^F = Fd$

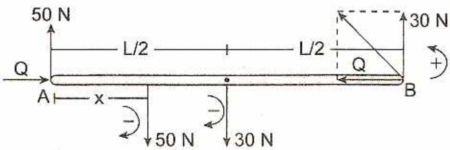
$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow 2(15 - x) = 8x$

x = 3 cm

82. Un bloque de masa M = 5 kg, cuelga de una viga de masa m = 3 kg. Hallar la relación de X/L, donde L es la longitud de la viga, y X es la distancia donde se debe de colgar el bloque sobre la viga, de modo que la magnitud de la fuerza de la bisagra sea de 50 N hacia arriba.



Resolución:
DCL (diagrama de cuerpo libre) a la barra horizontal.

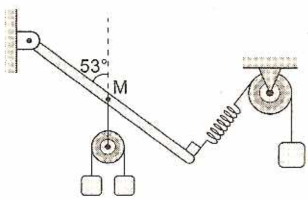


La sumatoria de momentos (torques) respecto del punto A es nula. Equilibrio de la barra. $\Sigma M_A = 0$

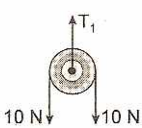
$$30L = 50x + 30\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{15}{50} \qquad \therefore \frac{x}{L} = 0{,}3$$

La componente vertical en la bisagra es 50 N, la componente horizontal es Q. Para establecer el equilibrio, la tensión en la cuerda tiene un componente horizontal Q hacia la izquierda y 30 N hacia arriba.

83. El sistema mostrado se encuentra en reposo, la barra homogénea es de 1 kg y 10 cm de longitud. Si la dos esferas suspendidas de una polea ideal de peso despreciable tienen masa iguales a 1 kg. Determine la deformación (en cm) que experimenta el resorte de constante k = 3 N/cm. Si M es punto medio de la barra articulada.

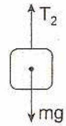


Resolución:
Realizamos el DCL de la polea.



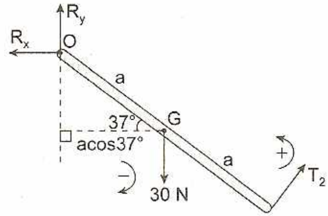
$$\Sigma F_y = 0$$
$$T_1 = 10 + 10$$
$$T_1 = 20 \text{ N}$$

Realizamos el DCL del bloque. La tensión en el resorte obedece a la ley de Hooke.



$$T_2 = kx$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 = mg$$

Realizamos el DCL de la barra



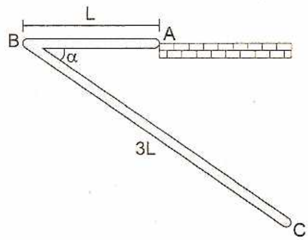
No hay giro: $\Sigma M_O = 0$

$T_2(2a) = 30(a)\cos 37° \Rightarrow T_2 = 12$ N

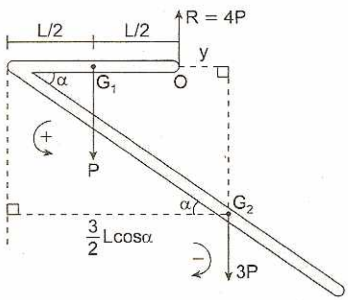
Ley de Hooke: $T_2 = kx \Rightarrow 12 = 3x$

$\therefore$ x = 4 cm

84. Un alambre homogéneo ABC es doblado formando un ángulo α. Determinar el valor de $\cos\alpha$, para que exista equilibrio en la posición mostrada.



Resolución:
Realizamos el DCL de la barra



$$y = \frac{3}{2}L\cos\alpha - L \Rightarrow y = L\left(\frac{3}{2}\cos\alpha - 1\right)$$

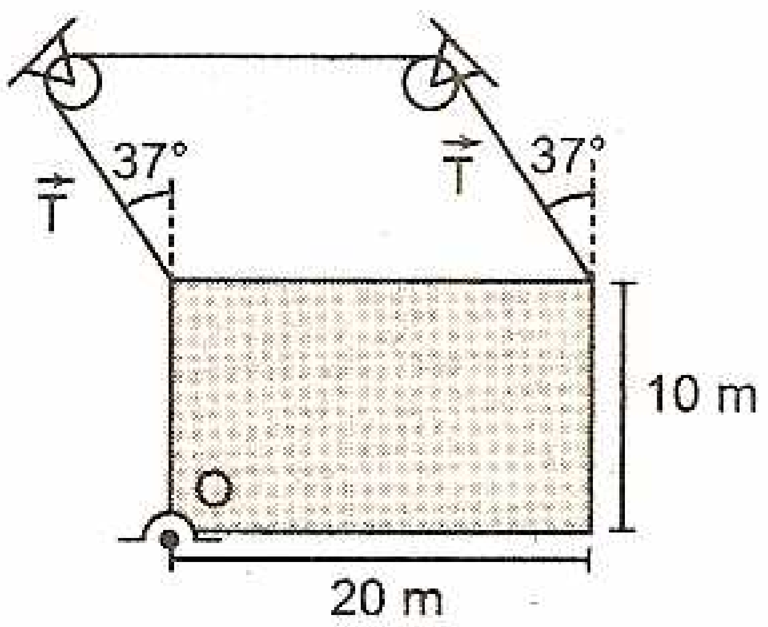
La sustancia de momentos respecto del punto O es nula.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F_1 f_1 = F_2 d_2$$

$$P\left(\frac{L}{2}\right) = 3PL\left(\frac{3}{2}\cos\alpha - 1\right) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{9} \therefore \alpha = 39°$$

LEMA 1 (UNI 2006 - I)

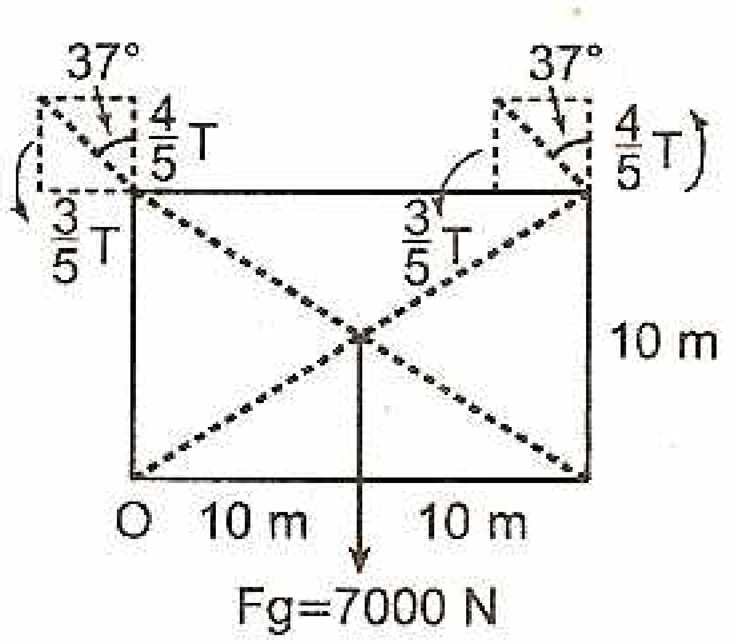
figura se muestra una plancha metálica homo- de 20 m de largo por 10 m de ancho y espesor nte. Tanto las poleas como la plancha se encuen- un plano vertical. Si el sistema se encuentra en rio y el peso de la plancha es de 700 N, indique ión T en la cuerda y la reacción en el apoyo O (en) en ese orden.



0; 3000 B) 2500; $3000\sqrt{2}$
00; 12 000 D) 3000; 3000
0; 2500

ución:

enunciado del problema, al haber equilibrio, la a metálica homogénea necesariamente va a las dos condiciones para el equilibrio. En segui- os a realizar el DCL:



aplicaremos la segunda condición para el equi- ero con respecto al punto O:

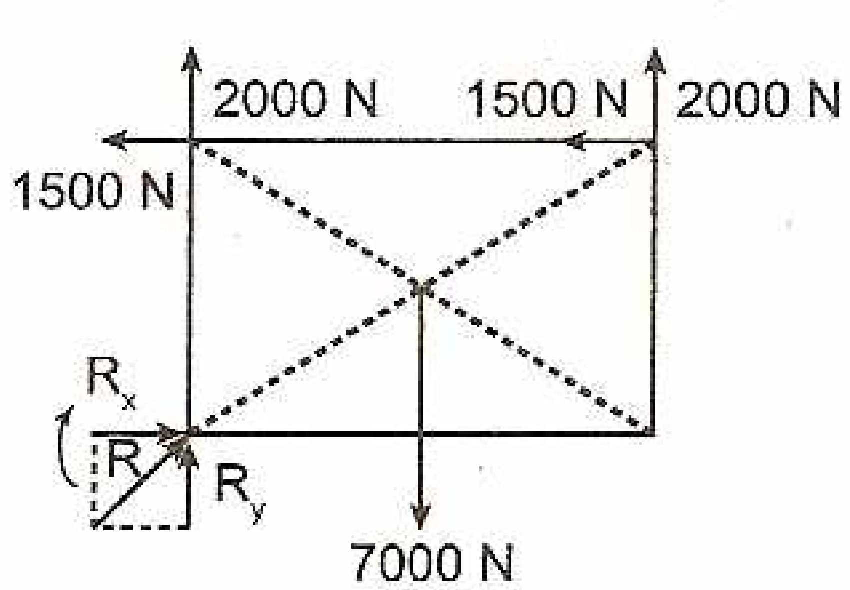
$\Sigma M^{\circlearrowleft} = \Sigma M^{\circlearrowright}$

$M^{\frac{3}{5}T} + M^{\frac{4}{5}T} = M^{Fg}$

$0) + \left(\frac{3}{5}T\right)(10) + \left(\frac{4}{5}T\right)(20) = (Fg)(10)$

00 N (tensión en la cuerda)

calcularemos la reacción en el punto O:



Utilizando la primera condición para el equilibrio, tenemos el siguiente desarrollo:

$$\Sigma F(\rightarrow) = \Sigma F(\leftarrow)$$

$R_x = 1500\text{ N} + 1500\text{ N} \Rightarrow R_x = 3000\text{ N}$

$$\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$$

$R_y + 2000\text{ N} + 2000\text{ N} = 7000\text{ N} \Rightarrow R_y = 3000\text{ N}$

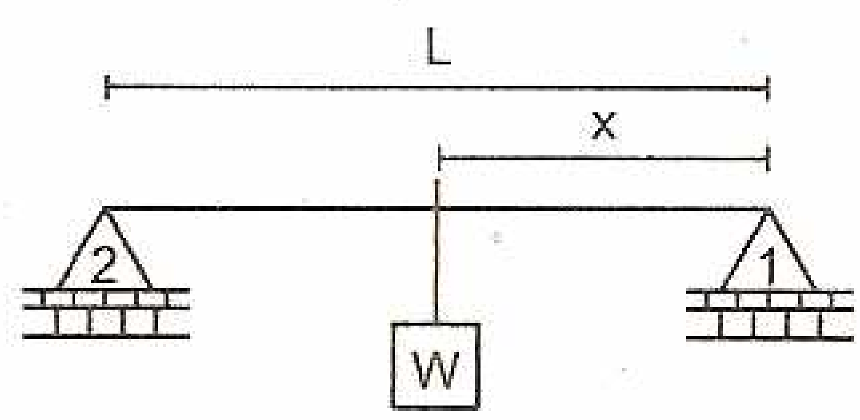
Con: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$R = 3000\sqrt{2}$ N (Reacción en el apoyo O)

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2009 - I)

Un bloque de peso W está suspendido de una vara de longitud L cuyos extremos se posan en los soportes "1" y "2" como se indica en la figura. Se requiere que la reacción en el soporte "1" sea α veces la reacción en el soporte "2". La distancia "x" debe ser:

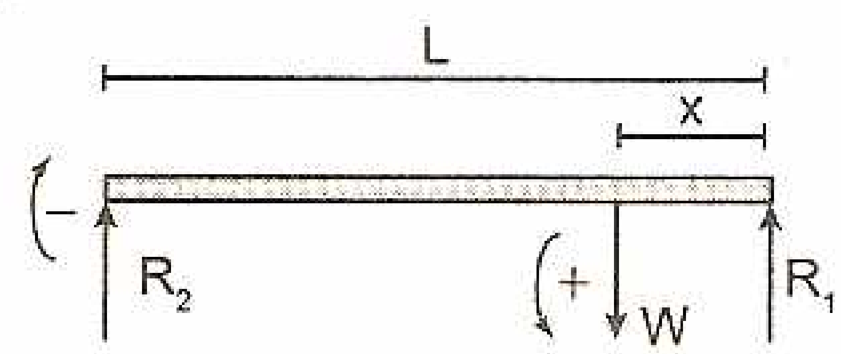


A) $\frac{\alpha L}{\alpha + 1}$ B) $\frac{L}{2\alpha + 1}$ C) $\frac{\alpha L}{\alpha + 2}$

D) $\frac{L}{\alpha + 1}$ E) $\frac{2L}{\alpha + 1}$

Resolución:

Graficamos:



$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, luego:

$R_1 + R_2 = W$ ...(I)

$R_1 = \alpha R_2$ (por condición)

Reemplazamos en (I): $\alpha R_2 + R_2 = W$

$\Rightarrow \frac{R_2}{W} = \frac{1}{\alpha + 1}$ ...(II)

$\Sigma\vec{M} = \vec{0}$, luego: $Wx - R_2L = 0 \Rightarrow x = \frac{R_2}{W}L$

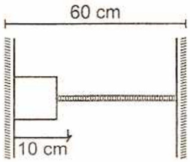
Reemplazamos (II): $x = \frac{L}{\alpha + 1}$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

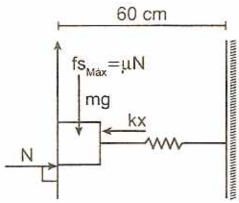
Un bloque solido de arista 10 cm y masa 2 kg se presiona contra una pared mediante un resorte de longitud

natural de 60 cm como se indica en la figura. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es 0,8. Calcule el valor mínimo, en N/m, que debe tener la constante elástica del resorte para que el bloque se mantenga en su lugar.
($g=9,91\ m/s^2$)



A) 49,05 B) 98,10 C) 147,15
D) 196,20 E) 245,25

Resolución:



Para obtener el valor mínimo de K debemos considerar que el bloque se encuentra el movimiento inminente. En estas circunstancias la fuerza de rozamiento que experimenta debe ser máxima.

Como el bloque está en equilibrio: $\Sigma F(\rightarrow) = \Sigma F(\leftarrow)$

$N = Kx \qquad \ldots(1)$

También: $\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$

$\mu N = mg \Rightarrow \mu K_{min} x = mg$

Reemplazando:

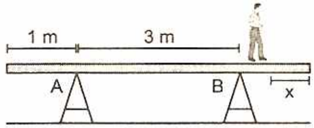
$$\left(\frac{8}{10}\right) K_{min} \left(\frac{1}{10}\right) = 2(9,81)$$

$\therefore\ K_{min} = 245,25$ N/m

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

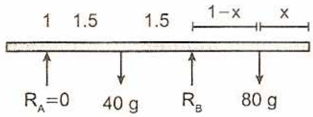
Un hombre de 80 kg de masa que está pintando un techo, se encuentra caminando sobre una tabla homogénea de 5 m de longitud y 40 kg de masa, que se apoya sobre dos soportes A y B como se muestra en la figura. Cuando llega a una distancia "x" del extremo, la tabla empieza (peligrosamente) a levantarse. Calcule "x" (en cm).
($g = 9,81\ ms^{-2}$)



A) 25 B) 40 C) 55
D) 75 E) 85

Resolución:

DCL de la tabla:



$\Sigma \overline{M}_B = \overline{0} \Rightarrow 40\ g(1,5) = 80\ g(1 - x)$

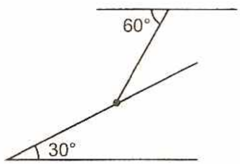
$\therefore\ x = 0,25$ m $= 25$ cm

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

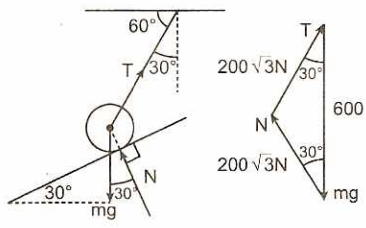
En la siguiente figura, la esfera de 600 N se mantiene en reposo. Calcule (en N) el valor de la suma de las magnitudes de la tensión de la cuerda más la reacción del plano inclinado.

A) $400\sqrt{3}$
B) $500\sqrt{3}$
C) $600\sqrt{2}$
D) $700\sqrt{2}$
E) $700\sqrt{3}$



Resolución:

DCL de la esfera



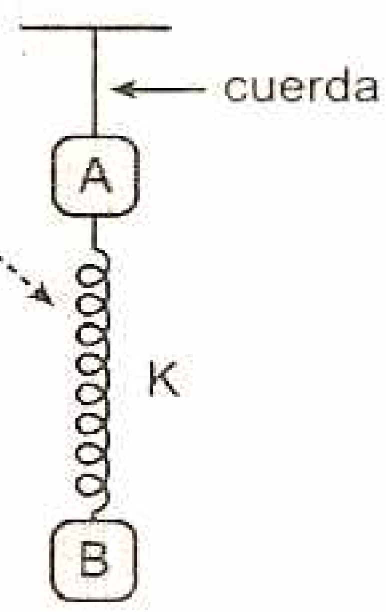
Nos piden: $T + N = 200\sqrt{3} + 200\sqrt{3}$

$\therefore\ T + N = 400\sqrt{3}$ N

Clave: A

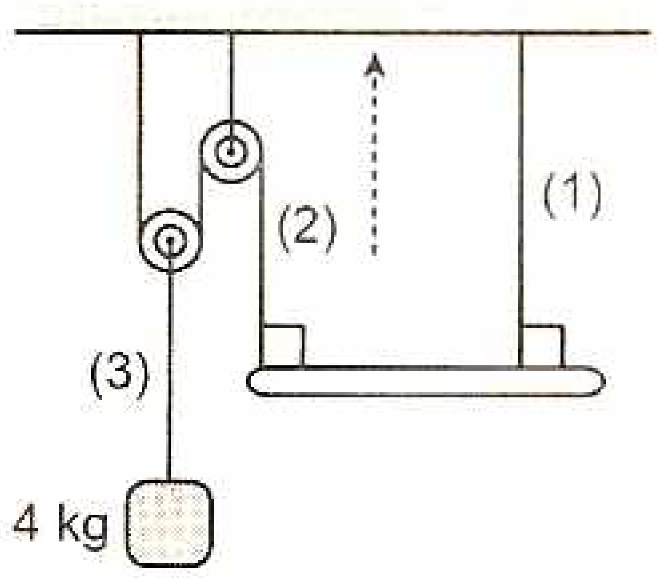
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La masa de los bloques A y B son 3 kg y 2 kg respectivamente. Si ambos permanecen en reposo, determine la deformación del resorte y el módulo de la tensión en la cuerda.
($g = 10\ m/s^2$; $k = 200\ N/m$).



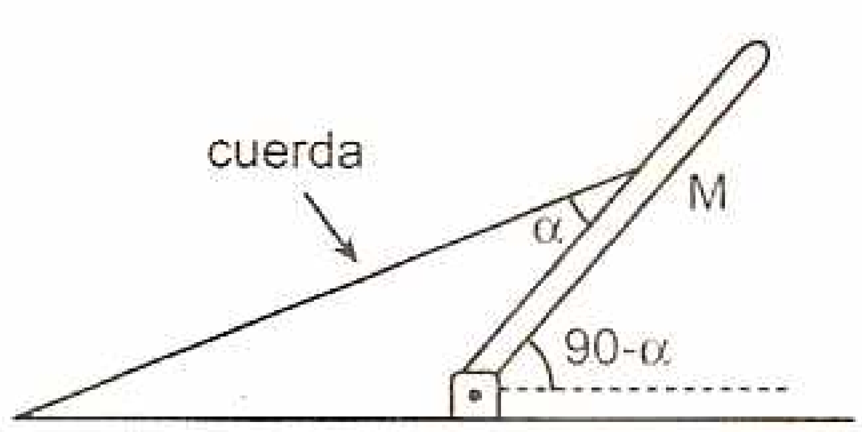
A) 0,1 m; 40 N B) 0,2 m; 40 N
C) 0,1 m; 50 N D) 0,2 m; 40 N
E) 0,05 m; 50 N

2. El sistema mostrado permanece en reposo. Si la masa de las poleas y de la barra es 1 kg y 6 kg, respectivamente, determine el módulo de la tensión en la cuerda (1). ($g = 10\ m/s^2$)



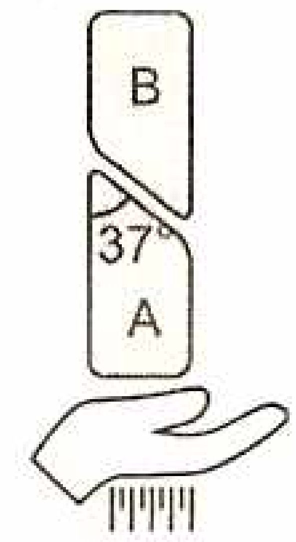
A) 35 N B) 45 N C) 55 N
D) 65 N E) 75 N

3. La barra homogénea de 4 kg permanece en la posición mostrada, determine el módulo de la tensión en la cuerda ($g = 10\ m/s^2$), (M: Punto medio de la barra).



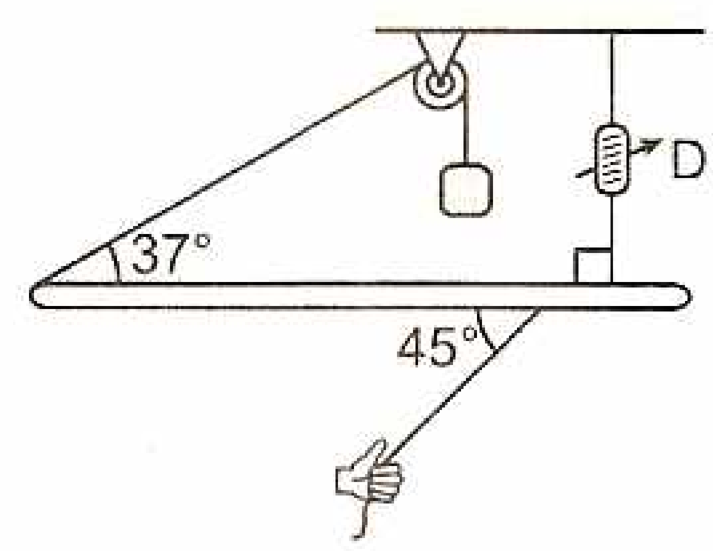
A) 10 N B) 35 N C) 20 N
D) 40 N E) 25 N

4. Dos bloques, uno sobre el otro, son desplazados con velocidad constante tal como muestra el grafico. Si la masa de los bloques A y B son de 2 kg y 3 kg respectivamente, determine el módulo de la fuerza que el bloque A le ejerce a B. ($g = 10\ m/s^2$)



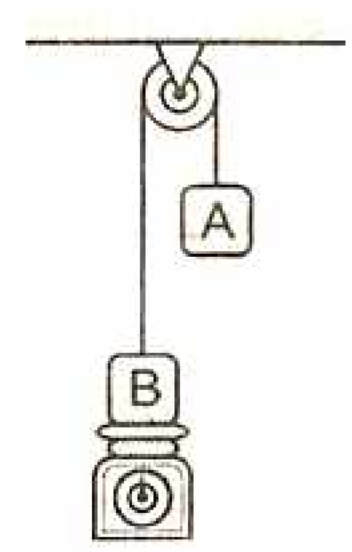
A) 5 N B) 10 N C) 16 N
D) 20 N E) 24 N

5. En el sistema mostrado, el bloque y la barra son de igual masa (5 kg). Si el sistema pertenece en reposo, determine la lectura del dinamómetro ideal (D); considere $g = 10\ m/s^2$ y la polea ideal.



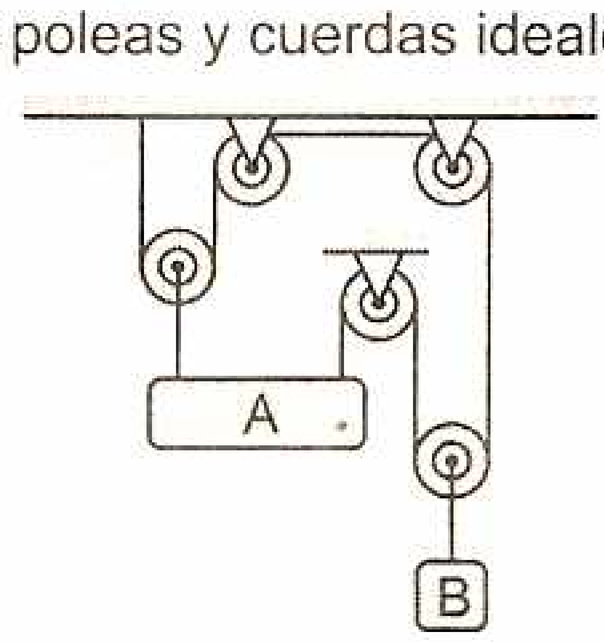
A) 10 N B) 30 N C) 40 N
D) 50 N E) 60 N

6. El sistema mostrado se encuentra en reposo. Determine cuánto indica la balanza si las masas de los bloque A y B son de 2 kg y 3 kg, respectivamente. ($g = 10\ m/s^2$)



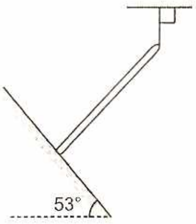
A) 10 N B) 20 N C) 30 N
D) 40 N E) 50 N

7. Si el sistema mostrado, las masas de los bloques A y B son M_A y M_B respectivamente. Si ambos permanecen en reposo, determine la relación M_A/M_B. (Considere poleas y cuerdas ideales)



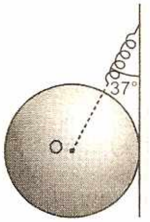
A) 1/2 B) 2 C) 1/3 D) 3/2 E) 2/3

8. La barra mostrada, presenta una masa "m" y permanece en reposo. Si el plano inclinado y la cuerda le ejercen una fuerza de 50 N cada una, determine "m" ($g = 10\ m/s^2$)



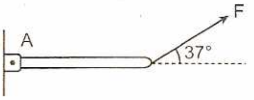
A) 5 kg B) 7,5 kg C) 9 kg
D) 10 kg E) 12,5 kg

9. Una esfera homogénea de 40 kg se mantiene en equilibrio, tal como se muestra. Determine la deformación que experimenta el resorte ideal.
($R = 250$ N/cm; $g = 10\ m/s^2$)



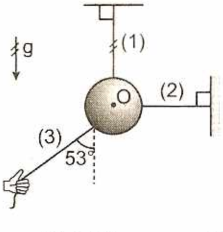
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

10. Una barra de 5 kg permanece en la posición mostrada. Si en uno de sus extremos actúa una fuerza $\vec{F}$ de módulo 50 N, determine el módulo de la fuerza que le ejerce la articulación A. ($g = 10\ m/s^2$)



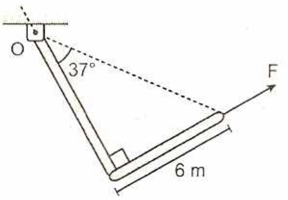
A) 25 N B) $25\sqrt{2}$ N C) $25\sqrt{3}$ N
D) 50 N E) $20\sqrt{5}$ N

11. En el gráfico, la esfera homogénea de 3 kg permanece en reposo. Si el módulo de la tensión en la cuerda (2) es 40 N, determine el módulo de la tensión en la cuerda (1). ($g = 10\ m/s^2$)



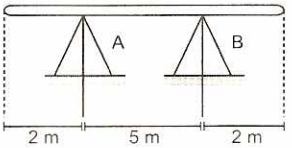
A) 30 N B) 40 N C) 50 N
D) 60 N E) 80 N

12. Determine el momento producido por $F = 200$ N sobre la barra, respecto de O.



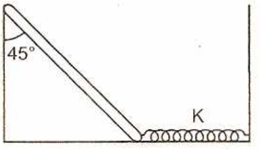
A) +1200 Nm B) −1200 Nm
C) +2400 Nm D) +2000 Nm
E) +1600 Nm

13. La barra homogénea de 4 kg se encuentra en reposo sobre dos apoyos lisos. Determine el módulo de la reacción en los apoyos A y B. ($g = 10\ m/s^2$)



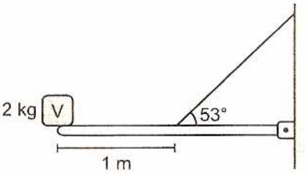
A) $R_A = 16$ N; $R_B = 24$ N B) $R_A = 30$ N; $R_B = 10$ N
C) $R_A = 10$ N; $R_B = 30$ N D) $R_A = 20$ N; $R_B = 20$ N
E) $R_A = 24$ N; $R_B = 16$ N

14. La barra homogénea de 4 kg se mantiene en reposo. Determine el módulo de la fuerza que ejerce la pared a la barra. (Considere superficies lisas; $g = 10\ m/s^2$)



A) 10 N B) 15 N C) 20 N
D) 25 N E) 30 N

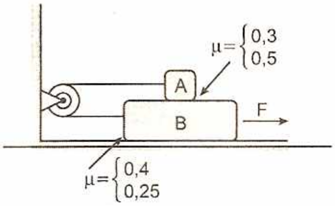
15. La barra rígida y de masa despreciable, tiene 2 m de longitud y está en reposo tal como se indica. Determine el módulo de la tensión en la cuerda. ($g = 10\ m/s^2$)



A) 20 N B) 30 N C) 40 N
D) 50 N E) 60 N

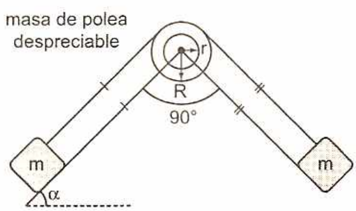
A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 10 cm E) 12 cm

24. Determine el valor necesario de la fuerza $\vec{F}$, de tal manera que el sistema inicie su movimiento. ($g=10\ m/s^2$; $m_A = 1$ kg; $m_B = 2$ kg).



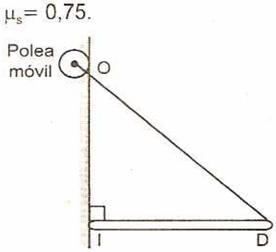
A) 16 N B) 22 N C) 18 N
D) 19 N E) 20 N

25. Una polea de radios externo e interno R y "r" se apoya sobre un eje cilíndrico inmóvil. El coeficiente de rozamiento entre la polea y el eje es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siendo los bloques y las cuerdas lisas; determine los valores de α que permiten el equilibrio del sistema $\left(\frac{r}{R}=\frac{2}{3}\right)$



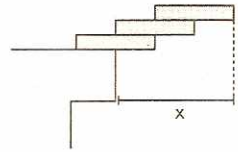
A) $30° \leq \alpha \leq 45°$ B) $26{,}5° \leq \alpha \leq 63{,}5°$
C) $\alpha \geq 45°$ D) $31{,}3° \leq \alpha \leq 45°$
E) $\alpha = 45°$

26. Una barra de 2,5 m de longitud permanece horizontal, pero su extremo izquierdo está a punto de deslizar por la pared. ¿A qué distancia del extremo I se encuentra el centro de gravedad de la barra, si el módulo de la tensión en la cuerda es mínimo? Considere $\mu_s = 0{,}75$.



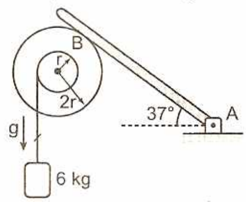
A) 1 m B) 1,2 m C) 1,4 m
D) 1,6 m E) 1,8 m

27. Calcule el máximo voladizo x para que las tres tablas homogéneas de 12 cm de largo se mantengan en reposo.



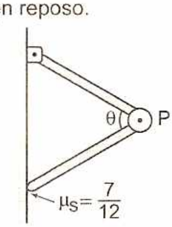
A) 5 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 11 cm

28. La tabla homogénea de 6 kg y 2 m de longitud está apoyada en una polea. Determine el módulo de la reacción en A. ($\overline{AB} = 1{,}2$ m ; $g = 10\ m/s^2$)



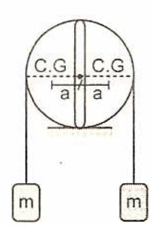
A) 5 N B) 10 N C) 15 N
D) 20 N E) 25 N

29. Determine el máximo valor de θ para el cual, las barras idénticas de 50 N que están articuladas se mantengan en reposo.



A) 16° B) 24° C) 32°
D) 37° E) 74°

30. Un cilindro de radio R, ha sido dividido en dos mitades idénticas casa una de masa M. El centro de gravedad de cada mitad distan "a" del eje del cilindro. Determine el valor necesario de "m" para el equilibrio del sistema. Desprecie todo razonamiento (la cuerda que sostiene a los bloques se enrolla en el cilindro).

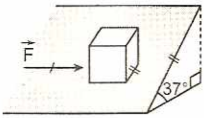


A) $M\frac{(a+R)}{R}$ B) $M\frac{a}{R}$ C) $M\frac{(a+R)}{a}$
D) $M\frac{R}{a}$ E) M

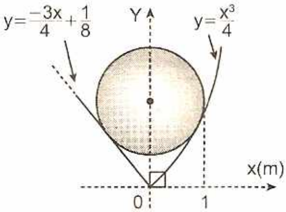
31. Un pequeño cubo de 500 g descansa apoyado en un plano inclinado rugoso ($\mu_s = 1{,}25$). Determine el

mínimo valor de la fuerza horizontal $\vec{F}$ con que se debe empujar el cubo para que empiece a moverse.

A) 3 N
B) 4 N
C) 5 N
D) $\sqrt{7}$ N
E) $\sqrt{10}$ N



32. Si la esfera lisa y homogénea de 7 kg se encuentra en reposo; determine el módulo de la fuerza que le ejerce a la superficie curva ($g = 10\ m/s^2$)



A) 30 N B) 40 N C) 50 N
D) 80 N E) 1000 N

33. El grafico nos muestra dos tablas homogéneas de masa "m" en reposo. ¿Qué fuerza horizontal es necesario aplicar en el extremo de la barra horizontal, para que empiece a deslizar?

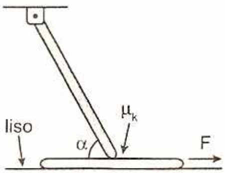
A) $\mu_k mg$

B) $\dfrac{\mu_k mg}{(\mu_k \operatorname{sen}\alpha + 1)}$

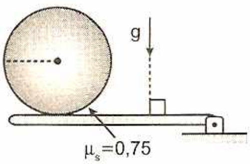
C) $\dfrac{\mu_k mg}{2(\mu_k \tan\alpha + 1)}$

D) $\mu_k mg\tan\alpha$

E) $\dfrac{\mu_k mg}{2(\mu_k \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}$

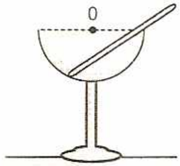


34. En un cilindro homogéneo a $\frac{2R}{3}$ de su centro (R: radio del cilindro), paralelamente al eje se ha perforado un orificio de radio $\frac{R}{4}$, el cual se ha llenado con una sustancia cuya densidad es 11 veces la del cilindro. Determine hasta que ángulo se puede inclinar la tabla sin que el cilindro pierda el equilibrio.



A) 26,5° B) 37° C) 18,5°
D) 16° E) 14,6°

35. Una varilla lisa y homogénea de longitud 2L se apoya en el borde de una copa semiesférica de radio R. Para qué valores de L la varilla se mantiene en equilibrio en la posición mostrada.



A) $R\sqrt{3} \leq L \leq 4R$ B) $R\sqrt{2} \leq L \leq 2R$
C) $L \leq 2R$ D) $R \leq L \leq 2R$
E) $R\sqrt{\frac{2}{3}} \leq L \leq 2R$

36. Una barra homogénea de masa M y longitud L está articulada en su extremo inferior. Determine la masa necesaria del bloque para que la barra se encuentre en equilibrio estable en posición vertical.

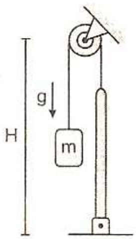
A) $m > M\dfrac{H}{L}$

B) $m > M\dfrac{(H-L)}{2H}$

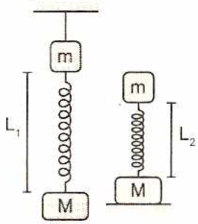
C) $m > M\dfrac{(H-L)}{L}$

D) $m > M$

E) $m > M\dfrac{(H-L)}{(H+L)}$



37. Un resorte une entre sí dos cuerpos cuyas masas respectivas son m y M. Cuando el sistema se suspende del techo, la longitud del resorte es $L_1 = 40$ cm. Si el sistema se coloca sobre un soporte, la longitud del resorte es $L_2 = 20$ cm. Determine la longitud natural del resorte. (m = 2 kg; M = 8 kg).



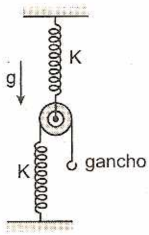
A) 12 cm B) 16 cm C) 20 cm
D) 24 cm E) 30 cm

38. Se tiene una cadena formada por "n" eslabones de masa "m" y unidos por resortes de constante K, tal como se muestra. Determine en cuanto se incrementa la longitud de la cadena al suspenderla de uno de sus extremos y alcanzar el equilibrio.

A) $\frac{n(n+1)mg}{2K}$ B) $n\left(\frac{mg}{K}\right)$ C) $\frac{n(n-1)mg}{2K}$

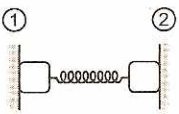
D) $\frac{mg}{n}$ E) $mg\left(\frac{n}{2K}\right)$

39. Un bloque de 10 kg se suspende del gancho y se le hace descender lentamente hasta que alcanza el equilibrio. Si la polea es ideal; ¿Cuánto descendió el bloque?



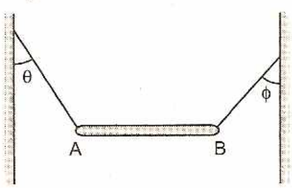
A) 10 cm B) 6 cm C) 4 cm
D) 2 cm E) 1 cm

40. La figura muestra dos bloques idénticos de 50 N cada uno, unidos mediante un resorte de masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento estático en las paredes verticales (1) y (2) son 0,5 y 0,4 respectivamente. Determine la mínima fuerza desarrollada en el resorte para el equilibrio de los bloques.



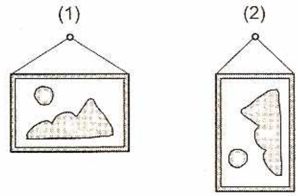
A) 25 N B) 75 N C) 100 N
D) 125 N E) 250 N

41. Una barra de 100 N y 7 m de longitud se mantiene horizontal, sujeta por dos cuerdas que forman con las paredes verticales ángulos de $\theta = 37°$ y $\phi = 45°$. ¿A qué distancia del extremo A se encuentra su centro de gravedad?



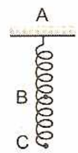
A) 2 m B) 3,5 m C) 4 m
D) 3 m E) 7 m

42. Un mismo cuadro se cuelga de dos modos distintos como se ve en la figura. ¿En cuál de los casos es mayor la tensión de las cuerdas?
(Cuerdas de igual longitud)



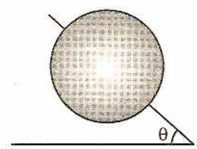
A) En (1)
B) En (2)
C) (1) = (2)
D) Depende del peso del cuadro
E) Depende del material de la cuerda

43. Un muelle de constante de rigidez "k" y masa despreciable cuelga del techo, tal como se muestra. Si colocamos dos bloques idénticos de masa "m" enganchados en los puntos B y C, para ser dejados en libertad lentamente hasta alcanzar el equilibrio; determine el estiramiento del muelle.



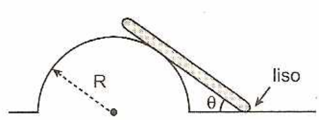
A) $\frac{3mg}{k}$ B) $\frac{3mg}{2k}$ C) $\frac{mg}{4k}$
D) $\frac{3mg}{4k}$ E) $\frac{2mg}{k}$

44. La esfera homogénea de 1 m de radio se encuentra en un hoyo semiesférico de radio 80 cm. Halle el máximo ángulo θ que permite el equilibrio mecánico.



A) 16°
B) 30°
C) 37°
D) 53°
E) 74°

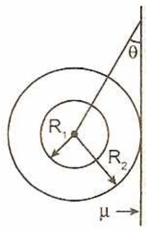
45. La barra homogénea es de 64 cm y 500 N. La reacción que ejerce la superficie semicilíndrica sobre la barra es de módulo 400 N. Calcule la medida del ángulo θ, si la barra se encuentra en equilibrio (R = 30 cm).



A) 37° B) 30° C) 53°
D) 45° E) 60°

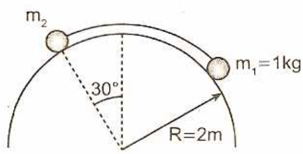
46. Del sistema mostrado, determine el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre la pared y la

rueda de radio R_2, tal que no se pierde el equilibrio. ($\theta = 37°$; $R_2 = 3R_1$).



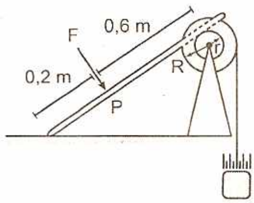
A) 3/5 B) 5/3 C) 9/5
D) 5/9 E) 3/8

47. Dos pequeñas esferas se unen mediante un hilo liviano de longitud $\frac{\pi}{2}$ m y se apoyan en una superficie cilíndrica lisa; si el sistema se encuentra en equilibrio, determine m_2 en kg (R = 2 m).



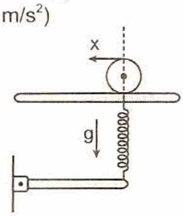
A) 2sen15° B) cos15° C) 2cos15°
D) 2sen30° E) sen45°

48. En el sistema mostrado, el bloque de 9 kg desciende con velocidad constante; determine el módulo de la fuerza $\vec{F}$ perpendicular a la barra de masa despreciable, sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre la barra y la polea de menor radio es 0,75 (R = 20 cm; r = 10 cm; g = 10 m/s²)



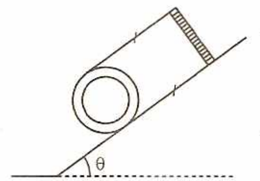
A) 100 N B) 960 N C) 180 N
D) 800 N E) 240 N

49. Una barra homogénea de 1,4 kg y 25 cm de longitud desciende lentamente hasta que adquiere el equilibrio. Si inicialmente el resorte de k = 100 N/m esta sin deformar; ¿cuánto se desplaza el rodillo liso? (g = 10 m/s²)



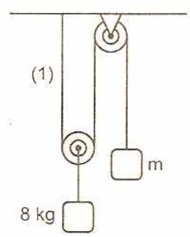
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 0,5 cm E) 0,8 cm

50. En un cilindro homogéneo se enrolla un hilo, cuyo extremo se sujeta de un parante en el punto superior del plano inclinado. El coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano es μ. ¿Hasta qué ángulo máximo θ el cilindro no se deslizara del plano inclinado?



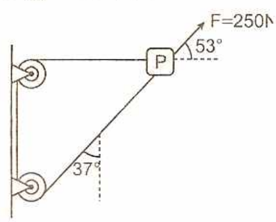
A) arcsen(1/μ) B) arctan(2μ) C) arctan(μ)
D) arccos(1/μ) E) arctan(1 + μ)

51. Determine la tensión de la cuerda (1), si el sistema se mantiene en reposo (m_{polea} = 2 kg; g = 10 m/s²).



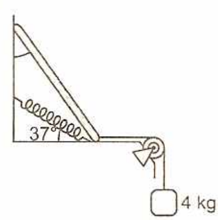
A) 10 N B) 20 N C) 50 N
D) 60 N E) 80 N

52. Determine la masa del bloque P, que se mantiene en reposo. (g = 10 m/s²)



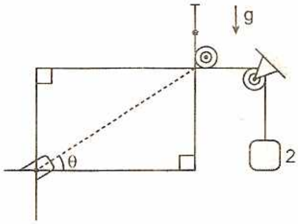
A) 1 kg B) 12,5 kg C) 5 kg
D) 6 kg E) 9 kg

53. La barra de 10 kg unida al resorte de constante de rigidez k = 1000 N/m se mantiene en reposo; determine la reacción del piso y de la pared sobre la barra lisa, si el resorte está estirado 10 cm. (g = 10m/s²)



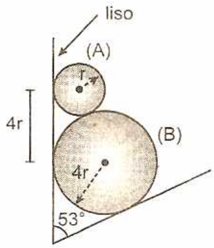
A) 20 N; 20 N B) 40 N; 20 N C) 40 N; 40 N
D) 50 N; 60 N E) 30 N; 50 N

54. La placa de masa despreciable se mantiene en reposo, determine el módulo de la reacción en la articulación y la medida del ángulo θ. ($g = 10\ m/s^2$)



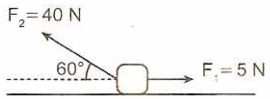
A) 20 N; 53°/2 B) $20\sqrt{2}$ N; 45° C) $30\sqrt{2}$ N; 30°
D) 40 N; 45° E) 50 N; 60°

55. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Si las esferas A y B son homogéneas de 8 kg y 30 kg respectivamente. Determine el módulo de la fuerza de reacción que ejerce la esfera B al plano inclinado. ($g = 10\ m/s^2$)



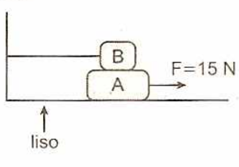
A) 350 N B) 375 N C) 450 N
D) 500 N E) 475 N

56. Si el bloque se mantiene en reposo, determine el módulo de la fuerza de rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



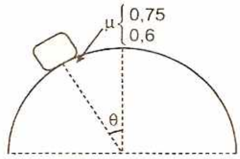
A) 10 N B) 20 N C) 15 N
D) 25 N E) 5 N

57. Determine la reacción del bloque A sobre el bloque B de 2 kg, si el sistema se mantiene en equilibrio. ($g = 10\ m/s^2$)



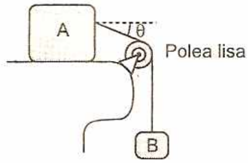
A) 10 N B) 15 N C) 20 N
D) 25 N E) 30 N

58. ¿Para qué ángulos θ como máximo se pueda colocar el bloque pequeño sobre la superficie semicilíndrica para que se mantenga en reposo? (Considere $\theta \neq 90°$)



A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

59. El bloque A se encuentra en inminente deslizamiento. Si el coeficiente de rozamiento estático es 0,5; determine la medida del ángulo θ.
($m_A = 2$ kg; $m_B = 5$ kg; $g = 10\ m/s^2$)

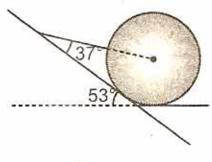


A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

60. Averigüe el máximo valor del ángulo de inclinación de un plano inclinado, para que al colocar sobre este un tubo homogéneo de 80 cm de largo y de 30 cm de radio no vuelque. El tubo se apoya sobre su sección circular.

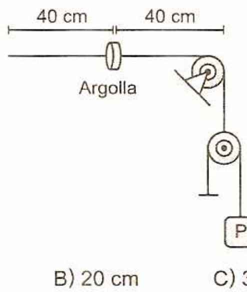
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 16°

61. Una esfera homogénea de 5 kg se encuentra en equilibrio mecánico, tal como se muestra. Determine el módulo de la fuerza que le ejerce el plano inclinado a la esfera. ($g = 10\ m/s^2$)



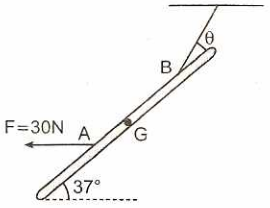
A) 60 N B) 50 N C) 45 N
D) 40 N E) 30 N

62. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio, si P = 15 N y la polea es de masa despreciable. ¿Qué altura asciende P, si se coloca lentamente en la argolla una carga de 36 N?
Desprecie todo rozamiento.



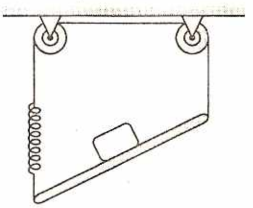
A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm
D) 40 cm E) 50 cm

63. Determine el ángulo θ que define el equilibrio de la barra homogénea. El punto G es el centro de gravedad de la barra de 4 g. La fuerza $\vec{F}$ es horizontal.



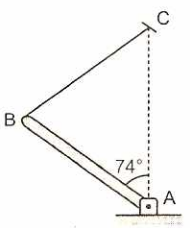
A) 45° B) 37° C) 30°
D) 16° E) 8°

64. En la figura mostrada, la barra y el bloque están en reposo. Si el resorte esta deformado 10 cm. Determine la constancia de rigidez del resorte.
(m_{barra}= 3 kg; m_{bloque} = 5 kg; g = 10 m/s^2)



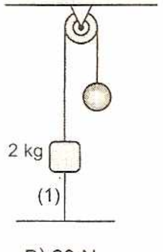
A) 80 N/m B) 100 N/m C) 200 N/m
D) 250 N/m E) 400 N/m

65. La barra homogénea de 5 kg esta en reposo. Determine el módulo de la tensión en la cuerda.
(g = 10 m/s^2; $\overline{AB} = \overline{AC}$)



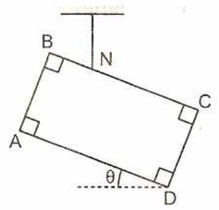
A) 5 N B) 15 N C) 30 N
D) 45 N E) 50 N

66. Si la esfera de 6 kg se mantiene en reposo; determine la tensión de la cuerda 1. (g = 10 m/s^2)



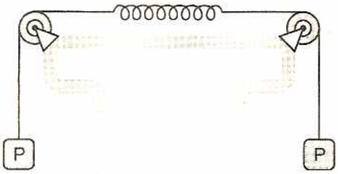
A) 10 N B) 20 N C) 30 N
D) 40 N E) 50 N

67. Si muestra una placa rectangular homogénea, unida a una cuerda vertical. Si la placa permanece en reposo; determine el ángulo θ ($\overline{AB}$ = 0,6 m; $\overline{BC}$ = 0,8 m; $\overline{BN}$ = 0,1 m)



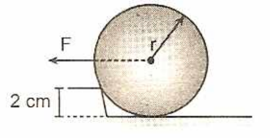
A) 16° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 74°

68. Un resorte de 1 m de longitud se deforma 10 cm al sujetar una carga P. Si cortamos al resorte en cinco partes iguales y a una de estas partes la sometemos al esfuerzo que indica la figura. En estas condiciones, calcular la nueva deformación del resorte.



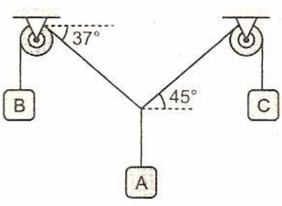
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

69. Para hacer el cilindro homogéneo de 24 kg suba la grada, se aplica una fuerza, tal como se muestra en la figura. Determine el mínimo valor de esa fuerza (r = 50 cm; g = 10 m/s^2).



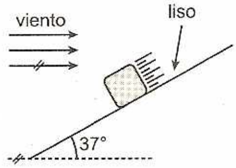
A) 50 N B) 70 N C) 80 N
D) 90 N E) 100 N

70. El sistema que se muestra está en equilibrio. Si consideramos cuerdas ideales, determine la masa del bloque A. La masa del bloque B es 5 kg.
(g = 10 m/s^2)



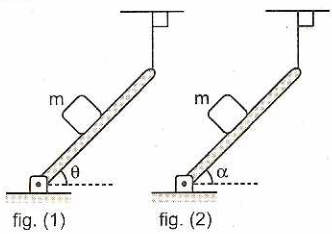
A) 5 kg B) 6 kg C) 7 kg
D) 8 kg E) 10 kg

71. Si el bloque desciende con velocidad constante. Determine el módulo de la fuerza que el viento le ejerce al bloque y el módulo de la reacción del plano sobre el bloque ($m_{bloque} = 2$ kg; $g = 10$ m/s^2).



A) 10 N; 12 N B) 15 N; 25 N
C) 13 N; 18 N D) 20 N; 15 N
E) 25 N; 10 N

72. En la figura (1) y (2) se muestran al mismo bloque en situación de reposo.

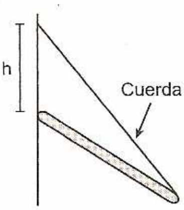


Indique verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones. ($\theta \neq \alpha$)

I. Si $0° < \theta < 90°$, entonces la reacción en la articulación es vertical.
II. En ambos casos, el módulo de la fuerza que la barra le ejerce al bloque es igual.
III. Si $\theta = 90°$, sobre el bloque solo actúan 2 fuerzas.

A) VFF B) VVF C) FFF
D) FFV E) VVV

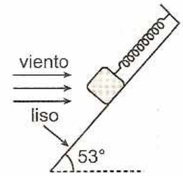
73. La barra homogénea tiene una longitud L, está apoyada en una pared lisa y en el otro extremo está unida a una cuerda de longitud "b", entonces para garantizar el equilibrio mecánico de la barra, se debe cumplir.



A) $h = \sqrt{L^2 + b^2}$ B) $h = L + \frac{b}{2}$ C) $h = \sqrt{\frac{b^2 + L^2}{3}}$

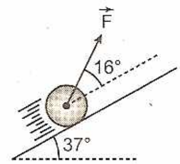
D) $h = \sqrt[3]{b^3 - 2L^3}$ E) $h = 3L - b$

74. El viendo que actúa sobre el bloque de 2 kg es horizontal y de modulo igual a 50 N. Si el bloque permanece en reposo, determine la deformación del resorte ($k = 140$ N/m; $g = 10$ m/s^2).



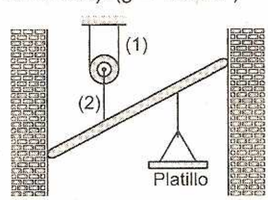
A) 1 cm B) 5 cm C) 6 cm
D) 8 cm E) 10 cm

75. Un carrete homogéneo de 4 kg es arrastrado con velocidad constante por un plano inclinado liso, tal como se muestra. Determine el módulo de la fuerza $\vec{F}$ que se ejerce al carrete ($g = 10$ m/s^2)



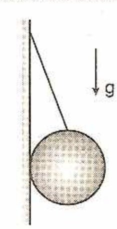
A) 15 N B) 20 N C) 25 N
D) 40 N E) 45 N

76. Determine la máxima cantidad de ladrillo de 3 kg que se deben colocar en el platillo de 10 kg, tal que la barra de 10 kg este en equilibrio; si las cuerdas (1) y (2) soportan como máximo una tensión de 500 N (Considere una polea de masa despreciable y las paredes lisas). ($g = 10$ m/s^2)



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

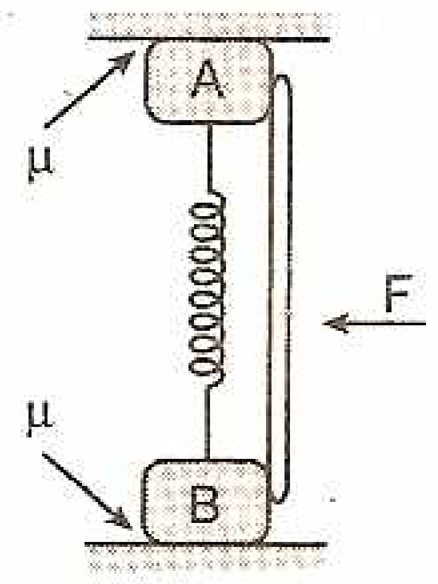
77. Una esfera homogénea de masa "m" y radio "r", esta sostenida por una cuerda de longitud L. Determine el módulo de la fuerza necesaria que se debe aplicar en el punto medio de la cuerda, para lograr que la esfera pierda contacto con la pared.



A) $mg\left(\frac{r+L}{r}\right)$ B) $mg\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}$ C) $mg\sqrt{\frac{L^2}{4} - r^2}$

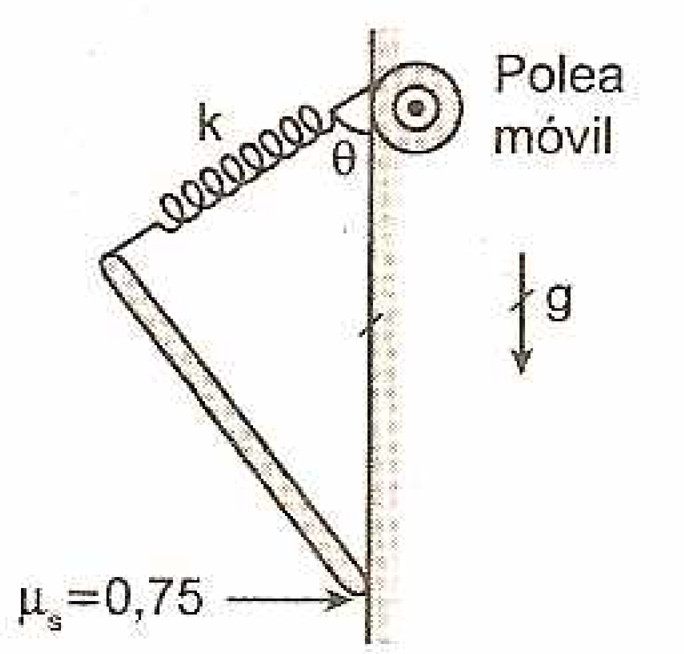
D) $mg\frac{L}{r}$ E) $2mg\frac{r}{L}$

78. Calcule el módulo de la fuerza F necesaria; que permita desplazar uniformemente a los bloque A y B de 75 N cada uno, si ellos experimentan la acción de la fuerza elástica igual a 100 N, ($\mu = 0,2$ y considere la masa de la barra vertical despreciable).



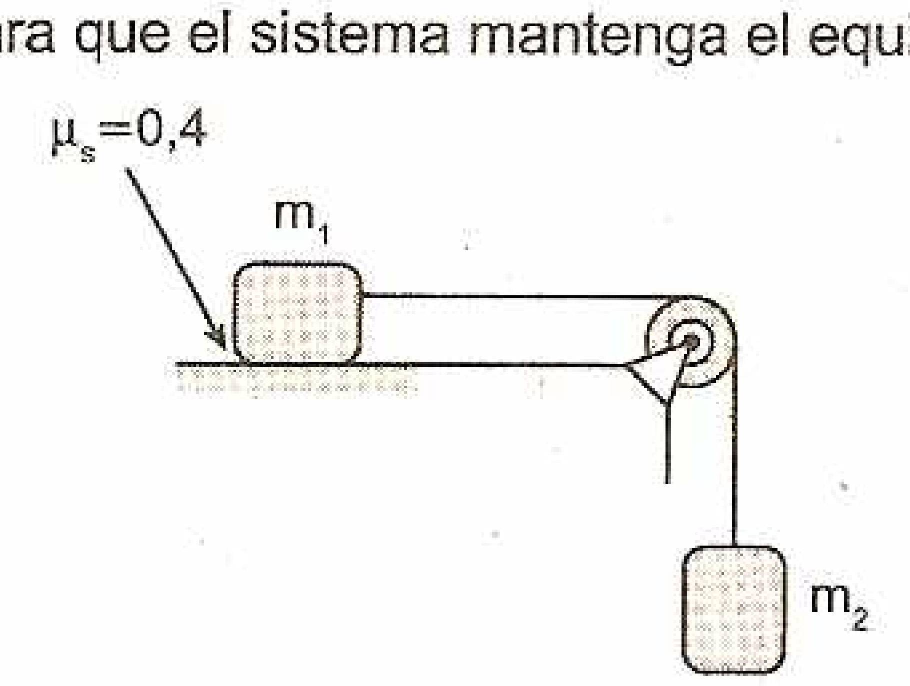
A) 50 N B) 40 N C) 35 N
D) 30 N E) 100 N

79. Determine la mínima deformación que debe experimentar el resorte, si la barra homogénea de 15 kg está a punto de resbalar ($k = 480$ N/m; $g = 10$ m/s^2).



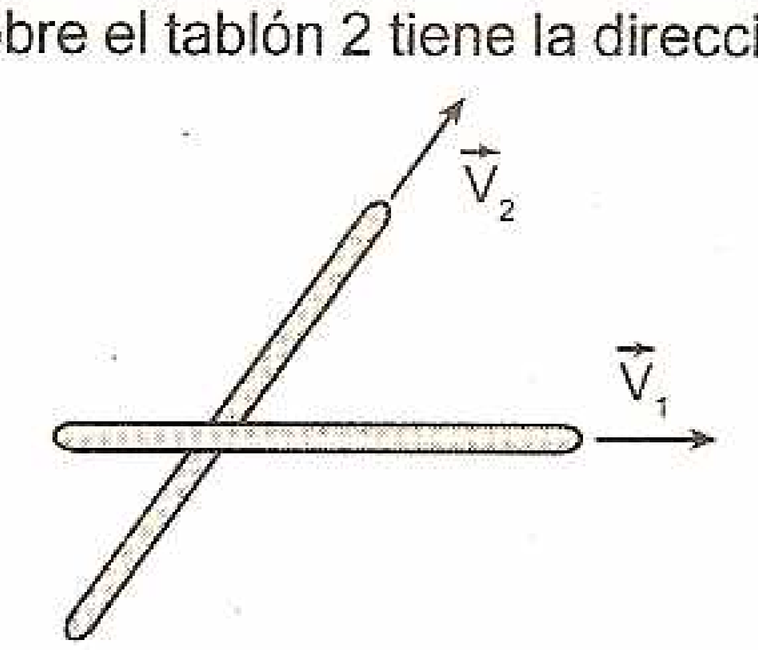
A) 10 cm B) 15 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 35 cm

80. Un bloque de 7 kg es dividido en dos partes de masas m_1 y m_2 y luego dispuestos como se muestra en la gráfica. Determine los valores que puede adoptar m_2 para que el sistema mantenga el equilibrio.



A) $m_2 \leq 4$ kg B) $m_2 \geq 4$ kg C) $m_2 \leq 2$ kg
D) $m_2 \leq 2$ kg E) $m_2 \leq 7$ kg

81. Dos tablones parten apoyados uno sobre el otro y se mueven con velocidades $\vec{V}_1 = 5i$ y $\vec{V}_2 = 4i + 7j$ con respecto a tierra. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el tablón 2 tiene la dirección del vector.

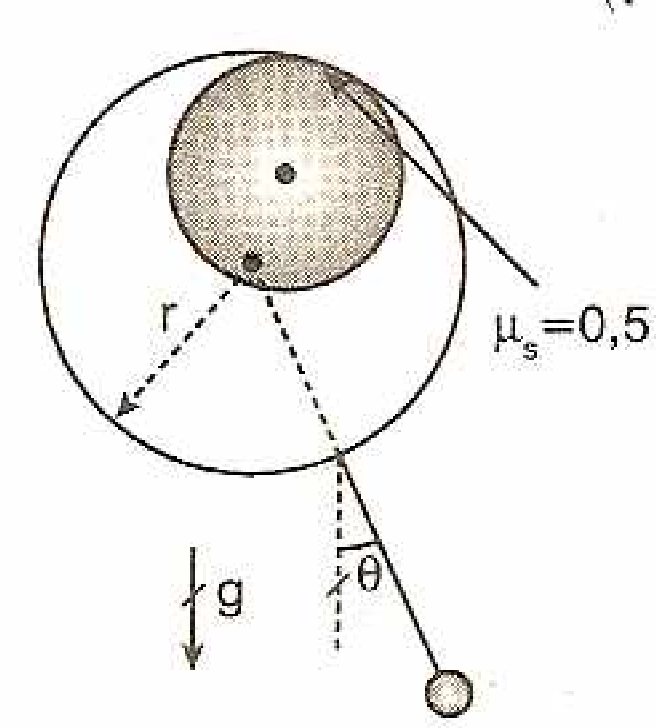


A) $-\vec{V}_1$ B) $+\vec{V}_2$ C) $9\hat{i} - 7\hat{j}$
D) $-\hat{i} + 7\hat{j}$ E) $\hat{i} + 7\hat{j}$

82. Un bloque cúbico se coloca suavemente sobre un plano inclinado de pendiente 37°. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es 0,8 y 0,75, indique lo correcto.

A) Está a punto de deslizar y no vuelca.
B) No desliza pero vuelca.
C) Está a punto de volcar pero no desliza.
D) No desliza y no vuelca.
E) Desliza pero sin volcar.

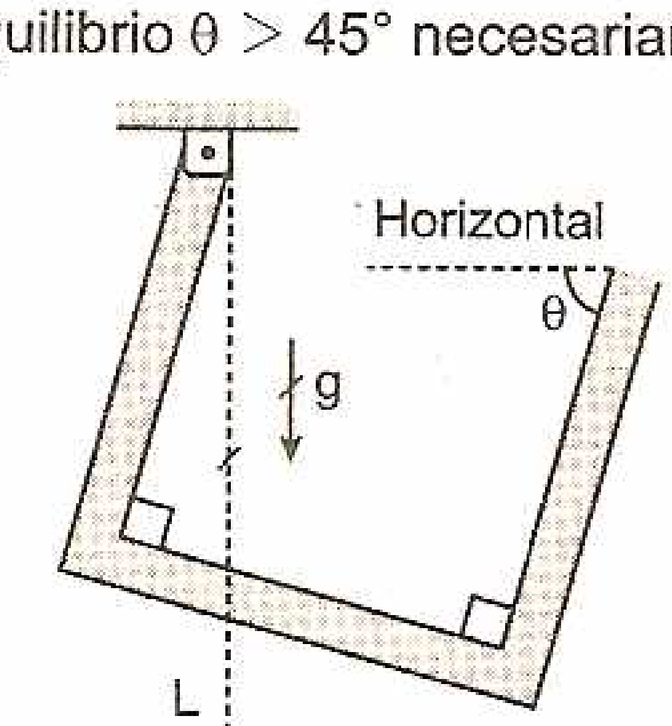
83. Se muestra la sección transversal de un péndulo formado por un collarín, una varilla, ambos de masa despreciable, y una pequeña esfera de masa "m". El sistema se mantiene en reposo ya que el collarín se apoya en el tubo. Si el sistema se encuentra a punto de resbalar; Determine θ, $\left(\frac{r}{r+L} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



A) 8° B) 16° C) 18,5°
D) 22,5° E) 26,5°

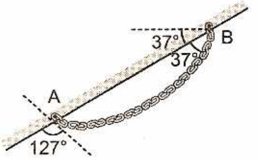
84. Una varilla homogénea doblada en tres partes iguales se suspende de un extremo hasta quedar en equilibrio, tal como se muestra en la figura. Indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. El centro de gravedad de la barra se encuentra a la derecha de la recta L.
II. El centro de gravedad se encuentra a la izquierda de la recta L.
III. El centro de gravedad se encuentra fuera de la barra.
IV. En el equilibrio $\theta > 45°$ necesariamente.



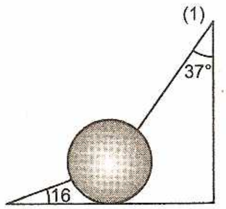
A) VFFV B) FVFV C) FVVF
D) FFVV E) FFFV

85. Una cadena se suspende de 2 puntos de apoyo: A y B, determine en qué relación están los módulos de las reacciones en dichos puntos de apoyo.



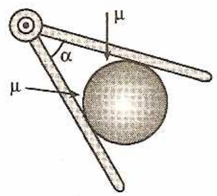
A) 7/24 B) 5/24 C) 6/23
D) 9/25 E) 8/25

86. Determine el módulo de la tensión máxima en la cuerda (1), si la esfera homogénea de 15 N se encuentra en equilibrio.



A) 15 N B) 18 N C) 24 N
D) 30 N E) cero

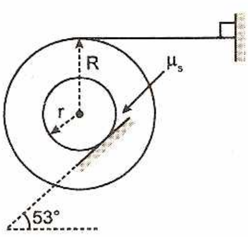
87. ¿Cuál debe ser el valor de μ, para que la bola no se escape de los planos, al intentar disminuir el ángulo diedro α (el sistema se encuentra sobre una mesa horizontal lisa)?



A) $\mu \geq \tan\alpha$ B) $\mu \geq 2\tan\alpha$ C) $\mu \geq \cot\alpha$
D) $\mu \geq \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ E) $\mu \geq \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

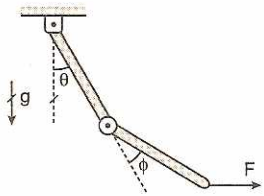
88. Se muestra una polea homogénea formada por dos discos. Si el disco de menor radio está a punto de deslizar; determine μ_s

$$\left[\frac{r}{R} = \frac{2}{5}\right]$$



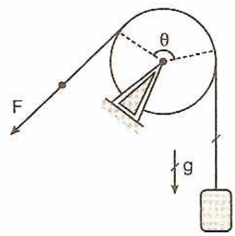
A) 0,25 B) 0,4 C) 0,6
D) 0,75 E) 0,8

89. Se muestra dos barras homogéneas idénticas articuladas y en reposo. Si mg representa el módulo de la $\vec{F}g$ de cada barra y $\vec{F}$ tiene un módulo de $\frac{mg}{2}\sqrt{3}$; ¿Qué relación existe entre θ y ϕ?



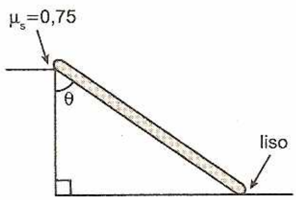
A) $\phi = 2\theta$ B) $\phi = \frac{2}{3}\theta$ C) $\phi = \frac{\theta}{3}$
D) $\phi = \theta$ E) $\phi = \frac{\theta}{2}$

90. Determine el menor valor de F que permita sostener al bloque de masa "m". El coeficiente de rozamiento estático entre la curva y la polea es μ.



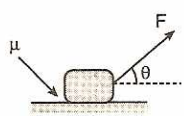
A) mg B) $mg(\mu + 1)$ C) $mge^{-\mu\theta}$
D) $mge^{\mu\theta}$ E) $mge^{\frac{\mu}{\theta}}$

91. ¿Para qué valor de θ, la barra homogénea resbala?



A) $\theta > 30°$ B) $\theta > 37°$ C) $\theta > 45°$
D) $\theta = 53°$ E) $\theta > 53°$

92. Un cajón cuya fuerza de gravedad es W reposa sobre el plano horizontal. Halle la mínima fuerza F que se debe aplicar al cajón para empezar a moverlo.

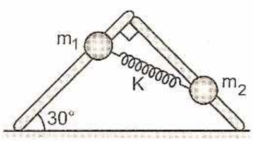


A) $\mu W\sqrt{1-\mu^2}$ B) $\dfrac{W}{\mu}$ C) $\dfrac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu W}$

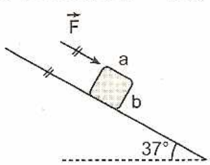
D) $\dfrac{\mu W}{\sqrt{\mu^2-1}}$ E) $\dfrac{W\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$

93. Se tiene un marco de alambre situado en un plano vertical. Dos esferas de masas $m_1=0{,}1$ kg y $m_2=0{,}3$ kg unidas por un resorte de $k=1{,}3$ N/cm, se deslizan sin fricción. Halle la deformación del resorte en la posición de equilibrio. ($\sqrt{7}\approx 2{,}6$)

A) 1 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 4 cm
E) 5 cm

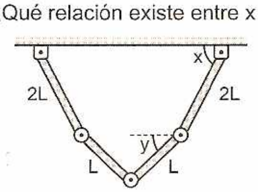


94. Un bloque rectangular homogéneo de 5 kg y dimensiones (a)(b), se encuentra sobre un plano inclinado. Sobre el cuerpo comienza a actuar una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano inclinado; determine el valor necesario de $\vec{F}$ para que el bloque empiece a inclinarse sin deslizar. (a/b = 2; g= 10 m/s²)



A) 20 N B) 25 N C) 30 N
D) 50 N E) 70 N

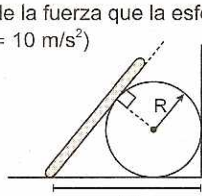
95. El sistema que muestra está en reposo y está conformado por cuatro barras homogéneas que están articuladas. Si la masa de las barras articuladas al techo es la mitad de la masa de las barras de longitud L, ¿Qué relación existe entre x e y?



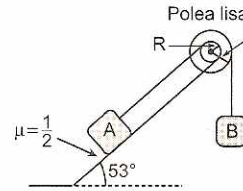
A) tanx = tany B) tanx = 1,5tany
C) tanx = 2tany D) tanx = 2,5tany
E) tanx = 3tany

96. La barra homogénea de 5 kg se mantiene en reposo apoyada en una esfera lisa de radio R. Determine el módulo de la fuerza que la esfera ejerce sobre la pared. (g = 10 m/s²)

A) 12 N
B) 15 N
C) 18 N
D) 24 N
E) 30 N



97. Si el bloque A es de 10 kg, determine la mayor masa del bloque B, tal que el sistema no pierda el equilibrio (g = 10 m/s²)

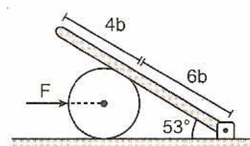


A) 4 kg B) 4,5 kg C) 5 kg
D) 5,5 kg E) 6 kg

98. Calcule el ángulo θ que define el equilibrio de la barra homogénea de 3 kg. El módulo de la fuerza de rozamiento en P es igual a 10 N.

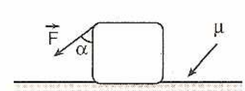
A) 53° B) 45° C) 37°
D) 30° E) 22,5°

99. Determine el valor necesario de $\vec{F}$ para mantener al sistema en equilibrio. La barra homogénea es de 120 N (superficies lisas).



A) 24 N B) 48 N C) 64 N
D) 72 N E) 90 N

100. El cubo homogéneo está a punto de deslizar e inclinarse debido a la fuerza $\vec{F}$. Determine la medida el ángulo α, sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático es μ



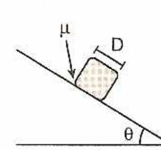
A) $\text{arccot}\left(\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)$ B) $\text{arcsen}\left(\dfrac{\mu}{1-\mu/2}\right)$

C) $\arctan\left(\dfrac{\mu}{1-2\mu}\right)$ D) $\text{arcsen}\left(\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)$

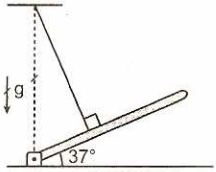
E) $\arctan\left(\dfrac{\mu}{\mu-0{,}5}\right)$

101. Calcule la altura máxima del cajón homogéneo y la medida del ángulo θ de modo que esté a punto de volcar.

A) $h = D\tan\theta;\ \theta \geq \tan^{-1}(\mu)$
B) $h = D\tan\theta;\ \theta = \tan^{-1}(\mu)$
C) $h = D\cot\theta;\ \theta = \tan^{-1}(\mu)$
D) $h = D\cot\theta;\ \theta \leq \tan^{-1}(\mu)$
E) $h = D\cot\theta;\ \theta \geq \tan^{-1}(\mu)$

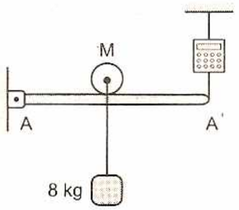


102. Determinar la fuerza que ejerce la articulación a la barra de 100 N, si la fuerza de tensión presenta un módulo igual a 35 N.



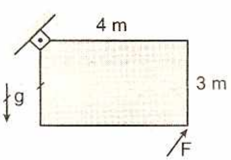
A) $(7\hat{i} + 24\hat{j})$ N B) $(21\hat{i} + 72\hat{j})$ N
C) $(30\hat{i} + 40\hat{j})$ N D) $(72\hat{i} + 21\hat{j})$ N
E) $(-20\hat{j} + 14\hat{i})$ N

103. Si lo que marca el dinamómetro electrónico está en función de lo que se desplaza el rodillo liviano M de acuerdo a $T = x^2 + 2x + 8$, donde x está en metros, T en Newton, determine las coordenadas del C.G. de la barra AA' homogénea. ($g = 10$ m/s^2)



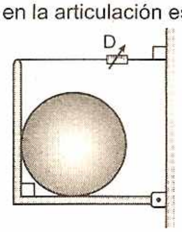
A) (10; 10) B) (10; 5) C) (5; 0)
D) (8; 0) E) (10; 0)

104. Se tiene una placa homogénea rectangular de 1 kg, que permanece en la posición mostrada. Determine el mínimo módulo de la fuerza $\vec{F}$ ($g = 10$ m/s^2).



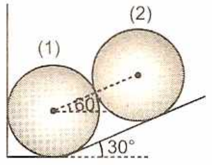
A) 1 N B) 2 N C) 3 N
D) 4 N E) 5 N

105. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio mecánico. Si el sistema está formado por una esfera homogénea de 3 kg y una barra doblada de 1 kg. Determine la lectura del dinamómetro ideal, si el módulo de la fuerza en la articulación es 50 N. ($g = 10$ m/s^2)



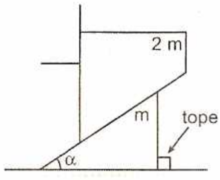
A) 10 N
B) 20 N
C) 30 N
D) 40 N
E) 50 N

106. En la figura se muestra dos esferas lisas, cada una de 30 kg, las cuales se mantienen en la posición indicada. Determine el módulo de la reacción de la esfera (2) sobre la esfera (1). ($g = 10$ m/s^2)



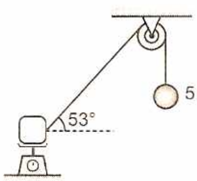
A) 50 N
B) $50\sqrt{3}$ N
C) 150 N
D) $100\sqrt{3}$ N
E) $150\sqrt{3}$ N

107. Si los bloques mostrados se encuentran en equilibrio, determine la relación entre el módulo de las fuerzas de reacción de la pared y el piso sobre cada bloque. (Considere superficies lisas)



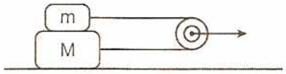
A) senα B) cosα C) tanα
D) (2/3)tanα E) (2/3)cotα

108. Sobre la balanza que se muestra está apoyado un bloque de 9 kg que permanece en reposo. Determine la lectura de la balanza. (Considere polea ideal y $g = 10$ m/s^2)



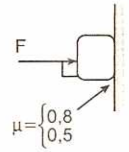
A) 30 N B) 40 N C) 50 N D) 70 N E) 90 N

109. En la figura los bloques son jalados por el hombre con 60 N; si los coeficientes de rozamiento entre bloques y entre M y el piso son $\mu_K = 0{,}70$ y $\mu_S = 0{,}80$, ¿los bloques m = 4 kg y M = 6 kg se moverán?, ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento sobre cada bloque? Desprecie la masa de la polea.



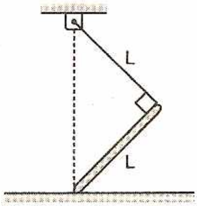
A) No; 20 N y 40 N B) Si; 30 N y 60 N
C) No; 30 N y 30 N D) Si; 20 N y 40 N
E) No; 30 N y 60 N

110. Determine el mínimo valor de F para que el bloque de 20 kg no deslice sobre la pared vertical. $g = 10$ m/s^2.



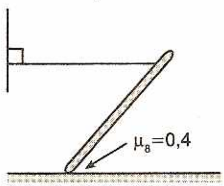
A) 50 N
B) 100 N
C) 150 N
D) 200 N
E) 250 N

111. Para que la barra homogénea, permanezca en la posición mostrada; entonces es necesario que el coeficiente de rozamiento estático entre el piso y la barra sea:



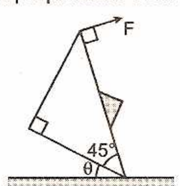
A) $\mu_s > 2/3$ B) $\mu_s \geq 0{,}45$ C) $\mu_s \geq 0{,}50$
D) $\mu_s > 1/5$ E) $\mu_s \geq 1/3$

112. La barra de 6 kg se encuentra a punto de deslizar. Determine el módulo de la tensión en la cuerda horizontal. ($g = 10\ m/s^2$)



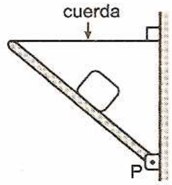
A) 60 N B) 12 N C) 18 N
D) 24 N E) 30 N

113. Considerando que el coeficiente de rozamiento estático entre las cuñas es 4/3, determine hasta que ángulo θ debe inclinarse la cuña más grande, de tal manera que la pequeña no resbale.



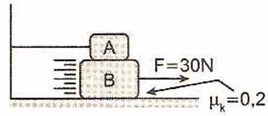
A) 6° B) 8° C) 12° D) 23° E) 30°

114. La barra de 3 kg esta en reposo. Si el bloque es de 2 kg y el módulo de la tensión en la cuerda es 50 N. Determine el modulo en articulación P. ($g = 10\ m/s^2$)



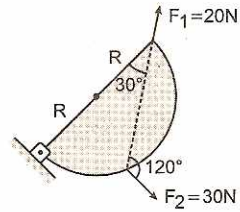
A) 20 N B) $30\sqrt{2}$ N C) $45\sqrt{3}$ N
D) 45 N E) $50\sqrt{2}$ N

115. En la figura mostrada el bloque B se mueve con velocidad constante. Determine el modulo en la tensión en la cuerda. (Considere todas las superficies ásperas; $m_A = 2$ kg; $m_B = 4$ kg; $g = 10\ m/s^2$)



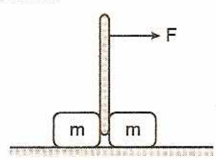
A) 6 N B) 24 N C) 12 N
D) 18 N E) 20 N

116. Se muestra una placa semicircular sobre una mesa. Si se aplica F_1 Y F_2 tal como se muestra, determine el momento resultante sobre ella respecto de la articulación. R = 50 cm



A) +3,5 Nm B) −3,5 Nm C) +2,5 Nm
D) −2,5 Nm E) +8 Nm

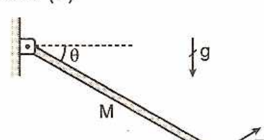
117. Entre dos cajas iguales, fue colocado un palo que no alcanza el suelo, si se aplica una fuerza horizontal F a la parte superior del palo. Indique la proposición correcta.



I. Si no existe rozamiento la caja de la derecha se moverá primero.
II. Si no existe rozamiento la caja de la izquierda se moverá primero.
III. Si existe rozamiento la caja de la izquierda se moverá primero.
IV. Si existe fricción ambas cajas se mueven simultáneamente.
V. Si no hay rozamiento entre las cajas y el suelo, las cajas se moverán simultáneamente

A) I B) II C) III D) IV E) V

118. La barra se encuentra en reposo, marque verdadero (V) o falso (F).



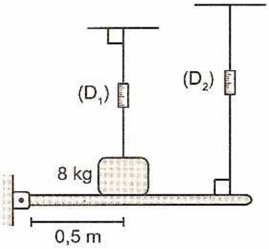
I. Para $F_{mín.}$ la reacción en la articulación es vertical.

II. F_{min} tiene modulo igual a $\dfrac{mg\cos\theta}{2}$

III. Si la barra no homogénea no hay un valor mínimo para F.

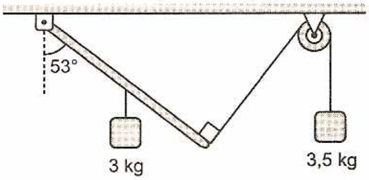
A) FVV B) VFF C) FVF
D) VVV E) VFV

119. La barra homogénea de 5 kg y 1,2 m de longitud permanece en posición horizontal, tal como se muestra. Determine la lectura del dinamómetro (D_2), si el dinamómetro (D_1) indica 20 N ($g = 10\ m/s^2$).



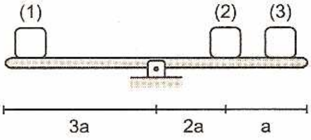
A) 20 N B) 30 N C) 40 N
D) 50 N E) 60 N

120. En la figura se muestra una barra de 7 kg en equilibrio. Determine el módulo de la fuerza de reacción en la articulación. ($g = 10\ m/s^2$)



A) 50 N B) 45 N C) 75 N
D) 60 N E) 80 N

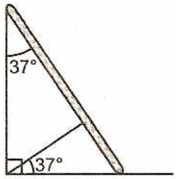
121. Una barra de masa 20 m se encuentra en equilibrio en la posición horizontal tal como se muestra. Si los bloques 1, 2 y 3 son de masas m, 2m y 3m. respectivamente. Determine a que distancia de la articulación se encuentra el centro de gravedad de la barra.



A) a/4 B) a/2 C) a
D) a/8 E) a/10

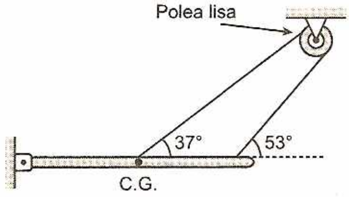
122. La barra homogénea de 3,5 kg se encuentra en reposo. Determine el módulo de la fuerza de tensión en la cuerda.

(Considere superficies lisas y $g = 10\ m/s^2$)



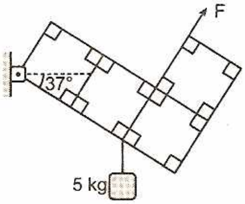
A) 35 N B) 22,5 N C) 42,5 N
D) 37,5 N E) 75 N

123. Determine el módulo de la tensión en la cuerda, si la barra homogénea de 11 kg permanece horizontal ($g = 10\ m/s^2$)



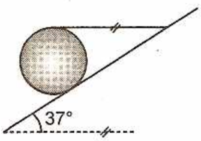
A) 20 N B) 30 N C) 40 N
D) 50 N E) 60 N

124. El sistema de varillas de igual longitud y de masa despreciable esta en equilibrio. Determine $\vec{F}$. ($g = 10\ m/s^2$)



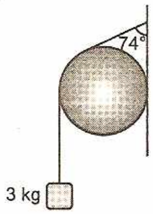
A) 40 N B) 30 N C) 50 N
D) 10 N E) 80 N

125. Determine la fuerza de rozamiento estático sobre la esfera homogénea de 6 kg.

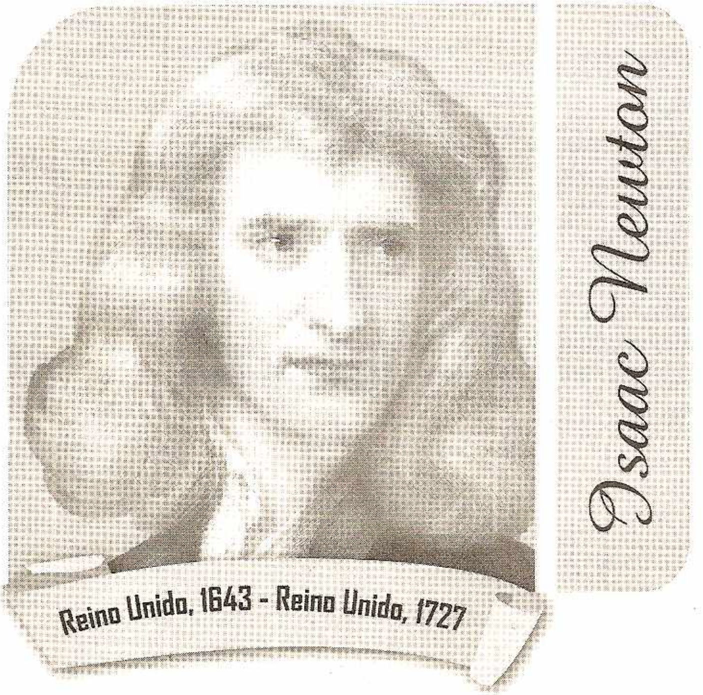


A) 10 N
B) 20 N
C) 30 N
D) 40 N
E) 60 N

126. La esfera homogénea de 0,4 kg se mantiene en reposo; determine la reacción que le ejerce la pared. ($g = 10\ m/s^2$)



Dinámica 05 capítulo



Isaac Newton (Woolsthorpe, Lincolnshire, 4 de enero de 1643-Kensington, Londres, 31 de marzo de 1727) fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Es autor de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describe la ley de la gravitación universal y establece las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en su obra *Opticks*) y el desarrollo del cálculo matemático.

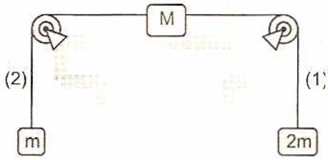
Otro de los temas tratados en los *Principia* fueron las tres leyes de la dinámica o leyes de Newton, en las que explicaba el movimiento de los cuerpos, así como sus efectos y causas: la primera ley de Newton o ley de la inercia, la segunda ley de Newton o ley de la interacción y la fuerza, y la tercera ley de Newton o ley de acción-reacción. Fue respetado durante toda su vida como ningún otro científico, y prueba de ello fueron los diversos cargos con que se le honró: en 1689 fue elegido miembro del Parlamento, en 1696 se le encargó la custodia de la Casa de la Moneda, en 1703 se le nombró presidente de la Royal Society y, finalmente, en 1705, recibió el título de *sir* de manos de la reina Ana.

Fuente: Wikipedia

A) 52 N B) $3\sqrt{13}$ N C) $15\sqrt{17}$ N
D) $18\sqrt{14}$ N E) $16\sqrt{10}$ N

127. Respecto al sistema mostrado que carece de rozamiento, donde las poleas y cuerdas son ideales, se puede afirmar que es (son) correctas(s).

I. Para cualquier valor de M, se cumple de $T_1 = 2T_2$
II. Si M = 5m; cada bloque se mantiene en reposo.
III. Si M = 3m; la aceleración de cada uno de los bloques es distinta.
IV. Si M = m, se cumple que $T_1 = (6/5)T_2$

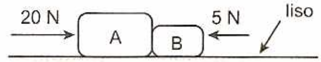


A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y IV E) Solo IV

129. Una moneda es lanzada sobre una superficie horizontal áspera; determine el módulo de la aceleración que experimenta durante su deslizamiento ($\mu_S = 0{,}8$; $\mu_K = 0{,}7$; $g = 10\ m/s^2$)

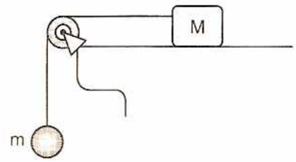
A) $8\ m/s^2$ B) $5\ m/s^2$ C) $7\ m/s^2$
D) $4\ m/s^2$ E) $6\ m/s^2$

130. Determine el módulo de la fuerza que el bloque A ejerce al bloque B. ($m_A = 2m_B$; $g = 10\ m/s^2$)



A) 5 N B) 10 N C) 15 N
D) 20 N E) 25 N

128. El coeficiente de fricción estático entre M y la superficie es 0,50; respecto al sistema que reposa y se muestra, podemos afirmar:



A) Si "m" se suelta, necesariamente M resbala.
B) Si "m" se suelta, necesariamente M sigue en reposo.
C) Si $m \leq M/2$ y se suelta, el sistema presentará aceleración.
D) Si $m > M/2$ y se suelta, el sistema acelerará.
E) Si $m > M/2$, necesariamente M está en reposo.

CLAVES

1. C	18. D	35. E	52. B	69. B	86. C	103. D	120. C
2. A	19. E	36. B	53. C	70. C	87. D	104. D	121. B
3. D	20. B	37. D	54. B	71. B	88. A	105. C	122. D
4. D	21. E	38. C	55. E	72. B	89. D	106. D	123. D
5. A	22. B	39. A	56. C	73. C	90. C	107. D	124. A
6. A	23. B	40. D	57. D	74. E	91. E	108. C	125. B
7. D	24. B	41. D	58. B	75. C	92. E	109. E	126. A
8. D	25. B	42. A	59. C	76. C	93. B	110. E	127. E
9. B	26. D	43. B	60. B	77. E	94. B	111. E	128. D
10. E	27. E	44. D	61. A	78. B	95. D	112. D	129. C
11. D	28. B	45. A	62. D	79. D	96. A	113. B	130. B
12. E	29. C	46. B	63. D	80. D	97. D	114. E	
13. E	30. B	47. A	64. E	81. E	98. C	115. D	
14. C	31. B	48. B	65. C	82. D	99. B	116. C	
15. D	32. C	49. A	66. D	83. C	100. C	117. E	
16. B	33. C	50. B	67. C	84. D	101. E	118. C	
17. A	34. E	51. C	68. B	85. A	102. B	119. D	

CONCEPTO

La dinámica es parte de la Mecánica, estudia las relaciones entre el movimiento de una partícula y la fuerza que lo produce. Si el movimiento es rectilíneo, se denomina dinámica Lineal y si la trayectoria es una circunferencia se llama dinámica circunferencial.

DINÁMICA LINEAL (RECTILÍNEA)

2.ª ley de Newton (Ley de aceleración)

La aceleración que un cuerpo adquiere es directamente proporcional a la resultante de las fuerzas que actúan en él, y tiene la misma dirección y el mismo sentido que dicha resultante.

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x} \quad ...(5.1)$$

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_y = m\vec{a}_y} \quad ...(5.2)$$

$$\boxed{\vec{F}_R = m\vec{a}} \quad ...(5.3)$$

¡Importante!:

I. $F = ma$ **II.** $m = \frac{F}{a}$ **III.** $a = \frac{F}{m}$

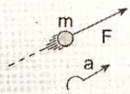
donde:

F: fuerza (*newton*)

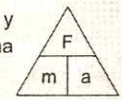
m: masa (kilogramo)

a: aceleración (m/s²)

1 N = (1 kg)(1 m/s²)



Los vectores fuerza resultante y aceleración tienen siempre la misma dirección y sentido.



Ley de aceleración:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}} \quad ...(5.4)$$

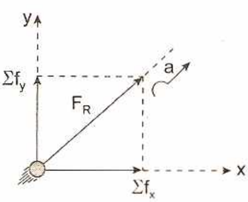


Fig. 5.1

La fuerza resultante $\vec{F}_R$ que actúa en un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración $\vec{a}$ que produce el mismo.

La aceleración que adquiere un cuerpo es inversamente proporcional a su masa.

Masa

La masa es una propiedad inherente de un cuerpo en particular. La masa es una magnitud física escalar, se mide en kilogramos (kg). En dinámica se define como la relación entre la fuerza resultante y la aceleración que adquiere. La masa de un cuerpo es constante:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{2F}{2a} = \frac{3F}{3a} = \text{constante}$$

Gráfica: fuerza-aceleración

La pendiente de la gráfica F-a representa la masa del cuerpo en movimiento.

$$\boxed{m = \frac{F}{a} = \tan\theta} \quad ...(5.5)$$

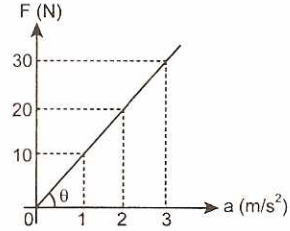
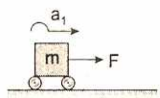


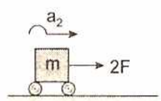
Fig. 5.2

A mayor inclinación de la recta (gráfica F-a) mayor masa, a menor inclinación de la recta menor masa del cuerpo.

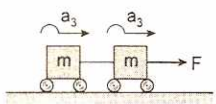
Ejemplos:



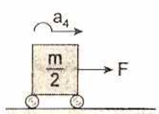
$$\boxed{a_1 = \frac{F}{m}}$$



$$\boxed{a_2 = \frac{2F}{m}}$$

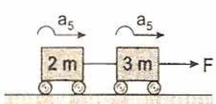


$$\boxed{a_3 = \frac{F}{2m}}$$

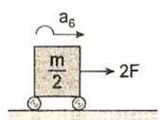


$$a_4 = \frac{F}{\frac{m}{2}}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{2F}{m}}$$

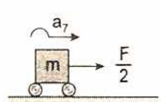


$$\boxed{a_5 = \frac{F}{5m}}$$



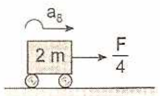
$$a_6 = \frac{2F}{\frac{m}{2}}$$

$$\boxed{a_6 = \frac{4F}{m}}$$



$$a_7 = \frac{\frac{F}{2}}{m}$$

$$\boxed{a_7 = \frac{F}{2m}}$$



$$a_8 = \frac{\frac{F}{4}}{2m}$$

$$\boxed{a_8 = \frac{F}{8m}}$$

Inercia:

- Es un atributo de la materia. Todo cuerpo material se opone al cambio. En mecánica decimos que la inercia es la terquedad de los cuerpos al cambio de posición, al cambio de velocidad, ...
- Cuando mayor sea la masa de un cuerpo, tanto mayor será su inercia; es decir, la masa de un cuerpo es una medida cuantitativa de la inercia del mismo; masa e inercia son proporcionales.

Peso ($\vec{W}$)

El peso de un cuerpo se define como la fuerza con que la Tierra lo atrae. Se representa mediante un vector que indica en todo instante el centro de la Tierra.

Todo cuerpo abandonado (figura 5.3) cerca de la superficie terrestre, cae con una aceleración constante, $\vec{a} = \vec{g}$. En caída libre la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su propio peso, $\vec{F}_R = \vec{W}$:

De la 2.ª ley de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{W} = m\vec{g}$

$$\boxed{\vec{W} = m\vec{g}} \text{ (vectorial)} \quad ...(5.6)$$

$$\boxed{W = mg} \text{ (escalar)} \quad ...(5.7)$$

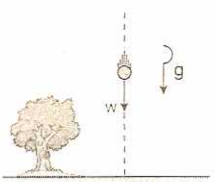
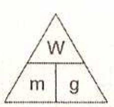


Fig. 5.3

Variaciones del peso:

En la ecuación 5.7, W = mg, como ya sabemos, el valor de "m" es constante. Pero la aceleración de la gravedad sufre variaciones cuando nos desplazamos de un lugar a otro de la superficie de la Tierra.

En el polo Norte: $g = 9{,}832$ m/s^2
En el polo Sur: $g = 9{,}832$ m/s^2
En la zona ecuatorial: $g = 9{,}780$ m/s^2



I. $W = mg$ **II.** $m = \frac{W}{g}$ **III.** $g = \frac{W}{m}$

donde: W: peso (*newton*)
m: masa (kilogramo)
g: aceleración (m/s^2)

SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

Se denomina de este modo al sistema de referencia que se encuentra fijo a la Tierra (reposo relativo) o se mueve con velocidad constante en línea recta respecto a un sistema de referencia fijo a la Tierra. Las leyes de Newton se aplica solo para sistemas de referencia inercial.

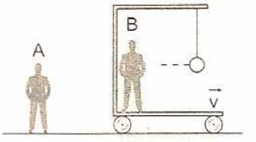


Fig. 5.4

Ejemplos:

1. La figura 5.5 muestra dos bloques de masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 8$ kg. Sabiendo que no existe rozamiento, hallar la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda que une a los bloques.

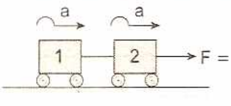


Fig. 5.5

Resolución:

Aplicamos la ecuación (5.3) al sistema:
$\vec{F}_R = (m_1 + m_2)\vec{a}$ ...(1)

La fuerza resultante que mueve al sistema $(m_1 + m_2)$ es F = 60 N. Este razonamiento es correcto solo si los cuerpos tienen igual aceleración. Reemplazando datos en (1):

$60 = (2 + 8)a \Rightarrow a = 6$ m/s^2

Para calcular la tensión en la cuerda se realiza el diagrama de cuerpo libre de uno de los bloques en la forma arbitraria. Escogemos en este caso el bloque 1.

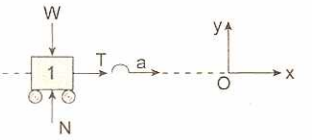


Fig. 5.5.1

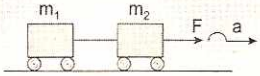
Aplicamos la ecuación (5.1) en el eje X:
$\Sigma F_x = m_1 a_x$
$T = (2)(6) = 12$ N

En el eje vertical (eje Y) no existe movimiento, entonces, el peso (W) y la relación normal (N) se cancelan, $\Sigma F_y = 0$.

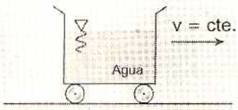
Si, usted realiza el diagrama de cuerpo libre del bloque 2 debe obtener necesariamente el mismo valor de la tensión, T = 12 N.

¡Importante!
Cuando los cuerpos tienen igual aceleración:
2.ª ley de Newton: $F = (m_1 + m_2)a$

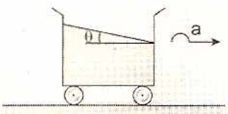
$$A = \frac{F}{(m_1 + m_2)}$$



Caso especial
La figura muestra un recipiente, conteniendo agua, con velocidad constante.



Cuando el recipiente acelera con módulo constante a, el nivel (superficie libre) del agua experimenta una desviación, θ, ángulo con respecto a la horizontal.



$a = g\tan\theta$
g: aceleración de la gravedad

2. La figura 5.6 muestra dos bloques de masas $m_1 = 7$ kg y $m_2 = 3$ kg. Despreciando toda forma de rozamiento, hallar la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda que une a los bloques. ($g = 10$ m/s^2)

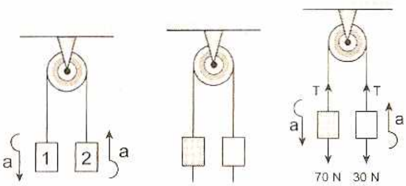


Fig. 5.6.a Fig. 5.6.b Fig. 5.6.c

Resolución:

Aplicamos la ecuación (5.2) en el eje Y, a cada bloque, en la figura 5.6.c. $\Sigma F_y = ma_y$

Regla práctica: La fuerza se considera positiva (+) si tiene el mismo sentido de la aceleración.

Bloque (1):
$70 - T = m_1a \Rightarrow 70 - T = 7a$ ...(1)

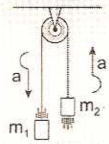
Bloque (2):
$T - 30 = m_2a \Rightarrow T - 30 = 3a$ ...(2)

Sumando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:
$40 = 10a \Rightarrow a = 4$ m/s^2

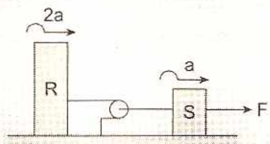
Ahora, reemplazamos en la ecuación (1) o (2) arbitrariamente. En este caso elegimos la ecuación (2):
$T - 30 = 3(4) \Rightarrow T = 42$ N

Regla práctica
Considerando $m_1 > m_2$, la aceleración de los cuerpos es:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}g$$



Caso especial
Los bloques R y S están conectados mediante una polea móvil. Cinemáticamente se demuestra que los bloques R y S tienen aceleraciones que están en razón de 2 a 1, 2a y a respectivamente.



3. La figura 5.7 muestra dos bloques de masas $m_1 = 12$ kg y $m_2 = 8$ kg. Sabiendo que las superficies en contacto son perfectamente lisas, hallar la aceleración de los bloques y la fuerza de reacción entre los bloques 1 y 2.

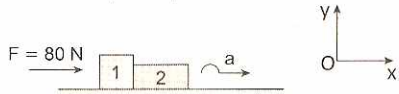


Fig. 5.7

Resolución:

Aplicamos la ecuación (5.1) en el eje X, al sistema:
$\vec{F}_R = (m_1 + m_2)a$
$80 = (12 + 8)a \Rightarrow a = 4$ m/s^2

La fuerza resultante que mueve al sistema $(m_1 + m_2)$ es $F = 80$ N.

Para calcular la fuerza de reacción se realiza el diagrama del cuerpo libre de los bloques (1) y (2) como muestra la figura (5.7.1).

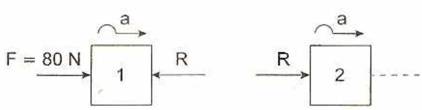


Fig. 5.7.1

En este caso, por razones didácticas no se grafican las fuerzas verticales, porque estas se cancelan, hay equilibrio de fuerzas. Aplicamos la ecuación 5.1 al bloque 1: $\Sigma F_x = m_1a_x$

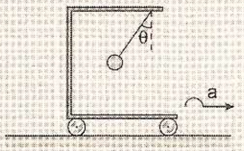
$80 - R = (12)(4) \Rightarrow 80 - R = 48$
$\Rightarrow R = 32$ N

Solo para comprobar el valor de la reacción R aplicamos la ecuación (5.1) al bloque 2:

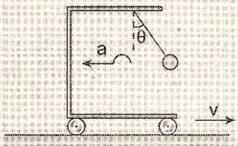
$\Sigma F_x = m_2 a_x \Rightarrow R = (8)(4)$
$\Rightarrow R = 32\ N$

Caso especial
Sistema simple que permite calcular la aceleración $\vec{a}$.
La figura muestra una esfera sujetada por una cuerda desde el techo de un carro que se mueve con aceleración constante $\vec{a}$. El hilo se desvía un ángulo θ respecto de la vertical, debido a la inercia.

$a = g\tan\theta$



La aceleración del sistema, no depende de la masa de la esfera, solo del ángulo de inclinación.
Si el sistema, desacelera (disminuye la velocidad) entonces tendrá el siguiente aspecto:



4. Un bloque, de masa "m", se deja deslizar sobre un plano inclinado sin fricción. El ángulo de inclinación es θ (figura 5.8). ¿Cuál es la aceleración en el movimiento del bloque al descender por el plano?

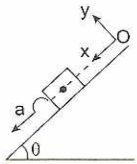


Fig. 5.8.a

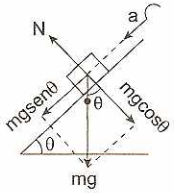


Fig. 5.8.b

Resolución:

Fijamos previamente nuestro sistema de referencia. El bloque se mueve sobre el plano (eje x), entonces en el eje y (perpendicular al plano) la fuerza resultante es igual a cero.

$\Sigma F_y = 0$ (no existe movimiento en el eje y)
Vamos a descomponer el peso mg respecto de nuestro sistema de referencia (x - y). Sus componentes son:

En el eje x: $mg\,\mathrm{sen}\,\theta$
En el eje y: $mg\cos\theta$

Aplicamos la condición de equilibrio en el eje y:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$ ...(1)

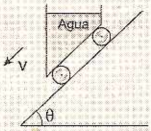
Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje x:
$\Sigma F_x = ma_x$
$mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma \Rightarrow a = g\,\mathrm{sen}\,\theta$ ...(2)

Observe que la aceleración no depende de la masa "m"; es decir, cualquiera que sea su masa el cuerpo, bajará por el plano con una aceleración: $a = g\,\mathrm{sen}\,\theta$. Vemos también que la aceleración depende solo del ángulo de inclinación θ:

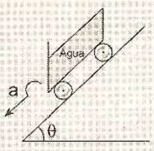
Si: $\theta = 30° \Rightarrow a = \dfrac{g}{2}$ Si: $\theta = 45° \Rightarrow a = \dfrac{g}{2}\sqrt{2}$

Si: $\theta = 60° \Rightarrow a = \dfrac{g}{2}\sqrt{3}$ Si: $\theta = 37° \Rightarrow a = \dfrac{3}{5}g$

Caso especial
La figura muestra un recipiente conteniendo agua, descendiendo con velocidad constante.



Si el recipiente se deja en libertad de movimiento, sin rozamiento, $a = g\,\mathrm{sen}\,\theta$, entonces el nivel libre del agua es paralela al plano inclinado.
El sistema acelera con módulo constante:
$a = g\,\mathrm{sen}\,\theta$
g: aceleración de la gravedad.

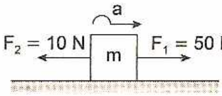


MÉTODO DE ATWOOD PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DINÁMICA

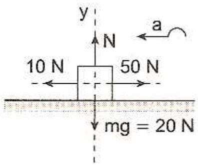
1. Hacer un diagrama de cuerpo libre (DCL) del cuerpo o sistema de cuerpos.
2. Elegir el sistema de ejes adecuados; un eje paralelo al movimiento (eje x) y otro perpendicular a él (eje y), y descomponer todas las fuerzas en estas dos direcciones.
3. Las componentes de las fuerzas perpendiculares al movimiento se anulan entre sí, puesto que el cuerpo no se mueve en esa dirección. Por lo tanto, en el eje y hay equilibrio de fuerzas.
$$\Sigma F_y = 0$$
4. Las componentes de las fuerzas (eje x) en la dirección del movimiento cumplen la segunda ley de Newton:
$$F_R = ma$$
Donde:
$$F_R = \sum\begin{pmatrix}\text{Fuerzas a}\\ \text{favor de } \vec{a}\end{pmatrix} - \sum\begin{pmatrix}\text{Fuerzas en}\\ \text{contra de } \vec{a}\end{pmatrix}$$

Ejemplos:

1. Determinar la aceleración del bloque de masa 2 kg, si no existe rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:
Elijamos el sistema de ejes adecuados; se observa que:

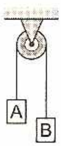


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 20$ *newtons*

Luego: $a = \dfrac{F_R}{m} = \dfrac{50 - 10}{2} = 20\ m/s^2$

2. Determinar la aceleración de los bloques, si no existe rozamiento.

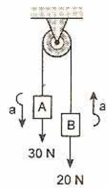
$m_A = 3$ kg
$m_B = 2$ kg
$g = 10\ m/s^2$



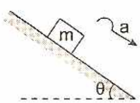
Resolución:
Analizamos el sistema:

$a = \dfrac{F_R}{m} = \dfrac{30 - 20}{3 + 2} = 2\ m/s^2$

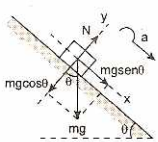
m: masa total



3. Si no existe rozamiento, determinar la aceleración del bloque:



Resolución:



Elijamos el sistema de ejes adecuados y descomponiendo:

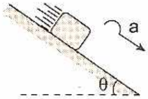
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

Luego: $a = \dfrac{F_R}{m} = \dfrac{mg\,sen\theta}{m} \Rightarrow a = g\,sen\theta$

Casos especiales

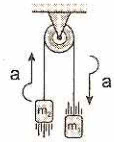
1. Aceleración de un cuerpo en un plano inclinado liso:

$a = g\,sen\theta$



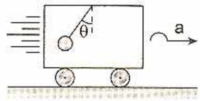
2. Máquina de Atwood:

$a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2};\quad m_1 > m_2$



3. Aceleración en función del ángulo:

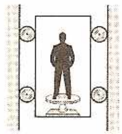
$a = g\tan\theta$



4. Peso aparente dentro del ascensor:

$P = W\left(1 \pm \dfrac{a}{g}\right)$

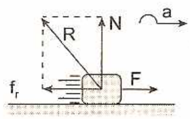
a ↑: sube (+)
a ↓: baja (−)
P: peso aparente
W: peso real



FUERZA DE ROZAMIENTO O FRICCIÓN

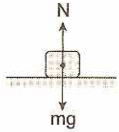
Reacción total en una superficie áspera
Es la resultante de la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.

Por Pitágoras: $R^2 = N^2 + f_r^2$



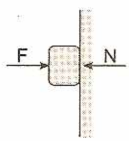
Ejemplos de casos frecuentes de cómo graficar y determinar la fuerza normal.

1.



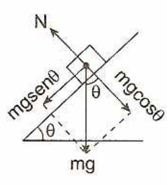
$N = mg$

2.



$F = N$

3.



$N = mg\cos\theta$

Aunque, en la naturaleza también existen cuerpos redondeados (troncos del árbol, cantos rodados, huevos...), ninguno de ellos cumple la función de la rueda en las máquinas, por tanto, se puede considerar que esta es una máquina totalmente artificial.

De la rueda se derivan multitud de máquinas de las que cabe destacar: polea simple, rodillo, tren de rodadura, noria, polea móvil, polipasto, rodamiento, engranajes, sistema correa-polea...

DINÁMICA CIRCUNFERENCIAL

Estudia a las fuerzas que originan el movimiento circunferencial. En el capítulo 3 se estudió el movimiento circunferencial uniforme, en el cual el vector velocidad "v", tiene magnitud constante y dirección variable. Vimos, entonces, que la variación de la dirección del vector "v" se caracteriza por una aceleración centrípeta a_C, dirigida hacia el centro de la circunferencia (Figura 5.15), y cuya magnitud está dada por:

$$\boxed{a_C = \frac{v^2}{R}} \quad ...(5.8)$$

v: velocidad lineal, se mide en m/s
R: radio de curvatura, se mide en metros.
a_C: aceleración centrípeta, se mide en m/s^2.

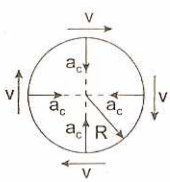


Fig. 5.15

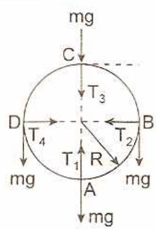


Fig. 5.16

La figura 5.16 muestra una piedra de masa "m" atada al extremo de una cuerda girando en órbita circular en un plano vertical. También muestra el diagrama de cuerpo libre de la piedra cuando pasa por las posiciones A, B, C y D, donde T_1, T_2, T_3 y T_4, representan a la tensión en la cuerda en cada posición, el peso mg representado por un vector vertical hacia abajo es constante.

"Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo".

Galileo Galilei

Recuerda que:

a_C: aceleración centrípeta $a_C = \frac{v^2}{R}$ ...(I)
pero: $v = \omega R$ ...(II)
ω: velocidad angular (s^{-1})
Reemplazando (II) en (I): $a_C = \omega^2 R$

"La aceleración centrípeta mide la rapidez de cambio que experimenta la velocidad lineal en dirección y sentido".

Fuerza centrípeta (F_C)

Matemáticamente, se define como la fuerza resultante de todas las fuerzas en dirección radial que actúa sobre un cuerpo en movimiento circunferencial en cada instante de tiempo.

Respecto de la figura 5.16, calculamos la fuerza centrípeta en las posiciones A, B, C y D:

En A: $F_C = T_1 - mg$ ...(1)

En B: $F_C = T_2$ ...(2)

En C: $F_C = T_3 + mg$ ...(3)

En D: $F_C = T_4$ ...(4)

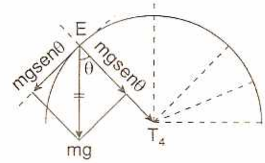


Fig. 5.17

De donde deducimos, que se considera positiva a la fuerza con dirección al centro de la circunferencia y negativa, si la fuerza tiene sentido opuesto. Observe, en las posiciones A y C el peso mg es una fuerza radial (dirección del radio) en cambio en las posiciones B y D es una fuerza tangencial a la circunferencia.

Ahora, consideremos una posición intermedia E, como indica la figura (5.17). Fijamos nuestro sistema de referencia donde uno de los ejes tiene dirección del radio y el otro es tangente a la circunferencia.

En la posición E, la cuerda forma con la vertical un ángulo θ, la tensión en la cuerda es T_4, la componente radial del peso es: $mg\cos\theta$; la componente tangencial de peso es: $mg\,\text{sen}\,\theta$.

La fuerza centrípeta en la posición E es:
$F_C = T_4 + mg\cos\theta$ ...(5)

Fuerza tangencial (F_T)

Es la fuerza paralela a la velocidad instantánea en el movimiento circunferencial. En la estructura de una cúpula, fuerza que actúe a lo largo de un paralelo, perpendicularmente a las fuerzas meridianas; de compresión en la parte superior y de tracción en la inferior.

Como el movimiento circunferencial del cuerpo presenta una aceleración, concluimos, por la segunda ley de Newton, que sobre el cuerpo debe estar actuando una fuerza resultante responsable de dicha aceleración centrípeta. Tal fuerza tendrá la misma dirección y el mismo sentido que la aceleración centrípeta en cada instante, o sea, apuntará hacia el centro de la circunferencia. Por este motivo, recibe el nombre de fuerza centrípeta, F_C. Siendo "m" la masa del cuerpo en movimiento circunferencial, podemos escribir:

$$\boxed{\vec{F}_R = m\vec{a}} \quad \text{(Segunda ley de Newton)}$$

$$\boxed{\vec{F}_C = m\vec{a}_C} \quad ...(5.9)$$

$$\boxed{\vec{F}_C = m\frac{v^2}{R}} \qquad ...(5.10)$$

$$\boxed{\vec{F}_C = m\omega^2 R} \qquad ...(5.11)$$

Para que un cuerpo describa un movimiento circunferencial uniforme, debe actuar sobre él una fuerza centrípeta, que hace que la velocidad cambie constantemente de dirección (sentido).

Ejemplo:

Imagine una esfera apoyada sobre una mesa horizontal lisa, que gira sujeta por una cuerda fija en un clavo, figura (5.17). Sobre el cuerpo actúan la tensión T (ejercida por la cuerda), la reacción normal N (de la mesa) y el peso mg.

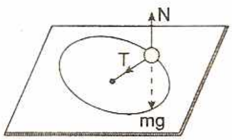


Fig. 5.17

Como el peso y la normal son verticales, la aceleración centrípeta solo es producida por la tensión T de la cuerda. Por lo tanto, T es la fuerza centrípeta en este movimiento.

Péndulo cónico

Una masa "m" suspendida de un punto fijo por una cuerda de longitud L y peso despreciable que gira alrededor de la vertical con velocidad angular constante ω; este sistema se llama péndulo cónico.

Analicemos el péndulo cónico:

1. Está formado por una esfera de masa "m" suspendida de un punto fijo por una cuerda de longitud L y masa despreciable que gira alrededor de la línea vertical con velocidad angular constante de módulo ω.
2. Realicemos el diagrama de cuerpo libre, de la masa del péndulo, respecto de un observador fijo en la Tierra (sistema de referencia inercial). Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso (fuerza de gravedad) y la tensión en la cuerda.

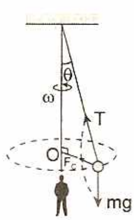


Fig. 5.18

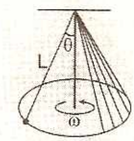
Aplicando la segunda ley de Newton, la fuerza resultante es igual a la fuerza centrípeta, como muestra la figura 5.18

$$\vec{T} + m\vec{g} = \vec{F}_C \qquad ...(I)$$

$$\vec{F}_C = m\vec{a}_C \qquad ...(II)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

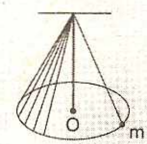
ω: velocidad angular (rad/s)
g: aceleración de la gravedad, en m/s^2
L: longitud de la cuerda (m)
θ: ángulo de desviación



3. Ahora, analicemos el DCL de la masa pendular "m" respecto de un observador ubicado en el eje de rotación que gira con la misma velocidad angular ω que el péndulo cónico (sistema de referencia no inercial). Respecto del observador giratorio, un cuerpo de masa "m" está en equilibrio (reposo relativo), por consiguiente la fuerza resultante es igual a cero.

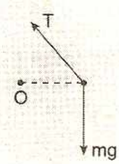
$$\vec{F}_{resultante} = 0 \qquad ...(III)$$

Recuerda:
$v = \omega R$
v: velocidad lineal
ω: velocidad angular
R: radio de la circunferencia



¡Cuidado!
En el diagrama de cuerpo libre (DCL) de una partícula que gira, no se grafica la fuerza centrípeta.

DCL (esferita m)



4. Las fuerzas que actúan sobre la masa "m" son el peso o fuerza de gravedad, la tensión y una tercera fuerza $\vec{F}'$ que anula a la fuerza resultante de sumar el peso, más, la tensión, como indica la figura 5.19.

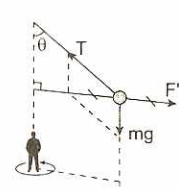


Fig. 5.19

Comparando las figuras (5.18 y 5.19) la fuerza de inercia y la fuerza centrípeta son iguales en módulo y direcciones opuestas.

$$\vec{F}' = -\vec{F}_{centrípeta} \qquad ...(IV)$$

5. La fuerza inercial se grafica solo para sistemas de referencia no inercial, que tiene aceleración tangencial o centrípeta.
6. Para sistema de referencias inerciales, el sistema de referencia se encuentra en reposo se mueve con velocidad constante, y la fuerza inercial no existe.
7. A esta fuerza inercial o de inercia debido a la rotación se le llama en mecánica fuerza centrífuga.
8. Fuerza centrífuga. Es una fuerza inercial, que tiene el mismo valor de la fuerza centrípeta, pero de sentidos opuestos.

$$\vec{F}_{centrífuga} = -\vec{F}_{centrípeta} \qquad ...(V)$$

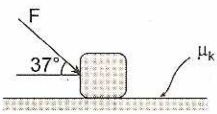
La fuerza centrífuga tiene sentido físico solo para sistemas de referencias no inerciales (sistema giratorio).

9. Fuerza centrípeta. Es la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que tiene movimiento circunferencial con velocidad de módulo constante. Observa la expresión escalar de fuerza centrípeta:

$$F_C = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2R \qquad ...(VI)$$

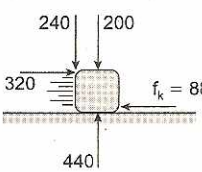
PROBLEMAS RESUELTOS

1. De la figura mostrada, hallar la magnitud de la aceleración del bloque de masa 20 kg. Si F = 400 N y $\mu_k = 0{,}2$. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

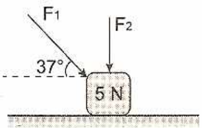
a) Diagrama del cuerpo libre del bloque.
Descomposición de la fuerza F.
m = 20 kg; F = 400 = 5(80)
$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow f_k = 0{,}2(440) \Rightarrow f_k = 88\ N$



b) Dinámica: $F_R = ma$

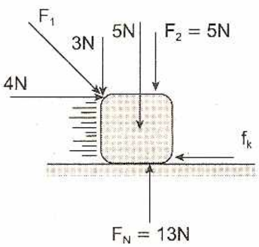
$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{320 - 88}{20} \Rightarrow a = \frac{232}{20} = 11{,}6\ m/s^2$$

2. La figura muestra un bloque de peso 5 N sometido a la acción de las fuerzas $F_1 = F_2 = 5$ N. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y superficie es 0,1. Determinar el módulo de la aceleración del bloque en m/s^2. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

a) Diagrama del cuerpo libre del bloque; m = 0,5 kg



$$F_N = F_2 + F_g + F_{1(y)}$$
$$F_N = 5 + 5 + 3 \Rightarrow F_N = 13\ N$$

b) Rozamiento:

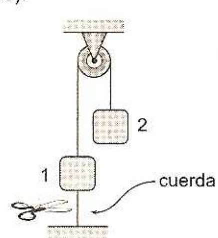
$$f_k = \mu_k F_N = (0{,}1)(13) = 1{,}3\ N$$

c) Ley de aceleración:

$$a = \frac{F_R}{m} \Rightarrow a = \frac{4 - 1{,}3}{0{,}5} = \frac{2{,}7}{0{,}5} = 5{,}4\ m/s^2$$

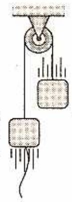
$$a = 5{,}4\ m/s^2$$

3. En el sistema mostrado libre de rozamiento se tiene los bloques 1 y 2 inicialmente en reposo con masa de 20 kg y 40 kg respectivamente, si se corta la cuerda que une el bloque 1 con el piso. Calcular el valor de la aceleración que adquieren los bloques (poleas ideales).



Resolución:

Datos: $m_1 = 20$ kg; $m_2 = 40$ kg



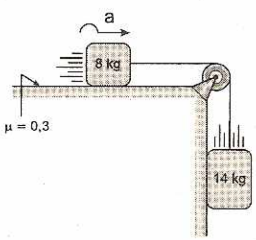
Recordando el método de Atwood; $m_2 > m_1$

$$a = \frac{\sum F_{favor} - \sum F_{contra}}{\sum_{masas}} \Rightarrow a = g\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g = \left(\frac{40 - 20}{40 + 20}\right)10 = \left(\frac{1}{3}\right)10$$

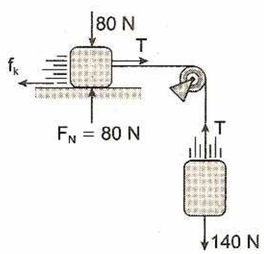
$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}\ m/s^2$$

4. Dos bloques están conectados por un cordel ligero que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 8 kg y la superficie es 0,3. Determinar la aceleración (en m/s^2) de los dos bloques y la tensión del cordel, en N ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

a) Diagrama del cuerpo libre de cada uno de los bloques.



$\mu_k = 0,3$; $m_1 = 147$ kg; $m_2 = 8$ kg

b) Método de Atwood:

$$a = \frac{mg - \mu_k m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{140 - 0,3(80)}{22} = \frac{140 - 24}{22}$$

$$a = \frac{116}{22} = 5,27\ m/s^2$$

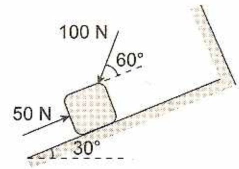
c) Analizamos el bloque de 14 kg:

$F_R = ma \Rightarrow mg - T = ma$

$140 - T = 14(5,27) \Rightarrow T = 140 - 14(5,27)$

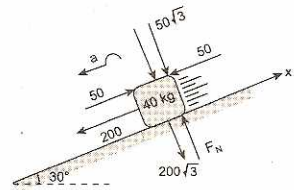
$T = 66,18$ N

5. Hallar el módulo de la aceleración del bloque de masa 40 kg. No hay rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

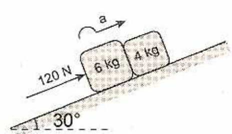
a) Diagrama del cuerpo libre del bloque.



b) Ley de aceleración, sobre el eje de movimiento.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} \Rightarrow a = \frac{F_R}{m} = \frac{200}{40} \Rightarrow a = 5\ m/s^2$$

6. Determinar la fuerza de contacto entre los bloques lisos. Que se muestra en la figura. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

a) Analizamos al sistema formado por los dos bloques.
Aplicamos el método de Atwood:

$$a = \frac{F - Mg\operatorname{sen}30°}{M} = \frac{120 - 10 \times 10 \times \frac{1}{2}}{10}$$

$$a = \frac{70}{10} = 7\ m/s^2$$

b) Analizamos al bloque menor de masa 4 kg.
R = fuerza de reacción

$$a = \frac{R - mg\operatorname{sen}30°}{m} \Rightarrow 7 = \frac{R - 20}{4}$$

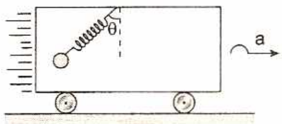
$R = 28 + 20 \qquad \therefore R = 48$ N

c) Otra forma. Ley de aceleración:

$F_R = ma \Rightarrow 120 - R - 30 = 6(7)$

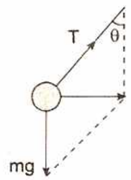
$R = 90 - 42 = 48$ N

7. El sistema mostrado acelera con magnitud constante $a = 24\ m/s^2$ y la esfera de 5 kg de masa se encuentra suspendida de un resorte de constante elástica $k = 390$ N/m. Hallar la deformación en el resorte. $g = 10\ m/s^2$



Resolución:

a) Diagrama del cuerpo libre de la esfera.
Dato: $a = 24\ m/s^2$; $m_1 = 5$ kg; $k = 390$ N/m



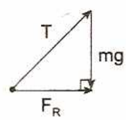
b) Ley de aceleración:

$T = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2}$

$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$

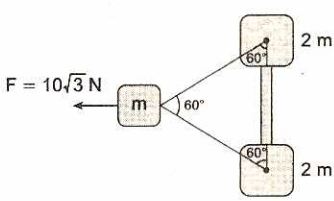
$T = 5\sqrt{(24)^2 + (10)^2}$

$T = 5(26) = 130$ N



c) Ley de Hooke:
$T = kx \Rightarrow 130 = 390x$
$x = 0{,}33$ m

8. En la figura se muestra un sistema de 3 masas visto desde arriba. Si la superficie es lisa. Hallar la tensión en la cuerda que sujeta a una de las masas 2m (en la barra que une las masas 2m es de masa despreciable).

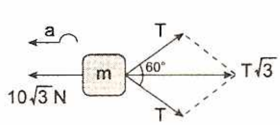


Resolución:

a) Analizando el sistema. Aplicamos la ley de aceleración al sistema de masa 5m.

$F_R = \Sigma ma \Rightarrow 10\sqrt{3} = (5m)a$

$ma = 2\sqrt{3}$ N ...(I)



b) $F_R = ma$
Aplicamos la ley de aceleración al bloque menor de masa "m".
$10\sqrt{3} - T\sqrt{3} = ma$

Reemplazando en (I):
$10\sqrt{3} - T\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
$T\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow T = 8$ N

9. Sobre un cuerpo A actúa una fuerza F produciendo una aceleración de 4 m/s^2. La misma fuerza actúa sobre un cuerpo B produciendo una aceleración de 6 m/s^2. ¿Qué aceleración producirá, si la misma fuerza actúa sobre los dos cuerpos unidos?

Resolución:

Aplicando la segunda ley de Newton: $m = \dfrac{F}{a}$

Para A: $m_A = \dfrac{F}{4}$ ...(I)

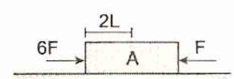
Para B: $m_B = \dfrac{F}{6}$ ...(II)

Cálculo de la aceleración, cuando los cuerpos están unidos:

$a = \dfrac{F}{(m_A + m_B)}$ ...(III)

Reemplazando (I) y (II) en (III):
$a = 2{,}4\ m/s^2$

10. La figura muestra un bloque homogéneo y uniforme de longitud 5L sometido a un sistema de fuerzas 6F y F respectivamente. Determinar la fuerza de compresión en el punto A. No hay fricción.

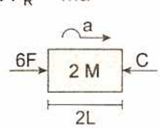


Resolución:

Consideremos la masa del sistema 5M convenientemente. Aplicamos la segunda ley de Newton:

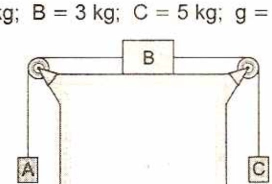
$F_R = ma \Rightarrow (6F - F) = 5Ma \Rightarrow a = \dfrac{F}{M}$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de la porción 2L y masa 2M: $F_R = ma$



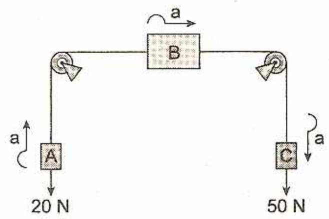
$(6F - C) = 2Ma \Rightarrow 6F - C = (2M)\left(\dfrac{F}{M}\right)$
$\therefore C = 4F$

11. Determinar la aceleración de los bloques en el sistema físico mostrado, sabiendo que no hay rozamiento.
($A = 2$ kg; $B = 3$ kg; $C = 5$ kg; $g = 10\ m/s^2$)



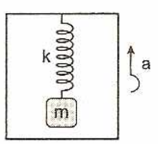
Resolución:

Analizando todo el sistema. La fuerza resultante, de todas las fuerzas que están en favor o en contra del movimiento es igual a la suma de masas (A + B + C) en movimiento por la aceleración común "a".

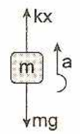


$F_R = \Sigma ma \Rightarrow 30 = 10a \quad \therefore\ a = 3\ m/s^2$

12. Un ascensor de masa 600 kg lleva en el techo un resorte de constante elástica k = 150 N/m. En el extremo del resorte hay un bloque de masa 5 kg. Sabiendo que tanto el ascensor como el bloque tienen la misma aceleración $a = 5\ m/s^2$ hacia arriba, determinar cuánto se estira el resorte.



Resolución:



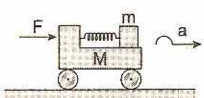
Haciendo el DCL del bloque respecto de un observador ubicado en la Tierra:

Aplicando la segunda ley de Newton: $F_R = ma$

$kx - mg = ma \Rightarrow x = \dfrac{m(a+g)}{k}$

Reemplazando los datos en el SI: $x = 0{,}05$ m

13. Sabiendo que el bloque de masa "m" se encuentra en reposo respecto de la plataforma de masa M, (M = 4m), determinar la deformación en el resorte de constante de elasticidad k = 800 N/m. No hay rozamiento y la fuerza aplicada es F = 400 N.



Resolución:

Si el bloque de masa "m" se encuentra en reposo respecto de M, entonces ambos tienen la misma aceleración "a" en el eje horizontal.

Haciendo el DCL del sistema (m + M):

$F_R = (m + M)a \Rightarrow F = 5ma$ ...(I)

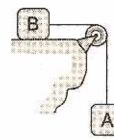
Haciendo el DCL del bloque de masa "m":

$F_R = ma \Rightarrow kx = ma$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):

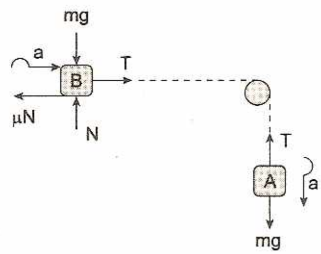
$F = 5kx \Rightarrow 400 = 5(800)x \quad \therefore\ x = 0{,}1$ m

14. La figura muestra dos bloques de masas iguales, el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque B y el plano horizontal es 0,4. Determinar la aceleración de los bloques. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de los bloques A y B:



Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque:

$F_R = ma$

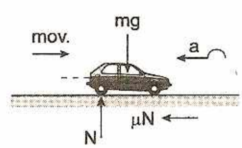
A: $mg - T = ma$ ...(I)

B: $T - \mu N = ma \Rightarrow T - \mu mg = ma$ ...(II)

Resolviendo (I) y (II) se tiene: $a = \dfrac{(1-\mu)}{2}g$

Reemplazando los datos: $a = 3\ m/s^2$

15. Al frenar un auto cuya velocidad es de 72 km/h resbala 50 metros hasta detenerse. Calcular el coeficiente de rozamiento cinético entre la pista y los neumáticos. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Haciendo el DCL del auto:

La reacción normal N es igual al peso del automóvil:

$N = mg$ ...(I)

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje horizontal:

$F_R = ma \Rightarrow \mu N = ma$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II): $a = \mu g$

Analizando el movimiento cinemáticamente

$v_f^2 = v_0^2 - 2ad$

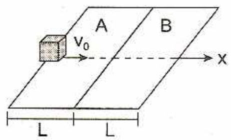
$0 = (20)^2 - 2\mu g d$

Reemplazando los datos en el SI:

$0 = 400 - 2\mu(10)(50)$

$\therefore\ \mu = 0{,}4$; cinético

16. Se tiene una mesa construida con dos materiales diferentes de longitudes iguales a L = 2 m. Se lanza un bloque, con velocidad v_0 paralela al eje X, y se detiene justo en el otro extremo de la mesa. Si el coeficiente de rozamiento cinético en el material A es 0,3 y en el material B es 0,1, hallar v_0.
($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Cálculo de la aceleración en cada material.

Del problema anterior sabemos que: $a = \mu g$

Para A: $a_A = 3\ m/s^2$; para B: $a_B = 1\ m/s^2$

Analizando cinemáticamente, en los materiales A y B:

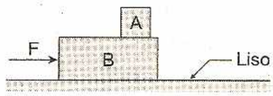
$v_f^2 - v_0^2 - 2ad$

En B: $0 = U^2 - 2(1)(2) \Rightarrow U = 2\ m/s$

En A: $U^2 = v_0^2 - 2ad \Rightarrow 4 = v_0^2 - 2(3)(2)$

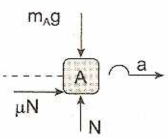
$\therefore\ v_0 = 4\ m/s$

17. Calcular el máximo valor de F para que el cuerpo A = 2 kg que se halla apoyado en B = 3 kg no resbale respecto de la superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático y cinético entre el bloque A y el carro B es 0,4 y 0,2 respectivamente. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Si el bloque A no resbala respecto de B, entonces ambos tienen la misma aceleración "a" en el eje horizontal:



Haciendo el DCL del bloque A:

Analizando el movimiento de A en el eje vertical:

$N = m_Ag$ ...(1)

Analizando el movimiento de A en el eje horizontal:

$F_R = m_Aa \Rightarrow \mu N = m_Aa$ ...(2)

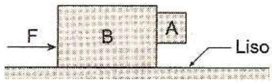
Reemplazando (1) en (2):

$a = \mu g = (0{,}4)(10) \Rightarrow a = 4\ m/s^2$

Analizando todo el sistema (A + B):

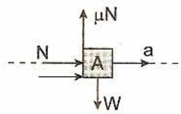
$F_R = (m_A + m_B)a \Rightarrow F = (5)(4) \Rightarrow F = 20\ N$

18. Calcular el mínimo valor de la fuerza F para que el cuerpo A = 1 kg que se halla apoyado en B = 3 kg no resbale respecto de la superficie vertical. El coeficiente de rozamiento estático y cinético entre el bloque A y el carro B es 0,4 y 0,2 respectivamente. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Si el bloque A no resbala respecto de B, entonces ambos tienen la misma aceleración "a", en el eje horizontal:



Haciendo el DCL del bloque A:

Analizando en el eje X:

$F_R = m_Aa \Rightarrow N = m_Aa$ ...(I)

Analizando en el eje Y: $\Sigma F_y = 0$

$\mu N = W$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II): $\mu m_Aa = m_Ag$

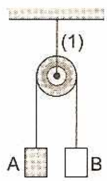
$\Rightarrow a = \dfrac{g}{\mu} = \dfrac{10}{0{,}4} \Rightarrow a = 25\ m/s^2$

Analizando todo el sistema (A + B):

$F_R = (m_A + m_B)a$

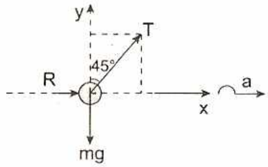
$F = (4)(25)\quad \therefore\ F = 100\ N$

19. Una cuerda cuelga de una polea y en sus extremos hay dos masas A = 2 kg y B = 3 kg. Determinar la tensión en la cuerda (1), sabiendo que la polea pesa 2 N y no ofrece fricción. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Haciendo el DCL de los bloques A y B.



La esfera no tiene movimiento en el eje vertical, por consiguiente la fuerza resultante en el eje y es igual a cero:

$$T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = mg = 5\text{ N} \qquad ...(I)$$

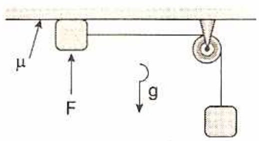
Aplicando la segunda ley de Newton en el eje horizontal: $F_R = ma$

$$T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + R = ma \qquad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II):

$mg + R = m(3g) \Rightarrow R = 2mg \quad \therefore R = 10\text{ N}$

30. El diagrama muestra dos bloques, cada uno de 10 N de peso, amarrados con una cuerda ligera. Halle la fuerza mínima F para que los bloques no resbalen. Coeficientes de rozamiento estático 0,2.



Resolución:

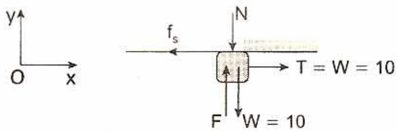
Diagrama del cuerpo libre del bloque; donde W = 10 N.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = F - 10$

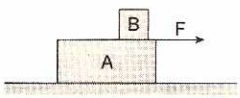
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_{s(máx)} = T \Rightarrow \mu_s N = W$

Reemplazando: $0{,}2(F - 10) = 10 \Rightarrow F - 10 = 50$

$\Rightarrow F = 60\text{ N}$

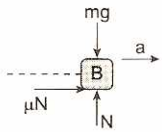


31. La figura muestra dos bloques A = 3 kg y B = 2 kg, donde la fuerza F varía con el tiempo "t" (medido en segundos) de acuerdo a la siguiente ley: F = kt; k = 2 N/s. Si el coeficiente de rozamiento estático entre A y B es 0,2, hallar el instante de tiempo "t" en que el bloque B empieza a resbalar respecto de A. No hay fricción entre A y el piso horizontal. ($g = 10\text{ m/s}^2$)



Resolución:

Cálculo de la aceleración "a", en el instante que el bloque B empieza a resbalar. Haciendo el DCL del bloque



La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$$N = mg \qquad ...(I)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje horizontal:

$$\mu N = ma \qquad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II) tenemos:

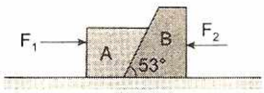
μ: estático

$a = \mu g \Rightarrow a = 2\text{ m/s}^2$

Si el bloque B está pronto a resbalar respecto de A, significa que A y B tienen todavía la misma aceleración "a". Analizando el sistema (A + B):

$F_R = (m_A + m_B)a \Rightarrow 2t = (5)2 \quad \therefore t = 5\text{ s}$

32. Si la masa del bloque B es seis veces la masa del bloque A, determinar el valor de la fuerza de reacción entre estos. No existe rozamiento. $F_1 = 30$ N y $F_2 = 16$ N.



Resolución:

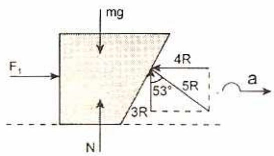
Analizando el sistema (A + B) que se mueve con aceleración "a". Consideremos:

$m_A = m;\ \ m_B = 6\text{ m};\ F_R = \Sigma ma$

$(F_1 - F_2) = (m_A + m_B)a \Rightarrow 14 = 7ma \Rightarrow a = \dfrac{2}{m}$

Haciendo el DCL del bloque A. Consideremos por conveniencia la reacción entre A y B igual a 5R.

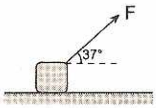
Aplicando la segunda ley de Newton en el eje horizontal: $F_R = m_A a$

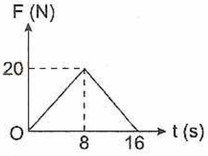


$$(F_1 - 4R) = m\left(\frac{2}{m}\right) \Rightarrow 30 - 4R = 2 \Rightarrow R = 7\text{ N}$$

Por lo tanto, la fuerza de reacción entre los bloques A y B será: 5R = 35 N

33. Sobre un bloque de masa 2 kg actúa una fuerza F que varía con el tiempo como indica la figura. Si el coeficiente de rozamiento estático y cinético entre el piso y el bloque es 0,6 y 0,4 respectivamente, ¿cuál es la aceleración del bloque en el instante t = 12 s?

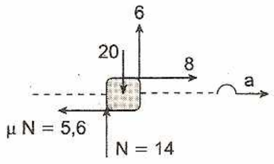




Resolución:

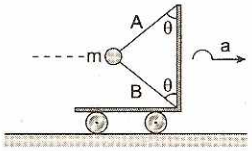
Analizando la gráfica F-t, para el instante t = 12 s el módulo de la fuerza F es igual a 10 N.

Haciendo el DCL del bloque para F = 10 N:



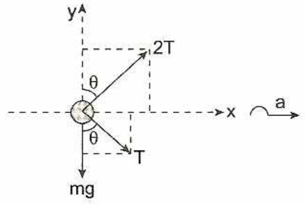
Aplicando la segunda ley de Newton en el eje horizontal: $F_R = ma \Rightarrow 2,4 = 2a \quad \therefore\ a = 1,2\ m/s^2$

34. Si la tensión en A es el doble que la tensión en la cuerda B, hallar la aceleración del sistema. Considere: $\tan\theta = 2$. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Haciendo el DCL de la esfera de masa "m":



Aplicando la segunda ley de Newton en el eje X:

$F_R = ma \Rightarrow 3T\operatorname{sen}\theta = ma$ ...(I)

La fuerza resultante en el eje Y es igual a cero:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T\cos\theta = T\cos\theta + mg$

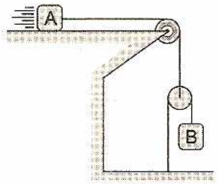
$T\cos\theta = mg$ ...(II)

Dividiendo convenientemente (I) y (II):

$3\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow 3(2)g = a \Rightarrow a = 6\ g$

$\therefore\ a = 60\ m/s^2$

35. En el sistema físico mostrado determinar la aceleración de los bloques. No hay rozamiento y la polea móvil tiene masa despreciable.
Donde: A = B = 1 kg; $g = 10\ m/s^2$.

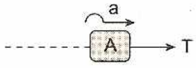


Resolución:

Analizando cinemáticamente, de la propiedad de la polea móvil, si la aceleración del bloque A es "a", entonces, el bloque B acelera con 2a. Además, si la polea móvil tiene masa despreciable, entonces la fuerza resultante que actúa sobre ella es cero, $F_R = ma$, pero $m = 0$.

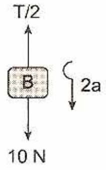
Haciendo el DCL del bloque A: $F_R = m_A a$

$T = (1)a$ ... (I)



Haciendo el DCL del bloque B: $F_R = m_B a_B$

$10 - \frac{T}{2} = (1)(2a)$ ...(II)

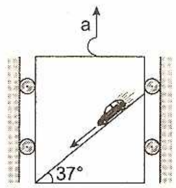


Reemplazando (I) en (II): $a = 4\ m/s^2$

Por consiguiente, el bloque A acelera con $4\ m/s^2$ y el bloque B con $8\ m/s^2$.

No olvidemos que la polea móvil también acelera con $4\ m/s^2$ al igual que el bloque A.

36. Si el ascensor sube con aceleración constante $a = 5\ m/s^2$, hallar la aceleración con que el carrito baja respecto del plano inclinado un ángulo de 37°. ($g = 10\ m/s^2$)



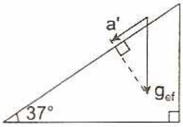
Resolución:

Respecto de un observador en el interior del ascensor se genera un campo de gravedad efectivo (g_{ef}):

$g_{ef} = g + a = 15\ m/s^2$ ...(I)

La aceleración (a') del carrito respecto del plano inclinado es una componente de la gravedad efectiva:

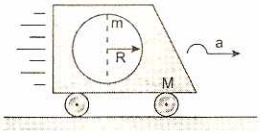
$a' = g_{ef}\operatorname{sen}37°$ ...(II)



Reemplazando (I) en (II) tenemos:

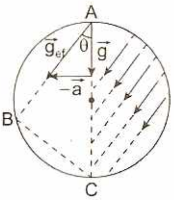
$a' = 15\left(\frac{3}{5}\right) = 9 \Rightarrow a' = 9\ m/s^2$

37. El móvil mostrado de masa M que tiene un agujero cilíndrico de radio de curvatura R = 1,6 m, se encuentra moviéndose sobre una superficie horizontal con aceleración constante "a". Si en cierto instante se desprende de la parte superior un clavo de masa "m", hallar la velocidad relativa del clavo respecto de M, cuando choca con la superficie cilíndrica. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Fijamos nuestro sistema de referencia en el móvil. Para nuestro observador el clavo inicia su movimiento desde el reposo en dirección de la gravedad efectiva.



Del triángulo vectorial:

$$g_{ef} = \frac{g}{\cos\theta} \qquad ...(I)$$

De la ecuación cinemática:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2g_{ef}h \qquad ...(II)$$

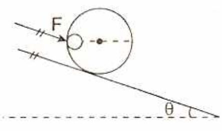
Pero: $h = AB = 2R(\cos\theta)$

Reemplazando en (II):

$$v_f^2 = 0 + 2\frac{g}{\cos\theta}(2R\cos\theta) \Rightarrow v_f = 2\sqrt{gR}$$

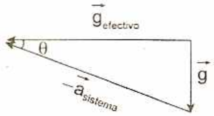
Velocidad de "m" respecto de M: $v_f = 8\ m/s$

38. La figura muestra un cascarón de peso P que en su interior lleva una esfera maciza también de peso P. Todas las superficies en contacto son lisas. Hallar el valor de la fuerza F, tal que los centros geométricos del cascarón esférico y la esfera se mantengan en dirección horizontal. Considere: θ = 30°.



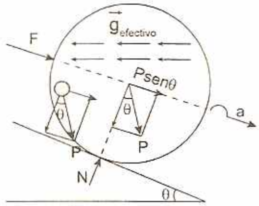
Resolución:

De la condición del problema, para un sistema de referencia no inercial, la gravedad efectiva dentro del cascarón debe tener dirección horizontal.



$$\text{sen}\theta = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{g}{\text{sen}\theta} \qquad ...(1)$$

Aplicamos la segunda ley de Newton al sistema físico (cascarón + esfera) respecto de un observador en la tierra:

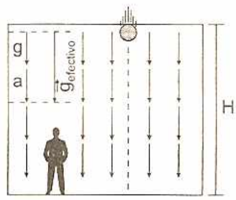


$$(F + 2P\text{sen}\theta) = ma \Rightarrow (F + 2P\text{sen}\theta) = \left(\frac{2p}{g}\right)\left(\frac{g}{\text{sen}\theta}\right)$$

$F = 2P(\csc\theta - \text{sen}\theta)$

Reemplazando: θ = 30° $\quad \therefore F = 3P$

39. Un ascensor de 6 m de altura (entre el techo y el piso) está subiendo con aceleración constante igual a $2{,}2\ m/s^2$. Calcular el tiempo que demora en llegar al piso del mismo ascensor un foquito que se desprende del techo del ascensor.



Resolución:

Ubicamos nuestro observador en el ascensor, para él existe un campo equivalente al campo gravitatorio, de intensidad:

$$g_{ef} = -(g + a)\hat{j} \Rightarrow g_{ef} = 12\ m/s^2$$

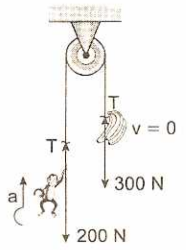
Caída libre vertical: $H = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}g_{ef}t^2$

$$6 = 0 + \frac{1}{2}(12)t^2 \Rightarrow t = 1\ s$$

40. Un mono de 20 kg trepa por una cuerda, la cual sostiene por el otro extremo a un racimo de plátanos de 30 kg. ¿Cuál es la aceleración que debe desarrollar el mono si el racimo permanece en equilibrio?

Resolución:

DCL (Racimo de plátano), DCL (mono):



Si el racimo está en equilibrio, entonces la tensión en la cuerda será igual al peso de los plátanos.

$T = 300\ N$ ...(I)

De la segunda ley de Newton:

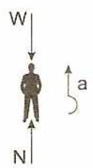
$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{T - 200}{20} \quad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II), tenemos: $a = 5\ m/s^2$

41. Un muchacho que pesa 300 N en una balanza, se pone de cuclillas en ella y salta repentinamente hacia arriba. Si la balanza indica momentáneamente 450 N en el instante del impulso, ¿cuál es la máxima aceleración del muchacho en este proceso? ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

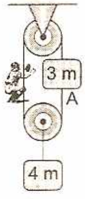
DCL (muchacho)



2.ª ley de Newton: $F_R = ma \Rightarrow N - W = \left(\frac{W}{g}\right)a$

$\Rightarrow a = \left(\frac{N}{W} - 1\right)g \Rightarrow a = 5\ m/s^2$

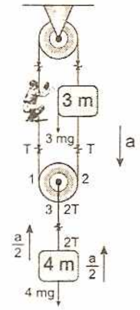
42. El conjunto de cuerpos mostrado se abandona en la posición indicada, preciso instante en que el hombre de masa "m" comienza acelerar hacia arriba con "a", respecto a la cuerda del extremo superior. Hallar la tensión en el punto A si el cuerpo de masa 3m acelera hacia abajo con "a" respecto a tierra. Las poleas son de peso despreciable. El bloque de masa 4m está unido a la polea móvil.



Resolución:

La aceleración del hombre es igual a la suma de la aceleración de la cuerda, más, la aceleración del hombre respecto la cuerda.

$a_{(hombre)} = 2a$ ...(I)



El punto 1 de la cuerda tiene igual aceleración del hombre.

DCL (hombre); 2.ª ley de Newton:

$F - T - mg = m(2a)$ ...(II)

DCL (bloque de masa 3m), 2.ª ley de Newton:

$3mg + T - F = (3m)a$ ...(III)

Sumando: (II) + (III):

$2mg = 5ma \Rightarrow a = \frac{2}{5}g$ ...(IV)

Cálculo de la aceleración de la polea móvil:

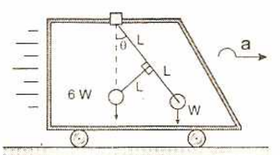
$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2} \Rightarrow \vec{a}_3 = \frac{2a\hat{j} - a\hat{j}}{2} = \frac{a}{2}\hat{j}$$

DCL (bloque de masa 4m); 2.ª ley de Newton:

$$2T - 4mg = (4m)\left(\frac{a}{2}\right)$$

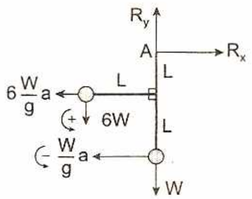
de (IV): $2T - 4mg = (4m)\left(\frac{2}{10}g\right) \Rightarrow T = \frac{12}{5}mg$

43. La figura muestra un carro que se mueve con aceleración constante "a", en línea recta. En el interior del carro se encuentra una estructura imponderable en forma de T, en sus extremos se encuentran fijos dos esferas de pesos W y 6W. Hallar el valor de la aceleración, tal que θ = cero. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

DCL de la estructura, para un observador fijo en el carro, sistema de referencia no inercial.

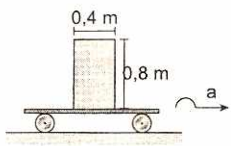


2.ª condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

$$6\frac{W}{g}aL + \frac{W}{g}a(2L) = 6WL$$

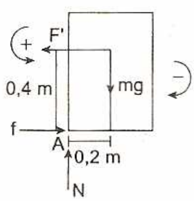
$$a = \frac{3}{4}g \Rightarrow a = 7{,}5\ m/s^2$$

44. Calcular la máxima aceleración que podrá tener el carrito, para que el bloque no vuelque. Existe suficiente rozamiento para que el bloque no resbale. $(g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

DCL para un observador ubicado en el carro (sistema de referencia no inercial)



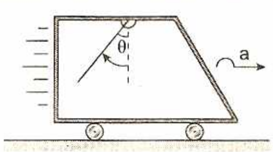
2.ª condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

$M_A^{F'} + M^{mg}{}_A = 0 \Rightarrow F'(0{,}4) - mg(0{,}2) = 0$

$ma(0{,}4) = mg(0{,}2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}g$

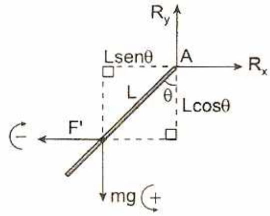
Reemplazando: $a_{máx} = 5\ m/s^2$

45. Una barra uniforme y homogénea se encuentra suspendido en el techo de un carro, que se mueve con aceleración constante. Debido a la inercia la barra se desvía un ángulo $\theta = 37°$ respecto de la vertical. Hallar la aceleración del carro. $(g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

DCL de la barra, respecto de un observador ubicado en el carro.



2.ª condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

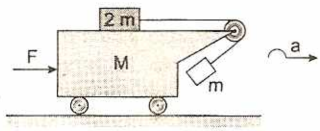
$M_A{}^{mg} + M_A^{F'} = 0$

$mg(L\text{sen}\theta) - F'(L\cos\theta) = 0$

$mgL\text{sen}\theta = maL\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{a}{g}$

Reemplazando: $a = 7{,}5\ m/s^2$

46. En el sistema mostrado, hallar la magnitud de la fuerza F con la finalidad de que los bloques de masa 2m y "m" permanezcan en reposo con respecto del carro de masa M. No hay rozamiento. $(m = 10\ kg\ ;\ M = 90\ kg;\ g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

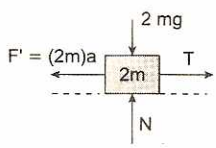
Aplicando la 2.ª ley de Newton a todo el sistema:

$F = (M + 2m + m)a$

$F = (M + 3m)a \Rightarrow F = 120a$ ...(I)

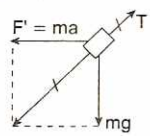
Para un observador no inercial, ubicado en el carro M.

DCL del bloque (2m): $\Sigma F_x = 0$



$T = F' = 2ma \Rightarrow T = 20a$ ...(II)

DCL del bloque (m):



$F_R = 0 \Rightarrow T = m\sqrt{a^2 + g^2}$

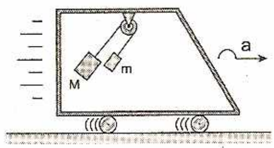
$T = 10\sqrt{a^2 + g^2}$ ...(III)

Igualando las ecuaciones (II) y (III):

$$2a = \sqrt{a^2 + g^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}g$$

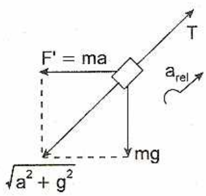
Reemplazando en (I): $F = 400\sqrt{3}\ N$

47. Hallar la aceleración de los bloques de masas M y "m" con respecto al carrito, sabiendo que este se mueve horizontalmente con una aceleración constante "a".



Resolución:

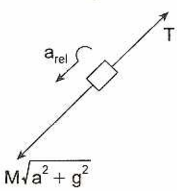
Haciendo DCL del bloque "m"



Por la segunda ley de Newton:

$$T - m\sqrt{a^2+g^2} = ma_{rel} \qquad ...(I)$$

Haciendo DCL del bloque M:



Por la segunda ley de Newton:

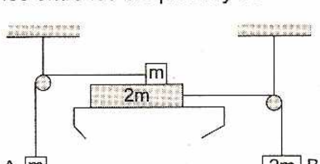
$$M\sqrt{a^2+g^2} - T = Ma_{rel} \qquad ...(II)$$

Resolviendo las ecuaciones, sumando (I) y (II):

$$(M-m)\sqrt{a^2+g^2} = (M+m)a_{rel}$$

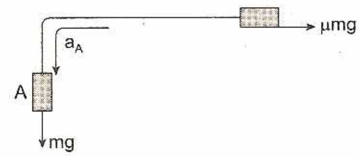
$$a_{rel} = \frac{(M-m)}{(M+m)}\sqrt{a^2+g^2}$$

48. Las superficies de los bloques en contacto son rugosas $\mu = 0{,}5$ y la superficie horizontal donde descansan es lisa. Hallar la relación de las aceleraciones entre los bloques A y B.



Resolución:

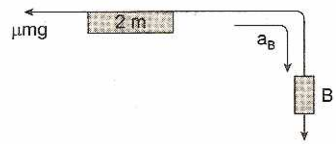
Analizando el movimiento de los bloques de masas "m".



2.ª ley de Newton: $(mg - \mu mg) = (2m)a_A$

$$a_A = \frac{(1-\mu)}{2}g \qquad ...(I)$$

Analizando el movimiento de los bloques de masas 2m.



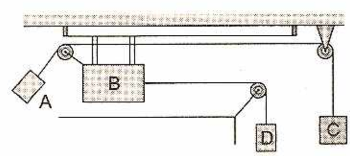
2.ª ley de Newton: $(2mg - \mu mg) = (4m)a_B$

$$a_B = \frac{(2-\mu)}{4}g \qquad ...(II)$$

Dividiendo las ecuaciones (I) y (II):

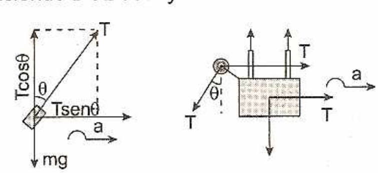
$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{2(1-\mu)}{(2-\mu)} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{2}{3}$$

49. En qué relación deben estar las masas M y "m" para que el cuerpo A esté en reposo con respecto del cuerpo B. No existe rozamiento. Masas: A = D = m y B = C = M.



Resolución:

Haciendo DCL de A y B:



Como la aceleración es horizontal, entonces:

$T\cos\theta = mg \qquad ...(I)$

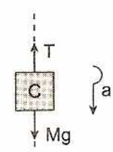
Por 2.ª ley de Newton: $F_R = ma$

$T\text{sen}\theta = ma \qquad ...(II)$

Por 2.ª ley de Newton:

$F_R = ma \Rightarrow T' + T - T\text{sen}\theta = Ma \qquad ...(III)$

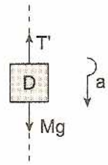
Haciendo DCL de C:



Por 2.ª ley de Newton:

$Mg - T = Ma \Rightarrow T = M(g - a)$ ...(IV)

Haciendo DCL de D:



Por 2.ª ley de Newton:

$mg - T' = ma$ ...(V)

Sumando (III) y (V):

$mg + T - T\text{sen}\theta = (M + m)a$

Reemplazando las ecuaciones (II) y (IV) en la anterior: $mg + M(g - a) - ma = (M + m)a$

$g(M + m) = 2(M + m)a$

$a = g/2$

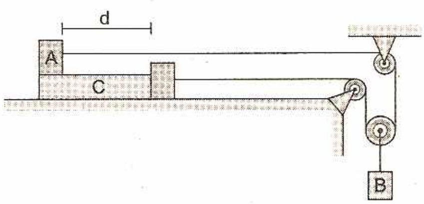
Sumando $(I)^2 + (II)^2$:

$T^2 = m^2g^2 + m^2a^2 \Rightarrow T = m\sqrt{a^2 + g^2}$ ...(VI)

Igualando las ecuaciones (IV) y (VI):

$M(g - a) = m\sqrt{a^2 + g^2} \Rightarrow \dfrac{M}{m} = \sqrt{5}$

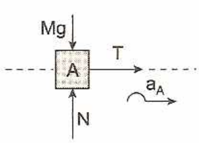
50. Si el sistema mostrado se deja en libertad a partir del reposo, hallar el tiempo que tarda el bloque A de masa 2 kg, en recorrer la distancia d = 5 metros sobre el móvil C de masa 6 kg. Los bloques A y B tienen igual masa. No hay rozamiento y las poleas tienen peso despreciable. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

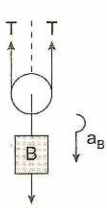
Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

Bloque A:



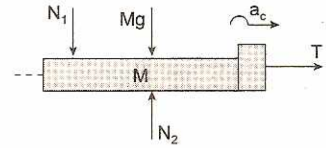
$T = ma_A \Rightarrow T = 2a_A$ ...(I)

Bloque B:



$mg - 2T = ma_B \Rightarrow 10 - T = a_B$ ...(II)

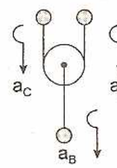
Bloque C:



$T = Ma_C \Rightarrow T = 6a_C$ ...(III)

Analizando cinemáticamente la polea móvil; sabemos de la propiedad:

$a_B = \dfrac{a_A + a_C}{2} \Rightarrow 2a_B = a_A + a_C$ ...(IV)



Resolviendo las ecuaciones (I) = (III): $a_A = 3a_C$

Reemplazando (III) en (II): $10 - 6a_C = a_B$

Reemplazando en (IV):

$20 - 12a_C = 3a_C + a_C$

$\Rightarrow a_C = \dfrac{5}{4}\ m/s^2 \quad \wedge \quad a_A = \dfrac{15}{4} m/s^2$

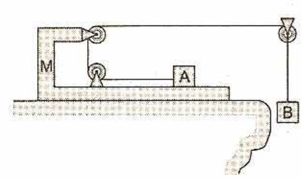
Analizando el movimiento relativo (A con respecto de C):

$a_{rel} = a_{A/C} = a_A - a_C \Rightarrow a_{rel} = 2{,}5\ m/s^2$

Del MRUV: $d = v_0t + \dfrac{1}{2}a_{rel}t^2$

Reemplazando: $5 = \dfrac{1}{2}(2{,}5)t^2 \Rightarrow t = 2\ s$

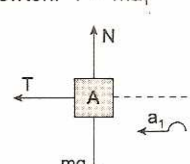
51. Si el sistema mostrado en la figura está libre de todo rozamiento, hallar la aceleración del carrito de masa M. Los bloques A y B tienen igual masa "m" cada uno.

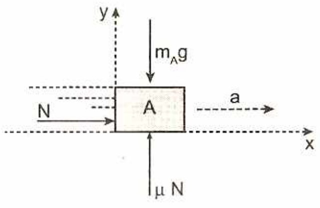


Resolución:

DCL (bloque A):

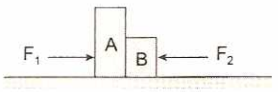
2.ª ley de Newton: $T = ma_1$ ...(I)





Finalmente tenemos: $a = \dfrac{g}{\mu_s} \Rightarrow a = \dfrac{10}{0,8} = 12,5\ m/s^2$

65. Determinar la fuerza de reacción entre los bloques A y B de masas 3 kg y 2 kg respectivamente. No hay rozamiento. ($F_1 = 60$ N; $F_2 = 40$ N)



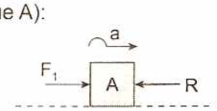
Resolución:

Analizando el sistema (A + B).

Aplicando la 2.ª ley de Newton:

$(F_1 - F_2) = (m_A + m_B)a \Rightarrow 20 = 5a \Rightarrow a = 4\ m/s^2$

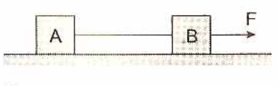
DCL (bloque A):



2.ª ley de Newton: $F_1 - R = m_Aa$

$60 - R = 3(4) \Rightarrow R = 48$ N

66. Determinar la tensión en la cuerda que une los bloques A y B de masas 2 kg y 3 kg respectivamente. La magnitud de la fuerza aplicada es $F = 25$ N. Desprecie la fuerza de fricción.



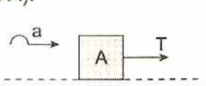
Resolución:

Sistema (A + cuerda + B):

2.ª ley de Newton:

$F = (m_A + m_B)a \Rightarrow 25 = (5)a \Rightarrow a = 5\ m/s^2$

DCL (bloque A):



$T = m_Aa \Rightarrow T = 2(5) \Rightarrow T = 10$ N

67. En nuestro planeta un hombre pesa 900 N. ¿Cuánto pesaría en la Luna cuya aceleración de la gravedad es la sexta parte de la gravedad en la Tierra?

Resolución:

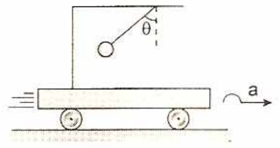
Peso en la Tierra: $P = mg$

Peso en la Luna:

$P_L = mg_L = m\dfrac{g}{6} \Rightarrow P_L = \dfrac{P}{6} = \dfrac{900}{6}$

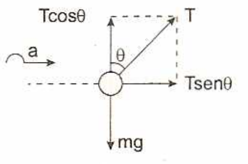
Reemplazando: $P_L = 150$ N

68. En el techo de un carro se encuentra suspendido una esferita, que debido a la inercia se desvía el hilo respecto de la vertical, $\theta = 45°$. Hallar la aceleración del carro.



Resolución:

DCL (esfera):



Eje X: $F_R = ma \Rightarrow T(\text{sen}\theta) = ma$ ...(I)

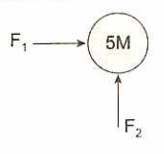
Eje Y: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T(\cos\theta) = mg$ ...(II)

Dividiendo: (I) ÷ (II):

$\tan\theta = \dfrac{a}{g} \Rightarrow a = g(\tan\theta)$

Reemplazando: $a = 9,8\ m/s^2$

69. Una fuerza F_1 sobre una masa M produce una aceleración $a_1 = 3\ m/s^2$. Otra fuerza F_2 sobre una masa 2M produce una aceleración $a_2 = 2\ m/s^2$. Determinar la aceleración que producirán F_1 y F_2 actuando sobre una masa 5M, en direcciones perpendiculares entre sí.



Resolución:

1.er caso: aplicando la 2.ª ley de Newton:

$F_1 = Ma_1 \Rightarrow F_1 = 3M$

2.° caso: $F_2 = (2M)a_2 = 4M$

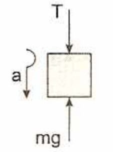
3.er caso: aplicando la 2.ª ley de Newton:

$F_R = 5Ma \Rightarrow 5M = 5Ma \Rightarrow a = 1\ m/s^2$

70. En el techo de un ascensor se encuentra suspendido un bloque de masa 6 kg; sabiendo que el ascensor baja con aceleración constante $a = 1,8\ m/s^2$, hallar la tensión en la cuerda que sostiene al bloque.

Resolución:

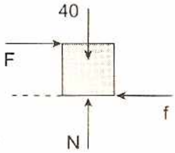
DCL (bloque):



2.ª ley de Newton:
$F_R = ma \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a)$
Reemplazando: $T = 48$ N

71. Una masa de 4 kg reposa sobre un plano horizontal, en el cual el coeficiente de fricción estática es 0,2. Se le aplica una fuerza horizontal F = 5 N. Determinar la fuerza de fricción del piso sobre el cuerpo. ($g = 10$ m/s^2)

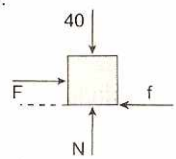
Resolución:
DCL (bloque):



Cálculo de la fuerza de rozamiento estático máximo:
$f_{s(máx)} = \mu_s N \Rightarrow f_{s(máx)} = 0,2(40) = 8$
El bloque se encontrará en movimiento inminente cuando la fuerza externa F sea igual a 8 N.
Por consiguiente el bloque está en reposo.
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_s = F = 5 \text{ N} \Rightarrow f_s = 5$ N

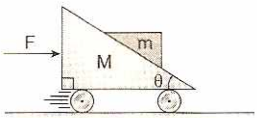
72. Un bloque de masa 4 kg se encuentra en reposo sobre un piso rugoso, con el cual $\mu_k = 0,3$ y $\mu_s = 0,4$. Se le aplica una fuerza horizontal F = 18 N. Determinar la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:
DCL (bloque):

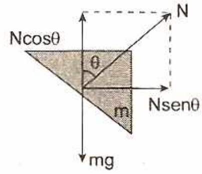


Cálculo de la fuerza de rozamiento estático máximo:
$f_{s(máx)} = \mu_s N = 16$
Pero; F > 16, entonces el bloque está en movimiento.
$f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = 0,3(40) \Rightarrow f_k = 12$ N

73. Determinar la aceleración del sistema mecánico, tal que el bloque menor de masa "m" permanezca en reposo respecto del carro en forma de cuña. Considere $\theta = 37°$ y $g = 10$ m/s^2. No hay rozamiento.



Resolución:
DCL (bloque):



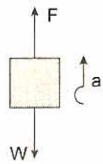
Eje horizontal: $\Sigma F_x = ma$
$N\text{sen}\theta = ma$ ...(α)
Eje vertical: $\Sigma F_y = 0$
$N(\cos\theta) = mg$ ...(β)
Dividiendo: $(\alpha) \div (\beta)$

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g(\tan\theta)$$

Reemplazando: $a = 7,5$ m/s^2

74. Determinar la magnitud de la fuerza F que se debe aplicar a un bloque de peso 5 N, de tal modo, que el cuerpo acelera hacia arriba a razón de $a = 9,8$ m/s^2.

Resolución:
DCL (bloque):

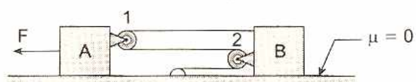


2.ª ley de Newton: $F_R = ma$

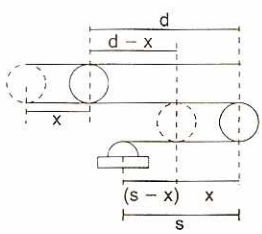
$$(F - W) = \frac{W}{g}a \Rightarrow F = W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Reemplazando: F = 10 N

75. En el sistema mostrado en la figura: F = 70 N; $W_A = 100$ N; $W_B = 300$ N, si se desprecian las masas de las poleas y el efecto de rozamiento, determinar:
a) La aceleración de cada bloque.
b) La tensión en cada bloque.



Resolución:
Analizando cinemáticamente:



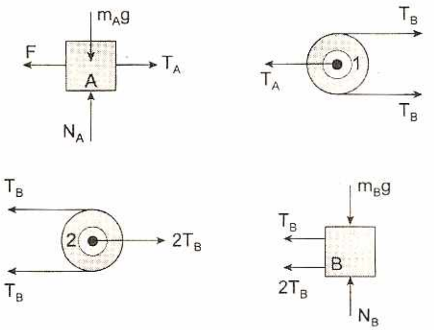
Por desplazamiento, longitud de la cuerda es constante e igual a: $2d + s$.

De la figura: $2(d - x) + 2x' + s - x = 2d + s$

$x' = \frac{3}{2}x \Rightarrow a_A = \frac{3}{2}a_B$ ...(I)

Analizando dinámicamente:

Haciendo el DCL (A, 1, 2, B):



Bloque A: $F - T_A = m_Aa_A$ ...(II)

$T_A = 2T_B$ ...(III)

De (2) y (3): $F - T_B = m_Aa_A$ ...(IV)

Bloque B: $3T_B = m_Ba_B$

De (I): $3T_B = m_B\left(\frac{3}{2}a_A\right)$ ...(V)

De (IV) y (V): $a_A = \dfrac{3F}{3m_A + \frac{4}{5}m_B}$

Reemplazando datos, obtenemos que: $a_A = 3\ m/s^2$

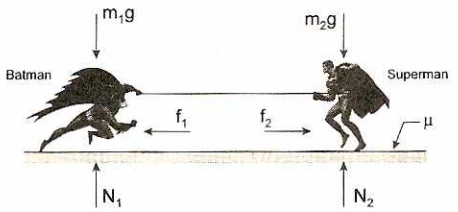
Luego: $a_B = \frac{2}{3}a_A \Rightarrow a_B = 2\ m/s^2$

De (V): $T_B = \frac{2}{9}$

$m_Ba_A = \frac{2}{9}(30)(3) \Rightarrow T_B = 20\ N$

Reemplazando en (III), tenemos: $T_A = 40\ N$

76. Superman y Batman deciden hacer una competencia de tirar a la soga. Se supone que Superman debe ganar la competencia porque es más fuerte que Batman. A la luz de las leyes de Newton analice quién es el que debe de ganar.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre del sistema:

Analizando todo el sistema completo, las únicas fuerzas horizontales son: f_1 y f_2, según esto podemos decir:

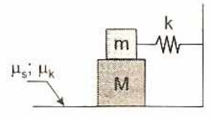
Si: $f_2 < f_1 \Rightarrow$ Batman gana la competencia.

Si: $f_1 < f_2 \Rightarrow$ Superman gana la competencia.

Donde: $f_1 = \mu_sN_1 = \mu_sm_1g$ y $f_2 = \mu_s N_2 = \mu_sm_2g$

Basta con vencer una de las fuerzas de rozamiento para que uno de ellos gane, entonces se llega a la conclusión de que, el que tiene mayor peso gana la competencia, no interesando quién es más fuerte.

77. Dado el siguiente sistema:

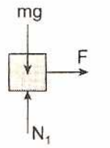


a) Si entre "m" y M la superficie es lisa, ¿permanecerá "m" en reposo? Explique.

b) Si se aplica una fuerza horizontal F sobre M, ¿qué valores puede tomar dicha fuerza de modo que M permanezca en reposo?

Resolución:

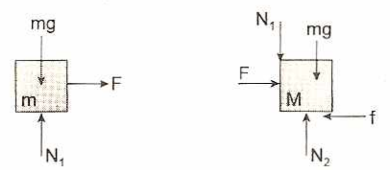
a) DCL de "m":



Si el resorte está en posición normal, la masa "m" no se moverá, ya que $F = 0$ y no hay otra fuerza que actúa en la horizontal.

Porque si el resorte está comprimido o estirado, la masa "m" se moverá indefinidamente debido a que no hay fuerza de oposición en la horizontal.

b) DCL de "m" y M:



Para m: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = mg$ ...(I)

Para M: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + Mg$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II), tenemos que:

$N_2 = g(m + M)$ ...(III)

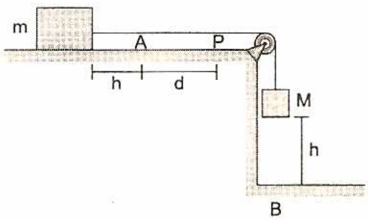
Para que M no se mueva, F debe tomar desde cero hasta un valor menor o igual a la fuerza de rozamiento estático máximo, o sea: $0 \leq F \leq f_{s(máx)}$

Hallando: $f_s\ (máx) = \mu_sN_2$

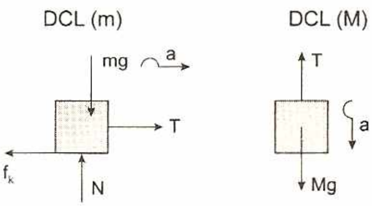
De (III), obtenemos que: $f_{s(máx)} = \mu_s g(m + M)$

$\therefore\ 0 \leq F \leq \mu_s g(m + M)$

78. Una forma de medir el coeficiente de fricción cinético es la siguiente: la masa M acelera a la masa "m", la cual desliza una distancia (h + d), deteniéndose en el punto P. Los valores de M, m, h y d pueden medirse. Determine μ_k en función de ellos.



Resolución:



Aplicando la 1.ª condición de equilibrio al bloque de masa "m":

$\Sigma F_y^{+} = \Sigma F_y{-} \Rightarrow N = mg$

Pero: $f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = \mu_k mg$

Aplicando la 2.ª ley de Newton para la masa "m":

$T - \mu_k mg = ma$ ...(I)

Aplicando la 2.ª ley de Newton para la masa M:

$Mg - T = Ma$ ...(II)

De (I) y (II), tenemos que:

$a = \dfrac{g(M - \mu_k m)}{M + m}$ ...(III)

Además, las velocidades de ambas masas van a ser iguales en todo instante, hasta que M llegue al piso.

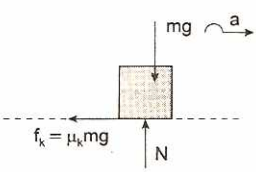
Entonces: $v_{m(A)} = v_{M(B)}$ ...(IV)

Pero: $v_{M(B)} = \sqrt{2ah}$ ...(V)

Reemplazando (III) en (V) e igualando con (IV), tenemos:

$V_{m(A)} = \sqrt{2gh\left(\dfrac{M - \mu_k m}{M + m}\right)}$ ...(VI)

Luego, a partir del punto A:



Aplicando la 2.ª ley de Newton:

$\mu_k mg = ma' \Rightarrow \mu_k g = a'$ ...(VII)

Además:

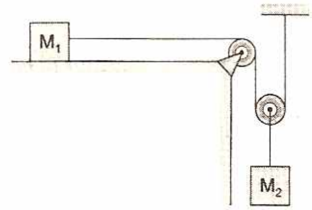
$v_P^2 - v_A^2 = -2a'd \Rightarrow v_A^2 = 2a'd$ ...(VIII)

Reemplazando (VI) y (VII) en (VIII):

$$2hg\left(\frac{M - \mu_k m}{M + m}\right) = 2(\mu_k g)d$$

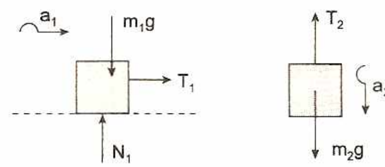
Despejando, obtenemos que: $\mu_k = \dfrac{Mh}{(M + m)d + mh}$

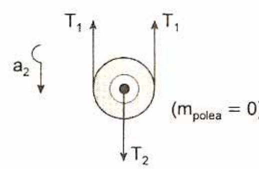
79. En el sistema mostrado, calcular las tensiones en la cuerda. Desprecie la masa de las poleas. No hay fricción.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre:





Aplicando la 2.ª ley de Newton:

Para m_1: $T_1 = m_1a_1$ ...(I)

Para m_2: $T_2 - m_2g = m_2a_2$ ...(II)

Para la polea ($m_{polea} = 0$): $2T_1 - T_2 = 0$

$\Rightarrow T_1 = \dfrac{T_2}{2}$ ...(III)

Como se puede notar, se tiene 3 ecuaciones (I), (II) y (III) y cuatro incógnitas: a_1, a_2, T_1 y T_2.

Recordando cinemática, sabemos que: $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$

m_2 recorre la mitad de lo que recorre m_1

En (II): $T_2 - m_2g = -m_2(a_1/2)$

De (III): $2T_1 - m_2g = -m_2(a_1/2)$

De (I): $2(m_1a_1) - m_2g = -m_2(a_1/2)$

$4m_1a_1 - 2m_2g = -m_2a_1$

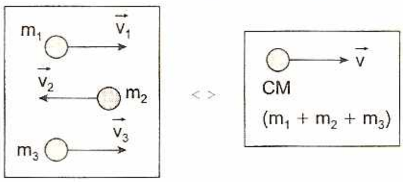
$a_1 = \dfrac{2m_2g}{4m_1 + m_2} \Rightarrow a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{m_2g}{4m_1 + m_2}$

Cálculo de las tensiones:

De (I): $T_1 = m_1\left(\dfrac{2m_2g}{4m_1 + m_2}\right) \Rightarrow T_1 = \dfrac{2m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$

Luego: $T_2 = 2T_1 \Rightarrow T_2 = \dfrac{4m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$

80. ¿Cómo se puede aplicar la primera ley de Newton a un sistema de partículas? Explique.



Resolución:

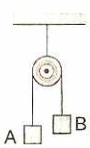
La primera ley de Newton nos dice que: un cuerpo de masa constante permanece en estado de reposo o de movimiento con una velocidad constante en línea recta, a menos que sobre ella actúe una fuerza resultante diferente de cero.

Entonces para un sistema de partículas, si sobre ella la $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, entonces su centro de masa (CM) se mueve en línea recta a velocidad constante o se encuentra en reposo.

$$\text{si, } \Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \text{ el CM } \begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \\ \quad \text{o} \\ \vec{v} = \text{cte.} \end{cases}$$

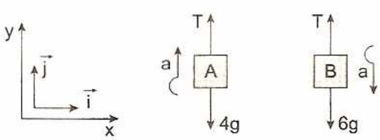
81. En el sistema mostrado, los bloques de masas A = 4 kg y B = 6 kg se encuentran unidos por una cuerda de masa despreciable. Calcular:

a) La aceleración del centro de masa.
b) El tiempo que tarda en llegar el centro de masa al piso, si parten ambas de una altura de 50 cm.
c) La tensión en la cuerda que sujeta a la polea fija, de masa despreciable. ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

Haciendo el DCL de las masas A y B:



a) Segunda ley de Newton:

Para la masa A: $T - 4g = 4a$ ...(1)

Para la masa B: $6g - T = 6a$ ...(2)

De (1) y (2): $a = \dfrac{g}{5} \Rightarrow a = 2\ m/s^2$

$\Rightarrow \vec{a}_A = 2\hat{j}$ y $\vec{a}_B = -2\hat{j}$

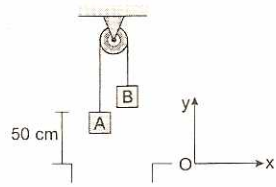
Sabemos que:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma m_i\vec{a}_i}{m_i} = \frac{m_A\vec{a}_A + m_B\vec{a}_B}{m_A + m_B}$$

Reemplazando valores, tenemos que:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{4(2\hat{j}) - 6(2\hat{j})}{4+6} \Rightarrow a_{CM} = -0{,}4\,\hat{j}\ m/s^2$$

b)



Cinemáticamente: $y = y_0 + \dfrac{1}{2}a_{CM}t^2 + V_0t$

$0 = 0{,}5 + \dfrac{1}{2}(-0{,}4)t^2 + 0 \Rightarrow t = 1{,}58\ s$

A: $y_A = y_0 + \dfrac{1}{2}a_At^2 = 0{,}5 + \dfrac{1}{2}(2)(1{,}58)^2 = 3\ m$

B: $y_B = y_0 + \dfrac{1}{2}a_Bt^2 = 0{,}5 + \dfrac{1}{2}(-2)(1{,}58)^2 = -2\ m$

c) DCL del sistema:

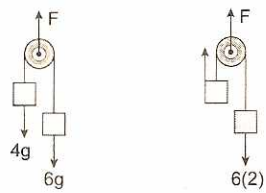


figura (1) figura (2)

Dinámicamente:

De la figura (1): $\Sigma F_{ext} = \Sigma ma_{CM}$

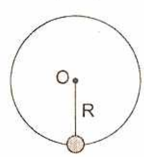
$F - 4g - 6g = (4 + 6)(-0{,}4)$

$\Rightarrow F = 96\ N$

Otra forma, de la figura (2): $\Sigma F_{ext} = \Sigma ma$

$F - 4g - 6g = 4(2) - 6(2) \Rightarrow F = 96\ N$

82. La tensión de rotura de una cuerda delgada es de 70 N, un cuerpo de 50 N de peso se suspende de esta cuerda de 40 cm. de longitud y se le hace girar en un plano vertical. Determinar la máxima velocidad angular en rad/s a la que puede girar. ($g = 10\ m/s^2$)



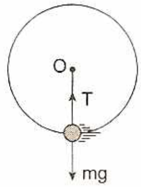
Resolución:

a) Diagrama del cuerpo libre de la esfera en la posición mostrada:

La tensión máxima es 70 N

$R = 40\ cm = 0{,}4\ m$

Peso $= 50\ N \Rightarrow m = 5\ kg$



b) Aplicamos la ley de aceleración:

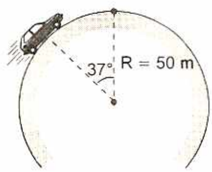
$\Sigma F = ma_C$

$T - mg = m\omega^2 R$

$70 - 50 = 5\omega^2(0,4) \Rightarrow 20 = 2\omega^2$

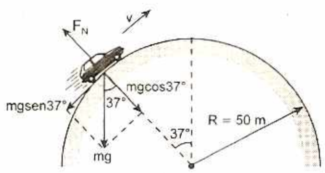
$\omega^2 = 10 \Rightarrow \omega = \sqrt{10}$ rad/s

83. Un pequeño auto cuya masa es de 500 kg recorre un puente semicircular. Calcular la rapidez del auto en el instante mostrado, si en ese punto la reacción normal del puente sobre el auto es 30% de su peso.



Resolución:

a) Realizamos el diagrama del cuerpo libre en la posición mostrada:



b) $F_C = ma_C$ (ley de aceleración)

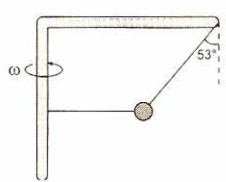
$$mg\cos 37° - F_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$mg\left(\frac{4}{5}\right) - 0{,}3mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$10 \times \frac{4}{5} - 0{,}3(10) = \frac{v^2}{50}$$

$$v^2 = 250 \Rightarrow v = 5\sqrt{10} \text{ m/s}$$

84. Determinar la velocidad angular con que gira la masa "m"; sabiendo que la tensión en las cuerdas (1) y (2) son iguales. La cuerda horizontal (2) mide 0,3 ($g = \pi^2$ m/s^2)

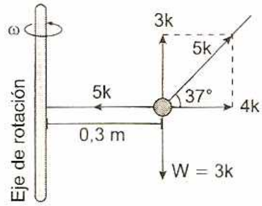


Resolución:

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la esfera.

Las tensiones son iguales en módulo:

$T_1 = T_2 = T$



Si el peso es $mg = 3k \Rightarrow k = \dfrac{mg}{3}$

b) Ley de aceleración: $F_C = ma_C$

$5k - 4k = m\omega^2 R$

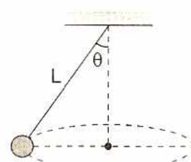
$k = m\omega^2 R$

$$\frac{mg}{3} = m\omega^2 R \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{3R}$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\frac{9}{10}} = \frac{\pi^2(10)}{9}$$

$$\omega = \frac{\pi}{3}\sqrt{10} \text{ rad/s}$$

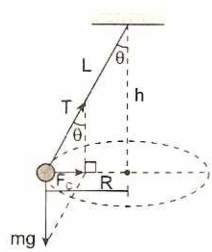
85. La figura muestra una esfera que describe un MCU en un plano horizontal, determinar el periodo con que gira la esfera.

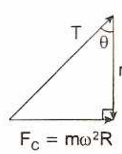


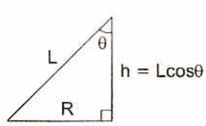
Resolución:

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la esfera.

Péndulo cónico







b) Aplicamos la ley de aceleración.
Por semejanza de triángulo (1) y (2)

$$\tan\theta = \frac{F_C}{mg} = \frac{R}{h} \Rightarrow \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{R}{h} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{h}$$

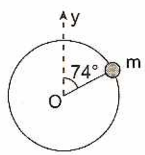
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

Se sabe: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

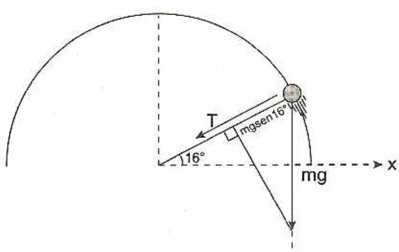
Reemplazando: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$

86. Una esfera de 5 kg gira en un plano vertical mediante una cuerda de 2,5 m de longitud sin en la posición mostrada la tensión de la cuerda es 86 N. Hallar su rapidez en ese instante. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre:



b) Aplicamos la ley de aceleración:

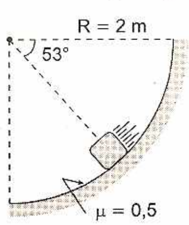
$$F_C = ma_C$$

$$T + mg\text{sen}16° = m\frac{v^2}{R}$$

$$86 + 50\frac{7}{25} = 5\frac{v^2}{2,5}$$

$$100 = 2v^2 \Rightarrow v^2 = 50 \Rightarrow v = 5\sqrt{2}\ m/s$$

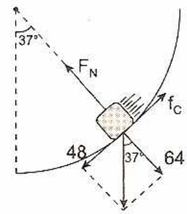
87. En la figura se muestra un bloque de 8 kg descendiendo por una pista cilíndrica. Si para el instante mostrado la fuerza de rozamiento es 34 N. ¿Qué rapidez tendrá dicho bloque? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre del bloque en la posición mostrada:

$m = 8$ kg
$f_C = 34$ N
$\mu_C = 0,5$
$R = 2$ m



b) Aplicamos ley de aceleración:

$$F_C = 64 = 8\left(\frac{v^2}{2}\right) \Rightarrow F_C - 64 = 4v^2 \quad ...(1)$$

c) Fuerza de rozamiento:

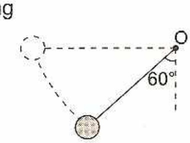
$$F_N = \frac{f_C}{\mu_C} = \frac{34}{0,5} \Rightarrow F_N = 68\ N \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$F_N - 64 = 4v^2 \Rightarrow 68 - 64 = 4v^2$$

$$4 = 4v^2 \Rightarrow v^2 = 1 \quad \therefore v = 1\ m/s$$

88. Un extremo de una cuerda de 1,6 m esta fijo en el punto O y al otro extremo está atada una esfera de masa "m" la cual se suelta cuando la cuerda esta horizontal. Hallar la aceleración tangencial del cuerpo (en m/s^2) y su velocidad (en m/s), cuando la cuerda forma 60° con la vertical sabiendo además que en dicha posición la tensión de la cuerda es: $T = (3/2)mg$

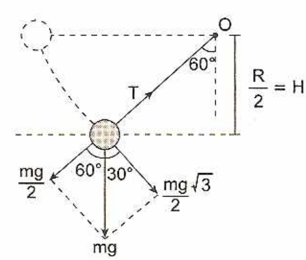


Resolución:

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la esfera en la posición mostrada.

$R = 1,6$ m

$T = \frac{3}{2}$ mg



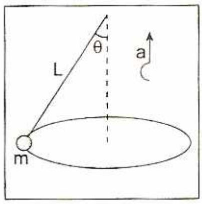
b) Ley de aceleración:

$$F_C = ma_C \Rightarrow T - \frac{mg}{2} = m\frac{v^2}{R}$$

Por dato, se sabe que: $T = \frac{3}{2}mg$

$$\frac{3}{2}mg - \frac{mg}{2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow v^2 = gR \Rightarrow v^2 = 10(1,6) \Rightarrow v = 4\ m/s$$



Resolución:

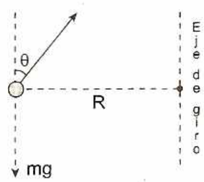
La pequeña masa "m" describe una circunferencia de radio R = Lsenθ en un plano horizontal respecto del ascensor, siendo L la longitud de la cuerda.

Haciendo el DCL de la esferita de masa "m":

Analizando el movimiento circunferencial: $F_C = ma_C$

$T\text{sen}\theta = m\omega^2R \Rightarrow T\text{sen}\theta = m\omega^2 L\text{sen}\theta$

$T = m\omega^2L$ ...(1)



La partícula acelera en el eje vertical: $F_R = ma$

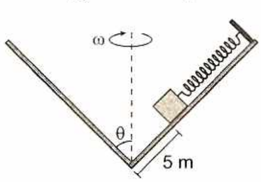
$T\cos\theta - mg = m(3g)$

$\Rightarrow T\cos\theta = \dfrac{4g}{\omega^2L} = 4mg$ ...(2)

Reemplazando datos: $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $\therefore\ \theta = 60°$

Debemos advertir que la partícula tiene movimiento compuesto (MCU + MRUV), por consiguiente la trayectoria que describe es una helicoidal.

102. El cono de la figura es liso y gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante de 5 rad/s. El bloque de masa 1 kg está sujeto a un resorte de coeficiente de elasticidad k = 370 N/m. Determinar cuánto se comprime el resorte, sabiendo que θ = 37°. ($g = 10\ m/s^2$)



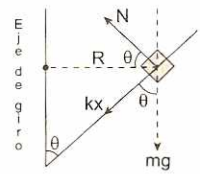
Resolución:

El bloque describe una trayectoria circunferencial de radio R = 3 m, en un plano horizontal.

Haciendo el DCL del bloque:

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$N\text{sen}\theta = mg + kx\cos\theta$ ...(1)



Aplicando la segunda ley de Newton: $F_C = ma_C$

$N\cos\theta + kx\text{sen}\theta = m\omega^2R$

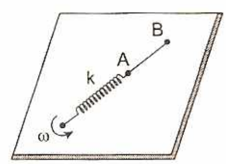
$N\cos\theta = m\omega^2R - kx\text{sen}\theta$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2) tenemos:

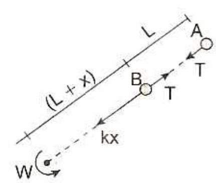
$\tan\theta = \dfrac{mg + kx\cos\theta}{m\omega^2R - kx\text{sen}\theta}$

Reemplazando datos y resolviendo: x = 0,1 m

103. El sistema de la figura gira en un plano horizontal liso, con velocidad angular constante de 1 rad/s. Suponiendo que el resorte k = 12 N/m es lo suficientemente rígido para que el sistema permanezca alineado, hallar la tensión en la cuerda. Asuma que, inicialmente la cuerda y el resorte son de longitud 1 m. Cada esfera tiene 1 kg de masa.



Resolución:



La esfera A describe una circunferencia de radio (2L + x) y la esfera B un radio (L + x), siendo L = 1 m. Haciendo el DCL de cada esfera:

Aplicando la segunda ley de Newton, al movimiento de cada esfera: $F_C = ma_C$

Esfera A: $T = m\omega^2(2L + x)$ ...(1)

Esfera B: $kx - T = m\omega^2(L + x)$ ...(2)

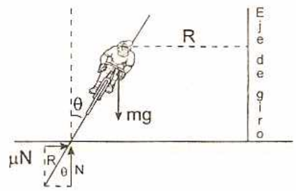
Reemplazando (1) en (2): $kx = m\omega^2(3L + 2x)$

Reemplazando datos: x = 0,3 m ...(3)

Finalmente reemplazamos (3) en (1): T = 2,3 N

104. Un ciclista da una curva sobre una pista horizontal rugosa de radio 30 m a una velocidad en módulo de 15 m/s. ¿Qué inclinación respecto de la vertical debe tener? Suponga que el hombre + bicicleta tiene una masa "m" y está concentrada a una altura "h" sobre el piso cuando la bicicleta está en posición vertical.

Resolución:



La reacción del piso y el peso son concurrentes en el centro de masa del ciclista. Además, descomponiendo la reacción R_1 nos damos cuenta que: $\mu = \tan\theta$.

La fuerza resultante en la vertical es igual a cero:

$N = mg$ ...(1)

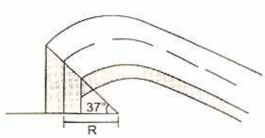
Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial: $F_C = ma_C$

$\mu N = m\dfrac{v^2}{R}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $\mu = \dfrac{v^2}{Rg} = \dfrac{3}{4}$

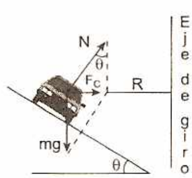
$\Rightarrow \mu = \tan\theta = \dfrac{3}{4} \quad \therefore \theta = 37°$

105. Un automóvil ingresa a una curva de radio R = 30 m y 37° de ángulo de peralte. Determinar la velocidad del auto, tal que la fuerza de rozamiento sobre las llantas sea igual a cero. $g = 10\ m/s^2$

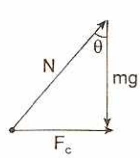


Resolución:

Haciendo el DCL del automóvil. La fuerza centrípeta es la resultante de la reacción normal N y del peso del auto.



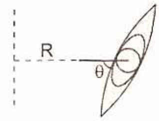
$$\tan\theta = \frac{F_C}{mg} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg}$$



$v^2 = gR\tan\theta$

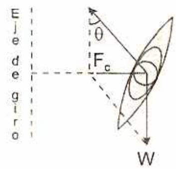
$\therefore v = 15\ m/s$

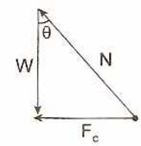
106. En la figura, determinar el ángulo de inclinación θ de las alas del avión, si describe una circunferencia de radio R = 9 km en un plano horizontal, con una velocidad lineal de 300 m/s. $(g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

Haciendo el DCL del avión se puede observar que la Fuerza Centrípeta es la resultante de N y del peso W.

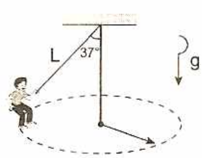




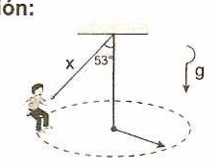
$$\tan\theta = \frac{F_c}{W} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{gR} = 1$$

$\therefore \theta = 45°$

107. En el sistema mecánico mostrado, el eje vertical mantiene su velocidad angular constante. Un hombre se encuentra dando vueltas suspendido de una cuerda de longitud L que forma un ángulo de 37° con el eje. Calcular la nueva longitud "x" de la cuerda, tal que, el hombre manteniendo la misma velocidad angular constante, la cuerda forme un ángulo de 53° con la vertical.



Resolución:



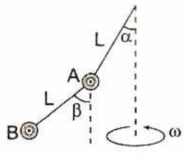
Propiedad: "La velocidad angular de un péndulo cónico, depende únicamente de la altura".

Por consiguiente, ambos péndulos cónicos, tienen la misma altura.

$h = x\cos 53° = L\cos 37°$

Despejando: $x = \dfrac{4}{3}L$

108. Un péndulo doble gira alrededor del eje vertical de manera que los dos hilos de igual longitud L yacen en un mismo plano y forman con la vertical ángulos constantes "a" y "b". Las esferas pequeñas tienen igual masa. Hallar la velocidad angular de rotación del sistema.

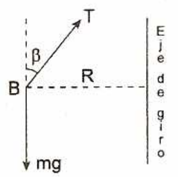


Resolución:

La esfera B describe una trayectoria circular de radio $L(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)$, en un plano horizontal.

Haciendo el DCL de la esfera B.

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:



$T\cos\beta = mg$ ...(1)

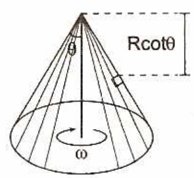
Aplicando la segunda ley de Newton: $F_C = ma_C$

$T\text{sen}\beta = m\omega^2 L(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)$ ...(2)

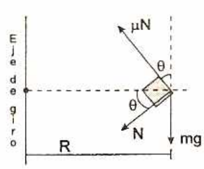
Resolviendo (1) y (2), tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\beta}{L(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)}}$$

109. En la pared interior de un cono se encuentra apoyado un bloque de masa "m". Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el cono es μ, hallar la máxima velocidad angular del cono, tal que el bloque no resbale sobre la superficie en contacto.



Resolución:



Haciendo el DCL del bloque, respecto de un observador que se encuentra en la Tierra.

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$\mu N\cos\theta = N\text{sen}\theta + mg$

$(\mu\cos\theta - \text{sen}\theta)N = mg$ ...(1)

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial: $F_C = ma_C$

$\mu N\text{sen}\theta + N\cos\theta = m\omega^2 R$

$(\mu\text{sen}\theta + \cos\theta)N = m\omega^2 R$ ...(2)

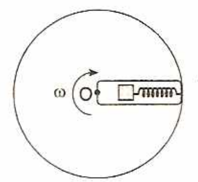
Resolviendo (1) y (2) tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\mu\text{sen}\theta + \cos\theta)}{R(\mu\cos\theta - \text{sen}\theta)}}$$

Donde: $\mu\cos\theta - \text{sen}\theta > 0$

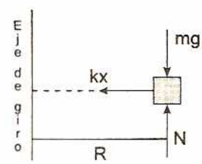
$\Rightarrow \mu > \tan\theta$

110. Un disco horizontal gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro geométrico O. La ranura es lisa y contiene un bloque de masa 2 kg, sujeto a un resorte. El bloque está a 20 cm del centro, cuando el disco no gira. Calcular la constante elástica del resorte, si se deforma 5 cm cuando el disco gira a 4 rad/s.



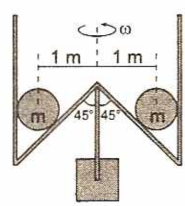
Resolución:

Haciendo el diagrama del cuerpo libre del bloque, 2.ª ley de Newton: $kx = m\omega^2 R$



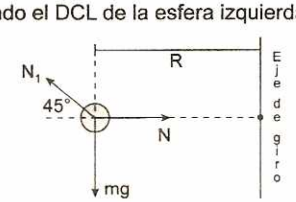
$k(0{,}05) = 2(16)(0{,}25) \Rightarrow k = 160\ \dfrac{N}{m}$

111. El sistema mostrado gira con velocidad angular constante $\omega = \pi$ rad/s. Calcular la reacción de la pared vertical sobre las esferas de masas m = 2 kg. ($g = \pi^2$ m/s^2)



Resolución:

Haciendo el DCL de la esfera izquierda:



Equilibrio vertical: $\Sigma F_y = 0$

$N_1 \text{sen}45° = mg$ ...(1)

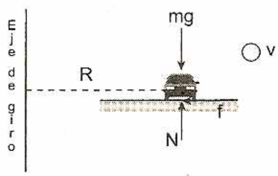
Fuerza centrípeta:

$N - N_1\cos 45° = m\omega^2 R$ ...(2)

Sumando (1) y (2): $N = m(g + \omega^2 R)$

Reemplazando: $N = 4\pi^2$ newton

112. Un automóvil se desplaza por una carretera de radio de curvatura 180 m. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre las llantas y la pista horizontal es 0,5, hallar la máxima velocidad del auto, tal que la llanta no resbale. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

El diagrama de fuerzas sobre el auto, visto de frente:

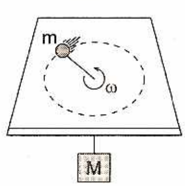
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$

$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C \Rightarrow f_r = ma_C$

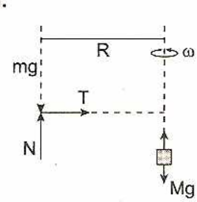
$\mu(mg) = m\dfrac{v^2}{R} \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\mu g R}$

Reemplazando: $v_{máx.} = 30$ m/s

113. La figura muestra una esfera de masa "m" en movimiento circunferencial con radio de curvatura R. La esfera y el bloque de masa M se encuentran unidos mediante una cuerda que pasa por un agujero del plano horizontal liso. Determinar la velocidad angular constante de la esfera.



Resolución:



DCL de la esfera y del bloque.

El bloque se encuentra en equilibrio:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = Mg$ ...(1)

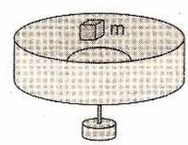
Analizando la esfera: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$T = m\omega^2 R$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $Mg = m\omega^2 R$

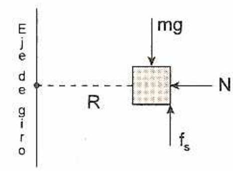
$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{Mg}{mR}}$

114. Calcular la velocidad angular del cilindro de radio R = 10 m, tal que el bloque de masa "m" no resbale. El coeficiente de rozamiento estático es 0,25 entre el bloque y la pared vertical. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

DCL del bloque:



$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$N = m\omega^2 R$

$\Sigma F_y = 0$

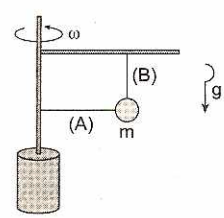
$f_s = mg$

$\mu_s(m\omega^2 R) = mg$

$\omega^2 = \dfrac{g}{\mu_s R}$

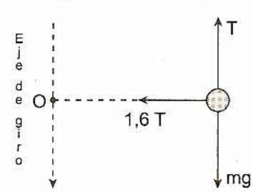
Reemplazando: $\omega = 2$ rad/s

115. ¿Qué velocidad angular debe tener el sistema mostrado para que la tensión en la cuerda (A) sea 1,6 veces la tensión en la cuerda B, si la longitud de la cuerda A es 25 cm? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Haciendo el diagrama del cuerpo libre de la esfera:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = mg$ ...(1)

$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C \Rightarrow 1{,}6\,T = m\omega^2 R$ ...(2)

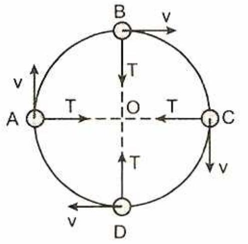
Reemplazando (1) en (2): $1{,}6mg = m\omega^2 R$

$\dfrac{1{,}6g}{R} = \omega^2$

$\Rightarrow \omega = 8$ rad/s

116. Una esfera de 800 gramos gira en un plano horizontal con aceleración centrípeta de módulo 20 m/s^2. Determinar el módulo de la tensión en la cuerda que lo mantiene en movimiento.

Resolución:



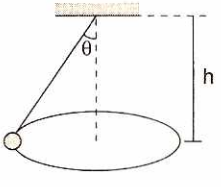
Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial:

$F_c = ma_c$

La tensión en la fuerza representa a la fuerza centrípeta:

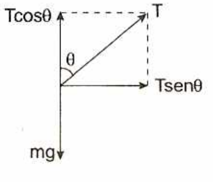
$T = ma_c \Rightarrow T = (0,8)(20) = 16$ N

117. La figura muestra un péndulo cónico de masa "m" y altura "h", que gira con velocidad angular constante. Hallar la velocidad angular.



Resolución:

DCL de la esfera:



2.ª Ley de Newton: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$T\text{sen}\theta = m\omega^2 R$ ...(1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$ ...(2)

Dividimos (1) entre (2): $\tan\theta = \dfrac{\omega^2 R}{g}$

Pero: $R = h\tan\theta$

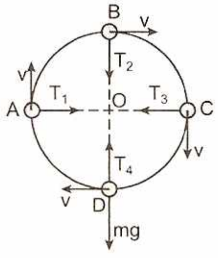
Luego: $\omega^2 = \dfrac{g}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$

118. Una piedra de 800 gramos gira en un plano vertical con velocidad tangencial de módulo 20 m/s. Si una cuerda de 0,5 m de largo lo mantiene en movimiento, determinar el módulo de la tensión en la cuerda en la posición más baja de su trayectoria. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial: $F_c = ma_c$

En la posición más baja, la fuerza $(T_4 - mg)$ representa a la fuerza centrípeta:



$T_4 - mg = ma_c$

$\Rightarrow T_4 - mg = m\left(\dfrac{v^2}{R}\right)$

$T_4 - (0,8)(10) = (0,8)\dfrac{(20)^2}{0,5} \Rightarrow T_4 = 648$ N

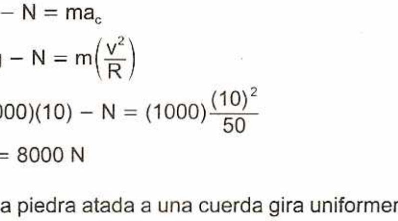
119. Un automóvil de 1000 kg circula con velocidad tangencial de módulo 10 m/s por un puente que tiene la forma de un arco circular vertical de radio 50 m. Hallar el valor de la fuerza de reacción (en kN) del puente sobre el automóvil en el punto más alto de la trayectoria circunferencial. Considerar $g = 10$ m/s^2.

Resolución:

Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial:

$$F_c = ma_c$$

En la posición más baja, la fuerza $(W - N)$ representa a la fuerza centrípeta:



$W - N = ma_c$

$mg - N = m\left(\dfrac{v^2}{R}\right)$

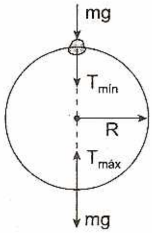
$(1000)(10) - N = (1000)\dfrac{(10)^2}{50}$

$N = 8000$ N

120. Una piedra atada a una cuerda gira uniformemente en un plano vertical. Encontrar la masa "m" de la piedra, si la diferencia entre la tensión máxima y mínima en la cuerda es 19,6 N.

Resolución:

Si la partícula se mueve con velocidad angular constante, entonces la tensión es máxima en el punto más bajo y es mínima en el punto más alto.



Dinámica circunferencial: $F_C = ma_C$

$T_{mín.} + mg = m\omega^2R$ ...(1)

$T_{máx.} - mg = m\omega^2R$ ...(2)

Igualamos (1) y (2): $T_{máx.} - mg = T_{mín.} + mg$

$T_{máx.} - T_{mín.} = 2\ mg$

Reemplazando los datos tenemos: $19{,}6 = 2(m)(9{,}8)$

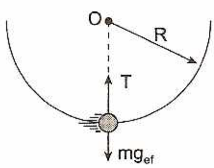
$\therefore\ m = 1$ kg

121. El sistema mostrado acelera hacia arriba con $a = 4$ m/s^2. La esfera de masa 2 kg gira con una velocidad angular constante de $\omega = 5$ rad/s describiendo una circunferencia de radio $R = 0{,}5$ m. Halla la tensión máxima en la cuerda que sostiene a la esfera. $g = 10$ m/s^2.

Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera respecto de un observador ubicado en el ascensor. En el interior se genera un campo efectivo: $g_{ef} = g + a = 14$ m/s^2

DCL (esfera):



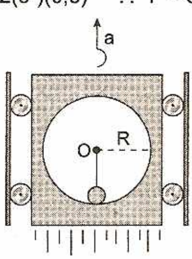
La tensión en la cuerda será máxima, cuando la esfera pase por su posición más baja respecto del campo efectivo.

Dinámica circunferencial:

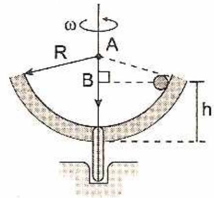
$F_C = ma_C \Rightarrow T - mg_{ef} = m\omega^2R$

Reemplazando datos tenemos:

$T - 2(14) = 2(5^2)(0{,}5)\quad \therefore\ T = 53$ N



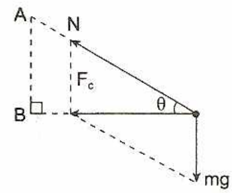
122. Por un canal torcido en forma circunferencial de radio $R = 1$ m, se desliza sin fricción una esferita de masa "m". ¿A qué altura "h" se encontrará el cuerpo, si el sistema gira uniformemente con una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s? $g = 10$ m/s^2



Resolución:

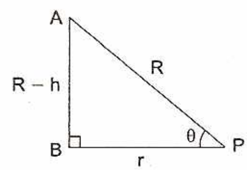
De la segunda ley de Newton:

$F_C = ma_C = m\omega^2r$ ...(1)



Del DCL (esfera):

$$\tan\theta = \frac{mg}{F_C} = \frac{R-h}{r} \quad ...(2)$$

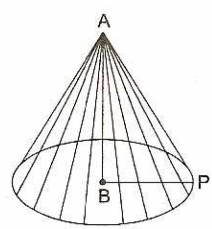


Donde "r" es el radio de giro de la partícula.

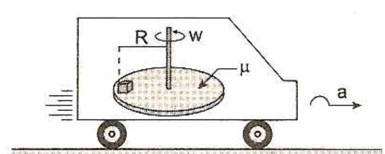
Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$\frac{mg}{m\omega^2r} = \frac{R-h}{r}$$

$$\frac{g}{\omega^2} = R - h \Rightarrow \frac{10}{25} = 1 - h \quad \therefore\ h = 0{,}6\ \text{m}$$



123. El sistema acelera horizontalmente con $a = 4$ m/s^2. Hallar la máxima velocidad angular ω del disco, tal que, el bloque de masa "m" que se encuentra a una distancia $R = 0{,}25$ m del eje, no resbale.
($\mu_s = 0{,}5$; $g = 10$ m/s^2)

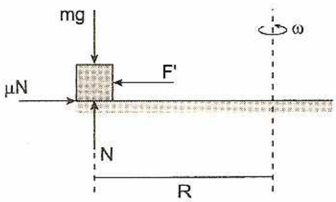


Resolución:

Ubicamos el sistema de referencia en el interior del carro, donde el campo de gravedad efectivo es:

$$\vec{g}_{ef} = \vec{g} + (-\vec{a})$$

Y se manifiesta como la suma, del peso mg y la fuerza de inercia F' = ma.



Del DCL (bloque): $\Sigma F_{(vertical)} = 0 \Rightarrow N = mg$

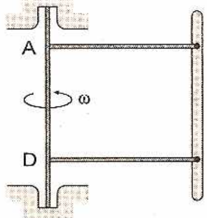
Dinámica circunferencial: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$\mu N - F' = m\omega^2 R \Rightarrow \mu(mg) - ma = m\omega^2 R$

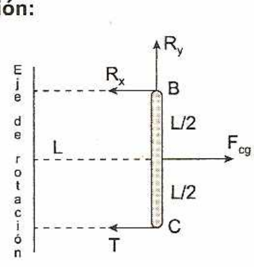
$\mu g - a = \omega^2 R \Rightarrow \omega_{máx.} = \sqrt{\dfrac{\mu g - a}{R}}$

Reemplazando datos tenemos: $\omega = 2$ rad/s

124. En la figura la barra BC es mantenida en posición vertical por medio de la cuerda CD cuando gira el sistema alrededor del eje vertical. El pin en B es liso y la barra BC tiene una masa de 4 kg. Si la máxima tensión que puede soportar la cuerda CD es de 100 N, hallar el valor de la máxima velocidad angular ω que puede girar el sistema sin que se rompa la cuerda.
AB = BC = 2 m. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:



Haciendo el DCL de la barra desde un sistema de referencia rotacional que gira con velocidad angular constante ω. Para nuestro observador la barra BC está en equilibrio. Sobre la barra actúa la fuerza de inercia (fuerza centrífuga): $F_{cg} = m\omega^2 R$

De la segunda condición de equilibrio:

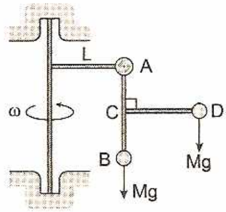
$\Sigma M_B + = \Sigma M_B - F_{cg}(L/2) = TL$

$m\omega^2 R\left(\dfrac{1}{2}\right) = T$

Reemplazando los datos: $4\omega^2(2)\left(\dfrac{1}{2}\right) = 100$

$\therefore \omega = 5$ rad/s

125. El sistema gira alrededor de su eje de rotación vertical. Hallar el valor de la velocidad angular constante ω, tal que, la parte AB de la barra imponderable en forma de T articulada en A, esté en posición vertical. En los extremos B y D se encuentran dos esferas puntuales de masas M y "m" respectivamente (M = 4m).
Donde: L = AC = BC = CD = 1 m
($g = 10$ m/s^2)

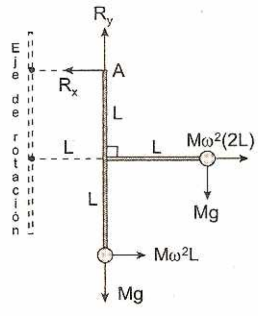


Resolución:

Haciendo el DCL del sistema formado por la barra en forma de T y las esferas M y "m", desde el sistema de referencia rotacional, que gira con velocidad angular constante ω.

En este sistema de referencia la barra T se encuentra en equilibrio. Donde actúa la fuerza de inercia rotacional o fuerza centrífuga:

$F_{cg} = ma_C = m\omega^2 R$



Por segunda condición de equilibrio: $\Sigma M_A = 0$

$(2m\omega^2 L)L + M\omega^2 L(2L) = mgL$

$2\omega^2 L(M + m) = mg$

Reemplazando los datos tenemos:

$2\omega^2(1)(5m) = m(10) \quad \therefore \omega = 1$ rad/s

126. En la figura la barra AB es mantenida en posición vertical por medio de la cuerda CD cuando gira el sistema alrededor del eje vertical que muestra la figura. El pin en A es liso y la barra AB tiene una masa de 40 kg. Si la máxima tensión que

Reemplazando:

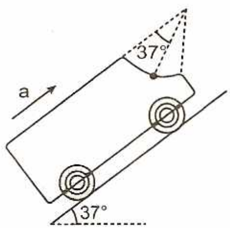
$$a = \frac{339,5 - 20(9,8)(\sqrt{3}/2) - (0,5)(20)(9,8)\frac{1}{2}}{20}$$

$a = 6,04\ m/s^2$

Clave: A

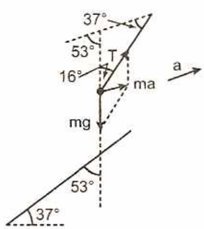
PROBLEMA 5 (UNI 2012 - I)

La superficie circular sobre la que se apoya la bolita es perfectamente lisa. Calcule la aceleración, en m/s^2, que debe tener el carrito para que la bolita adopte la posición mostrada. ($g = 9,8\ m/s^2$; $\text{sen}16° = 7/25$)

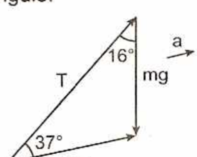


A) 9,80 B) 8,33 C) 6,25
D) 5,66 E) 4,57

Resolución:



Formando el triángulo:



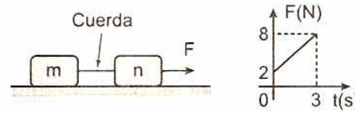
Ley de senos: $\dfrac{ma}{\text{sen}16°} = \dfrac{mg}{\text{sen}37°}$

$\Rightarrow a = \dfrac{7}{25} \times 9,8 \times \dfrac{5}{3} \quad \therefore a = 4,57\ m/s^2$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2012 - II)

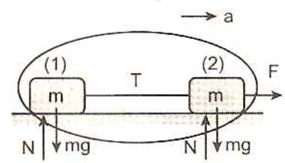
Dos bloques idénticos unidos por una cuerda se ubican sobre una mesa horizontal lisa. La cuerda puede soportar una tensión máxima de 6 N. Si los bloques son jalados por una fuerza F que varía en función del tiempo como muestra la figura, halle el instante "t", en segundos, en el cual la cuerda se rompe.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

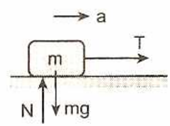
Resolución:

Del gráfico:



Para el sistema: $F = 2ma$ ...(1)

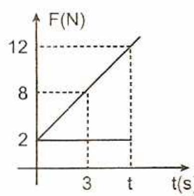
DCL (Bloque I)



$a = T/m \Rightarrow T = ma$

Como: $T_{máx} = 6\ N \Rightarrow ma = 6$; en (1) $\Rightarrow F = 12\ N$

Luego:



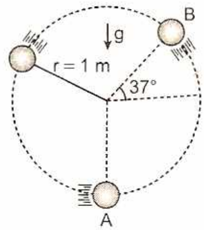
Por semejanza de triángulos

$\dfrac{6}{3} = \dfrac{10}{t} \quad \therefore t = 5\ s$

Clave: B

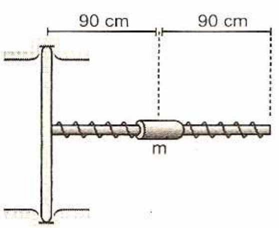
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un objeto de 500 g gira en un plano vertical tal como se muestra a continuación. Determine la tensión de la cuerda en A y B si por estos puntos el objeto pasa con rapidez de 8 m/s y $4\sqrt{2}$ m/s, respectivamente ($g = 10$ m/s^2).



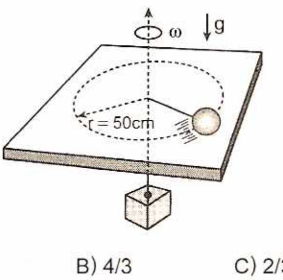
A) 42 N; 64 N B) 36 N; 55 N C) 37 N; 13 N
D) 32 N; 48 N E) 24 N; 36 N

2. Los resortes idénticos que se encuentran unidos al collarín y que pueden deslizar por la barra lisa se encuentran sin deformar. Si se empieza a rotar el sistema, de tal manera que la rapidez angular aumente lentamente, determine la deformación de los resortes cuando la rapidez angular sea de 10 rad/s. ($m = 200$ g; $k = 100$ N/m; $g = 10$ m/s^2)



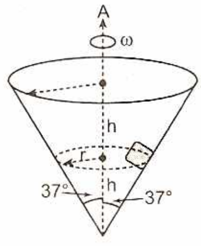
A) 6 cm B) 7 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 10 cm

3. La esfera gira sobre el plano con una velocidad $4\sqrt{5}$ rad/s. ¿En qué relación se encuentran la masa de la esfera y la masa del bloque si estos cuerpos se encuentran unidos por una cuerda? Considere superficies lisas ($g = 10$ m/s^2).



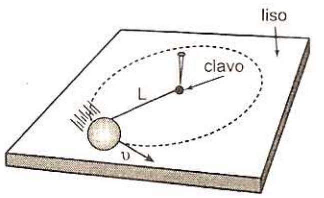
A) 5/2 B) 4/3 C) 2/3
D) 1/4 E) 7/6

4. Si el bloque se encuentra a punto de deslizar hacia abajo de la superficie del cono ($\mu_s = 0,5$), determine con qué rapidez angular se encuentra rotando el cono ($R = 1$ m y $g = 10$ m/s^2).



A) $\sqrt{3}$ rad/s B) $2\sqrt{5}$ rad/s C) $3\sqrt{6}$ rad/s
D) $5\sqrt{2}$ rad/s E) $\sqrt{10}$ rad/s

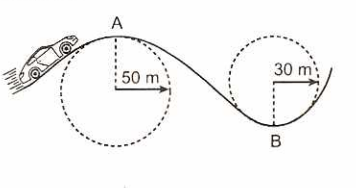
5. Se muestra una esfera describiendo una trayectoria circunferencial, en un plano horizontal. Determine la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.



I. El tiempo para que la esfera de una vuelta es $\pi L/\upsilon$
II. El módulo de la aceleración de la esfera es υ^2/L.
III. Sobre la esfera actúan en todo momento, 4 fuerzas.
IV. La fuerza resultante sobre la esfera apunta en todo momento, hacia el centro de la circunferencia.

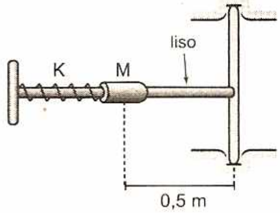
A) FVVF B) FVFF C) VFFV
D) VFVF E) FVFV

6. Un automóvil de 500 kg recorre con una rapidez constante de 15 m/s un camino montañoso. Los radios de curvatura en los puntos A y B son 50 m y 30 m, respectivamente. Determine el módulo de la fuerza normal del camino sobre el auto en A y B ($g = 10$ m/s^2).



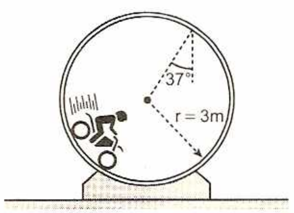
A) 2750 N; 8750 N
B) 2250 N; 2750 N
C) 4250 N; 5750 N
D) 1250 N; 3250 N
E) 3250 N; 5650 N

7. El sistema mostrado se encuentra en reposo y el resorte esta sin deformar. Si el sistema comienza a girar lentamente y para el instante en que el resorte se ha deformado 10 cm el sistema presenta una rapidez angular ω. (Considere que $k = 600$ N/m; $M = 1$ kg).



A) 3 rad/s
B) 8 rad/s
C) 10 rad/s
D) 4 rad/s
E) 5 rad/s

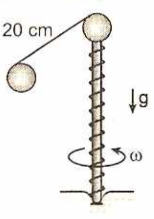
8. Se muestra a un acróbata de 80 kg sobre una moto. Si cuando pasa por B presenta una rapidez de 6 m/s, determine el módulo de la fuerza que ejerce el acróbata sobre el asiento de la moto en B ($g = 10$ m/s^2).



A) 280 N
B) 300 N
C) 360 N
D) 320 N
E) 340 N

9. La esfera de 3 kg gira con una rapidez angular constante ω. Si el resorte de rigidez $k = 1000$ N/m se mantiene deformado 6 cm, determine ω. Desprecie el rozamiento ($g = 10$ m/s^2).

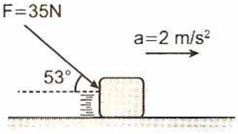
A) 2 rad/s
B) 5 rad/s
C) 10 rad/s
D) 8 rad/s
E) 3 rad/s



10. Un atleta se encuentra trotando; si de pronto empieza aumentar su rapidez determine que aceleración experimenta en el momento que la fuerza de rozamiento estático sobre la zuela de sus zapatillas en los tres quintos del módulo de la fuerza de gravedad.

A) 5 m/s^2
B) 6 m/s^2
C) 3 m/s^2
D) 4 m/s^2
E) 2 m/s^2

11. Si el módulo de la fuerza de rozamiento entre el cajón y el piso es 5 N. Determine la masa del cajón. ($g = 10$ m/s^2)



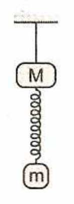
A) 5 kg
B) 10 kg
C) 15 kg
D) 4 kg
E) 8 kg

12. Una cadena homogénea de 4 kg y de 1 m de longitud elevada verticalmente, aplicándole a uno de sus extremos una fuerza de 160 N; determine la tensión de la cadena a 0,25 m del extremo superior. ($g = 10$ m/s^2).

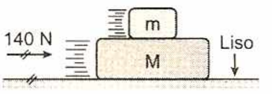
A) 120 N
B) 130 N
C) 150 N
D) 140 N
E) 160 N

13. El sistema mostrado se encuentra en reposo; si $M = 4$kg; $m = 2$ kg. ¿Qué aceleración experimentan cada uno de los bloques en el instante que se corta el hilo sostiene a M?

A) 0 y 0 m/s^2
B) 5 m/s^2 y 0 m/s^2
C) 10 m/s^2 y 10 m/s^2
D) 15 m/s^2 y 0 m/s^2
E) 10 m/s^2 y 8 m/s^2



14. Un tablón es empujado como se muestra en la figura. Determine el módulo de la fuerza de rozamiento entre ambos cuerpos, si se sabe que el módulo de la aceleración de "m" es la mitad de la de M. ($M = 3m$)



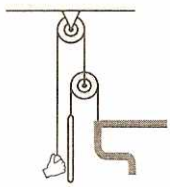
A) 10 N
B) 20 N
C) 30 N
D) 40 N
E) 50 N

15. A partir del sistema mostrado, determine el valor de la fuerza constante F, si los bloques se ejercen fuerzas de módulo 30 N. Considere que los coeficientes de rozamiento cinético entre los bloques (A y B) con el piso son 0,4 y 0,3 respectivamente. $M_A = 10$ kg; $M_B = 6$ kg; $g = 10$ m/s^2

A) 20 N
B) 30 N
C) 50 N
D) 80 N
E) 90 N

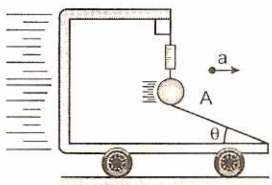
16. En la figura mostrada el sistema se encuentra en reposo. Determine el tiempo que transcurre desde

que se suelta la esfera hasta que esta pasa por el extremo superior de la barra. (Considere poleas ideales. $m_{esfera} = 1{,}8m_{Barra}$; $L_{Barra} = 1$ m; $g = 10$ m/s^2)



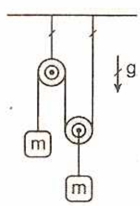
A) 2 s
B) 1,5 s
C) 1,7 s
D) 1,4 s
E) 1 s

17. El sistema mostrado se mueve con una aceleración a = 4 g y el dinamómetro marca una lectura 4 mg. Determine θ (Masa de la esfera = m)



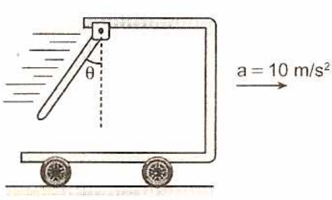
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) arcsen(1/4)

18. El sistema que se muestra está formado por poleas ideales. Determine el valor de la aceleración de cada bloque. (g = 10 m/s^2).



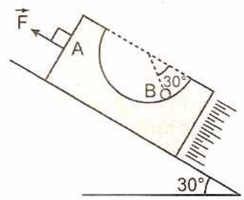
A) 2 m/s^2; 4 m/s^2
B) 2 m/s^2 ; 5 m/s^2
C) 3 m/s^2 y 4 m/s^2
D) 1 m/s^2 y 2 m/s^2
E) 4 m/s^2 y 8 m/s^2

19. Determine θ y la reacción en la articulación, si la barra homogénea de 1 kg no se mueve respecto del carrito. (g = 10 m/s^2)



A) 30°; 20 N B) 45°; $10\sqrt{2}$ N
C) 37°; 30 N D) 53°; $5\sqrt{2}$ N
E) 45°; $20\sqrt{3}$ N

20. Determine el módulo de $\vec{F}$ constante, si el sistema asciende por el plano inclinado liso según se muestra en la figura. La esfera no se mueve respecto del coche liso.
($m_A = 2{,}5$ kg; $m_B = 0{,}5$ kg; g = 10 m/s^2)



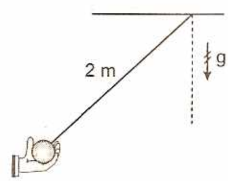
A) 37,5 N B) 42,5 N C) 55 N
D) 75 N E) 45 N

21. Indique verdadero (V) o (F) según corresponda.

I. En todo movimiento curvilíneo necesariamente existe aceleración normal.
II. Si un cuerpo realiza un movimiento circunferencial con rapidez constante, necesariamente la fuerza resultante en él se dirige al centro de la trayectoria.
III. La fuerza centrípeta es una fuerza más que actúa sobre un cuerpo que realiza un movimiento circunferencial.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FFV E) FFF

22. El cuerpo de 2 kg se suelta en la posición mostrada. Si la rapidez máxima que adquiere es 5 m/s, determine la tensión en la cuerda en dicho instante. (g = 10 m/s^2)



A) 20 N
B) 25 N
C) 30 N
D) 45 N
E) 50 N

23. Un globo es inflado con helio y luego es soltado, notándose que se eleva con cierta aceleración "a". Si ahora el mismo globo solo lo inflamos hasta la mitad y lo soltamos; ¿Cuál será el módulo de su aceleración? (Desprecie la masa del globo y la resistencia del aire)

A) a/2 B) a C) 3 a/2
D) 2a E) 4a

24. La fuerza de fricción de las gotas de lluvia con el aire es proporcional al cuadrado de su rapidez y al cuadrado de su radio. ¿Qué gotas impactan sobre la superficie de la Tierra con mayor rapidez, las gruesas o las finas?

A) Las gruesas.
B) Las finas.
C) Impactan con igual rapidez sin importar su tamaño.
D) Depende de la aceleración de la gravedad.
E) No se puede precisar por falta de mayor información.

25. Un bloque pequeño de 100 g es soltado en el aire, alcanzando una rapidez límite de 6 m/s. Determine la aceleración del bloque, cuando su rapidez es 3 m/s. Para cuerpos pequeños y de pequeña rapidez la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la rapidez (V) de los cuerpos.

A) 2 m/s^2 B) 3 m/s^2 C) 4 m/s^2
D) 5 m/s^2 E) 8 m/s^2

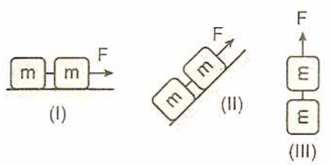
26. Una cuerda homogénea de densidad lineal $\mu = 2$ kg/m y de 6 m de longitud, tiene un extremo atado a una esfera de 200 N y el otro esta fijo a un helicóptero que sube verticalmente acelerando con $+2\ m/s^2\hat{j}$. ¿Cuál es el módulo de la tensión en la cuerda a 2 m, debajo del helicóptero? ($g = 10\ m/s^2$)

A) 80 N B) 120 N C) 200 N
D) 240 N E) 336 N

27. Una moneda lanzada hacia arriba a lo largo de un plano inclinado $\theta = 30°$, desacelera a razón de 6 m/s^2; ¿Con que módulo de aceleración descenderá? ($g = 10\ m/s^2$)

A) 2 m/s^2 B) 3 m/s^2 C) 4 m/s^2
D) 5 m/s^2 E) 6 m/s^2

28. ¿En qué caso la cuerda ideal que une los bloques soporta mayor tensión? Desprecie la fricción y considere F > 2mg. (g: aceleración de la gravedad)



A) En (I) B) En (II)
C) En (III) D) En (II) y (III)
E) En todos los casos la tensión en la cuerda tiene el mismo valor.

29. El grafico nos muestra un disco homogéneo de radio R y masa M que puede rotar entorno de un eje que pasa por su centro y que es perpendicular al plano del papel. Determine el módulo de la aceleración angular del disco, al tirar del extremo de la cuerda P que se enrolla en el disco, con una fuerza de modulo F.

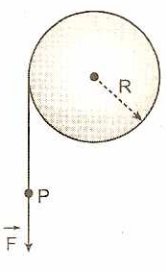
A) $\frac{F}{MR}$

B) $\frac{2F}{MR}$

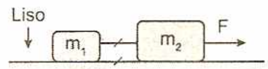
C) $\frac{4F}{MR}$

D) $\frac{F}{2MR}$

E) $\frac{F}{4MR}$



30. En la figura mostrada el módulo de la fuerza ($\vec{F}$) depende del tiempo según F = 5t N donde "t" se expresa en segundos. ¿En qué instante "t" se inicia la ruptura de la cuerda que une los bloques si $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg? La cuerda soporta como máximo una tensión de módulo 30 N.

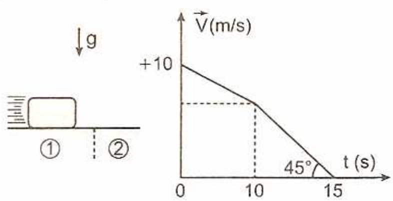


A) 18 s B) 15 s C) 12 s
D) 10 s E) 20 s

31. Determine el mínimo tiempo que pueda emplear un automóvil para recorrer 3,6 km en línea recta sobre una pista horizontal cuyos coeficientes de rozamiento con los neumáticos son 0,8 y 0,6. (Considere el auto inicialmente en reposo, $g = 10\ m/s^2$)

A) 5 s B) 10 s C) 20 s
D) 30 s E) 40 s

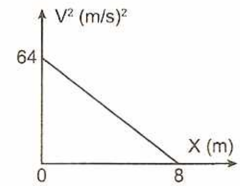
32. Si la gráfica que se muestra indica el comportamiento de la velocidad del bloque conforme transcurre el tiempo; Determine el coeficiente de rozamiento cinético entre dicho bloque y la superficie horizontal 2. Desprecie las dimensiones del bloque ($g = 10\ m/s^2$)



A) 0,1 B) 0,05 C) 0,03
D) 0,02 E) 0,01

33. Un bloque de 2 kg es lanzado sobre un plano horizontal rugoso en la posición $\vec{x} = 0$, observándose que su rapidez varía según el grafico mostrado. Determine la fuerza resultante que actúa sobre el bloque.

A) 4 N
B) 6 N
C) 8 N
D) 10 N
E) 12 N



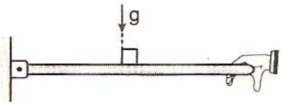
34. Si en el problema anterior, en lugar de aplicar la fuerza $\vec{F}$, suspendemos un bloque de masa "m" y lo soltamos; determine el módulo de la aceleración del bloque.

A) $2g\left(\frac{m}{2m+M}\right)$ B) $g\left(\frac{m}{m+M}\right)$

C) $2g\left(\dfrac{m}{m+M}\right)$ D) $g\left(\dfrac{M}{2m+M}\right)$

E) $\dfrac{2mg}{M}$

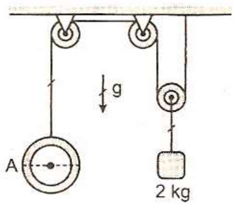
35. El grafico nos muestra una barra homogénea de masa M y longitud L, que se encuentra inicialmente horizontal y en reposo. Determine el módulo de la aceleración del punto medio de la barra en el instante que se le suelta.



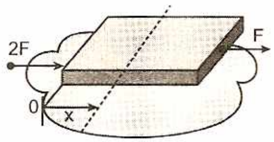
A) g B) 3g/2 C) 3g/4
D) g/4 E) 4g/3

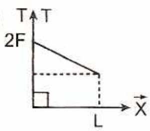
36. Si el sistema mostrado es dejado en libertad; determine el módulo de la fuerza de tracción que experimenta el punto A. El aro es homogéneo de 3 kg, las poleas son de masa despreciable. ($g = 10\ m/s^2$)

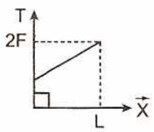
A) 12 N
B) 3,21 N
C) 4,5 N
D) 9,375 N
E) 10 N

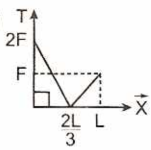


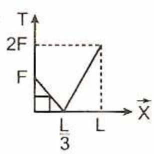
37. El grafico nos muestra una barra homogénea de longitud L que es arrastrada sobre una superficie horizontal lisa. ¿Cuál de las gráficas expresa el comportamiento del módulo de la fuerza de tracción (T) a lo largo de la barra?

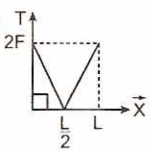


A) 

B) 

C) 

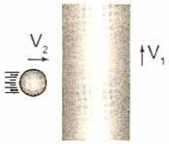
D) 

E) 

38. Un bloque de 4 kg es arrastrado sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0{,}5$) mediante una fuerza constante F horizontal, cambiando su posición ($\vec{x}$) con el tiempo (t) de acuerdo a la ecuación $x = 1 + t^2$. ¿Qué modulo tiene la fuerza $\vec{F}$.
(x en metros; t en segundos)

A) 10 N B) 18 N C) 20 N
D) 28 N E) 30 N

39. La cinta transportadora se mueve con rapidez constante V_1. Sobre ella se lanza una pequeña moneda con rapidez V_2. Determine el ancho máximo de la cinta para que la moneda logre pasarla. El coeficiente de rozamiento cinético entre la moneda y la cinta es μ_k (la cinta se encuentra en un plano horizontal).

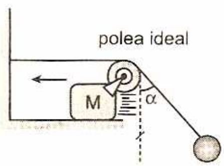


A) $\dfrac{V_2^2}{2u_k g}$ B) $\dfrac{V_2}{2u_k g}\sqrt{V_1^2+V_2^2}$

C) $\dfrac{V_1}{2u_k g}\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ D) $\dfrac{V_1V_2}{2u_k g}$

E) $\dfrac{V_1^2}{2u_k g}$

40. Si durante el movimiento del sistema mostrado, el ángulo α no cambia; determine la masa de la pequeña esfera (desprecie todo rozamiento).

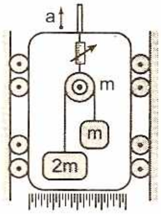


A) $M\text{sen}\alpha$ B) $\dfrac{M\cos\alpha}{(1-\text{sen}\alpha)}$ C) $M\tan\alpha$

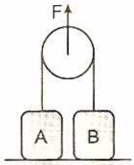
D) $\dfrac{M\text{sen}\alpha}{(1-\text{sen}\alpha)}$ E) $\dfrac{M\text{sen}\alpha}{(1-\text{sen}\alpha)^2}$

41. Si el ascensor que se muestra asciende verticalmente con $5\ m/s^2$. Determine la lectura del dinamómetro ideal ($m = 2kg$ y $g = 10\ m/s^2$).

A) 100 N
B) 80 N
C) 55 N
D) 110 N
E) 90 N

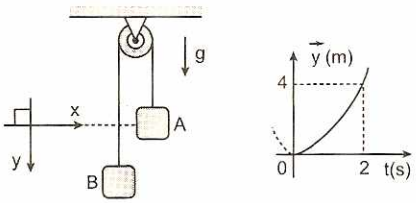


42. Los bloques A y B son de 3 kg y 1 kg respectivamente. Si sobre la polea se aplica una fuerza F = 48 N; halle la aceleración que experimenta la polea ($g = 10\ m/s^2$, polea ideal).



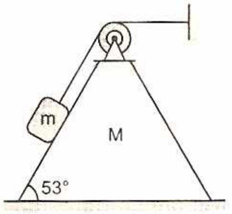
A) $14\ m/s^2$
B) $3{,}5\ m/s^2$
C) $12\ m/s^2$
D) $24\ m/s^2$
E) $7\ m/s^2$

43. Al dejar en libertad el sistema de dos bloques A y B, el movimiento de B se representa mediante la gráfica (y - t). Si el bloque A es de 6 kg; ¿Qué masa tiene B? (Considere polea ideal y $g = 10\ m/s^2$)



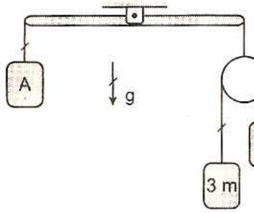
A) 2 kg B) 4 kg C) 5 kg
D) 6 kg E) 6,5 kg

44. El sistema mostrado carece de fricción y es dejado en libertad; determine el módulo de la aceleración de la cuña ($M = 4\ m$; $g = 10\ m/s^2$)



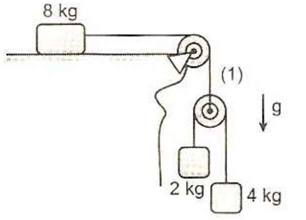
A) $1/3\ m/s^2$ B) $5/4\ m/s^2$ C) $5/3\ m/s^2$
D) $1/7\ m/s^2$ E) $3/7\ m/s^2$

45. Halle la masa del bloque A para que la barra homogénea articulada en su punto medio permanezca horizontal. (Considere polea ideal).



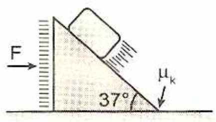
A) m B) 2m C) 3m
D) 4m E) 5m

46. El sistema es abandonado tal como se muestra. Despreciando todo tipo de rozamiento, determine el módulo de la tensión de la cuerda (1). Considere poleas ideales ($g = 10\ m/s^2$)



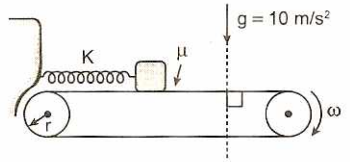
A) 16 N B) 15 N C) 10 N
D) 5 N E) 18 N

47. Al empujar la cuña de 3 kg con una fuerza constante de módulo 62,5 N, el bloque liso de 2 kg asciende a velocidad constante respecto de la cuña. ¿Cuál es el módulo de la fuerza que ejerce la cuña al bloque? ($g = 10\ m/s^2$)



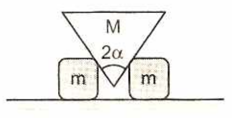
A) 15 N
B) 20 N
C) 25 N
D) 30 N
E) 50 N

48. Se muestra una faja transportadora cuyos rodillos en todo momento rotan con 2 rad/s. Si se deja un bloque de 4 kg unido a un resorte ($k = 200\ N/m$), en la posición que se indica; determine luego de cuánto tiempo el bloque tendrá una aceleración máxima. (Inicialmente el resorte estaba sin deformar y considere r = 5 cm; $\mu_s = 0{,}6$; $\mu_k = 0{,}4$).



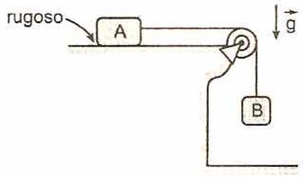
A) 3 s B) 0,8 s C) 4 s
D) 2,3 s E) 1,2 s

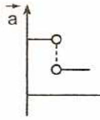
49. Sobre una superficie horizontal lisa, descansan dos cubos iguales de masa "m". Si entre los cubos se suelta un prisma homogéneo de masa M, tal como se indica, determine el módulo de la aceleración de los cubos. Se cumple $\frac{m}{2} = \frac{M}{9}$; $g = 10\ m/s^2$ y $2\alpha = 74°$

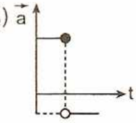


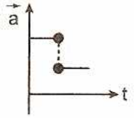
A) $2\ m/s^2$ B) $4\ m/s^2$ C) $5\ m/s^2$
D) $6\ m/s^2$ E) $8\ m/s^2$

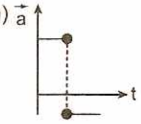
50. Si al abandonar el sistema este adquiere movimiento, el grafico que mejor representa para A su aceleración respecto al tiempo es:

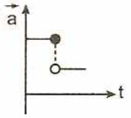


A) 

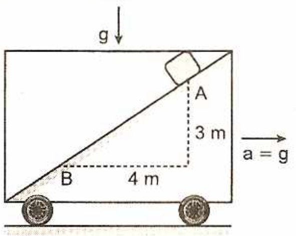
B) 

C) 

D) 

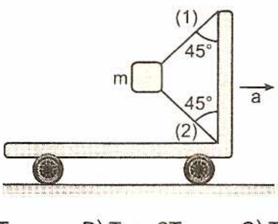
E) 

51. El bloque es abandonado en A en el instante que el coche empieza a acelerar hacia la derecha. ¿Con que velocidad respecto al coche el bloque pasa por B? (superficies lisas).



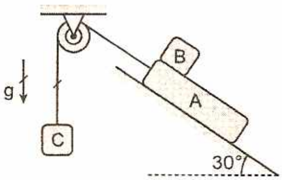
A) $\sqrt{7g}$ B) $2\sqrt{7g}$ C) $4\sqrt{7g}$
D) $\sqrt{14g}$ E) $2\sqrt{g}$

52. El coche se mueve hacia la derecha con aceleración de 20 m/s^2. El bloque de 1 kg no se mueve respecto de él y mantiene tensas las cuerdas. La relación de tensiones en la cuerda (1) y (2) es: (g = 10 m/s^2).



A) $T_1 = T_2$ B) $T_1 = 2T_2$ C) $T_1 = 3T_2$
D) $T_1 = 4T_2$ E) $T_1 = 5T_2$

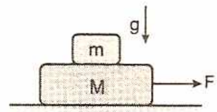
53. Calcule la masa del bloque C, si en forma simultanea se le suelta junto con B, luego B resbala y acelera a razón de 3 m/s^2 respecto de A. Desprecie el rozamiento (considere g = 10 m/s^2; m_A = 10 kg; m_B = 1 kg).



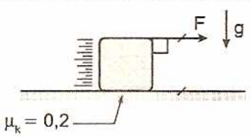
A) 2 kg B) 2,2 kg C) 2,5 kg
D) 3 kg E) 3,2 kg

54. En la figura mostrada, sobre M se aplica la fuerza horizontal cuyo modulo depende del tiempo según F = kt, el coeficiente de rozamiento entre "m" y M es μ, el piso es liso. ¿En qué instante M empieza a deslizar debajo de "m"?

A) (M − m)kg/μ
B) (M + m)kg/μ
C) (m + M)μg/k
D) (M − m)μg
E) (Mm)kg/μ

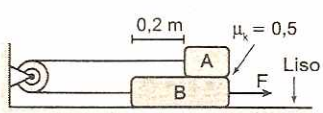


55. Un bloque homogéneo cubico de 5 kg es arrastrado mediante una fuerza $\vec{F}$, de tal manera que se encuentra a punto de inclinarse. Determine el módulo de la aceleración que experimenta (g = 10 m/s^2).



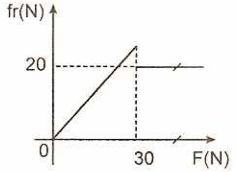
A) 4,5 m/s^2 B) 1,5 m/s^2 C) 3 m/s^2
D) 4 m/s^2 E) 6 m/s^2

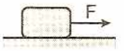
56. Dos bloques A y B de 1 kg y 2 kg respectivamente se encuentran unidos por una cuerda, la cual se enrolla a una polea lisa. Si al bloque B se le ejerce una fuerza horizontal de modulo F = 25 N, a partir del instante mostrado; determine al cabo de que tiempo el bloque A llega al otro extremo del bloque B. (g = 10 m/s^2).



A) 0,1 s B) 0,2 s C) 0,5 s
D) 1 s E) 2 s

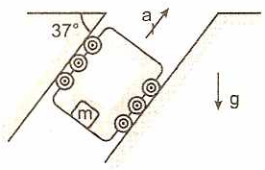
57. La grafica muestra como varia el módulo de la fuerza de rozamiento (f_r) conforme aumenta el módulo de la fuerza horizontal $\vec{F}$ aplicado al bloque. Determine el coeficiente de rozamiento estático si se sabe que, cuando F = 50 N, el bloque tiene una aceleración de módulo 2 m/s^2. (g = 10 m/s^2).





A) 0,5 B) 0,25 C) 0,2
D) 0,4 E) 0,3

58. Calcule el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el piso del elevador. Se sabe que cuando el elevador. Se sabe que cuando el elevador sube con a = 3 g, el bloque está a punto de resbalar (g: aceleración de la gravedad).



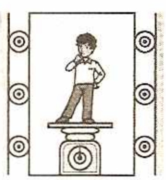
A) 1/3
B) 2/5
C) 2/9
D) 1/9
E) 1/7

59. Sobre el bloque empieza a actuar una fuerza vertical ($\vec{F}$) hacia arriba, cuyo modulo depende del tiempo según la gráfica adjunta. Indique si las siguientes proporciones son verdaderas (V) o falsas (F).

I. En t = 1 s, el módulo de la reacción del piso es 40 N.
II. En t = 5 s, el bloque esta por elevarse.
III. En t = 2 s, la aceleración es de 4 m/s^2.
IV. En t = 6 s, la aceleración es de 2 m/s^2.

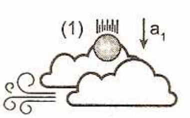
A) VFFV B) VVFF C) VFVV
D) VVFV E) VFVF

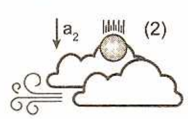
60. Determine el valor y la dirección de la aceleración que debe experimentar la cabina del ascensor para que la balanza indique 600 N. (La masa del joven es de 80 kg y g = 10 m/s^2).



A) 2 m/s^2(↓)
B) 2,5 m/s^2(↑)
C) 2,5 m/s^2 (↓)
D) 4 m/s^2 (↑)
E) 4 m/s^2 (↓)

61. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Considere fuerza de resistencia del aire.

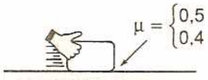




I. $a_1 < g$; aceleración de la gravedad
II. $a_2 = g$
III. $a_1 > a_2$, si $m_1 > m_2$

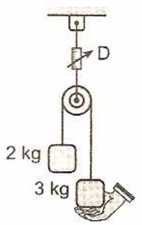
A) FFF B) VVV C) VFV
D) VFF E) VVF

62. Si el bloque es lanzado, como se muestra con 20 m/s, determine su recorrido hasta que se detenga. (g = 10 m/s^2).



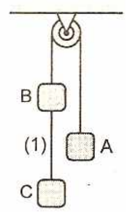
A) 10 m
B) 20 m
C) 40 m
D) 60 m
E) 50 m

63. Luego de que el sistema es dejado en libertad, determine la lectura del dinamómetro. Considere polea y dinamómetro ideal.



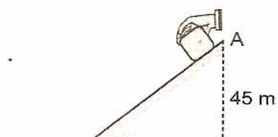
A) 40 N
B) 44 N
C) 48 N
D) 52 N
E) 60 N

64. Si el sistema mostrado es dejado en libertad, determine el módulo de la tensión en la cuerda 1. ($m_A = m_B = 2m_C = 2$ kg; g = 10 m/s^2)



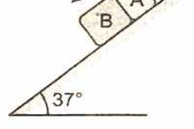
A) 2 N
B) 4 N
C) 6 N
D) 8 N
E) 10 N

65. Si el bloque liso es soltado en A, determine cuanto tiempo tarda en llegar al piso. (g = 10 m/s^2).



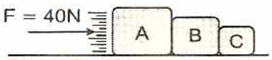
A) 2 s B) 5 s C) 3 s D) 6 s E) 9 s

66. Determine el módulo de la reacción entre el bloque liso A y el bloque áspero B, si realizan MRUV con aceleración de 4 m/s^2 (m_A = 4 kg; m_B= 6 kg; g = 10 m/s^2). Además determine el módulo de la fuerza de rozamiento sobre el bloque B.



A) 20 N; 20 N B) 14 N; 14 N C) 8 N; 20 N
D) 15 N; 17 N E) 16 N; 18 N

67. Tres bloques son empujados, como se muestra, sobre un plano horizontal liso. Determine el módulo de la fuerza que ejerce el bloque C al bloque B. ($g = 10\ m/s^2$; $m_A = m_B = 2m_C$). Desprecie todo rozamiento.

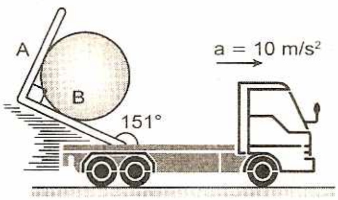


A) 1 N B) 0 C) 4 N
D) 8 N E) 5 N

68. Determine la aceleración de la barra homogénea cuando la mitad de su longitud se encuentre dentro de la zona rugosa. Además señale si realiza MRUV. Considere que el coeficiente de rozamiento cinético entre la barra y el piso es 0,8. ($g = 10\ m/s^2$)

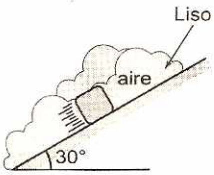
A) $8\ m/s^2$, sí B) $8\ m/s^2$, no C) $4\ m/s^2$, no
D) $6\ m/s^2$, no E) $5\ m/s^2$, sí

69. Si el coche realiza MRUV, determine los módulos de las reacciones sobre la esfera en los puntos A y B. (La esfera es lisa; $m_{esfera} = 5kg$; $g = 10\ m/s^2$)



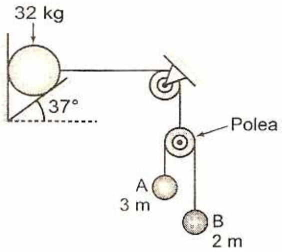
A) 20 N y 30 N B) $17\sqrt{2}$ N y $23\sqrt{2}$ N
C) $14\sqrt{2}$ N y $48\sqrt{2}$ N D) 10 N y 40 N
E) 20 N y 18 N

70. En el instante mostrado determine el módulo de la fuerza de resistencia del aire sobre el bloque de 6 kg, que en ese instante presenta una aceleración de $8\ m/s^2$. ($g = 10\ m/s^2$)



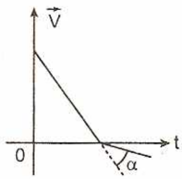
A) 18 N B) 10 N C) 48 N
D) 12 N E) 6 N

71. Determine la máxima masa del bloque de la esfera A para garantizar el equilibrio de la esfera. (Desprecie todo rozamiento; $g = 10\ m/s^2$)



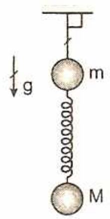
A) 10 kg B) 15 kg C) 12 kg
D) 8 kg E) 6 kg

72. Sobre una superficie inclinada respecto de la horizontal 60° y rugosa, se lanza un bloque. Si la gráfica muestra el comportamiento de la velocidad con el tiempo, determine el coeficiente de rozamiento cinético $\left(\tan\alpha = \frac{1}{18}\right)$.



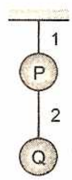
A) 0,8
B) 0,4
C) 0,2
D) 0,1
E) 0,05

73. Si el sistema mostrado se encuentra en reposo; determine el valor de la aceleración de la esfera de masa "m" un instante después de cortar el hilo. ($M = 2\ m$; $g = 10\ m/s^2$)



A) $10\ m/s^2$
B) $20\ m/s^2$
C) $30\ m/s^2$
D) $15\ m/s^2$
E) $18\ m/s^2$

74. Dos esferas P y Q idénticas, de masa "m", se suspenden de hilos muy livianos como indica la figura. Entonces podemos afirmar que:

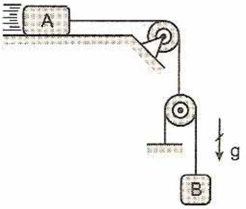


A) Si cortamos el hilo 1, P cae con a = g.
B) Si cortamos el hilo 2, Q cae con a = 2g.
C) Si cortamos el hilo 2, la tensión en 1 disminuye en mg/2
D) Si cortamos el hilo 1, en ese instante la fuerza resultante sobre P es 2 mg.
E) Si cortamos el hilo 1, la tensión en 2 en ese instante se hace cero.

75. Un perno está situado a 10 cm del eje del volante de una máquina que gira a 2400 RPM. Determine el módulo de la fuerza centrípeta sobre el perno, considerando que el perno es de 50 gr; además: $\pi^2 = 10$

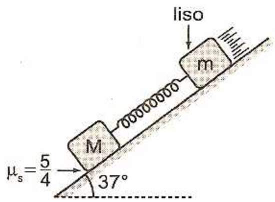
A) 32 N B) 320 N C) 3200 N
D) 16 N E) 160 N

76. En la figura mostrada, despreciando la masa de poleas y la fricción, calcule el módulo de la aceleración de A, sabiendo que su masa es igual a la del bloque B. ($g = 10\ m/s^2$)



A) $1\ m/s^2$ B) $2\ m/s^2$ C) $3\ m/s^2$
D) $4\ m/s^2$ E) $5\ m/s^2$

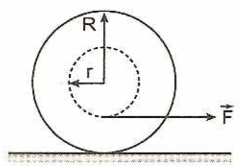
77. La figura muestra a 2 bloques de masas "m" y M unidas por un resorte. Si el sistema se abandona en la posición mostrada, determine la aceleración de "m" en el momento en que M esté a punto de deslizar. El resorte inicialmente esta sin deformar ($M = 4\ m$; $g = 10\ m/s^2$)



A) $5\ m/s^2$ B) $10\ m/s^2$ C) $8,4\ m/s^2$
D) $9,6\ m/s^2$ E) $4,4\ m/s^2$

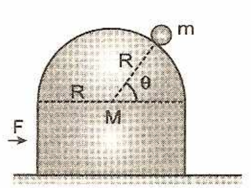
78. Cuando el hilo de un carrete que está en el piso se tira como indica la figura, el módulo de la aceleración de aquel es $6\ m/s^2$. ¿Para qué coeficiente de rozamiento entre los bordes del carrete y el suelo se deslizará el carrete sin rodar? ($R = 4r$)

A) 0,10
B) 0,20
C) 0,25
D) 0,30
E) 0,40

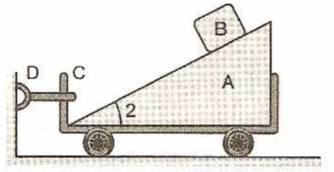


79. Despreciando la fricción calcule θ, si cuando $F = 30\ N$ traslada al sistema mostrado sin resbalar "m" sobre M. Se sabe que $M = 3\ kg$ y $m = 1\ kg$. ($g = 10\ m/s^2$)

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



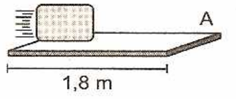
80. El bloque B tiene una masa "m" y se suelta cuando está en la parte superior del carrito A de masa 3m. Determine la tensión de la cuerda CD, que evita el movimiento del carrito mientras que B desliza. Desprecie el rozamiento.



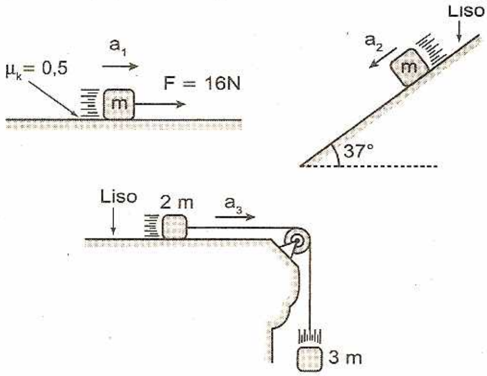
A) $mgsen\theta$ B) $mgsen^2\theta$ C) $mgcos^2\theta$
D) $\left(\frac{mg}{2}\right)sen2\theta$ E) $\left(\frac{mg}{2}\right)sen^2\theta$

81. Una placa de 10 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Un bloque de 5 kg se lanza horizontalmente sobre la placa con una rapidez de 1,2 m/s y al cabo de 0,2 s de desplazamiento su rapidez se iguala con la de la placa. ¿A qué distancia del extremo A de la placa se encuentra en ese instante el bloque?

A) 0,6 m
B) 0,8 m
C) 1 m
D) 1,2 m
E) 1,68 m



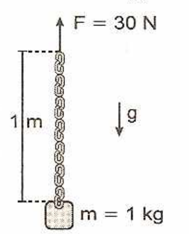
82. ¿En que relación se encuentran los módulos de las aceleraciones en los siguientes casos? ($m = 2\ kg$; $g = 10\ m/s^2$)



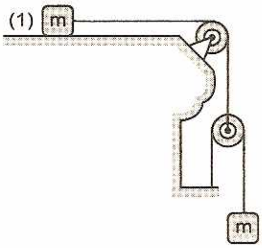
A) $2a_1 = a_2 = a_3$ B) $a_1 = 2a_2 = 3a_3$
C) $2a_1 = a_2 = 3a_3$ D) $3a_1 = a_2 = a_3$
E) $a_1 = a_2 = a_3$

83. Determine la tensión en la cadena homogénea de 1 kg a 20 cm de su extremo inferior ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 N
B) 6 N
C) 8 N
D) 10 N
E) 18 N

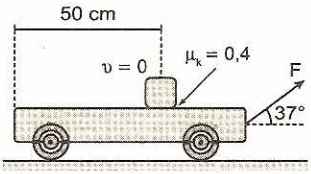


84. Si el sistema es abandonado en el instante mostrado, determine el módulo de la aceleración del bloque (1). Considere poleas ideales y superficies lisas ($g = 10\ m/s^2$)



A) $2\ m/s^2$ B) $2{,}5\ m/s^2$ C) $3\ m/s^2$
D) $3{,}5\ m/s^2$ E) $4\ m/s^2$

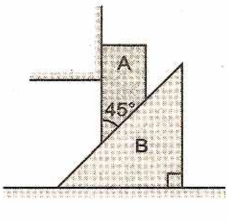
85. En el instante mostrado, el carrito en reposo de 3,2 kg es jalado con una fuerza F de 25 N. Si transcurridos "t" segundos el bloque de 1 kg cae al piso liso; determine "t".



A) 0,5 s B) 0,8 s C) 1 s
D) 1,2 s E) 1,4 s

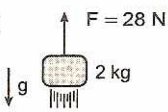
86. Si el sistema es abandonado en el instante mostrado, determine el módulo de la fuerza que le ejerce la pared al bloque A. Considere superficies lisas ($m_B = 2m_A = 6$ kg; $g = 10\ m/s^2$).

A) 6 N
B) 8 N
C) 10 N
D) 12 N
E) 20 N

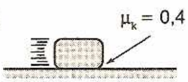


87. A partir del siguiente gráfico, calcule la relación de los módulos de las aceleraciones en cada caso. ($g = 10\ m/s^2$).

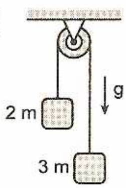
A)



B)

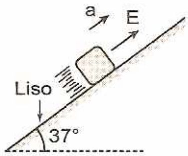


C)



A) $3a_A = 2a_B = a_C$ B) $a_A = a_B = a_C$
C) $2a_A = a_B = a_C$ D) $a_A = a_B = 2a_C$
E) $a_A = 2a_B = a_C$

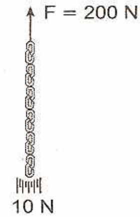
88. Si el bloque de 5 kg presenta una aceleración de módulo 4 m/s^2, calcule el módulo de la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre dicho bloque ($g = 10\ m/s^2$).



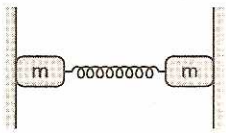
A) 40 N B) 50 N C) 30 N
D) 70 N E) 60 N

89. La cadena homogénea de 10 kg acelera por acción de la fuerza constante $\vec{F}$. Determine el módulo de la fuerza de tensión en el punto medio de la cadena ($g = 10\ m/s^2$).

A) 250 N
B) 150 N
C) 50 N
D) 200 N
E) 100 N

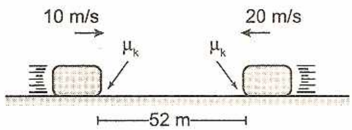


90. Se abandona el sistema compuesto de dos bloques idénticos. Determine el valor de la aceleración de dichos bloques si la deformación del resorte es 2 cm y este se mantiene horizontal. Considere que el coeficiente de rozamiento cinético entre los bloques y las superficies son iguales a 0,5.
($m = 10$ kg; $k = 50$ N/cm; $g = 10\ m/s^2$).



A) $2\ m/s^2$ B) $3\ m/s^2$ C) $4\ m/s^2$
D) $5\ m/s^2$ E) $6\ m/s^2$

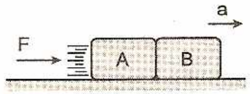
91. A partir del instante mostrado, determine el tiempo que demoran en encontrarse los bloques.
($\mu k = 0{,}2$; $g = 10\ m/s^2$).



A) 3 s B) 2 s C) 1 s
D) 4 s E) 5 s

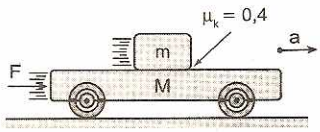
92. El sistema mostrado acelera hacia la derecha con $2\ m/s^2$. El coeficiente de rozamiento entre cada blo-

que y el piso es igual a 0,1. Determine el módulo de la fuerza $\vec{F}$ y el módulo de la fuerza entre los bloques ($m_A = 3$ kg; $m_B = 2$ kg; $g = 10$ m/s^2).



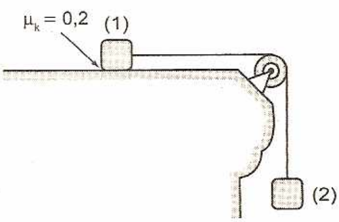
A) 6 N; 12 N B) 6 N; 10 N
C) 15 N; 6 N D) 6 N; 9 N
E) 3 N; 15 N

93. Determine el módulo de la máxima aceleración que puede adquirir la plataforma para que el bloque no deslice ($g = 10$ m/s^2).



A) 2 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 6 m/s^2
D) 8 m/s^2 E) 10 m/s^2

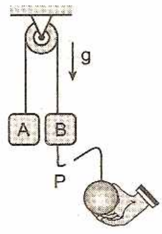
94. Determine la rapidez del bloque (1) cuando el bloque (2) desciende 50 cm a partir del instante mostrado en que los bloques son abandonados ($m_1 = m_2 = 4$ kg; $g = 10$ m/s^2).



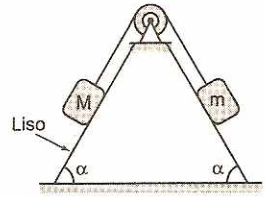
A) 2 m/s B) 1 m/s C) 5 m/s
D) 4 m/s E) 2,5 m/s

95. El sistema mostrado esta en reposo. Si en P suspendemos la esfera de 2 kg y el sistema acelera con 2,5 m/s^2, ¿Cuál es la masa del bloque A? ($g = 10$ m/s^2).

A) 1 kg
B) 1,5 kg
C) 2,5 kg
D) 3 kg
E) 4 kg

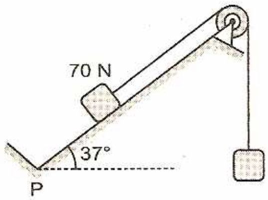


96. En el sistema, la aceleración de los bloques es g/4. Determine la medida del ángulo (M = 3m, g es aceleración de la gravedad).



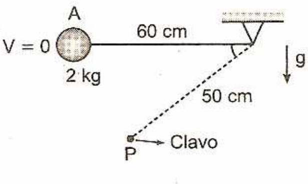
A) 60° B) 45° C) 30°
D) 53° E) 74°

97. El sistema se abandona en la posición mostrada. Si el bloque de 7 kg llega a P luego de 5 s, determine el máximo ascenso que alcanza el bloque de 1 kg. Desprecie el rozamiento ($g = 10$ m/s^2).



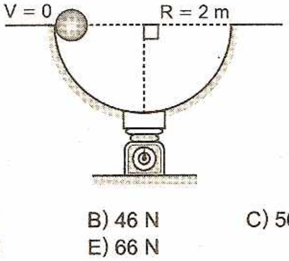
A) 20 m B) 30 m C) 40 m
D) 50 m E) 70 m

98. Una esfera pequeña es soltada en A. Determine el módulo de la tensión en la cuerda en el instante que la esfera pase por su posición más baja, siendo su rapidez en este momento $2\sqrt{2}$ m/s ($g = 10$ m/s^2).



A) 80 N B) 100 N C) 120 N
D) 160 N E) 180 N

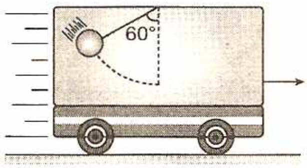
99. Una esfera de 2 kg se suelta en la posición mostrada. Determine la lectura de la balanza colocada en la parte inferior, si la esfera pasa por esta posición con $2\sqrt{10}$ m/s ($g = 10$ m/s^2).



A) 36 N B) 46 N C) 56 N
D) 60 N E) 66 N

100. El coche mostrado es desplazado con rapidez constante y dentro de él, una esfera oscila. Si, en el instante mostrado la fuerza de gravedad y la ten-

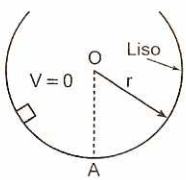
sión que afectan a la esfera son de igual modulo, determine el módulo de la aceleración de dicha esfera. ($g = 10\ m/s^2$).



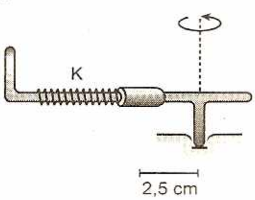
A) $5\ m/s^2$ B) $10\ m/s^2$ C) $8\ m/s^2$
D) $15\ m/s^2$ E) $20\ m/s^2$

101. Un pequeño bloque de 2,5 kg se suelta en la posición mostrada, cuando pasa por A, este ejerce sobre la superficie cilíndrica una fuerza de módulo 41 N; determine su rapidez en ese instante.
($r = 2,5\ m$; $g = 10\ m/s^2$).

A) 5 m/s
B) 3 m/s
C) 4 m/s
D) 6 m/s
E) 2 m/s

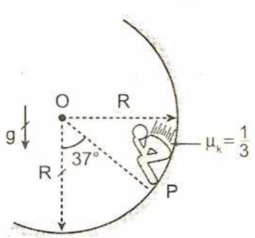


102. Se muestra un collarín, unido a un sistema que rota con rapidez angular constante. El resorte esta deformado 0,5 cm. Si lentamente duplicamos la rapidez angular; ¿Qué deformación presentara ahora el resorte?



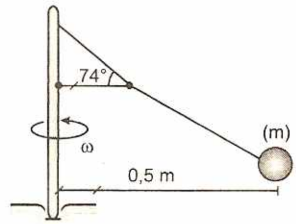
A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm
D) 8 cm E) 10 cm

103. Un niño de 25 kg desliza sobre una superficie esférica, pasando por P con una rapidez de 4 m/s. Determine en ese instante el módulo de su aceleración ($g = 10\ m/s^2$; $R = 4\ m$).



A) $2\ m/s^2$ B) $2\sqrt{5}\ m/s^2$ C) $4\ m/s^2$
D) $4\sqrt{2}\ m/s^2$ E) $5\ m/s^2$

104. El sistema que se muestra rota con rapidez angular constante de $4\sqrt{5/3}$ rad/s. Determine el módulo de la fuerza de tensión en el hilo horizontal.
($m = 3,6\ kg$; $g = 10\ m/s^2$).



A) 60 N B) 50 N C) 44,5 N
D) 40 N E) 37,5 N

105. Un objeto atado a un hilo se hace girar en una circunferencia (en un plano vertical) de radio R. ¿Con que rapidez angular constante debe girar para que la cuerda permanezca tirante?

A) $\omega > \left(\frac{R}{g}\right)^{1/3}$ B) $\omega > \left(\frac{g}{R}\right)^{1/2}$ C) $\omega > \left(\frac{g}{R}\right)^{1/2}$

D) $\omega > \left(\frac{g}{R}\right)^{1/3}$ E) $\omega > \left(\frac{g}{R}\right)^{2}$

106. Un manguito A puede deslizarse libremente a lo largo de un anillo liso de radio R. El sistema se hace rotar alrededor del eje OO' vertical con una rapidez angular ω. Halle la medida del ángulo θ correspondiente a la posición estable del manguito. (g: aceleración de la gravedad).

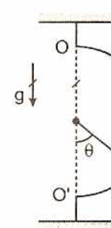
A) $\arctan\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$

B) $\text{arcsen}\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)$

C) $\text{arcsen}\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)$



107. Sobre la superficie interna de una esfera hueca de 2,5 m de radio que rota con una rapidez angular mínima de $\sqrt{5}$ rad/s, se halla un pequeño bloque. Determine los valores de ω de manera que el bloque no resbale. ($g = 10\ m/s^2$).

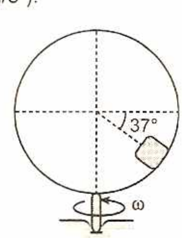
A) $\sqrt{5} < \omega \leq \sqrt{34}$

B) $\sqrt{5} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{155}{17}}$

C) $\sqrt{5} < \omega < \sqrt{\frac{155}{17}}$

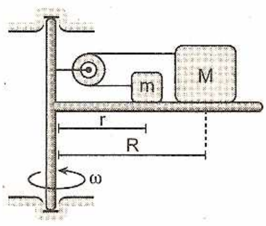
D) $\sqrt{5} \leq \omega < \sqrt{35}$

E) $\sqrt{5} \leq \omega < \sqrt{55}$



108. En la figura el sistema rota con una velocidad angular ω. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu_s = 0,5$ para todas las superficies, determine ω para que M no resbale.
($M = 4$ m; $R = 2r = 0,5$ m)

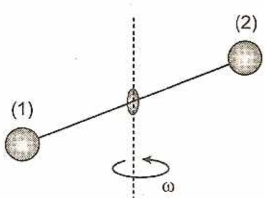
A) $\omega \leq \sqrt{\frac{20}{3}}$ rad/s
B) $\omega = \sqrt{\frac{80}{3}}$ rad/s
C) $\omega \leq \sqrt{\frac{80}{3}}$ rad/s
D) $\omega = \sqrt{\frac{20}{3}}$ rad/s
E) $\omega \leq \frac{10}{\sqrt{7}}$ rad/s



109. Dos pequeñas esferas están unidas por un hilo de 4 m de longitud y se mueven sobre una superficie horizontal lisa. En cierto instante la esfera (1) quedó inmóvil y la rapidez de (2) fue 3 m/s. Determine en ese instante el módulo de la tensión en el hilo ($m_1 = 2m_2 = 4$ kg).

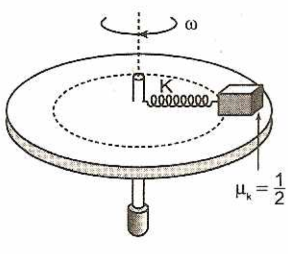
A) 1 N B) 2 N C) 4 N
D) 4,5 N E) 6 N

110. El sistema que se muestra rota con rapidez angular constante ω alrededor de un eje que pasa por el centro de la varilla ideal de longitud L. Determine la medida del ángulo que forman la varilla y el eje de rotación.
($m_1 = 4m_2$; $L = 2,5$ m; $g = 10$ m/s^2; $\omega = 2$rad/s).



A) 16° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 74°

111. En la figura se muestra un sistema rotado en forma uniforme. Si el resorte de 45 cm de longitud natural se encuentra deformado 10 cm ¿Qué valor máximo toma ω de tal modo que el bloque de 8 kg no deslice sobre la plataforma?
($g = 10$ m/s^2; $k = 40$ N/cm).



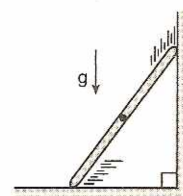
A) 5 rad/s B) 10 rad/s C) 15 rad/s
D) 20 rad/s E) 25 rad/s

112. Un bloque pequeño se encuentra sobre una plataforma que rota a una distancia de 30 cm del centro de giro. Determine la máxima rapidez angular, tal que dicho bloque no resbale (la plataforma forma 16° con la horizontal y el eje de rotación es vertical, $\mu_s = \frac{4}{3}$; $g = 10$ m/s^2).

A) $\frac{8}{3}$ rad/s B) 6 rad/s C) 5 rad/s
D) 20 rad/s E) 12 rad/s

113. Se muestra una barra rígida y homogénea de longitud L, la cual en su punto medio lleva una pequeña argolla de masa "m". Si el extremo inferior de la barra se traslada con velocidad constante "v"; ¿Qué fuerza ejerce la argolla sobre la barra, en el instante mostrado?

A) $m\left(g - \frac{v^2}{2L}\sec^3\theta\right)$
B) $m\left(g + \frac{v^2}{2L}\sec^3\theta\right)$
C) $m\left(g + \frac{v^2}{2L}\right)$
D) $m\left(g + \frac{v^2}{L}\text{sen}^2\theta\right)$
E) $mg\cos\theta$

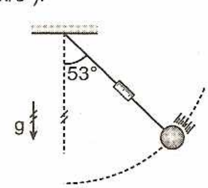


114. ¿En cuánto disminuirá el peso de un auto en el punto superior de un puente convexo? El radio de curvatura del puente es 100 m, la masa del auto es 2000 kg y su rapidez en la parte alta es 54 km/h.

A) 4000 N B) 4500 N C) 5600 N
D) 3600 N E) 6400 N

115. Una pequeña esfera de 5 kg describe una trayectoria circunferencial en un plano vertical. Si en el instante mostrado el dinamómetro ideal indica 70 N, determine el módulo de su aceleración en ese instante ($g = 10$ m/s^2).

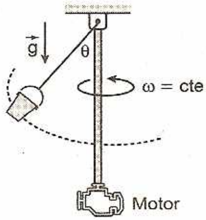
A) 4 m/s^2
B) 11,3 m/s^2
C) 7 m/s^2
D) 8 m/s^2
E) 14 m/s^2



116. Una esfera de 1 kg está girando con rapidez constante de 6 m/s, describiendo una circunferencia de 0,5 m de radio sobre una mesa lisa. ¿En cuánto varia el módulo de la tensión, en el hilo que sujeta la esfera, cuando hace contacto con un clavo situado a 20 cm del centro de giro inicial?

A) 20 N B) 120 N C) 48 N
D) 72 N E) 36 N

117. El sistema mostrado rota con rapidez angular constante debido al motor. Si de repente el balde con agua se raja, entonces.

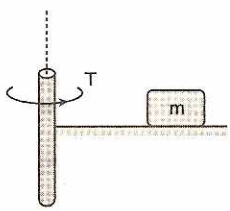


I. La rapidez angular del balde aumenta.
II. El módulo de la tensión en la cuerda se mantiene constante.
III. El ángulo θ disminuye.
IV. El radio de giro se mantiene constante.

Luego, son afirmaciones verdaderas.

A) I y II. B) Solo I. C) Solo II.
D) I, II y III. E) Ninguna.

118. El bloque de masa "m" se ubica sobre la plataforma rígidamente unida al eje que rota. Señale la proposición incorrecta.



A) Si ω = cte y no hay fricción, entonces "m" no gira.
B) Si ω = cte, "m" tiende a salir radialmente cuando hay fricción.
C) Si ω aumenta, "m" tiene a salir radial y tangencialmente cuando hay fricción.
D) Si ω disminuye, "m" tratará de abandonar la plataforma en la dirección radial y tangencial.
E) Si ω aumenta, la fuerza de rozamiento estático disminuye y su dirección será radial.

119. Un bloque cúbico descansa a 2 m del centro de una plataforma de radio 3 m que inicialmente esta en reposo. La plataforma comienza a acelerar a razón de 1,5 rad/s^2 entorno al eje vertical que pasa por su centro. ¿Al cabo de que tiempo el bloque comienza a deslizarse sobre la plataforma? El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la plataforma es 0,5 ($g = 10$ m/s^2).

A) $\sqrt{2}$ s B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ s C) $\sqrt{5}$ s
D) 1 s E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ s

120. Un ciclista va por una pista horizontal de radio R, en la cual el coeficiente de fricción depende solo de la distancia "r" hasta su centro O segundo la ley $\mu = k(1 - r/R)$; donde "k" es una constante. Halle el radio de la circunferencia con centro O, por la que el ciclista puede moverse con la máxima rapidez.

A) R/5 B) R/3 C) R/2
D) kR/2 E) kR/3

CLAVES

1. C	16. D	31. D	46. A	61. D	76. D	91. B	106. D
2. E	17. B	32. A	47. C	62. E	77. B	92. C	107. B
3. D	18. A	33. C	48. E	63. C	78. B	93. B	108. E
4. D	19. B	34. A	49. D	64. D	79. B	94. A	109. E
5. E	20. E	35. C	50. B	65. B	80. E	95. D	110. C
6. A	21. B	36. B	51. D	66. C	81. E	96. C	111. B
7. C	22. D	37. C	52. C	67. D	82. A	97. E	112. C
8. D	23. B	38. B	53. C	68. C	83. E	98. E	113. A
9. C	24. A	39. C	54. C	69. C	84. E	99. D	114. B
10. B	25. C	40. E	55. E	70. A	85. C	100. B	115. B
11. E	26. E	41. D	56. B	71. B	86. E	101. C	116. C
12. A	27. B	42. E	57. C	72. B	87. D	102. D	117. E
13. D	28. E	43. B	58. C	73. C	88. B	103. B	118. E
14. B	29. B	44. C	59. D	74. D	89. E	104. E	119. B
15. E	30. B	45. C	60. C	75. C	90. D	105. C	120. C

Trabajo y potencia

06 capítulo

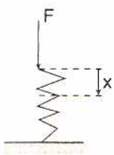
James Watt (Greenock, Escocia, 30 de enero de 1736-Handsworth, Inglaterra, 25 de agosto de 1819) fue un ingeniero mecánico e inventor escocés. Las mejoras que realizó en la máquina de Newcomen dieron lugar a la conocida máquina de vapor de agua, que resultaría fundamental en el desarrollo de la primera Revolución industrial, tanto en Inglaterra como en el resto del mundo. Mientras trabajaba fabricando instrumentos en la Universidad de Glasgow, Watt se interesó en la tecnología de las máquinas de vapor y se percató de que los diseños coetáneos desperdiciaban una gran cantidad de energía enfriando y calentando repetidamente el cilindro. Así, introdujo una mejora en el diseño, el condensador separado, que evitaba la pérdida de energía y mejoró radicalmente la potencia, eficiencia y rentabilidad de las máquinas de vapor. La unidad de potencia del Sistema Internacional de Unidades, el vatio (W) fue nombrada en su honor.

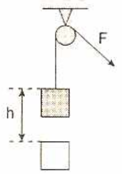
Watt intentó comercializar su invento, pero encontró muchas dificultades financieras hasta que se asoció con Matthew Boulton en 1775. La nueva firma Boulton & Watt llegó a tener gran éxito y ambos se enriquecieron. Una vez jubilado, Watt continuó inventando, pero ninguna de sus últimas creaciones fue tan destacada.

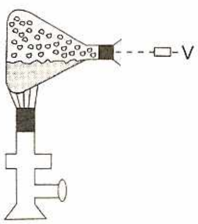
Fuente: Wikipedia

⧏ CONCEPTOS

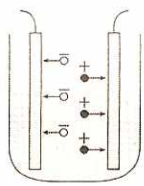
1. El trabajo existe en muchas formas, mientras que el calor solo en una. En el trabajo de cualquier forma siempre participan dos: el sistema y la fuente de trabajo.
   Por ejemplo: La mano del hombre (la fuente de trabajo) comprime un resorte (el sistema), eleva un bloque de cierta masa (el sistema). El agua en un matraz (la fuente de trabajo), que se dilata al vaporizarse, vence la inercia del tapón (el sistema); el tapón, que inicialmente se encuentra en reposo, adquiere velocidad.



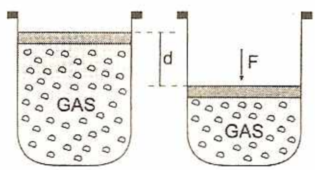




2. El término trabajo fue introducido en la Física por primera vez en el año 1826, por el ingeniero militar francés J. Poncelet (1788 - 1867).
3. Realizar trabajo mecánico significa vencer o eliminar resistencia, tales como la fuerza de gravedad, las fuerzas moleculares, la inercia de la materia, la fuerza elástica en los resortes, la fuerza de fricción, la fuerza eléctrica, etc.
4. Desgastar un cuerpo, rectificarlo, dividirlo en partes, elevar bloques, arrastrar un carro por la carretera, comprimir un resorte, todo esto significa realizar trabajo, significa vencer en cierto intervalo de tiempo una resistencia que se restablece continuamente.
5. Más ejemplos: realizar trabajo significa vencer la presión de un gas, líquido, cristal. Comprimir un gas, líquido, o cristal significa realizar trabajo. Vencer la fuerza electromotriz de un acumulador (pila o batería) significa realizar trabajo. Cargar un condensador o capacitador significa realizar trabajo.
6. Todos los fenómenos semejantes como: elevación de bloques, compresión del gas, desplazamiento de un carro, compresión de un resorte, cargar un condensador, han sido denominados con una sola palabra: trabajo.
7. El trabajo está relacionado con la superación de resistencia. No importa, que es lo que crea y que es lo que vence la resistencia.
8. La resistencia se vence durante el movimiento, el bloque se eleva, el carro se mueve, los portadores de carga eléctrica se desplazan en determinada dirección.
9. Durante el movimiento sin superación de resistencia, no hay trabajo. No importa que movimiento es, lo esencial es el propio movimiento.
10. El trabajo está relacionado no con cualquier movimiento, sino solo con el movimiento ordenado. Toda la masa del bloque se eleva. Todo el émbolo se desplaza en el cilindro en una dirección. Todo el carro se mueve por la carretera en una misma dirección. Al cargar la pila o batería (acumulador) las partículas cargadas con el mismo signo (iones positivos o negativos) se mueven en la misma dirección. Al comprimir el gas, en movimiento ordenado de todo el gas en una determinada dirección se sobrepone al movimiento caótico. El movimiento ordenado de las partículas se sobrepone a su movimiento caótico.
11. Para el trabajo siempre se necesitan dos participantes:
    a) Uno que crea la resistencia,
    b) y el otro la vence.



MOVIMIENTO DE IONES
(movimiento ordenado)



Estado Inicial   Estado Final

12. La mano del hombre ejerce una fuerza F sobre el émbolo, lo desplaza en el cilindro y comprime el gas, venciendo la resistencia.
13. Las participantes pueden cambiar de papel. El gas se expansiona y vence la presión que ejerce la mano del hombre que impide la expansión. No importa qué participantes son, es necesario que ellos sean dos.
14. Definitivamente: El trabajo es la transmisión del movimiento ordenado de un participante a otro con superación de resistencia.

TRABAJO MECÁNICO

Consideremos un cuerpo que es arrastrado sobre una mesa horizontal, sometido a la acción de una fuerza F (figura 6.1). Supongamos que F es constante y que el cuerpo se desplaza una distancia d, siendo θ el ángulo entre $\vec{F}$ y la dirección del desplazamiento del cuerpo.

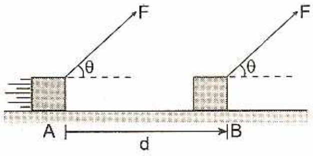
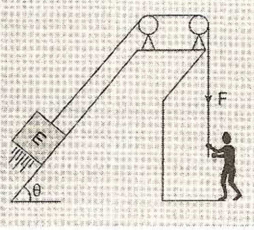


Fig. 6.1

$$\boxed{W^F = Fd\cos\theta} \qquad ...(6.1)$$

El trabajo realizado por la fuerza constante $\vec{F}$, que forma con el desplazamiento $\vec{d}$ un ángulo θ, se obtiene aplicando la ecuación (6.1).

Trabajo:
Realizar trabajo mecánico significa vencer o superar una resistencia, por consiguiente el cuerpo está en movimiento.
El trabajo mecánico es una magnitud física escalar, tiene módulo afectado por un signo que puede ser positivo o negativo.



La unidad de trabajo se denomina *joule* (símbolo: J) en honor al físico inglés del siglo XIX, James Prescott Joule, quien elaboró diversos trabajos en el campo de estudio de la energía. Entonces: 1 Nm = 1 *joule* = 1 J

Casos particulares

1. Las fuerzas perpendiculares al movimiento no realizan trabajo. En la ecuación 6.1, si θ = 90°, entonces: $W^F = 0$, como indica la figura 6.2.a.
2. Las fuerzas que tienen sentido opuesto al movimiento realizan trabajo negativo. En la ecuación 6.1 si, θ = 180°, entonces: $W^F = -Fd$, como indica la figura 6.2.b.

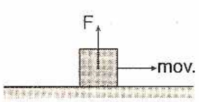


Fig. 6.2.a

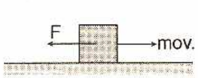


Fig. 6.2.b

3. Las fuerzas que tienen la misma dirección y sentido del movimiento realizan trabajo positivo. En la ecuación 6.1, si θ = 0°, entonces: $W^F = +Fd$, como indica la figura 6.3.a.

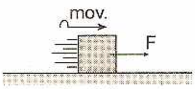


Fig. 6.3.a

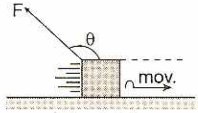


Fig. 6.3.b

4. Si la fuerza $\vec{F}$ y la dirección del vector desplazamiento forman un ángulo obtuso (90° < θ < 180°) entonces el trabajo realizado por la fuerza tiene signo negativo. El signo negativo significa que la fuerza $\vec{F}$ se opone al movimiento del bloque como indica la figura 6.3.b.

Influencia del ángulo (θ)

Otra manera de calcular el trabajo que desarrolla una fuerza $\vec{F}$ constante, es descomponer la fuerza como indica la figura 6.4.b:

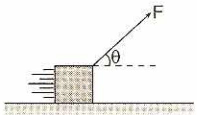


Fig. 6.4.a

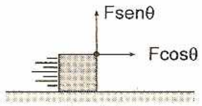


Fig. 6.4.b

a) La fuerza perpendicular al movimiento no realiza trabajo:

$$\boxed{W^{F\text{sen}\theta} = 0} \qquad ...(6.2)$$

b) La fuerza que tiene igual dirección y sentido del movimiento realiza trabajo positivo:

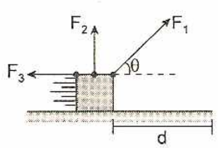
$$\boxed{W^{F\cos\theta} = (F\cos\theta)d = Fd\cos\theta} \qquad ...(6.3)$$

Trabajo neto o total

Cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento, el trabajo neto es el que desarrolla la fuerza resultante o es la suma de los trabajos efectuados por cada una de las fuerzas.

$$W_{NETO} = F_R d \quad \text{o} \quad W_{NETO} = W_1 + W_2 + W_3 + ...$$

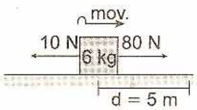
Es la suma algebraica (considerando el signo) de los trabajos parciales: W_1, W_2, W_3, ..., efectuado por cada una de estas fuerzas, que también es igual al trabajo realizado por la resultante de las fuerzas: F_1, F_2, F_3, ... etc.



- Si el trabajo neto es positivo el movimiento es acelerado.
- Si el trabajo neto es negativo el movimiento es retardado.
- Si el trabajo neto es nulo el movimiento es con rapidez constante en módulo.

Ejemplo:

Hallar el trabajo neto desde A hasta B en el gráfico mostrado. No existe rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



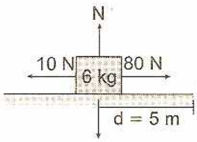
Resolución:

En el eje horizontal:

$W_{NETO} = F_R d$

$W_{NETO} = (80 - 10)5$

$W_{NETO} = 350$ J



Trabajo realizado por el peso

El trabajo realizado por el peso, F = mg, es independiente del camino que sigue el cuerpo durante el movimiento, solo es necesario conocer el desplazamiento vertical. El peso es una fuerza constante, para desplazamientos pequeños comparado con el radio de la Tierra. ($R_{Tierra} = 6400$ km).

$$\boxed{W^F = Fd = (mg)h} \qquad ...(6.4)$$

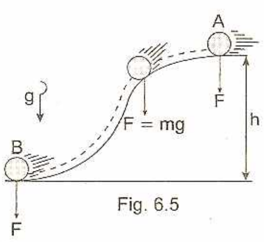


Fig. 6.5

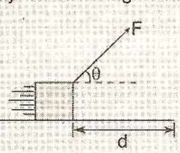
Como puede observarse en la ecuación 6.4, no interesa el desplazamiento del cuerpo en la dirección horizontal.

Observación

En la definición de trabajo se incluyen dos cantidades vectoriales (fuerza y desplazamiento). Pero en la ecuación:

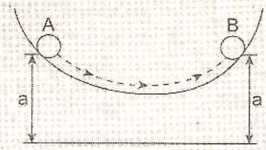
$$W^F = Fd\cos\theta$$

Intervienen únicamente los módulos de dichas cantidades, el trabajo es una magnitud escalar.



Trabajo nulo

Cuando el cuerpo se desplaza de A hasta B siguiendo el camino curvilíneo, no experimenta desplazamiento en el eje vertical por consiguiente el trabajo que realiza el peso desde A hasta B es igual a cero.



Ejemplo:

En la figura 6.6, el bloque de peso 15 N resbala sobre el plano inclinado desde A hasta B. Calcula el trabajo realizado por el peso desde A hasta B.

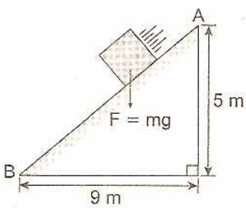


Fig. 6.6

Resolución:

Cuando el bloque se desplaza de A hasta B, el desplazamiento en la vertical es h = 5 m y la fuerza constante es: $F = 15\ N \Rightarrow W^F = Fd$

$\Rightarrow W^F = (15)(5) = 75$ J

Gráfica fuerza versus posición (F-x)

La figura 6.7 muestra la variación de la fuerza $\vec{F}$ en módulo con la posición en el eje x. El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es igual al área bajo la recta entre dos puntos de su trayectoria.

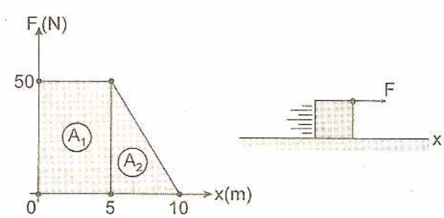


Fig. 6.7

Ejemplo:

En la figura 6.7 calcular el trabajo neto desde x = 0 hasta x = 10 m.

Resolución:

a) Cuando el bloque se desplaza de x = 0 hasta x = 5 m, la fuerza es constante e igual a 50 N, por consiguiente el trabajo es:

$W_1 = A_1 = (50)(5) \Rightarrow W_1 = A_1 = 250$ J

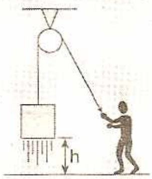
b) Cuando el bloque se desplaza desde $x = 5$ m hasta $x = 10$ m, la fuerza disminuye en módulo desde 50 N hasta 0.
El trabajo es:

$$W_2 = A_2 = \frac{bh}{2} = \frac{(5)(50)}{2} \Rightarrow W_2 = A_2 = 125 \text{ J}$$

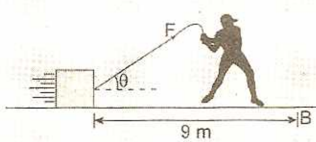
c) Cuando el bloque se desplaza desde $x = 0$ hasta $x = 10$ m, el trabajo es igual a la suma de las áreas A_1 y A_2: $W^F = A_1 + A_2 = 250 \text{ J} + 125 \text{ J} = 375 \text{ J}$

Significado físico de trabajo

Realizar trabajo mecánico significa vencer resistencias, tales como la fuerza de rozamiento, la fuerza de los resortes, la fuerza de gravedad, la inercia de la materia, etc.



Desgastar un cuerpo, rectificarlo, dividirlo en partes, elevar cargas, arrastrar un carro por la carretera, comprimir un resorte, todo esto significa realizar trabajo, significa vencer en cierto intervalo de tiempo una resistencia que se restablece continuamente.



Ejemplo:

La figura 6.8 muestra un bloque sometido a la acción de dos fuerzas de módulo:
$F_1 = 50$ N y $F_2 = 80$ N. Calcula el trabajo realizado por cada fuerza para un desplazamiento de 20 m.

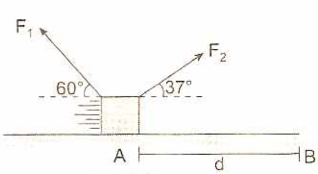


Fig. 6.8

Resolución:

Calculemos el trabajo realizado por la fuerza F_1. Podemos observar que el ángulo que forma el vector $\vec{F}_1$ con el desplazamiento $\vec{d}$ es igual a 120°, entonces en la ecuación 6.1 será:
$W^{F1} = F_1 d(\cos 120°) = (50)(20)(-1/2) = -500 \text{ J}$

El signo negativo indica que la fuerza F_1 se opone al movimiento del bloque.

- Para determinar el trabajo realizado por la fuerza F_2, reemplazamos en la ecuación 6.1:
$W^{F2} = F_2 d(\cos 37°) = (80)(20)(4/5) \Rightarrow W^{F2} = 1280 \text{ J}$

- El trabajo total realizado por las fuerzas F_1 y F_2 es igual a la suma algebraica de los trabajos parciales:
$W^{Total} = -500 + 1280 = 780 \text{ J}$

Recuerda:

$\cos 120° = -\cos 60° = -1/2$

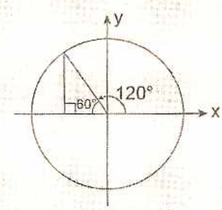
En general, si θ pertenece al II cuadrante, se cumple que: $\cos\theta = -\cos(180° - \theta)$

$\cos 127° = -\cos 53° = -\frac{3}{5}$;

$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 143° = -\cos 37° = -\frac{4}{5}$;

$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

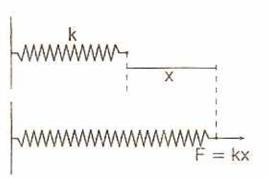


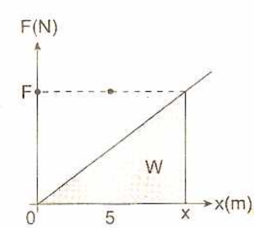
Trabajo mecánico

Consiste en vencer una resistencia comunicándole un movimiento. El rozamiento, el peso y la inercia son las resistencias más frecuentes.

Trabajo de una fuerza variable

Trabajo en un resorte. La fuerza deformadora varía linealmente de acuerdo a la ley de Hooke.

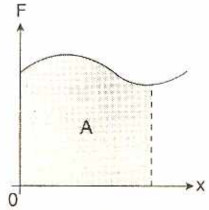




En la figura fuerza (F) versus posición (x), se cumple que el área bajo la gráfica representa el trabajo realizado.

$$W = \text{Área} = \frac{bh}{2} \Rightarrow W = \frac{F_x}{2}$$

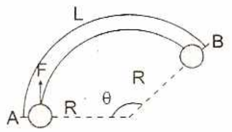
En general, en el gráfico fuerza (F) versus posición (x), se verifica que el área bajo la curva coincide con el trabajo realizado por dicha fuerza.



W = Área = A

Fuerza tangente de módulo constante a una circunferencia.

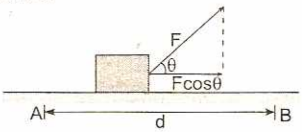
$W = F_{tangente}L$



L: Longitud del arco

Trabajo de una fuerza constante

Es una magnitud escalar, cuyo valor se halla con el producto de la fuerza paralela al desplazamiento por el desplazamiento.



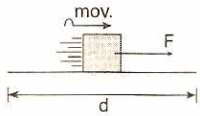
$W = Fd\cos\theta$

Casos particulares

a) $\theta = 0°$

Cuando entre la fuerza y el desplazamiento el ángulo es cero grados.

$W = Fd\cos 0°$

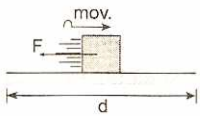


$W = Fd$

b) $\theta = 180°$

Cuando entre la fuerza y el desplazamiento el ángulo es 180°.

$W = Fd\cos 180°$

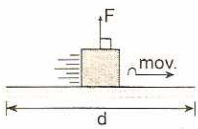


$W = -Fd$

c) $\theta = 90°$

Cuando entre la fuerza y el desplazamiento el ángulo es 90°.

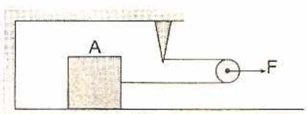
$W = Fd\cos 90°$



$W = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el trabajo realizado por la fuerza constante F para un desplazamiento del bloque A igual a 15 m. El bloque acelera desde el reposo. Donde F = 50 N.



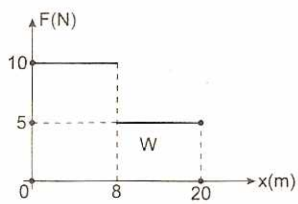
Resolución:

Cuando el bloque A se desplaza 15 m, analizando cinemáticamente, la polea móvil se desplaza 7,5 m. Por consiguiente la fuerza F aplicada sobre la polea experimenta un desplazamiento d = 7,5 m.

$W^F = Fd$

$W^F = (50)(7{,}5) \quad \therefore W^F = 375$ J

2. La fuerza horizontal actúa sobre un cuerpo tal como indica el siguiente gráfico fuerza versus desplazamiento. Determinar el trabajo realizado por la fuerza en los primeros 20 m sobre el eje x.



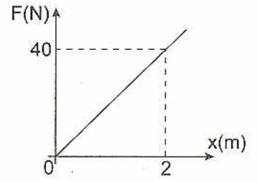
Resolución:

El trabajo realizado es igual a la suma de áreas:

$W^F = A_1 + A_2 = 8(10) + 12(5) = 80 + 60$

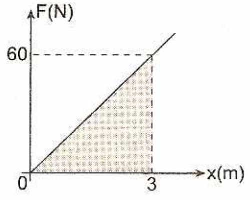
$\therefore W^F = 140$ J

3. A un resorte sin deformación (x = 0) se le aplica una fuerza que varia como muestra la figura. Calcular el trabajo neto realizado sobre el resorte hasta que su deformación sea x = 3 m.



Resolución:

En toda gráfica F−x el trabajo realizado por la fuerza F es igual al área bajo la recta, entre dos puntos de su posición:



$W^F = \frac{1}{2}bh$

$W^F = \frac{1}{2}(3)(60)$

$\therefore\ W^F = 90\ J$

4. Una cortina de ventana de peso 20 N y longitud 3 m se enrolla en forma de un rodillo sobre la ventana, ¿qué trabajo se realiza en este caso? Desprecie la fricción.

Resolución:

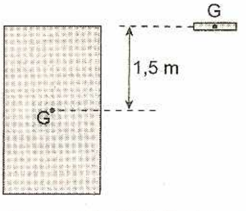
El trabajo realizado por el agente externo, es equivalente a elevar el centro de gravedad G una altura h igual a 1,5 m.

$W^{ext} = Fd$

$W^{ext} = mgh$

$W^{ext} = (20)(1,5)$

$\therefore\ W^{ext} = 30\ J$



5. Un obrero sostiene un bloque de 800 N de peso y sube por una escalera de 20 escalones, cada uno tiene longitud horizontal 25 cm y una altura de 15 cm. Hallar el trabajo realizado por el obrero.

Resolución:

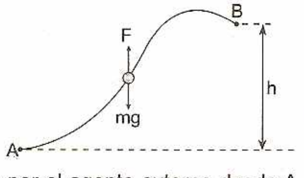
Para elevar el bloque con velocidad constante se aplica una fuerza F igual a su peso. El trabajo realizado por el agente externo será igual al producto de la fuerza por su desplazamiento vertical, es decir su altura h. Si F es vertical no realiza trabajo en la horizontal.

$W^F = Fh$

$W^F = mgh$

$W^F = (800)(3)$

$W^F = 2400\ J$



El trabajo realizado por el agente externo desde A hasta B es independiente del camino seguido.

6. Si una barra homogénea de 800 N de peso y 10 m de longitud se encuentra en posición horizontal, ¿qué trabajo es necesario realizar para ponerla en posición vertical?

Resolución:

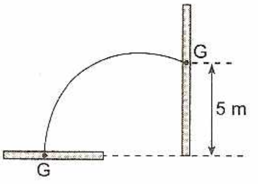
El trabajo realizado por el agente externo, es equivalente a elevar el centro de gravedad G una altura h igual a 5 metros.

$W^{ext} = Fd$

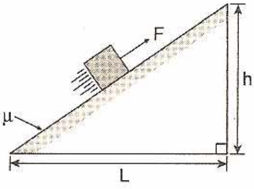
$W^{ext} = mgh$

$W^{ext} = (800)(5)$

$\therefore\ W^{ext} = 4\ kJ$



7. Actuando con la fuerza F dirigida siempre por la tangente a la trayectoria, hicieron subir lentamente sobre un plano inclinado un bloque de peso 50 N. Hallar el trabajo realizado por esta fuerza, si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y el plano es 0,2. Donde: h = 9 m y L = 40 m.



Resolución:

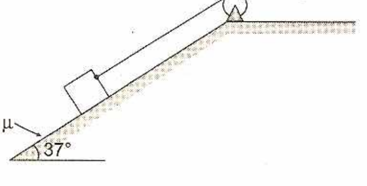
El trabajo realizado por la fuerza F sobre el bloque a través del plano inclinado tiene la siguiente forma:

$W^F = mg(h + \mu L)$

Reemplazando los datos: $W^F = 50[9 + 0,2(40)]$

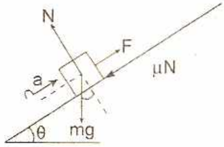
$\therefore\ W^F = 850\ J$

8. Si el bloque de 4 kg de masa que se muestra en la figura parte del reposo y se mueve por acción de la fuerza F = 62 N, determinar el trabajo neto realizado sobre el bloque transcurridos 4 segundos. Coeficiente de rozamiento cinético $\mu = 0,25$. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Haciendo el DCL del bloque en movimiento ascendente:



La fuerza resultante en el eje perpendicular al movimiento es igual a cero:

$N = mg\cos\theta$ ...(1)

Cálculo de la fuerza resultante en el eje del movimiento:

$F_R = F - mg\text{sen}\theta - \mu N$

$F_R = F - mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta$

Reemplazando los datos:

$F_R = 30\ N$ ...(2)

Cálculo de la aceleración mediante la segunda ley de Newton:

$a = \frac{F_R}{m} = \frac{30}{4} \Rightarrow a = 7{,}5\ m/s^2$ ...(3)

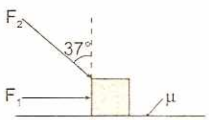
Cálculo del desplazamiento analizando cinemáticamente:

$d = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = 60\ m$ ...(4)

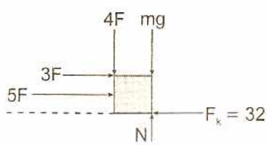
Cálculo del trabajo neto, reemplazando (2) y (4):

$W_{NETO} = F_R d = (30)(60) \quad \therefore\ W_{NETO} = 1{,}8\ kJ$

9. El bloque mostrado en la figura se mueve horizontalmente con velocidad constante por acción de las fuerzas F_1 y F_2 de igual módulo. Si cuando el bloque se encuentra en movimiento la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque es de 32 N, determinar el trabajo desarrollado por la fuerza F_1 cuando el bloque se desplaza 10 m.



Resolución:



Consideremos por comodidad: $F_1 = F_2 = 5F$. Si el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza resultante en el eje del movimiento es igual a cero:

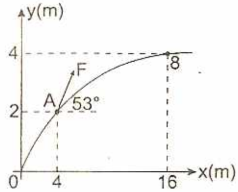
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 8F = 32\ N$

$F = 4\ N \ \wedge\ F_1 = 20\ N$

El trabajo realizado por la fuerza F_1 será:

$W^{F_1} = (20)(10) \quad \therefore\ W^{F_1} = 200\ J$

10. Hallar el trabajo realizado por la fuerza constante cuyo módulo es $F = 5\ N$ para llevar una partícula de la posición A hasta B a través de la trayectoria parabólica: $x = y^2$, que se muestra a continuación donde se indica también la dirección de la fuerza:



Resolución:

El trabajo realizado por una fuerza constante F no depende de la trayectoria que sigue, solo de las posiciones inicial A y final B. El trabajo realizado por $F = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, es igual a la suma de trabajos de las componentes en los ejes coordenados.

En el eje x: $W^x = (3)(12) = 36\ J$

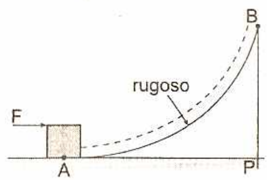
En el eje y: $W^y = (4)(2) = 8\ J$

El trabajo realizado por F es:

$W^F = W^x + W^y \quad \therefore\ W^F = 44\ J$

11. El bloque mostrado de 0,5 kg es desplazado desde A hasta B desarrollándose sobre este un trabajo neto de +15 J. Sabiendo que $\vec{F} = 20\hat{\imath}\ N$, hallar el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento desde A hasta B. ($g = 10\ m/s^2$)

Donde: $AP = 3\ m$ y $PB = 2\ m$.



Resolución:

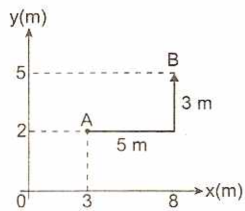
$W_{NETO} = W^F + W^{peso} + W^{fricción}$

$15 = 20(3) - 5(2) + W^{fricción} \quad \therefore\ W^{fricción} = -35\ J$

12. La fuerza $F = 3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$ actúa sobre un cuerpo 3 s, llevándolo desde el punto (3; 2) hacia el punto (8; 5). Determinar el trabajo realizado sobre dicho cuerpo. La fuerza está en newton y las coordenadas en metros.

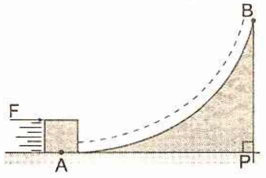
Resolución:

El trabajo realizado por F, es igual a la suma de trabajos realizados por las componentes en los ejes coordenados: A(3; 2) y B(8; 5).



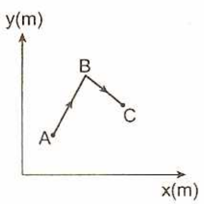
En el eje x: $W^x = (3)(5) = 15$ J
En el eje y: $W^y = (8)(3) = 24$ J
El trabajo realizado por F es:
$W^F = W^x + W^y \quad \therefore W^F = 39$ J

13. Determine el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F} = 50\hat{i}$ N al trasladar el bloque sobre la superficie lisa desde A hasta B. Donde: AP = 4 m y PB = 3 m.

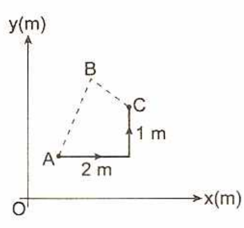


Resolución:
Cálculo de la fuerza y el desplazamiento:
$\vec{F} = (50; 0) \Rightarrow \vec{d}_{AB} = (4; 3)$
Apliquemos la fórmula general:
$W^F_{A\to B} = \vec{F}\vec{d} = (F_1; F_2)(x; y) = F_1x + F_2y$
$\therefore W^F_{A\to B} = 50(4) + 0(3) = 200$ J

14. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $F = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ al desplazar un cuerpo desde A hasta C siguiendo la trayectoria A → B → C de la figura. La fuerza está expresada en newtons y las coordenadas son: A(1; 1); B(2; 3); C(3; 2)



Resolución:
El trabajo realizado por una fuerza constante no depende de la trayectoria que se sigue, solo de las posiciones inicial A y final C. El trabajo realizado por F, es igual a la suma de trabajos por las componentes en los ejes coordenados.

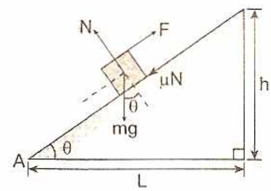


En el eje x: $W^x = (2)(2) = 4$ J
En el eje y: $W^y = (3)(1) = 3$ J
El trabajo realizado por F es:
$W^F = W^x + W^y \quad \therefore W^F = 7$ J

15. Una fuerza $\vec{F} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$ N actúa sobre un cuerpo durante 5 s, llevándolo desde la posición (4; 3) hasta (12; 9). Determinar el trabajo realizado por la fuerza. Las coordenadas están expresadas en metros.

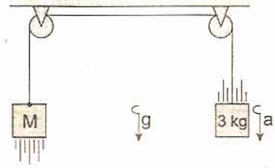
Resolución:
Cálculo de la fuerza y el desplazamiento:
$\vec{F} = 8\hat{i} + 6\hat{j} = (8; 6)$
$d_{AB} = (12; 9) - (4; 3) = (8; 6)$
$W^F_{A\to B} = \vec{F}\vec{d} = (F_1; F_2)(x; y) = F_1x + F_2y$
$W^F_{A\to B} = 8(8) + 6(6) = 64 + 36 = 100$ J

16. ¿Qué trabajo hay que realizar para subir un bloque de peso 100 N a través de un plano inclinado 37° con la horizontal una altura de 6 m? El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado disminuye linealmente desde 0,6 en la base, hasta 0,2 en la cumbre.



Resolución:
Para el cálculo se considera el coeficiente de rozamiento cinético promedio $\mu = 0{,}4$. Por comodidad consideramos a la fuerza externa F tangente al plano inclinado.
La fuerza resultante perpendicular al plano es igual a cero:
$N = mg\cos\theta$ ...(I)
Si consideramos que el bloque sube con velocidad constante, entonces de la primera ley de Newton, la fuerza resultante paralela al plano es igual a cero:
$F = mg\text{sen}\theta + \mu N$ ...(II)
Reemplazando (I) en (II) tenemos:
$F = mg(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)$
El trabajo realizado por el agente externo será:
$W^F = mg(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)d$
Donde: $d = AB \Rightarrow W^F = mg(h + \mu L)$
Reemplazando los datos: $W^F = 920$ J

17. El bloque de 3 kg desciende con una aceleración constante de 0,4 m/s^2. Determinar el trabajo neto sobre el bloque de 3 kg para un recorrido de 5 m. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

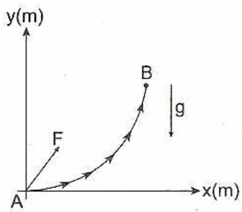
La fuerza resultante sobre el bloque de 3 kg es:

$F_R = ma = (3)(0,4) = 1,2$ N

Cálculo del trabajo neto:

$W_{NETO} = F_R d = (1,2)(5) = 6$ J

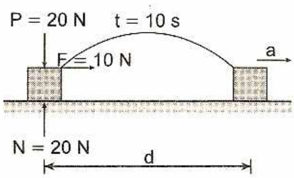
18. Calcular el trabajo total realizado por la fuerza constante $\vec{F} = (48; 36)$ N al trasladar una esfera de masa m del punto A(0; 0) hasta B(5; 3) m, siguiendo el camino mostrado.



Resolución:

- La componente horizontal de la fuerza sirve para vencer a la inercia (aumentar la velocidad):
  $F_x = 48$ N.
  El trabajo realizado es:
  $W^x = F_x dx = (48)(5) = 240$ J
- La componente vertical de la fuerza sirve para vencer a la fuerza de gravedad (peso): $F_y = 36$ N
  El trabajo realizado es:
  $W^y = F_y dy = (36)(3) = 108$ J
- El trabajo total es: $W^{total} = W^x + W^y = 348$ J
  $\therefore\ W^{total} = 348$ J

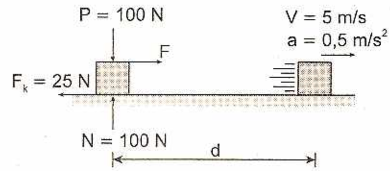
19. Un bloque de 2 kg está inicialmente en reposo en un plano horizontal sin fricción. Si se aplica una fuerza horizontal de 10 N por un tiempo de 10 s. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza?



Resolución:

- Cálculo de la aceleración, aplicando la 2.ª ley de Newton:
  $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{10}{2} = 5$ m/s^2
- Cálculo de la distancia, por cinemática:
  $d = v_o t + \dfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = 0 + \dfrac{1}{2}(5)(10)^2 = 250$ m
- Cálculo del trabajo realizado por la fuerza constante F: $W^F = Fd = (10)(250) = 2500$ J
  $\therefore\ W^F = 2,5$ kJ

20. Un cajón de 10 kg reposa sobre una plataforma horizontal áspera $\mu_k = 0,25$; sobre él se aplica una fuerza horizontal de modo que el cajón acelera a razón de 0,5 m/s^2. Hallar el trabajo de la fuerza aplicada hasta el instante en que la velocidad del cajón se hace 5 m/s. (g = 10 m/s^2)

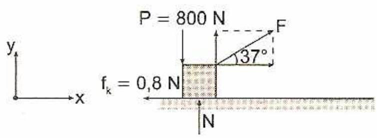


Resolución:

- Cálculo de la fuerza de rozamiento:
  $F_k = \mu_k N = (0,25)(100) = 25$ N
- Cálculo de la fuerza F, aplicando la 2.ª ley de Newton: $F_R = ma$
  $F - 25 = (10)(0,5) \Rightarrow F - 25 = 5$
  $\Rightarrow F = 30$ N
- Cálculo de la distancia, por cinemática:
  $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$
  $\Rightarrow 25 = 0 + 2(0,5)d \Rightarrow d = 25$ m
- Cálculo del trabajo realizado por la fuerza constante F: $W^F = Fd = (30)(25) = 750$ J
  $\therefore\ W^F = 750$ J

21. Mediante una cuerda cuyo ángulo de elevación es de 37° se arrastra sobre un plano horizontal rugoso $\mu_k = 0,8$ una carga de 80 kg a velocidad constante. Calcular el trabajo cada vez que se avanza 5 m. (g = 10 m/s^2)

Resolución:



Si el bloque se desplaza a velocidad constante, entonces existe equilibrio de fuerzas en los ejes x e y.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F(\cos 37°) = f_k \Rightarrow F\left(\dfrac{4}{5}\right) = 0,8N$

$\Rightarrow F = N$

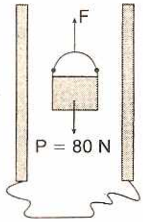
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F(\text{sen}37°) = 800$

$F + F\left(\dfrac{3}{5}\right) = 800$

$\Rightarrow F = 500$ N

- Cálculo del trabajo realizado por la fuerza constante F:
  $W^F = Fd(\cos 37°) = (500)(5)\left(\dfrac{4}{5}\right) = 2000$ J
  $\therefore\ W^F = 2$ kJ

22. Con un balde de 3 kg se debe extraer 5 litros de agua desde un pozo cuya profundidad es 6,5 m, a velocidad constante. Calcular el trabajo para tal evento.($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

En cada litro de agua existe 1 kg masa de agua. Entonces el peso neto (P) a levantar será:

$P = mg = (8)(10) = 80\ N$

Cálculo del trabajo realizado:

$W^F = Fd = (80)(6,5) = 520\ J$

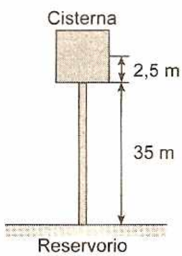
$\therefore\ W^F = 520\ J$

23. Calcular el trabajo hecho por una bomba centrífuga al llenar con agua la cisterna de 125 m^3 de capacidad ubicada en la azotea de un edificio de 35 m de alto. Considere la cisterna de forma cúbica. ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

La altura de la cisterna cúbica es 5 m. La distancia entre el reservorio y el centro de gravedad de la cisterna es 37,5 m. ($\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$)

El trabajo realizado por la bomba es:



$W = Fd = (mg)h$

$\Rightarrow W = (125\ 000)(10)(37,5)$

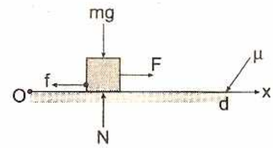
$W = 46,875 \times 10^6\ J \quad \therefore\ W = 46,875\ MJ$

24. Un bloque se desliza rectilíneamente sobre una superficie horizontal rugosa donde el coeficiente de rozamiento cinético depende del recorrido según la ecuación, $\mu = kx$, siendo k una constante. ¿Qué trabajo realiza el rozamiento sobre dicho bloque en un recorrido d? La masa del bloque es m.

Resolución:

Debido a que la variación del coeficiente de rozamiento es uniforme, entonces se considera la media, esto es:

$\mu_m = \frac{kx}{2}$



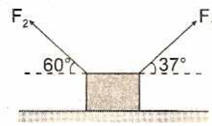
La normal es igual al peso (N = mg) y la fuerza de rozamiento promedio es: $f = \mu_m N = \frac{kx}{2}(mg)$

Para $x = d \Rightarrow f = \frac{kdmg}{2}$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$W^{Roz} = -fd = -\left(\frac{kdmg}{2}\right)d \quad \therefore\ W^{Roz} = -\frac{kd^2mg}{2}$

25. En la figura mostrada un bloque de peso 90 N, es sometido a la acción de un sistema de fuerzas, donde: $F_1 = 50\ N$ y $F_2 = 40\ N$. Calcular el trabajo que desarrolla F_2 para un recorrido d, sabiendo que F_1 realiza un trabajo de +400 J.



Resolución:

Cálculo de la distancia d: $W^{F1} = F_1 d\cos 37°$

$\Rightarrow 400 = (50)d\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow d = 10\ m$

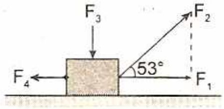
Cálculo del trabajo realizado por F_2:

$W^{F_2} = F_2 d\cos 120° \Rightarrow W^{F_2} = (40)(10)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ W^{F2} = -200\ J$

26. En la figura mostrada, un bloque de peso 40 N, es sometido a la acción de un sistema de fuerzas donde: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 20\ N$. Calcular el trabajo realizado por todas las fuerzas, sobre el cuerpo, para un desplazamiento de 5 m.

F_4: fricción cinética.



Resolución:

Las fuerzas perpendiculares al movimiento no realizan trabajo, por consiguiente, el peso, la normal y la fuerza F_3, no realizan trabajo. La suma de los trabajos realizados por las fuerzas F_1 y F_4 es igual a cero.

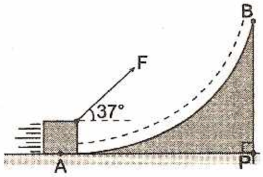
Luego:

$W_{NETO} = W^{F_2} \Rightarrow W_{NETO} = F_2 d\cos 53°$

$\Rightarrow W_{NETO} = (20)(5)(3/5) \quad \therefore\ W_{NETO} = 60\ J$

27. Determine el trabajo realizado por la fuerza constante $\vec{F} = 40\hat{i} + 30\hat{j}$ N al desplazar el bloque

sobre la superficie lisa desde A hasta B.
Donde: AP = 5 m y PB = 3 m.



Resolución:

El desplazamiento desde A hasta B es: $\vec{d} = (5; 3)$.

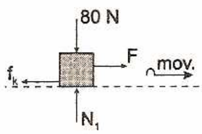
El trabajo hecho por F desde A hasta B es:

$W^F_{A\to B} = \vec{F}\vec{d} = (F_1;F_2)(x;\ y) = F_1x + F_2y$

$W^F = (40;30)(5;3) \Rightarrow W^F = (40)(5) + (30)(3)$

$\Rightarrow W^F = 200 + 90 \quad \therefore W^F = 290\ J$

28. Un bloque de masa 8 kg se empuja una distancia de 5 m sobre un plano horizontal, con coeficiente de rozamiento cinético 0,4, por una fuerza constante F paralela al plano a velocidad constante. Calcular el trabajo realizado por F. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Diagrama del cuerpo libre, del bloque:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 80 = mg$

$f_k = \mu_k N_1 = (0,4)(80) \Rightarrow f_k = 32\ N$

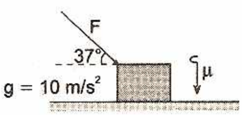
1.ª ley de Newton: Si el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza resultante es igual a cero.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f_k = 32\ N$

Trabajo realizado por F:

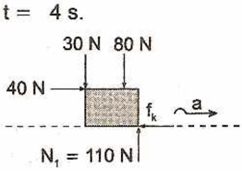
$W^F = Fd = (32)(5) \quad \therefore W^F = 160\ J$

29. Un bloque de peso 80 N se desplaza por acción de la fuerza F = 50 N. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético es 0,2 entre el bloque y el piso horizontal, determinar el trabajo realizado por F al cabo de 4 s de estar actuando. El bloque inicia su movimiento desde el reposo.



Resolución:

Cálculo del desplazamiento que experimenta el bloque en t = 4 s.



- $f_k = \mu N_1 = (0,2)(110) \Rightarrow f_k = 22\ N$
- $a = \frac{F_R}{m} = \frac{18}{8} \Rightarrow a = \frac{9}{4}\ m/s^2$
- $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)(16) \Rightarrow d = 18\ m$

Cálculo del trabajo realizado por F:

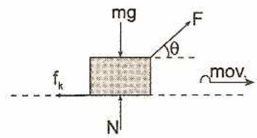
$W^F = Fd(\cos 37°)$

$W^F = (40)(18) \quad \therefore W^F = 720\ J$

30. Un muchacho jala un bloque sobre una superficie horizontal, en línea recta con velocidad constante. Sabiendo que la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque es 36 N, calcular el trabajo realizado por el muchacho cuando logra desplazar el bloque una distancia de 10 m.

Resolución:

Realizamos el DCL del bloque:



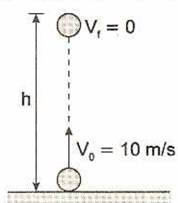
De la 1.ª ley de Newton: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F\cos\theta = f_k$

Luego: $F\cos\theta = 36\ N$

Cálculo del trabajo realizado: $W^F = Fd\cos\theta$

$W^F = (36)10 \quad \therefore W^F = 360\ J$

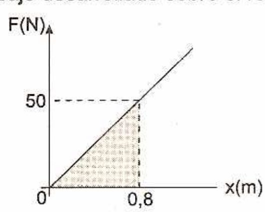
31. Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 0,5 kg con una rapidez de 10 m/s. Determine el trabajo que realiza el peso sobre dicho cuerpo durante todo el ascenso. ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

- Cálculo de la altura: $v_f^2 = v_0^2 - 2hg$
  $0 = 100 - 20h \Rightarrow h = 5\ m$
- Trabajo hecho por el peso: $W^{peso} = -mgh$
  $W^{peso} = -(0,5)(10)(5) \quad \therefore W^{peso} = -25\ J$

32. Al estirar un resorte una longitud x = 0,8 m, la fuerza externa varía desde cero hasta: F = 50 N. Calcular el trabajo desarrollado sobre el resorte.



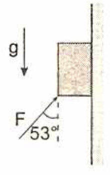
Resolución:

En toda gráfica F−x, el área bajo la recta, es igual al trabajo realizado por la fuerza F.

W^F = área del triángulo $\Rightarrow W^F = \frac{1}{2}(F)(x)$

$W^F = \frac{1}{2}(50)(0,8) \quad \therefore W^F = 20\ J$

33. Determinar el trabajo neto que se realiza sobre un bloque de peso 180 N, para un desplazamiento de 5 m en la vertical. La magnitud de F es 100 N, y el coeficiente de rozamiento cinético es 0,7 entre el bloque y la pared.

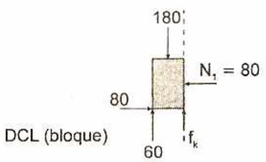


Resolución:

Cálculo de la fuerza de rozamiento en el eje vertical:

$f_k = \mu_k N_1 = (0,7)(80) = 56\ N$

El peso del bloque es mayor que la componente de F en la vertical, 180 > 60, por consiguiente el bloque desciende.

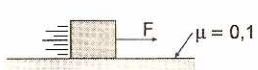


$\Sigma F_y = 180 - 60 - f_k \Rightarrow \Sigma F_y = 64\ N$

$W_{NETO} = (\Sigma F_y)(d) \Rightarrow W_{NETO} = (64)(5)$

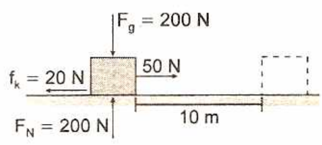
$\therefore W_{NETO} = 320\ J$

34. Al bloque de 20 kg se le aplica una fuerza F = 50 N. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y el trabajo neto cuando el bloque se desplaza 10 m.



Resolución:

Realizamos el diagrama del cuerpo libre del bloque:

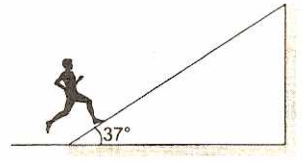


Cálculo de la cantidad de trabajo hecho por

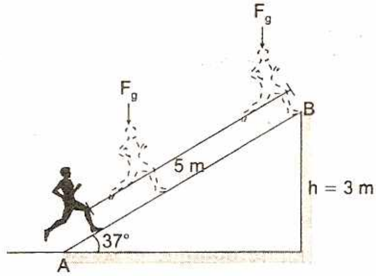
$W^{f_k} = -f_k d = -20(10) = -200\ J$

$W_{NETO} = F_R d = (50 - 20)10 = 300\ J$

35. Un joven de masa 50 kg sube por una escalera de longitud 5 m. ¿Qué trabajo realiza su peso hasta que llega a la parte más alta?



Resolución:



Piden W^{mg}_{A-B}: cantidad de trabajo hecho por la fuerza de gravedad.

$W^{mg}_{A-B} = mgh = -(50)(10)(3)$

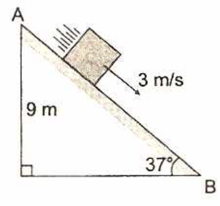
$\therefore W^{mg}_{A-B} = -1500\ J$

36. Un bloque de 30 kg de masa cae por una rampa con rapidez constante de 3 m/s. Calcular:

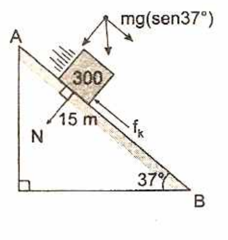
I. El trabajo efectuado por la fricción en el tramo AB.

II. El trabajo efectuado por el peso.

III. El trabajo efectuado por la componente normal de la fuerza del plano sobre el bloque.



Resolución:



$f_k = mgsen37° \Rightarrow f_k = 300\left(\frac{3}{5}\right) = 180 \Rightarrow f_k = 180\ N$

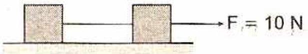
I. $W^{f_k} = -f_k d = -(180)(15) = -2700\ J = -2,7\ kJ$

II. $W^{peso} = mgh = (30)(10)(9) = 2700\ J = 2,7\ kJ$

III. $W^{FN} = 0$

Observación: Una fuerza que es perpendicular al movimiento su trabajo es 0

37. Hallar el trabajo de la tensión de la cuerda aplicada sobre el cuerpo A, durante los cuatro primeros segundos, sabiendo que el sistema parte del reposo y que la superficie es lisa. (m_A = 2 kg; m_B = 2 kg; g = 10 m/s^2)



Resolución:

Cálculo de la aceleración. Método de Atwood.

Para el sistema:

$$a = \frac{F_R}{\Sigma m} \Rightarrow a = \frac{10}{4} = 2{,}5\ m/s^2$$

Cálculo de la distancia (MRUV)

$$d = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

Como parte de reposo $v_o = 0$

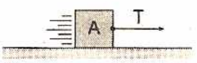
Entonces $d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2{,}5)(4)^2 = 20$ m

Cálculo de la tensión en la cuerda que une a los bloques.

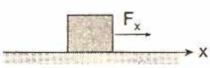
$F_R = ma \Rightarrow T = 2(2{,}5) \Rightarrow T = 5$ N

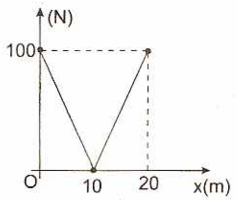
Cálculo de la cantidad de trabajo hecho por la tensión

$W^T = Td \Rightarrow W^T = 5(20) \quad \therefore W^T = 100$ J



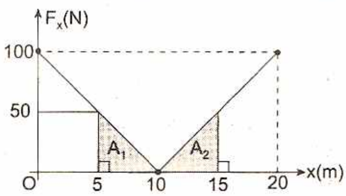
38. Sobre un cuerpo de 2 kg de masa actúa una fuerza que varía con la posición, como indica la figura. Determinar el trabajo realizado por la fuerza desde x = 5 m hasta x = 15 m.





Resolución:

En un diagrama fuerza versus posición el área bajo la recta o curva es igual al trabajo hecho por la fuerza.



$$A_1 = \frac{5(50)}{2} = \frac{250}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{5(50)}{2} = \frac{250}{2}$$

$$W^F_{5\to15} = A_1 + A_2 \Rightarrow W^F_{5\to15} = \frac{250}{2} + \frac{250}{2} = 250$$

$\therefore W^F = 250$ J

POTENCIA MECÁNICA

Como ya vimos, para calcular el trabajo de una fuerza no es necesario conocer el tiempo transcurrido en su realización. En la vida práctica, sin embargo, el conocimiento de ese tiempo puede ser importante, pues en general, existe interés en que un determinado trabajo se realice en el menor tiempo posible. Entre dos máquinas que realizan el mismo trabajo con la misma perfección, siempre preferimos la más rápida. Para medir la rapidez con que se realiza cierto trabajo, se define una cantidad denominada Potencia.

Es aquella magnitud física escalar que nos expresa la medida de la rapidez con el cuál se transfiere movimiento ordenado (trabajo). También se puede expresar como el trabajo realizado por cada unidad de tiempo.

$$\boxed{P = \frac{\text{trabajo realizado por la fuerza}}{\text{tiempo gastado en su realización}}} \quad ...(6.5)$$

$$\boxed{P = \frac{W^F}{t}} \quad ...(6.6)$$

Veamos entonces, por la definición dada, que cuánto menor sea el tiempo empleado por una máquina en efectuar cierto trabajo, tanto mayor será su potencia.

La unidad de la potencia se denomina watt (símbolo: W) en honor a James Watt, perfeccionador de la máquina de vapor. Así, la potencia de 1 W corresponde al trabajo de 1 J realizado en 1 s, o sea:

$$\frac{1\ joule}{1\ \text{segundo}} = 1\ watt = 1\ \text{W}$$

Un múltiplo muy usado de esta unidad es el *kilowatt* (kW), que corresponde a 1000 W.

$$1\ \text{kW} = 1000\ \text{W}$$

Analicemos el siguiente caso, un bloque se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ por acción de una fuerza $\vec{F}$ como muestra la figura 6.9, la potencia desarrollada por la fuerza se obtiene de la relación trabajo desarrollado por la fuerza entre el tiempo empleado t.

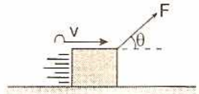


Fig. 6.9.a

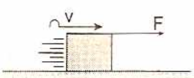


Fig. 6.9.b

$$P = \frac{W^F}{t} = \frac{Fd\cos\theta}{t}$$

$P = F\cos\theta\left(\frac{d}{t}\right)$; pero: $v = \frac{d}{t}$ para el MRU

$$\boxed{P = F\cos\theta(v)} \quad ...(6.7)$$

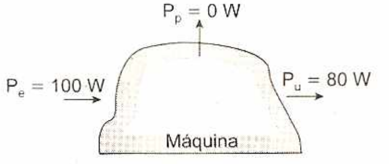
Si, $\theta = 0°$, como indica la figura 6.9.b, la potencia es igual al producto de la fuerza por la velocidad.

$\boxed{P = Fv}$ ...(6.8)

Rendimiento o eficiencia de una máquina (n)

Es aquella magnitud adimensional que nos expresa el grado de perfeccionamiento de una máquina térmica con respecto a la potencia que consumen.

Su valor se define como el cociente de la potencia útil entregada por la máquina, entre, la potencia consumida por la máquina.



Potencia útil: $P_u = 80$ W

Potencia entregada: $P_e = 100$ W

Potencia perdida: $P_p = 20$ W

$\boxed{P_e = P_u + P_p}$ ...(6.9)

Eficiencia:

$\boxed{n = \frac{P_u}{P_e}}$ ...(6.10)

Reemplazando en la ecuación (6.10):

$n = \frac{80}{100} = 0{,}8$ o $n = 80\%$

Potencia:

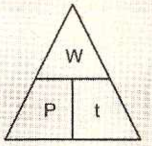
Es aquella magnitud física escalar que nos indica la rapidez con que una máquina nos entrega trabajo. En la actualidad vivimos en un mundo en donde nos interesa por un lado la cantidad de trabajo que nos pueden entregar las máquinas, pero las seleccionamos de acuerdo con la rapidez con que lo hacen.

$$P = Fv$$

P: potencia (*watt*); F: fuerza (*newton*); v: velocidad (m/s)

Unidades comerciales:

- Unidad de trabajo: 1 kilowatt hora = 1 kWh
  1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ *joules*
- Unidad de potencia: 1 hp = caballo de fuerza
  1 hp = 745 *watts*
- $W = Pt$
- $P = \frac{W}{t}$
- $t = \frac{W}{P}$



W: trabajo (*joule*); P: potencia (*watt*); t: tiempo (segundo)

Ejemplos:

1. Determinar la potencia del motor de un ascensor cuando eleva la cabina con un peso total de 11 200 N, con velocidad constante de 1,5 m/s.

Resolución:

La fuerza que desarrolla el motor para vencer la gravedad es F = 11 200 N, velocidad constante v = 1,5 m/s.

La potencia desarrollada por el motor es:

$P = Fv = (11\,200)(1{,}5)$ $\therefore$ $P = 16\,800$ W

El motor del ascensor desarrolla 16 800 joules de trabajo en cada segundo.

2. Halla la eficiencia de una máquina, sabiendo que la potencia perdida equivale al 25% de la potencia útil.

Resolución:

De la ecuación (6.10):

$n = \frac{P_u}{P_e}$ ...(I)

De la ecuación (6.9):

$P_e = P_u + P_p$

$P_e = P_u + \frac{1}{4}P_u \Rightarrow Pe = \frac{5}{4}P_u$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):

$n = \frac{P_u}{\frac{5}{4}P_u} = 0{,}8$

La eficiencia de la máquina es 80%.

3. Determinar la potencia del motor de un ascensor cuando levanta una cabina con un peso total de 1600 N a la velocidad de 5 m/s.

Resolución:

La potencia desarrollada por el motor es: $P = Fv$

$P = (1600)(5) \Rightarrow P = 8000\text{ W} \Rightarrow P = 8\text{ kW}$

4. A cierta máquina se le entrega 200 W y ésta pierde 60 W. ¿Cuál es la eficiencia de la máquina?

Resolución:

Cálculo de la potencial útil:

$P_e = P_u + P_p$

$200 = P_u + 60 \Rightarrow P_u = 140$ W

Cálculo de la eficiencia:

$n = \frac{P_u}{P_e} = \frac{140}{200} = 0{,}7$

La eficiencia de la máquina es: 70%.

5. La eficiencia de un motor es 0,8. Si se sabe que puede efectuar un trabajo útil de 320 J. ¿Qué cantidad de trabajo se pierde en vencer ciertas resistencias?

Resolución:

Cálculo del trabajo entregado:

$n = \frac{P_u}{P_e}$ o $n = \frac{W_u}{W_e} \Rightarrow W_e = \frac{W_u}{n} = \frac{320}{0{,}8} = 400$ J

Principio de conservación de la energía:

$W_e = W_u + W_p \Rightarrow 400 = 320 + W_p \Rightarrow W_p = 80$ J

Se pierde 80 J de trabajo.

6. ¿Qué potencia tiene el motor de una bomba de agua que eleva 180 litros de agua por cada hora desde un lago hasta una altura de 30 m? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

La potencia del motor es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = \frac{mgh}{t}$$

Reemplazando los datos en el SI:

$$P = \frac{(180)(10)(30)}{3600} = 15\ \text{W}$$

Es necesario aclarar que en cada litro de agua tenemos un kilogramo de masa de agua.

7. Un obrero levanta 50 cajas por cada minuto sobre una plataforma de 2 m de altura respecto del piso. Si la masa de cada caja es 3 kg, calcular la potencia desarrollada por el obrero.

Resolución:

La potencia del obrero es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = \frac{mgh}{t}$$

Reemplazando los datos en el SI:

$$P = \frac{(150)(10)(2)}{60} = 50\ \text{W}$$

El obrero desarrolla 50 W de potencia.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El motor de una lancha le hace desarrollar a ésta una velocidad constante de 36 km/h, venciendo la fuerza de resistencia del agua de 3000 N. Determinar la potencia desarrollada por el motor.

Resolución:

La fuerza desarrollada por el motor, sirve para vencer a la fuerza de resistencia del agua de magnitud 3000 N.

$P = Fv \Rightarrow P = (3000)(10) \Rightarrow P = 30\,000$ W

$\therefore\ P = 30$ kW

2. Determinar la potencia del motor de un ascensor cuando levanta la cabina con un peso total de 15 000 N, a la velocidad de 1,2 m/s.

Resolución:

La potencia desarrollada por el motor es:

$P = Fv \Rightarrow P = (15\,000)(1{,}2) \Rightarrow P = 18\,000$ W

$\therefore\ P = 18$ kW

3. ¿Cuál es la potencia de una máquina que levanta un martillo de 2000 N de peso a 0,75 m de altura 30 veces en un minuto, si su rendimiento es del 25%?

Resolución:

La máquina eleva el martillo 0,75 m en 2 s, por consiguiente su potencia útil será:

$$P_u = \frac{mgh}{t} \Rightarrow P_u = \frac{(2000)(0{,}75)}{2}$$

$\therefore\ Pu = 750$ W

Cálculo de la potencia entregada por la máquina:

$$P = \frac{P_u}{n} = \frac{750}{0{,}25} \qquad \therefore\ P = 3\ \text{kW}$$

4. ¿Qué potencia tiene el motor de una bomba que eleva 18 000 litros de agua por cada hora desde un lago hasta una altura de 60 metros? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

En cada hora la bomba eleva una masa de 18 000 kg.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t}$$

En el SI:

$$P = \frac{18\,000(10)60}{3600} \Rightarrow P = 3000\ \text{W}$$

$\therefore\ P = 3$ kW

5. Un obrero levanta cajas de masa 3 kg cada uno, sobre una plataforma de altura 2 metros respecto del piso a razón de 10 cajas por cada minuto. Calcular la potencia mecánica desarrollada por el obrero. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

El obrero en cada minuto levanta una masa de 30 kg.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t}$$

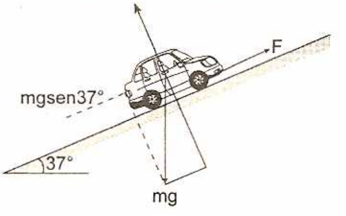
En el SI: $P = \dfrac{(30)(10)(2)}{60}$

$\therefore\ P = 10$ W

6. Se tiene un auto de masa 1000 kg subiendo por una pista inclinada y rugosa que forma un ángulo de 37° con la horizontal. Dicho vehículo tiene un motor de 60 kW de potencia. Suponga que la fuerza del motor se transmite a las cuatro ruedas 4 × 4. ¿A qué velocidad puede ir el auto por la pista inclinada? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

La fuerza desarrollada por el motor, es igual a la componente del peso paralelo al plano inclinado, debido a su movimiento uniforme.



$F = mg\text{sen}37° \Rightarrow F = 6000$ N

Cálculo de la velocidad: $P = Fv$

$\Rightarrow 60\,000 = (6000)v \qquad \therefore\ v = 10$ m/s

7. El motor de un bote tiene una potencia de 3000 w y lo lleva a una velocidad de 2,5 m/s. ¿Cuál es la fuerza de resistencia del agua que se opone al movimiento del bote?

Resolución:

Si el bote se mueve con velocidad constante, entonces la fuerza resultante en la dirección del movimiento es igual a cero, $F = f_{agua}$.

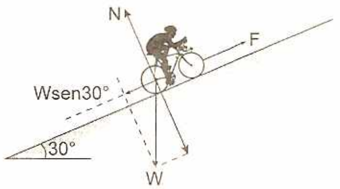
$P = Fv \Rightarrow 3000 = F(2,5) \quad \therefore F = 1,2$ kN

La fuerza desarrollada por el motor, es igual a la fuerza de resistencia del agua.

8. Un ciclista cuyo peso total es 800 N, sube con velocidad constante de 36 km/h, sobre un plano inclinado que forma 30° con la horizontal. Determinar la potencia desarrollada por el ciclista. Desprecia la fuerza de oposición del aire.

Resolución:

La fuerza desarrollada por el ciclista, es igual a la componente del peso paralelo al plano.



$F = W\text{sen}30° \Rightarrow F = (800)\left(\frac{1}{2}\right) = 400$ N

Cálculo de la potencia:

$P = Fv \Rightarrow P = (400)(10) \quad \therefore P = 4$ kW

9. Determinar la potencia del motor de un ascensor cuando levanta la cabina con un peso total de 16 kN a la velocidad de 3,6 km/h, sabiendo que la eficiencia del motor es 0,8.

Resolución:

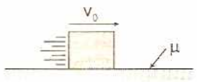
Si la cabina se desplaza a velocidad constante, el motor desarrolla una fuerza de 16 kN, luego la potencia útil del motor será:

$P_u = Fv \Rightarrow P_u = (16\,000)(1) \Rightarrow P_u = 16\,000$ W

Cálculo de la potencia desarrollada por el motor:

$P = \frac{P_u}{n} = \frac{16\,000}{0,8} \quad \therefore P = 20$ kW

10. ¿Qué potencia desarrolla la fuerza de rozamiento para detener el bloque de 4 kg que se movía con una rapidez de 8 m/s sobre una superficie horizontal rugosa de coeficiente de rozamiento cinético 0,2? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Cálculo de la fuerza de rozamiento cinético:

$f_k = \mu_k N = \mu_k(mg) = 0,2(4)(10) = 8$ N

La velocidad inicial es 8 m/s y la final es cero, entonces la velocidad media es: 4 m/s.

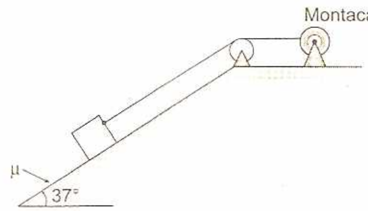
$W^{fricción} = -f_k d$

La potencia es:

$P^{fricción} = \frac{W^{fricción}}{t} = \frac{-f_k d}{t} = -f_k v_m$

$\therefore P^{fricción} = -(8)(4) = -32$ W

11. El montacargas mostrado en la figura arrastra un tronco de 250 kg de masa sobre una pendiente de 37° con una velocidad de 3 m/s. Si la potencia útil del montacargas es de 9 kW, determinar el coeficiente de rozamiento cinético μ. ($g = 10$ m/s^2)

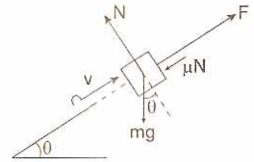


Resolución:

Cálculo de la fuerza F que experimenta el montacargas sobre el tronco.

$P_u = Fv \Rightarrow 9000 = 3F \Rightarrow F = 3000$ N

Haciendo el DCL del tronco:



La fuerza resultante en el eje perpendicular al movimiento es igual a cero:

$N = mg\cos\theta$ ...(I)

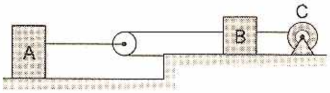
Si el tronco sube con velocidad constante, la fuerza resultante en el eje del movimiento es igual a cero:

$F = mg\text{sen}\theta + \mu N$

$F = mg\text{sen}\theta + \mu mg\cos\theta$ ...(II)

Reemplazando datos en (II) tenemos: $\mu = 0,75$

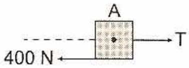
12. Hallar la potencia que se debe entregar al motor, en la figura representado por C, si su eficiencia es del 90%, para que los bloques A y B, de 1000 N y 4000 N de peso, se muevan con velocidades constantes de 5 m/s y 10 m/s respectivamente. Existe rozamiento cinético en las superficies en contacto $\mu = 0,4$.



Resolución:

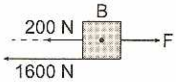
De la primera ley de Newton, si los bloques A y B se mueven con velocidades constantes, la fuerza resultante sobre los cuerpos es igual a cero.

Haciendo el DCL del bloque A:



$\Rightarrow T = 400\ N$

Haciendo el DCL del bloque B:



$\Rightarrow F = 1800\ N$

Cálculo de la potencia útil que desarrolla el motor C:

$P_u = Fv \Rightarrow P_u = (1800)(10) \Rightarrow P_u = 18\ kW$

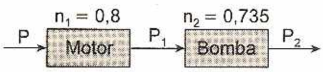
Cálculo de la potencia entregada al motor:

$$P = \frac{P_u}{n} = \frac{18}{0{,}9} \qquad \therefore\ P = 20\ kW$$

13. Un motor eléctrico cuya eficiencia es del 80% requiere una potencia de 3 kW para impulsar una bomba centrífuga cuya eficiencia es del 73,5%. Si la bomba impulsa el agua hasta el tanque de un edificio, situado en la azotea, a razón de 0,54 m^3/min, hallar el número de pisos del edificio si la bomba se encuentra al pie del edificio cuyos pisos tienen 2,5 m de altura. ($g = 9{,}8\ m/s^2$)

Resolución:

La bomba impulsa 540 kg de masa de agua al tanque en cada minuto. Si P es la potencia del motor, la potencia útil de la bomba tiene la siguiente forma:



$P_2 = Pn_1n_2 \Rightarrow P_2 = (3000)(0{,}8)(0{,}735)$

$\Rightarrow P_2 = 1764\ W$

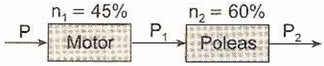
Pero la potencia se define como trabajo realizado en cada unidad de tiempo.

$$P_2 = \frac{mgh}{t} \Rightarrow 1764 = \frac{(540)(9{,}8)h}{60} \Rightarrow h = 20\ m$$

Por lo tanto, si la altura del edificio es 20 m, entonces el número de pisos es 8.

14. Un motor cuya eficiencia es del 45% está conectado a un sistema de poleas cuya eficiencia es del 60%. Qué potencia habrá que suministrar al motor para que dicho sistema de poleas haga subir un bloque de 270 N de peso con una velocidad constante de 5 m/s.

Resolución:



Potencia útil de las poleas:

$P_2 = Fv = (270)(5) \Rightarrow P_2 = 1350\ W$

$$\text{Pero } P_e = \frac{P_u}{n};\ P_1 = \frac{P_2}{n_2} = \frac{1350}{0{,}6} = 2250\ W;$$

$$P = \frac{P_1}{n_1} = \frac{2250}{0{,}45} = 5000\ W \qquad \therefore\ P = 5\ kW$$

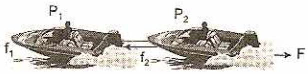
En general se cumple que la potencia entregada P es:

$$P = \frac{P_2}{n_1n_2}$$

15. Dos lanchas con potencias 3 kW y 12 kW desarrollan las velocidades de 36 km/h y 72 km/h, respectivamente. ¿Qué velocidad desarrollarán si los enganchamos?

Resolución:

Previamente calculamos la fuerza desarrollada por cada motor, sabiendo que: $P = Fv$



$$F = \frac{P}{v} \Rightarrow F_1 = \frac{3000}{10} = 300\ N \Rightarrow F_2 = \frac{12\ 000}{20} = 600\ N$$

Analizando al sistema, la fuerza neta será $F = 900\ N$ y la potencia neta $(P_1 + P_2)$ igual a 15 kW.

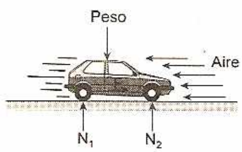
$(P_1 + P_2) = Fv \Rightarrow 15\ 000 = (900)v$

$\therefore\ v = 60\ km/h$

16. Un automóvil que tiene un motor de 9 kW de potencia, se mueve en línea recta sobre un plano horizontal alcanzando una velocidad máxima de 108 km/h. Determinar la fuerza resultante que ejerce el aire sobre el auto. Despreciar las pérdidas de energía debido al rozamiento.

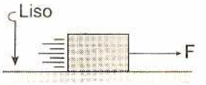
Resolución:

El motor del automóvil realiza trabajo mecánico positivo, en virtud a la variación de su energía interna (combustible). El trabajo realizado por el aire, es negativo. Cuando el auto alcanza su velocidad máxima se mueve con velocidad constante, por consiguiente el trabajo neto es igual a cero. Luego, la fuerza desarrollada por el motor es igual a la fuerza del aire.



$P = Fv \Rightarrow 9000 = F(30) \qquad \therefore\ F = 300\ N$

17. ¿Cuál es la potencia desarrollada por una fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa 50 kg, que le hace variar su velocidad de 16 m/s a 20 m/s, en 10 s?



Resolución:

Del teorema de la energía cinética, el trabajo realizado por la fuerza F es igual a la variación de la energía cinética que experimenta la masa.

$W^F = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) \Rightarrow W^F = \frac{1}{2}(50)(20^2\text{-}16^2)$

$\Rightarrow W^F = 3600$ J

Potencia desarrollada por la fuerza F:

$P = \frac{W^F}{t} = \frac{3600}{10} \quad \therefore P = 360$ W

18. Cuando una lancha a motor se desplaza a velocidad constante, la fuerza de resistencia del agua al desplazamiento del cuerpo es directamente proporcional a la velocidad. Si para mantener una velocidad de 36 km/h desarrolla una potencia de 3 kW, ¿qué potencia se requiere para mantener una velocidad de 72 km/h?

Resolución:

La fuerza desarrollada por el motor, es igual a la fuerza de oposición del agua.

$F = kv$

k: constante

Pero: $P = Fv = (kv)v \Rightarrow P = kv^2$

La potencia desarrollada por el motor es proporcional al cuadrado de la velocidad.

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$

Reemplazando datos:

$P_1 = 3$ kW $\quad \therefore P_2 = 12$ kW

19. La eficiencia de un motor es de 0,7. Si se sabe que puede efectuar un trabajo útil de 280 J, ¿qué cantidad de trabajo se pierde en vencer ciertas resistencias?

Resolución:

La eficiencia de un motor, también se define, como la relación del trabajo útil entre el trabajo entregado:

$n = \frac{W_u}{W_e}$ ...(I)

W_u: trabajo útil; W_e: trabajo entregado; W_p: trabajo perdido; $W_e = W_u + W_p$ ...(II)

Reemplazando datos en (1):

$W_e = 400$ J ...(III)

Reemplazando en (II) tenemos:

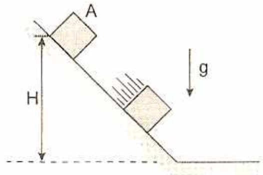
$400 = 280 + W_p \quad \therefore W_p = 120$ J

20. ¿Cuál es la eficiencia de un motor, sabiendo que pierde una potencia equivalente a la tercera parte de la potencia útil?

Resolución:

- $P_e = P_u + P_p \Rightarrow P_e = P_u + \frac{1}{3}P_u = \frac{4}{3}P_u$
- $n = \frac{P_u}{P_e}(100\%) = \frac{3}{4}(100\%) \quad \therefore n = 75\%$

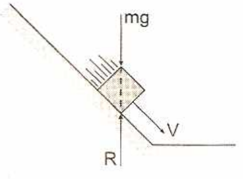
21. El bloque sale del punto A a velocidad constante llegando a la parte baja luego de un tiempo t. Hallar la potencia desarrollada por la fuerza de reacción del plano inclinado sobre el bloque de masa m.



Resolución:

Si el bloque desciende con velocidad constante, la fuerza resultante sobre el bloque es nulo ($\Sigma F = 0$) por consiguiente la reacción y el peso tienen igual módulo pero sentidos opuestos.

DCL (bloque)



$R = mg$

El trabajo realizado por la reacción R tiene signo negativo, por oponerse al movimiento.

$W^R = -RH = -mgH$

La potencia desarrollada es:

$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} \quad \therefore P = \frac{-mgH}{t}$

22. Una bomba hidráulica tiene un caudal de 0,1 m^3/s y debe elevar agua hasta una altura de 15 m. Hallar la potencia que desarrolla la bomba. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

El caudal se define como el volumen en cada unidad de tiempo.

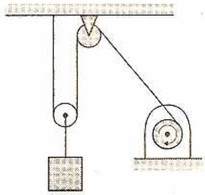
En t = 1 s eleva 0,1 m^3 (m^3 = 1000 litros). En cada litro de agua tenemos 1 kg masa de agua.

La potencia de la bomba es: $P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = \frac{mgh}{t}$

$P = \frac{mgh}{t} = \frac{(100)(10)(15)}{1} = 15\,000$ W

$\therefore P = 15$ kW

23. El tambor de un torno girando en forma horaria permite que la cuerda se enrolle con una rapidez de 0,5 m/s. Hallar la potencia para elevar una carga de 8500 N.



Resolución:

La tensión en la cuerda enrollable es igual a la mitad del peso de la carga: T = 4250 N

La potencia es igual al producto de la fuerza por la velocidad:

$P = Fv = (4250)(0,5) = 2125$ W

$\therefore$ P = 2125 W

24. Un torno es accionado por un motor de 5 hp (1 hp = 745 W) que tiene una eficiencia del 80%. ¿Con qué velocidad máxima el torno podrá elevar una carga de 149 kg? (g = 10 m/s^2)

Resolución:

La potencia que entrega el torno es:

$P_e = 5$ hp $= 5(745) = 3725$ W

La potencia útil es: $P_u = nP_e = 0,8(3725) = 2980$ W

La carga tiene un peso de: $mg = (149)(10) = 1490$ N

La potencia útil desarrollada es:

$P_u = Fv \Rightarrow 2980 = 1490v \Rightarrow v = 2$ m/s

$\therefore v_{máx.} = 2$ m/s

25. El motor de una grúa tiene una eficiencia del 75% y una potencia nominal de 300 hp (1 hp = 745 W). Calcular la máxima velocidad a la que podrá levantar una carga de 4,5 toneladas. (g = 10 m/s^2)

Resolución:

La potencia que entrega el motor es:

$P_e = 300(745) = 223\,500$ W

La potencia útil es:

$P_u = nP_e = (0,75)(223\,500) = 167\,625$ W

La carga tiene un peso de:

$mg = (4500)(10) = 45\,000$ N

La potencia desarrollada en forma útil es:

$P_u = Fv \Rightarrow 167\,625 = 45\,000v$

$\therefore v_{max} = 3,725$ m/s

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un bloque grande de masa M y un bloque pequeño de masa m (M > m) se desplazan sobre una superficie horizontal sin fricción con igual energía cinética.

Se hacen las siguientes proposiciones:

I. La velocidad del bloque pequeño es mayor que la del bloque grande.

II. El trabajo que se deberá realizar para que el bloque pequeño se detenga es menor que el trabajo que habrá que hacer para que el bloque grande se detenga.

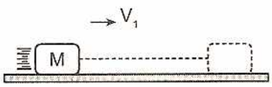
III. Si ambos son frenados, hasta detenerse, por fuerzas de igual magnitud, la distancia recorrida por el bloque pequeño desde el instante en que se aplica la fuerza será mayor que la correspondiente distancia recorrida por el bloque grande.

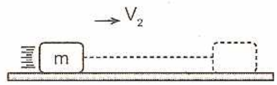
Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

A) FVF B) FFV C) VFV
D) VFF E) VVV

Resolución:

Dibujamos las dos situaciones





I. Del problema tenemos que M > m, necesariamente $V_2 > V_1$ ya que en ambos casos, los cuerpos tienen la misma energía cinética. ...(V)

II. El trabajo para detener a los bloques es el mismo, debido a que ambos tienen la misma energía cinética al inicio. Recordar $\Delta Ek = w$ ...(F)

III. Como el trabajo desarrollado en ambas situaciones es el mismo y las fuerzas tienen igual magnitud, concluimos que la distancia recorrida es igual en ambos casos ...(F)

Clave D

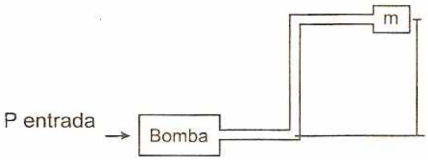
PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Para elevar 10m^3 de agua hasta el tanque elevado de un edificio, el cual se encuentra a 40 m de altura, se utiliza una bomba que tiene un motor de 2 kW. Si la eficiencia del motor es 80%, ¿En cuánto tiempo aproximadamente se logra subir el agua?

$(g = 9,81 \text{ m/s}^2)\left(\rho H_2O = 1,00\ \dfrac{g}{cm^3}\right)$

A) 36 min 20 s B) 40 min 50 s C) 45 min
D) 52 min 30 s E) 1 hora

Resolución:



$P\ \text{útil} = \frac{w}{t} = \frac{mgh}{t}$ $\quad P\ \text{útil} = \frac{\rho Vgh}{t}$

$80\%\ P\ \text{entrad} = \frac{\rho Vgh}{t}$

Reemplazando:

$\frac{80}{100}(2)(10)^3 = \frac{(10)^3(10)(9,81)(40)}{t}$

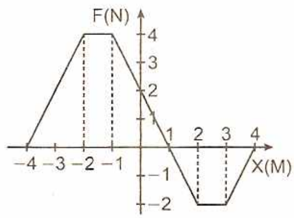
$\therefore\ t \approx 40$ min 50 s

Clave: B

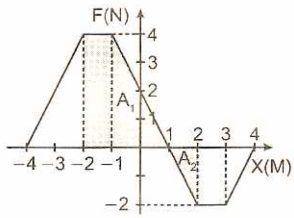
PROBLEMA 3 (UNI 2013 - II)

La figura muestra las fuerzas F (en N) que actúan sobre una partícula que se mueve en una dimensión, en función de su posición al origen de coordenadas. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza (en J) en llevar a la partícula desde $x_1 = -2$ m hasta $x_2 = 2$ m.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9



Resolución:



El trabajo mecánico que nos piden es el área sombreada.

$W^F = A_1 + A_2$

$\Rightarrow W^F = \left(\frac{3+1}{2}\right)4 + \left[\frac{1(2)}{2}\right]$

$\therefore\ W^F = 7$ J

Clave: C

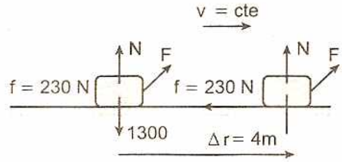
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - II)

Una caja de 1300 N de peso esta sobre una superficie horizontal rugosa. Calcule el trabajo que se necesita, en J, para moverla a rapidez constante una distancia de 4 m si la fuerza de fricción tiene magnitud 230 N.

A) 780 B) 820 C) 920 D) 980 E) 1020

Resolución:

Graficando:



como: v = cte

$\Rightarrow W_{NETO} = 0 \Rightarrow W^f + W^N + W^{mg} + W^F = 0$

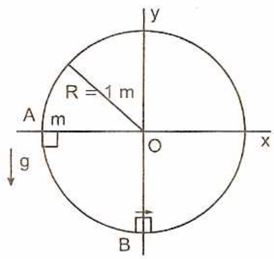
$\Rightarrow -230(4) + W^F = 0$

$\therefore\ W^F = 920$ J

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

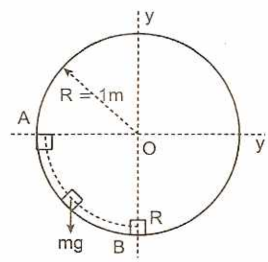
Calcule, aproximadamente, el trabajo (en J) realizado por la fuerza gravitatoria cuando el bloque de masa m = 1 kg se desliza partiendo del reposo (sin rozamiento) de A hacia B sobre la superficie cilíndrica cuyo corte transversal es mostrado en la figura.
($g = 9,81$ m/s^2)



A) 9,81 B) 6,91 C) 4,45
D) 2,51 E) 0

Resolución:

Del gráfico:



El trabajo de la fuerza gravitatoria W_{AB}^{mg} es independiente de la trayectoria.

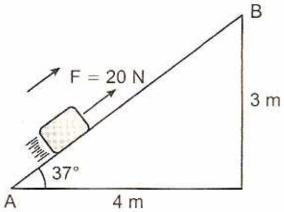
$W_{AB}^{mg} = mgR = 1(9,81)(1)$

$\therefore\ W_{AB}^{mg} = 9,81$ J

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el trabajo realizado por la fuerza constante F para llevar el objeto de A hacia B. (Superficies lisas)

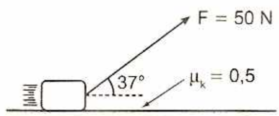


A) 100 J B) 150 J C) 180 J
D) 135 J E) 200 J

2. Un cajón debe moverse en 2 metros sobre una mesa jalándolo con una fuerza de 10 N que forma un ángulo de 37° con la horizontal. Encuentre el trabajo que efectuará esta fuerza. (Superficies lisas)

A) 10 J B) 12 J C) 14 J D) 16 J E) 20 J

3. Un bloque de 5 kg es arrastrado sobre una superficie horizontal. Determine la cantidad de trabajo neto desarrollado sobre el bloque para un tramo de 5 m. ($g = 10\ m/s^2$)

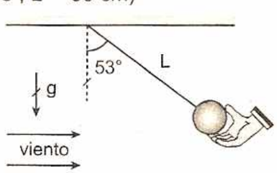


A) 200 J B) 180 J C) 150 J
D) 120 J E) 100 J

4. Un objeto de 400 g es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 30 m/s. Determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza de gravedad hasta el instante en que la rapidez del objeto sea 20 m/s por segunda vez. ($g = 10\ m/s^2$)

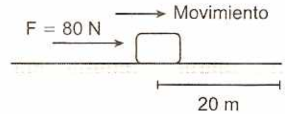
A) 100 J B) −100 J C) 80 J
D) 180 J E) −180 J

5. La pequeña esfera de 5 kg unida a la cuerda se suelta en una región donde el viento ejerce una fuerza horizontal constante de 20 N. Determine la cantidad de trabajo neto desarrollado sobre la esfera hasta el instante en que esta pasa por su posición más baja.
($g = 10\ m/s^2$; L = 50 cm)



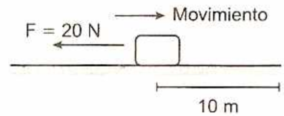
A) 10 J B) 8 J C) 6 J
D) 4 J E) 2 J

6. Calcular el trabajo realizado por la fuerza constante F. Despreciar todo tipo de rozamiento.



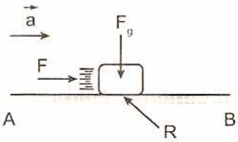
A) 400 J B) 600 J C) 800 J
D) 1000 J E) 1600 J

7. Calcular el trabajo realizado por la fuerza constante F. Despreciar todo tipo de rozamiento.



A) 200 J B) 100 J C) −100 J
D) −200 J E) −250 J

8. Con respecto al diagrama de fuerzas mostrado, determine la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
(R: Reacción del piso sobre el bloque)



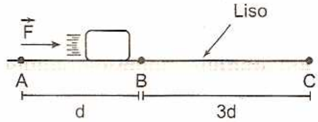
F_g: Fuerza de gravedad (peso)
a: Aceleración

( ) $W_{A \to B}^{F} > 0$
( ) $W_{A \to B}^{R} < 0$
( ) $W_{A \to B}^{Fg} = 0$
( ) $W_{A \to B}^{F} > |W_{A \to B}^{R}| > 0$

Entonces, la rapidez del bloque aumenta

A) VFVV B) VVVV C) FVFV
D) FFVV E) VVFF

9. Si la cantidad de trabajo neto desarrollado sobre el bloque entre A y B es 20 J; determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante F entre B y C.



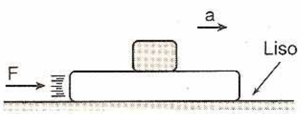
A) 20 J B) 40 J C) 60 J
D) 90 J E) 100 J

10. Un cuerpo de 8 kg experimenta un MRUV desde el reposo con una aceleración de módulo 2 m/s^2. ¿Cuánto trabajo neto se desarrolló sobre el bloque en los 4 primeros segundos luego de iniciado su movimiento?

A) 320 J B) 284 J C) 256 J
D) 212 J E) 196 J

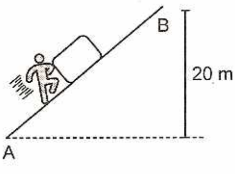
11. Se muestra una tabla y un bloque que se mueven juntos con aceleración constante. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. El trabajo desarrollado por la tabla sobre el bloque es positivo.
II. El trabajo desarrollado por el bloque sobre la tabla es negativo.
III. El trabajo desarrollado mediante la fuerza de rozamiento entre el bloque y la tabla es positivo sobre el bloque.



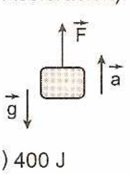
A) VVF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VFF

12. Se muestra una persona que traslada un bloque liso de 10 kg con una velocidad constante. Determine la cantidad de trabajo desarrollado por la persona sobre el bloque entre A y B. (g = 10 m/s^2).



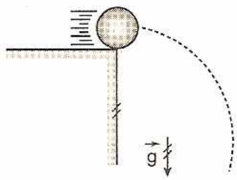
A) 1 kJ B) 1,5 kJ C) 2 kJ
D) 2,5 kJ E) 3 kJ

13. Un bloque de 5 kg asciende verticalmente bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ con una aceleración constante de módulo 4 m/s^2. Determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante esta fuerza en un tramo de 10 m.
(g = 10 m/s^2) (a = Aceleración).



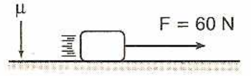
A) 200 J B) 400 J C) 500 J
D) 600 J E) 700 J

14. Se muestra el instante en que una pequeña esfera de 100 g se lanza horizontalmente desde el borde de un acantilado. Determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza de gravedad sobre la esfera transcurridos 2 s luego del lanzamiento. (g = 10 m/s^2)



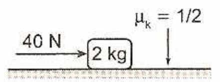
A) 5 J B) 10 J C) 20 J
D) 30 J E) 45 J

15. Si el bloque se desliza a velocidad constante, calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento. El cuerpo se desplaza 10 m.



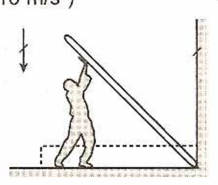
A) 600 J B) 300 J C) −600 J
D) −300 J E) 400 J

16. Determinar la potencia desarrollada por la fuerza de 40 N, en un tiempo de 2 segundos sabiendo que inicialmente el bloque se encontraba en reposo. (g = 10 m/s^2)



A) 100 W B) 200 W C) 400 W
D) 600 W E) 1000 W

17. Un joven coloca verticalmente una viga homogénea de 40 kg y 3,5 m de longitud, tal como se indica. Si lo hace lentamente, ¿qué cantidad de trabajo realiza? (g = 10 m/s^2)



A) 1200 J B) 1400 J C) 400 J
D) 700 J E) 500 J

18. Un resorte de 4 m de longitud y constante de rigidez 300 N/m es cortado en dos tramos, uno de 1 m y otro de 3 m de largo. ¿Qué trabajo se debe realizar sobre el resorte de mayor longitud para estirarlo 50 cm?

A) 80 J B) 60 J C) 50 J
D) 40 J E) 20 J

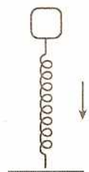
19. Una lámina de 2 kg reposa sobre una superficie horizontal de modo que en su centro geométrico tiene un resorte soldado por un extremo (sin deformar). Si el resorte tiene una rigidez K = 400 N/m,

¿qué trabajo mínimo hay que efectuar para elevar con el resorte por el extremo libre, la lámina hasta una altura h = 1,5 m? ($g = 10\ m/s^2$)

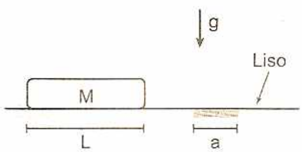
A) 30 J B) 31 J C) 32 J
D) 33 J E) 30,5 J

20. Se muestra un bloque de 1 kg que se encuentra en reposo sobre un resorte de K = 100 N/cm. Determine la cantidad de trabajo que se debe realizar para aplastar lentamente 30 cm al resorte ($g = 10\ m/s^2$)

A) 7 J
B) 7,5 J
C) 15 J
D) 80 J
E) 4,5 J



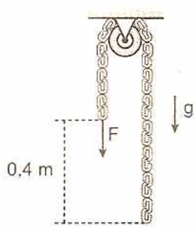
21. ¿Qué trabajo es necesario realizar para arrastrar una barra homogénea de longitud L y masa M por una franja rugosa de anchura a cuyo coeficiente de rozamiento es μ ($L > a$)?



A) μMgL B) μMga C) $\mu Mg(a + L)$
D) $\mu Mg(L - a)$ E) $\mu Mga^2/L$

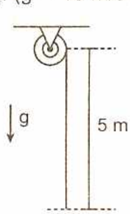
22. La cadena homogénea de 2 kg y de 2 m de longitud está inicialmente en reposo. Determine el trabajo que es necesario que efectúe F hasta que los extremos inferiores coincidan, considere que la polea pequeña es lisa ($g = 10\ m/s^2$)

A) 0,4 J
B) 0,2 J
C) 0,25 J
D) 0,8 J
E) 4 J

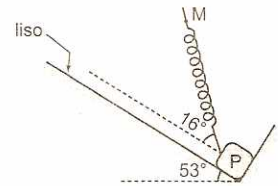


23. Determine el trabajo necesario para enrollar una soga homogénea que cuelga de un tambor horizontal, si la longitud libre de la cuerda es 5 m y su masa es de 4 kg. ($g = 10\ m/s^2$)

A) 50 J
B) 100 J
C) 200 J
D) 300 J
E) 400 J



24. El resorte ideal cuya rigidez es de 50 N/cm se encuentra soldado al bloque en la forma mostrada. El trabajo necesario para elevar al bloque de 120 N hasta una altura de 0,5 m al aplicar una fuerza en M en la dirección $\overrightarrow{PM}$ es



A) 60,25 J B) 81 J C) 61 J
D) 241 J E) 842 J

25. ¿Qué potencia mecánica como mínimo debe desarrollar una bomba que eleva agua por un tubo, hasta una altura h? La sección transversal del tubo es S y el volumen de agua que se bombea por unidad de tiempo es V_t (ρ = densidad del agua)

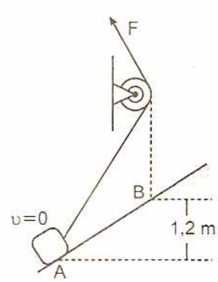
A) $\rho V_t gh$ B) $\rho V_t\left(gh + \frac{V_t^2}{2s^2}\right)$ C) $\frac{\rho V_t^3}{2s^2}$

D) $\frac{1}{2}\rho V_t gh$ E) $\rho V_t\left(gh + 2\frac{V_t^2}{s^2}\right)$

26. Determine la potencia útil que emplea una bomba hidráulica para elevar agua, en forma uniforme, hasta una altura de 20 m a razón de 50 L/s durante 10 s ($g = 10\ m/s^2$)

A) 10 Kw B) 20 Kw C) 50 Kw
D) 1 Kw E) 100 Kw

27. El bloque de 20 kg es desplazado sobre el plano mostrado, de tal forma que el 30% de la energía transferida mediante $\vec{F}$ se disipa como calor. Si el bloque llega a B con una rapidez de 2 m/s, ¿cuánto trabajo mecánico se realizó mediante la fuerza $\vec{F}$? ($g = 10\ m/s^2$)

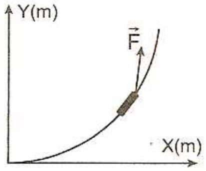


A) 520 J B) 360 J C) 400 J
D) 420 J E) 240 J

28. Un anillo se encuentra sobre un alambre cuya forma obedece a la ecuación $y = x^2$. Determine la cantidad de trabajo realizado mediante la fuerza $\vec{F}$,

que depende de la posición del anillo según expresión $\vec{F} = (x;2y)(N)$, desde $x = 0$ hasta $x = 4$ m.

A) 40 J
B) 252 J
C) 32 J
D) 16 J
E) 264J



29. Sobre una plataforma de 2 m de radio y a 1 m de su eje descansa un bloque de 1 kg de masa. Si la plataforma se hace rotar con una rapidez angular constante de 10 rad/s, el bloque sale despedido de la plataforma. Calcule el trabajo realizado mediante la fuerza centrífuga.

A) 100 J B) 120 J C) 150 J
D) 200 J E) 50 J

30. Un bloque es desplazado en un plano horizontal desde la posición $\vec{r}_1 = (0{,}20)$ m hasta $\vec{r}_2 = (10{,}28)$ m por medio de una fuerza $\vec{F} = (8{,}3)$ N. Determine el trabajo realizado mediante dicha fuerza.

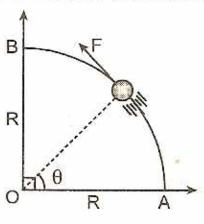
A) 100 J B) 104 J C) 210 J
D) 300 J E) 400 J

31. Sobre un bloque que reposa (en $x = 0$) sobre una superficie horizontal lisa, se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ cuyo valor depende de la posición

$\vec{x}$: $\vec{F} = \begin{bmatrix} 5x(+\hat{i}) & 0 \le x \le 4m \\ 20(+\hat{i}) & 4m < x \le 8m \end{bmatrix}$, donde $\vec{F}$ está en Newton. ¿Qué trabajo se realiza mediante dicha fuerza desde $\vec{x} = 0$ hasta $\vec{x} = 6$ m?

A) 20 J B) 40 J C) 80 J
D) 100 J E) 200 J

32. El trabajo efectuado mediante la fuerza $\vec{F}$ de módulo constante, pero tangente a la curva de radio R, al desplazar el collarín de A hacia B es

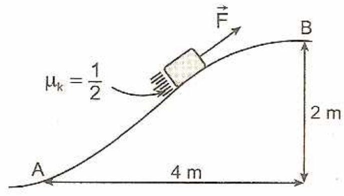


A) πRF B) $FR\sqrt{2}$ C) $\frac{\pi R}{2}F$
D) $\frac{\pi R}{4}F$ E) Faltan datos

33. Una fuerza actúa sobre un bloque de 3 kg, de tal manera que la posición del bloque varía de acuerdo a $\vec{x} = 5 + 2t + 2t^2$, donde $\vec{x}$ se expresa en metros y t en segundos. Determine el trabajo neto realizado sobre el bloque durante los primeros 4 segundos.

A) 540 J B) 480 J C) 320 J D) 280 J E) 240J

34. Actuando con una fuerza $\vec{F}$, dirigida siempre por la tangente a la trayectoria, hicieron subir un bloque pequeño de 2 kg desde A hasta B. El trabajo necesario desarrollado mediante $\vec{F}$ para tal fin es ($g = 10$ m/s^2)



A) 20 J B) 40 J C) 60 J
D) 80 J E) 100 J

35. De un pozo de 10 m de profundidad se saca agua mediante un recipiente de 1 kg. Durante la elevación del recipiente, el agua se derrama a través de un agujero en la base, de manera uniforme, llegando a la parte superior del pozo los 2/3 de la masa inicial de agua que llenaban inicialmente el recipiente de 15 L. Si el recipiente se trasladó lentamente, ¿cuánto trabajo se debió desarrollar? ($g = 10$ m/s^2)

A) 1,25 kJ B) 1,35 kJ C) 1,42 kJ
D) 1,64 kJ E) 1,74 kJ

36. ¿Cuánto trabajo hay que realizar para que una tabla de 8 m y de 16 kg, que es homogénea, rote $\frac{\pi}{2}$rad sobre una mesa horizontal alrededor de uno de sus extremos? ($g = 10$ m/s^2 y $\mu_k = 1/4$).

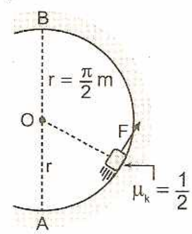
A) 20π J B) 40π J C) 60π J
D) 80π J E) 120π J

37. Una partícula es llevada a través de una trayectoria curva cuya ecuación es $y = x^3$ mediante una fuerza que depende de la posición según $\vec{F} = [y\,\hat{i} + x^3\,\hat{j}]$ N donde x e y se expresan en metros. Determine cuánto trabajo se desarrolla mediante esta fuerza desde la posición [0;0] a la posición [2;8]m.

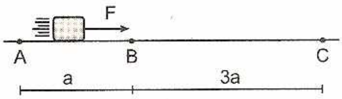
A) 36 J B) 32 J C) 26 J D) 16 J E) 4 J

38. Un bloque de 2 kg es trasladado con rapidez constante de 4 m/s por un rizo mediante la acción de una fuerza $\vec{F}$ en todo instante tangente a la trayectoria. ¿Cuánto trabajo se desarrolla mediante $\vec{F}$ entre A y B? ($g = 10$ m/s^2)

A) 2π J
B) 22π J
C) 32π J
D) 48π J
E) 52π J



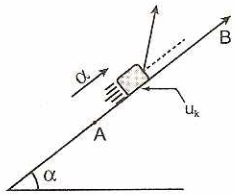
39. Se muestra un bloque que es arrastrado mediante una fuerza $\vec{F}$, que realiza una cantidad de trabajo de 16 J al trasladarlo de A hasta B. Si el módulo de $\vec{F}$ se duplica, determine la cantidad de trabajo en el tramo $\overline{BC}$.



A) 48 J B) 64 J C) 72 J
D) 84 J E) 96 J

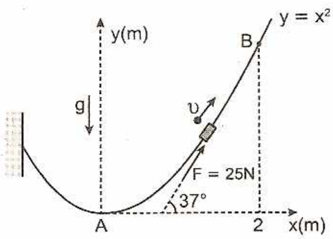
40. El bloque que se muestra es de 2 kg y asciende con una aceleración constante de 2 m/s^2. Determine el trabajo neto sobre dicho bloque cuando va de A hasta B. ($d_{AB} = 5$ m)

A) 20 J
B) 10 J
C) 15 J
D) 18 J
E) 16 J



41. A través de un alambre se desplaza un collarín por la acción de una fuerza constante $\vec{F}$; determine la cantidad de trabajo de esta fuerza de A hacia B.

A) 80 J
B) 100 J
C) 120 J
D) 160 J
E) 180 J

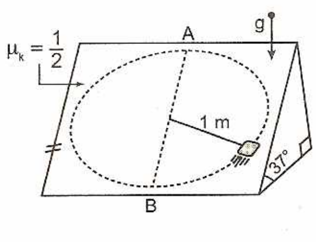


42. Un bloque es desplazado sobre una superficie horizontal mediante la fuerza que cambia con la posición de acuerdo con la siguiente ecuación: $\vec{F} = (2x + 1)$ N; donde x se expresa en metros. Determine la cantidad de trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, si en este tramo el trabajo neto es 12 J desde la posición $\vec{x} = +2$ m hasta la posición $\vec{x} = +4$ m.

A) −1 J B) −2 J C) −3 J
D) −4 J E) −5 J

43. El bloque de 100 g se encuentra realizando un movimiento circunferencial; determine el trabajo neto de A hacia B.

A) 2/5(3 − π) J
B) 3/2(3 − π) J
C) 3/4(2 − π) J
D) 5/2(1 − π) J
E) 3/5(1 − π) J

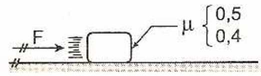


44. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. La cantidad de trabajo de una fuerza constante no depende de la trayectoria.
II. La cantidad de trabajo de la fuerza de rozamiento siempre es negativa.
III. Si el trabajo neto es cero, necesariamente el cuerpo no experimenta aceleración.

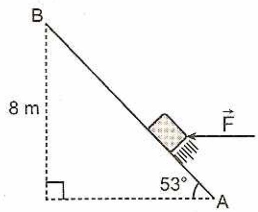
A) VFF B) VVF C) VVV
D) VFV E) FFF

45. El bloque de 5 kg es desplazado mediante una fuerza con rapidez constante de 2 m/s. Determine la cantidad de trabajo realizado mediante dicha fuerza en un intervalo de 4 s. (g = 10 m/s^2)



A) +120 J B) +150 J C) +160 J
D) −160 J E) +200 J

46. Si sobre el bloque se aplica una fuerza $\vec{F}$ de módulo 20 N, determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante dicha fuerza al desplazar el bloque desde A hacia B.
($\vec{F}$: constante)

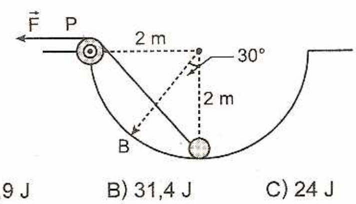


A) 80 J B) 120 J C) −80 J
D) −90 J E) 114 J

47. Un carro de 2000 kg se mueve en línea recta con una aceleración constante. Si el trabajo neto sobre el carro en un recorrido de 80 m fue 320 kJ, determine la aceleración del carro.

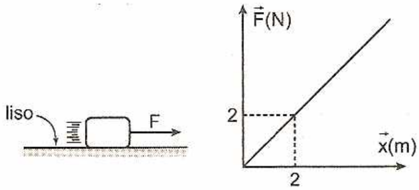
A) 0,5 m/s^2 B) 1 m/s^2 C) 2 m/s^2
D) 3 m/s^2 E) 4 m/s^2

48. Al extremo P de la cuerda se le ejerce una fuerza horizontal constante de módulo 30 N. Determine el trabajo de $\vec{F}$ sobre el pequeño cuerpo esférico liso cuando es trasladado de A hasta B.



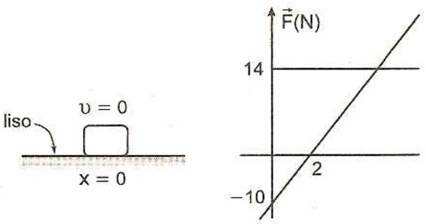
A) 24,9 J B) 31,4 J C) 24 J
D) 28 J E) 84 J

49. Al bloque mostrado se le aplica una fuerza $\vec{F}$ que varía según la gráfica adjunta. Determine la cantidad de trabajo que se realiza sobre el bloque desde $\vec{x}_0 = +2$ m hasta $\vec{x}_f = +10$ m.



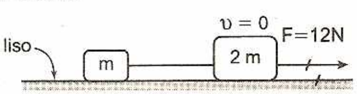
A) 12 J B) 24 J C) 48 J
D) 30 J E) 60 J

50. Sobre el bloque mostrado se ejercen dos fuerzas paralelas al eje x, cuya variación se indica en la gráfica. Determine la cantidad de trabajo neto realizado sobre el bloque desde x = 0 hasta x = 6 m.



A) 50 J B) 80 J C) 120 J
D) 140 J E) 200 J

51. Cuando se ejerce una fuerza F al sistema, este experimenta una aceleración de 4 m/s^2; determine el trabajo desarrollado por la cuerda ideal sobre el bloque de masa m en los dos primeros segundos de movimiento.

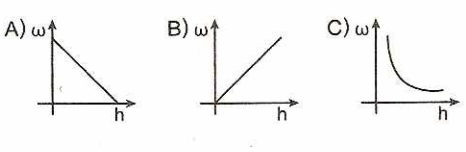


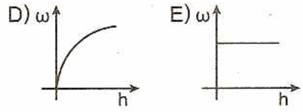
A) 8 J B) 16 J C) 24 J
D) 32 J E) 36 J

52. Una persona coloca cajas cúbicas de 30 cm de lado y 10 kg cada uno, una sobre otra. Determine el trabajo realizado por dicha persona al formar una columna de 12 cajas (g = 10 m/s^2)

A) 1560 J B) 1770 J C) 1880 J
D) 1980 J E) 2160 J

53. Un bloque es abandonado tal como se muestra. El gráfico que mejor representa el trabajo desarrollado por la tierra sobre tal bloque respecto a la altura h es





54. Una cortina de ventana de 1 kg y 2 m de longitud se enrolla alrededor de un rodillo sobre la ventana. ¿Qué trabajo se realiza en este caso?, menosprecie la fricción. (g = 10 m/s^2)

A) 9,8 J B) 10 J C) 15 J
D) 12 J E) 18,6 J

55. Una cuerda es usada para bajar verticalmente un bloque de masa M una altura h con una aceleración g/n. Calcule el trabajo realizado por la cuerda sobre el bloque, considerando n > 1.

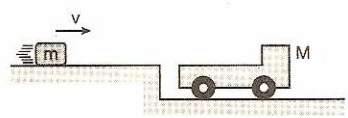
A) $-Mgh\dfrac{(n-1)}{n}$ B) $Mgh\dfrac{(n-1)}{n}$ C) $Mgh\dfrac{(n+1)}{n}$

D) $-Mgh\dfrac{n}{n-1}$ E) $-Mgh\dfrac{(n-1)}{(n+1)}$

56. El trabajo necesario para acelerar un cuerpo desde 0 hasta 4 m/s sobre una superficie horizontal lisa es

A) Igual que el necesario para acelerarlo de 1 m/s a 5 m/s.
B) El doble que el necesario para acelerarlo de 5 m/s a 6 m/s.
C) La mitad que el necesario para acelerarlo de 8 m/s a 10 m/s.
D) Igual que el necesario para acelerarlo de 2 m/s a 6 m/s.
E) La mitad que el necesario para acelerarlo de 2 m/s a 6 m/s.

57. El bloque mostrado desliza sobre una superficie lisa con una rapidez v e ingresa sobre una plataforma de superficies rugosas y cuya masa es de 50 kg. Determine la cantidad de trabajo mecánico (W) que realiza la plataforma sobre el bloque, si al final ambos avanzan con una rapidez constante de 2 m/s.



A) −120 J B) −60 J C) +80 J
D) +50 J E) −100 J

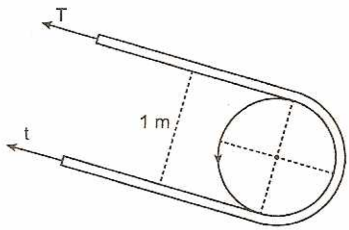
58. Para elevar 3,6 m^3 de agua a la azotea de una casa ubicada a 20 m de altura se utiliza una bomba hidráulica con un motor de 12 500 W. ¿Cuántos segundos se empleará en elevar toda el agua, sabiendo que el rendimiento de la bomba es de 0,8? (g = 10 m/s^2)

A) 60 s B) 70 s C) 72 s
D) 85 s E) 88 s

59. Un deslizador acuático que acelera a razón de $1\ m/s^2$ invierte el 50% de su potencia en vencer el rozamiento y el resto en aumentar su velocidad. Determine el coeficiente de rozamiento entre el deslizador y el agua.
$(g = 10\ m/s^2)$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

60. Una potencia P se transmite con ayuda de una correa. El radio de la polea de correa es de 50 cm, y esta gira uniformemente a razón de 300 RPM. La tensión del ramal motriz de la correa es T= 4 kN y excede en 60% a la tensión t del ramal conducido. Calcule la potencia P.



A) 1 kW B) 2 kW C) 7,5 kW
D) 4 kW E) 5 kW

61. Una hidroeléctrica consume $5\ m^3$ de agua por segundo de una gran represa que se encuentra a una altura de 200 m. Determine la potencia eléctrica generada en (MW), asumiendo una eficiencia del sistema del 60%. $(g = 10\ m/s^2)$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 12 E) 18,5

62. Un ventilador lanza un chorro de aire a través de una pequeña abertura. Si la potencia que desarrolla el ventilador es P, ¿qué nueva potencia debe desarrollar para que ahora la masa de aire lanzada por unidad de tiempo se triplique?

A) 3 P B) 9 P C) 18 P
D) 27 P E) 36 P

63. ¿Cómo debe variar la potencia del motor de una bomba para que ella pueda bombear, a través de un orificio fino, el doble de la cantidad de H_2O por unidad de tiempo? (P_0: Potencia inicial)

A) P_0 B) $2P_0$ C) $4P_0$
D) $8P_0$ E) $12P_0$

64. Un motor eleva un ascensor de 100 kg desde el reposo, de manera que alcanza una rapidez de 3 m/s a una altura de 12 m. Determine la potencia que desarrolla el motor. $(g = 10\ m/s^2)$

A) 1,556 kW B) 2,500 kW C) 2,556 kW
D) 3,255 kW E) 3,556 kW

65. Determine la potencia que absorbe el motor de una lancha que navega río abajo con una rapidez constante de 40 m/s, si al desplazarse soporta una resistencia del agua igual a 200 N, siendo la velocidad de este igual a 2 m/s (n = 0,76).

A) 8000 W B) 8400 W C) 7600 W
D) 10 000 W E) 12 000 W

66. A una máquina de 60% de rendimiento se le entrega 600 J de energía por cada segundo. Determine el trabajo realizado por ella durante 10 h de funcionamiento.

A) 6 kW-h B) 3 kW-h C) 3,6 kW-h
D) 7,2 kW-h E) 1 kW-h

67. Un bloque de 6 kg se lanza con 10 m/s sobre un piso áspero cuyo $\mu_k = 0{,}02t$ donde t se expresa en segundos y μ_k es adimensional. ¿Con qué potencia la fuerza de rozamiento logra detener el bloque?

A) 50 W B) 40 W C) 30 W
D) 20 W E) 10 W

68. Determine el trabajo que realiza una bomba hidráulica para elevar agua, en forma uniforme, hasta una altura de 20 m a razón de 50 L/s durante 10 s $(g = 10 m/s^2)$

A) 10 kJ B) 20 kJ C) 60 kJ
D) 80 kJ E) 100 kJ

CLAVES

1. A	10. C	19. E	28. E	37. A	46. E	55. A	64. A
2. D	11. D	20. E	29. C	38. E	47. C	56. E	65. D
3. C	12. C	21. B	30. B	39. E	48. C	57. E	66. C
4. B	13. E	22. A	31. C	40. A	49. C	58. C	67. C
5. E	14. C	23. B	32. C	41. B	50. C	59. A	68. E
6. E	15. C	24. C	33. B	42. B	51. D	60. C	
7. D	16. D	25. B	34. D	43. A	52. E	61. B	
8. B	17. D	26. A	35. B	44. D	53. A	62. D	
9. C	18. C	27. C	36. D	45. C	54. B	63. D	

Energía 07 capítulo

James Prescott Joule (Salford, Reino Unido, 1818-Sale, 11 de octubre de 1889) fue uno de los más notables físicos de su época, conocido sobre todo por sus investigaciones en electricidad, termodinámica y energía. Estudió el magnetismo y descubrió su relación con el trabajo mecánico, lo cual le condujo a la teoría de la energía. Hizo observaciones sobre la teoría termodinámica (efecto Joule-Thomson) y encontró una relación entre la corriente eléctrica que atraviesa una resistencia y el calor disipado, llamada actualmente ley de Joule. La unidad internacional de energía, el calor y trabajo, también llamada «joule» (o julio) fue bautizada en su honor.

Pero el área de investigación más fructífera de Joule fue la relativa a las distintas formas de energía: con sus experimentos verificó que al fluir una corriente eléctrica a través de un conductor, este experimenta un incremento de temperatura; a partir de ahí dedujo que si la fuente de energía eléctrica es una pila electroquímica, la energía debía proceder de la transformación llevada a cabo por las reacciones químicas, que la convertirían en energía eléctrica y de esta se transformaría en calor. Si en el circuito se introduce un nuevo elemento, el motor eléctrico, se origina energía mecánica. Ello le lleva a la enunciación del principio de

La energía es uno de los conceptos más importantes de la Física, y tal vez el término energía es uno de los que más se utilizan ahora en nuestro lenguaje cotidiano. Así, a pesar de que es muy difícil de definir, en pocas palabras, lo que es energía ya estamos acostumbrados a emplear esta palabra y ya se tiene, por tanto, cierta comprensión de su significado.

En la Física el concepto suele introducirse diciendo que la energía representa la capacidad de realizar trabajo. Así, diremos que un cuerpo posee energía cuando es capaz de realizar trabajo. Por ejemplo, una persona es capaz de realizar el trabajo de levantar un bloque debido a la energía que le proporcionan los alimentos que ingiere. Del mismo modo, el vapor de agua de una caldera posee energía, puesto que es capaz de efectuar el trabajo de mover las turbinas de una planta de generación eléctrica.

Como la energía se puede relacionar con el trabajo, también es una cantidad escalar. En consecuencia, la energía se mide con las mismas unidades de trabajo, es decir la energía se mide en *joules*.

Recuerda:
La energía es la medida cuantitativa del movimiento en todas sus formas. En mecánica, la energía se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo, en virtud a su movimiento mecánico y a la posición que ocupa en el campo gravitatorio respecto a un sistema de referencia.

ENERGÍA CINÉTICA (E_C)

Es aquella magnitud física escalar que sirve para expresar la medida cuantitativa del movimiento de los cuerpos o partículas en virtud a su velocidad respecto de un sistema de referencia.

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2} \qquad ...(7.1)$$

La energía cinética es igual al semiproducto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la velocidad.

Ejemplo:

¿Cuál es la energía cinética de un automóvil cuya masa es de 1600 kg, si posee una velocidad de 72 km/h?

Resolución:

Es conveniente recordar, que los valores de las magnitudes deben estar en el sistema internacional de unidades (SI). Por lo tanto, la velocidad v = 72 km/h = 20 m/s. Reemplazando en la ecuación (7.1)

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1600)(20)^2 \Rightarrow E_C = 320\,000\text{ J} = 320\text{ kJ}$$

La energía cinética del automóvil es igual a 320 kJ.

Recuerda:

- 1 km = 1000 m
- 1 h = 3600 s
- $1\,\frac{m}{s} = \frac{18}{5}\frac{km}{h}$
- $1\,\frac{km}{h} = \frac{5}{18}\frac{m}{s}$
- $18\,\frac{km}{h} = 5\,\frac{m}{s}$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA (E_P)

Es aquella magnitud física escalar, que se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo mecánico en virtud a su posición dentro del campo gravitatorio, respecto de un sistema de referencia.

$$\boxed{E_P = mgh} \qquad ...(7.2)$$

La energía potencial gravitatoria es igual al producto del peso (mg) del cuerpo por la altura (h).

Ejemplo:

Un agente externo eleva un bloque de 18 kg desde un punto A a 2 m del piso a otro punto B a 8 m del piso. ¿Cuál es el incremento de la energía potencial?

Resolución:

El trabajo realizado por el agente externo es igual al aumento de la energía potencial.

$$W_{A\to B} = \Delta E_P = mgh$$

donde la altura es el desplazamiento vertical.
$\Delta E_P = (18)(10)(6) = 1080$ J

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA (E_{PE})

Es aquella magnitud física escalar, que nos expresa aquella energía de los cuerpos elásticos (resortes) cuando se les deforma parcialmente al estirarse o comprimirse longitudinalmente.

$$\boxed{E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2} \qquad ...(7.3)$$

La energía potencial elástica acumulada por el resorte, es directamente proporcional al cuadrado de la deformación x del resorte.

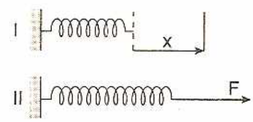


Fig. 7.1

k: constante elástica (N/m)
x: deformación longitudinal (m)

La figura 7.1 muestra un resorte deformado por acción de la fuerza $\vec{F}$. Podemos comprobar experimentalmente que al duplicar el alargamiento (a 2x), la fuerza se duplica (a 2F); al triplicar el alargamiento (a 3x), la fuerza se triplica (a 3F), etc.

Este mismo resultado podría comprobarse comprimiendo el resorte en vez de estirarlo. Por lo tanto, el experimento demuestra que: la fuerza ejercida por un resorte es directamente proporcional a su deformación.

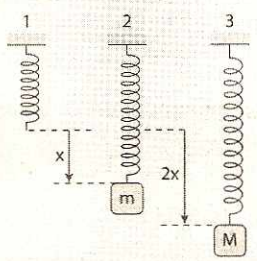
Ley de Hooke

$$\boxed{F = kx} \qquad ...(7.4)$$

La fuerza externa (deformadora del resorte) es directamente proporcional a la deformación del resorte.

Recuerda:
La fuerza deformadora es directamente proporcional a la deformación del resorte.

$$\Rightarrow M = 2m$$



Ejemplo:

Se tiene un resorte cuya longitud natural es $l_0 = 4$ m. Si colgamos de su extremo un bloque de peso 2000 N, la nueva longitud es $l = 6$ m. Calcula: 1) la constante elástica del resorte, 2) la energía acumulada en el resorte.

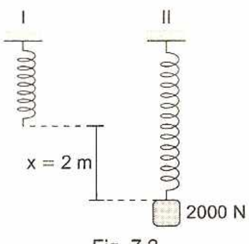


Fig. 7.2

Resolución:

De la figura 7.2 se puede deducir que la variación del tamaño del resorte es x = 2 m.

De la ecuación 7.4: F = kx, donde la fuerza deformadora es igual al peso del bloque,

F = 2000 N, reemplazando tenemos:

$$F = kx \Rightarrow 2000 = k(2) \Rightarrow k = 1000\ \frac{N}{m}$$

Para determinar la energía acumulada en el resorte aplicamos la ecuación 7.3:

$$E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(1000)(2)^2 \Rightarrow E_{PE} = 2000\ J$$

La energía acumulada en el resorte es 2000 *joules* o 2 *kilojoules*.

RELACIÓN ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

La figura 7.3 muestra un resorte comprimido que empuja un bloque desde el punto A, donde su deformación es $x_A = 0{,}4$ m, hasta el punto O, en el cual el resorte no presenta deformación. El diagrama F-x muestra cómo varía la fuerza F que el muelle ejerce sobre el bloque.

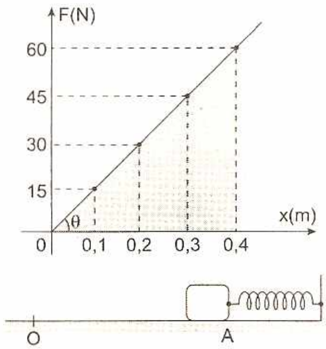


Fig. 7.3

Características de la gráfica F-x. La pendiente de la recta nos da el valor de la constante elástica:

$$k = \tan\theta = \frac{F}{x} = \frac{60}{0{,}4} = 150\ \frac{N}{m}$$

El área bajo la recta es igual al trabajo realizado por el muelle (resorte) sobre el bloque, entre dos puntos de su trayectoria.

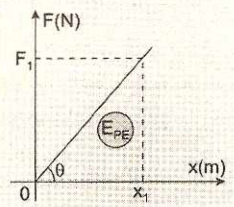
$$W^F = \frac{bh}{2} = \frac{(0{,}4)(60)}{2} = 12\ J$$

Cuando el bloque cambia de posición de A hasta O el muelle realiza un trabajo de 12 *joules*.

Importante:
En el diagrama F-x, para un resorte se cumple que:

1. $k = \tan\theta$: constante elástica
2. E_{PE} = área del triángulo

La energía potencial elástica (E_{PE}) es la capacidad que tiene el resorte para desarrollar o producir trabajo.



ENERGÍA MECÁNICA (E_M)

La energía mecánica de una partícula o un sistema de partículas en cada instante de tiempo es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial (gravitatoria y/o elástica), respecto de un sistema de referencia.

Principio general de conservación de la energía

La energía se puede transformar de una clase a otra, pero no puede ser creada ni destruida. De manera que la energía total es constante.

La energía no se crea ni destruye, solo se transforma.

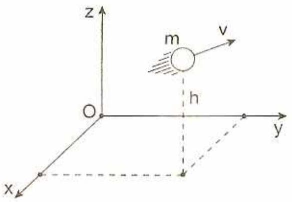


Fig. 7.4

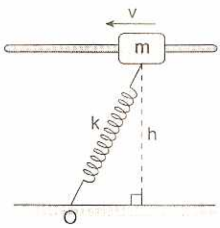


Fig. 7.5

En la figura 7.4, la partícula de masa m tiene altura h y velocidad $\vec{v}$, respecto del sistema de referencia, entonces tiene energía potencial gravitatoria y energía cinética en cada instante.

$$\boxed{E_M = E_P + E_C = mgh + \frac{1}{2}mv^2} \qquad ...(7.5)$$

En la figura 7.5, la partícula de masa m se mueve sobre una guía (barra) con velocidad $\vec{v}$, asociado a un resorte de constante elástica k cuya longitud cambia en cada instante, entonces el sistema (masa + resorte) tiene energía potencial (gravitatoria y elástica) y energía cinética respecto del sistema de referencia O,

$$E_M = E_P + E_{PE} + E_C$$

$$\boxed{E_M = mgh + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2} \qquad ...(7.6)$$

En general la energía mecánica se expresa así:

$$\boxed{E_M = E_P + E_C} \qquad ...(7.7)$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si la única fuerza que realiza trabajo sobre una partícula o sistema de partículas, es su propio peso y/o la fuerza elástica y libre de todo tipo de rozamiento, entonces, la energía mecánica del sistema se conserva en el tiempo.

$$\boxed{E_{M(inicial)} = E_{M(final)}} \qquad ...(7.8)$$

Ejemplo:

Un bloque parte del reposo en el punto A, figura 7.6, resbala sobre la superficie libre de rozamiento. Determinar la velocidad del bloque cuando pasa por la posición B.

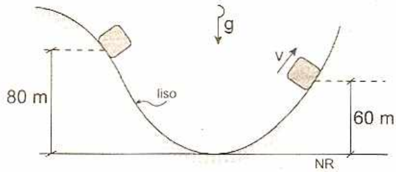


Fig. 7.6

Resolución:

Principio de conservación de la energía mecánica, ecuación (7.8)

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$E_P(A) + E_C(A) = E_P(B) + E_C(B)$$

$$\Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Pero: $v_A = 0$, (sale del reposo)

Reemplazando los datos:

$$m(10)(80) + 0 = m(10)(60) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

La masa se cancela en todos los términos:

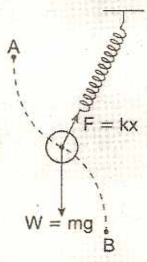
$$800 = 600 + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow 400 = v_B^2 \Rightarrow v_B = 20 \text{ m/s}$$

El bloque pasa por B con una velocidad de 20 m/s.

Fuerza conservativa

Si el trabajo realizado por una fuerza, entre dos puntos A y B, no depende de la trayectoria que el cuerpo sigue para ir de A a B, entonces la fuerza es conservativa. Por ejemplo, el peso y la fuerza elástica son fuerzas conservativas.

Si solo fuerzas conservativas actúan sobre un cuerpo en movimiento, su energía mecánica total permanece constante para cualquier punto de su trayectoria, o sea, que la energía mecánica del cuerpo se conserva.



TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA MECÁNICA

El trabajo realizado por fuerzas diferentes al peso y la fuerza elástica, sobre una partícula o sistema de partículas es igual a la variación de la energía mecánica.

$$\boxed{\Sigma W_{FNC} = \Delta E_M} \qquad \ldots(7.9)$$

Ejemplo:

Un bloque parte del reposo en el punto A, figura 7.7, resbala sobre el plano inclinado libre de rozamiento. En el punto B ingresa a una superficie áspera (rugosa) deteniéndose en el punto C. Hallar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el plano horizontal. Considere la masa del bloque 0,8 kg.

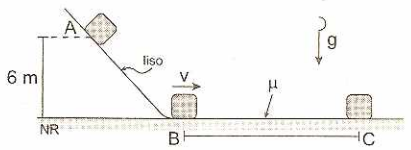


Fig. 7.7

Resolución:

En el tramo AB, no existe rozamiento, por consiguiente la energía mecánica se conserva en este tramo:

$$E_{M(B)} = E_{M(A)} \Rightarrow E_{M(B)} = E_P(A) + E_C(A) = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\Rightarrow E_{M(B)} = (0{,}8)(10)(6) + 0 \Rightarrow E_{M(B)} = 48\ \text{J} \qquad \ldots(\text{I})$$

En el tramo BC, existe rozamiento, de la ecuación 7.9, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$W^f = E_{M(C)} - E_{M(B)} \qquad \ldots(\text{II})$$

En la posición C el bloque no tiene velocidad ($v_C = 0$), ni altura $h_C = 0$ respecto de la línea de referencia.
Reemplazando en (2) tenemos: $E_{M(C)} = 0$

$$W^f = 0 - 48\ \text{J} \Rightarrow W^f = -48\ \text{J}$$

El signo negativo significa que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento del bloque.

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

El teorema de la energía cinética, para un cuerpo rígido se puede enunciar del siguiente modo:

El trabajo realizado por la fuerza resultante, de un sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, es igual a la variación de la energía cinética que experimenta el cuerpo.

$$\boxed{W^{F_R} = \Delta E_C} \qquad \ldots(7.10)$$

$$\boxed{W^{F_R} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m_0^2} \qquad \ldots(7.11)$$

Ejemplo:

Un cuerpo de 10 kg posee una velocidad de 8 m/s, sobre él se ejercen ciertas fuerzas que realizan un trabajo total de 400 J. Determinar la velocidad final que adquiere.

Resolución:

Aplicando la ecuación 7.11: $W^{F_R} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

Reemplazando datos:

$$400\ \text{J} = \frac{1}{2}(10)v_f^2 - \frac{1}{2}(10)(8)^2 \Rightarrow 400 = 5v_f^2 - 320$$

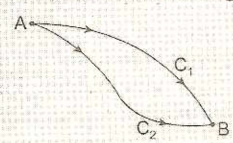
$$v_f^2 = 144 \Rightarrow v_f = 12\ \text{m/s}$$

Finalmente el cuerpo adquiere una velocidad de 12 m/s.

Fuerzas no conservativas

Las fuerzas cuyo trabajo depende del camino recorrido, se denominan fuerzas disipadoras, o bien fuerzas no conservativas. Un ejemplo típico de fuerza disipativa es la fuerza de fricción.

En realidad, si se hace desplazar un cuerpo sobre una superficie, llevándolo de un punto A a otro B, el trabajo efectuado por la fricción tendrá valores distintos, de acuerdo con el camino seguido.



$$\boxed{W^{C1} \neq W^{C2}}$$

Cuerpo rígido:

Es aquel cuyas deformaciones pueden despreciarse. La distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido no varía sean cuales fueran las acciones que se ejerzan sobre él. El cuerpo rígido se puede considerar como un sistema de puntos materiales rígidamente unidos entre sí. Ejemplos de cuerpo rígido: piedra, esfera de acero, barra de hierro, vaso de vidrio, etc.

CONCEPTOS ESPECIALES

1. **Concepto de energía.** La energía es una magnitud física escalar que sirve de medida general a las distintas formas de movimiento de la materia que estudiamos en Física.
   - La energía es la medida general cuantitativa del movimiento en todas sus formas.
   - La energía es la medida cuantitativa de forma principal de existencia de la materia (el movimiento).
   - En Física, para analizar las formas cualitativamente distintas del movimiento y las interacciones que le corresponden, se introducen diversas formas de energía: energía mecánica, interna o intrínseca, electromagnética, nuclear, atómica, calorífica, etc.
   - La energía mecánica está constituida por la energía cinética y la energía potencial en sus diversas formas.

- La energía potencial puede ser: gravitatoria (campo gravitacional), eléctrico (campo eléctrico), elástica (propiedades elásticas), etc.
- En mecánica, la energía se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo en virtud a su movimiento mecánico y la posición que ocupa dentro del campo gravitatorio homogéneo, respecto de un sistema de referencia.

2. **Teorema de la energía cinética o de las fuerzas vivas.** La variación de la energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre dicho sistema.

$\Sigma W^{EXT} + \Sigma W^{INT} = \Delta E_C$ ...(1)

- A la energía cinética también se le llama fuerza viva.
- A la cantidad de movimiento también se le llama fuerza muerta.

3. **Sistema formado por dos masas y un resorte.** La figura 7.8.a muestra dos bloques de igual masa, unidos mediante un hilo tenso, de modo que el resorte se encuentra deformado. Estos bloques están sobre un plano horizontal liso. La figura 7.8.b muestra el movimiento de los bloques después que el hilo se corta.

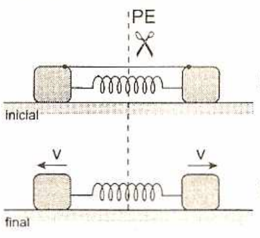


Fig. 7.8.a

Fig. 7.8.b

Conclusiones:

1. Cuando se corta este hilo, las masas se liberan y los bloques se alejan con rapidez v respecto de su posición de equilibrio.

2. Debido a que no hay rozamiento, la suma de fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a cero, entonces las únicas fuerzas que realizan trabajo son las fuerzas internas.

3. La variación de la energía cinética del sistema (bloques + resorte) mecánico es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas internas.

$W^{EXT} = 0$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $\Sigma W^{INT} = \Delta E_C$

4. **Cuerpo rígido.** Si el sistema es indeformable, cuerpo rígido, el trabajo realizado por las fuerzas internas es igual a cero.

$\Sigma W^{INT} = 0$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1) tenemos: $\Sigma W^{EXT} = \Delta E_C$

El teorema de la energía cinética para un cuerpo rígido se podría enunciar del siguiente modo: El trabajo realizado por la fuerza resultante de un sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo, es igual a la variación de la energía cinética.

5. **Partícula o masa puntual.** Una partícula es un cuerpo de dimensiones despreciables y no tiene propiedades elásticas, es decir es una masa puntual. Entonces el trabajo realizado por las fuerzas internas es igual a cero.

$\Sigma W^{INT} = 0$ ...(4)

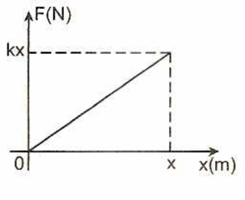
Reemplazando (4) en (1) tenemos: $\Sigma W^{EXT} = \Delta E_C$

El trabajo realizado por las fuerzas externas, sobre una partícula, es igual a la variación de su energía cinética.
De otra forma: el trabajo neto realizado por las fuerzas externas es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

$$W_{NETO} = \Sigma W^{EXT} = \frac{m(v_f^2 - v_0^2)}{2} \qquad ...(5)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Al estirar un resorte una longitud x, la fuerza externa varía desde cero hasta F = kx. Calcular la cantidad de trabajo desarrollado sobre el resorte.



Resolución:

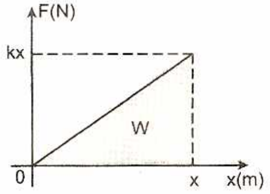
El módulo de la fuerza varía linealmente, desde 0 hasta kx. La cantidad de trabajo hecho sobre el resorte es igual al producto de la fuerza media, por la distancia d.

$$F_{medida} = \frac{F_{inicial} + F_{final}}{2} = \frac{0 + kx}{2} = \frac{kx}{2}$$

$$d = x_{final} - x_{inicial} = x - 0 = x$$

La cantidad de trabajo es:

$$W^{F}_{i\to f} = F_{media}d = \frac{kx}{2}(x) = \frac{kx^2}{2}$$



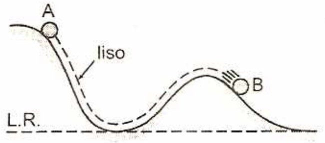
La cantidad de trabajo hecho es numéricamente igual al área bajo el segmento de recta (en general bajo la curva) cuando la fuerza varía en función de la posición sobre el eje x.

$$W^{F}_{i\to f} = \text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

Reemplazando los datos:

$$W^{F}_{i\to f} = \frac{(x)(kx)}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

2. Se muestra el movimiento de un pequeño bloque cuya rapidez cambia $v_A = 2{,}0$ m/s; $v_B = 10{,}0$ m/s. Sabiendo que no hay rozamiento, determinar la diferencia de alturas entre A y B. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

No hay rozamiento, entonces aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica. La altura se mide respecto de la línea de referencia.

$$mgh_A + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B + \frac{mv_B^2}{2}$$

$$m(10)h_A + \frac{m(2)^2}{2} = m(10)h_B + \frac{m(10)^2}{2}$$

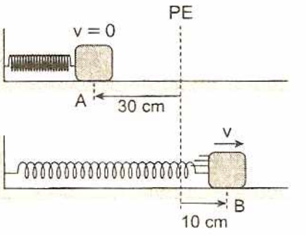
$$10h_A + 2 = 10h_B + 50$$

$$10h_A - 10h_B = 48 \quad \therefore\ h_A - h_B = 4{,}8 \text{ m}$$

3. Un bloque de 2,0 kg que se encuentra asociado a un resorte de constante elástica $k = 100$ N/m, se suelta (reposo) cuando el resorte está comprimido 30 cm. Sabiendo que no hay rozamiento, determinar la rapidez del bloque cuando el resorte se encuentra estirado 10 cm.

Resolución:

Fijamos nuestro sistema de referencia en el plano horizontal. No hay rozamiento, entonces la energía mecánica se conserva en el tiempo: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$



$$\frac{mv_A^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + \frac{kx_B^2}{2}$$

$$\text{Reemplazando: } 0 + \frac{100(0,3)^2}{2} = \frac{2(v)^2}{2} + \frac{100(0,1)^2}{2}$$

$$\therefore\ v = 2 \text{ m/s}$$

4. Un avión de papel de 50 gramos tiene rapidez 8 m/s en el instante que se encuentra a 3 m del piso. Determinar la cantidad de energía mecánica (en J) del avión respecto del piso. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

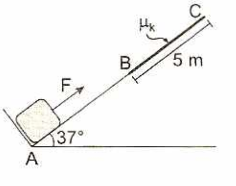
Como la masa se mide en kilogramos, $m = 0{,}05$ kg.
Cálculo de la cantidad de energía mecánica:

$$E_M = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

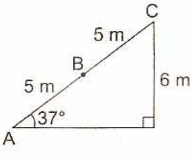
$$\Rightarrow E_M = \frac{0,05(8)^2}{2} + 0,05(10)(3) = 3,1 \text{ J}$$

Por lo tanto, la cantidad de energía mecánica es 3,1 J.

5. El bloque de masa $m = 1$ kg se encuentra inicialmente en reposo en la posición A del plano inclinado mostrado en la figura. Si de pronto actúa una fuerza constante $F = 10$ N en dirección paralela al plano inclinado, determinar la velocidad del bloque cuando pase por el punto C. Considerar que solo existe rozamiento en el tramo BC ($\mu_k = 0{,}8$) y que $AB = BC = 5$ m.
($g = 10$ m/s^2).



Resolución:



El trabajo realizado por todas las fuerzas externas diferentes al peso es igual a la variación de la energía mecánica:

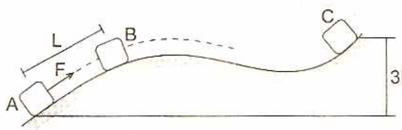
$W^F + W^{ROZ} = E_{M(C)} - E_{M(A)}$

$Fd_{AC} - \mu_k mg(\cos 37°)d_{BC} = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 - 0$

$$(10)(10) - (0{,}8)(1)(10)\left(\frac{4}{5}\right)(5) = (1)(10)(6) + \frac{1}{2}(1)v_C^2$$

$$100 - 32 = 60 + \frac{1}{2}v_C^2 \quad \therefore v_C = 4 \text{ m/s}$$

6. A un bloque de masa m se le aplica una fuerza constante F = 2mg a lo largo del tramo AB. Si el bloque parte del reposo de la posición A, determinar su velocidad cuando pasa por la posición C. No existe rozamiento. AB = L.



Resolución:

El trabajo realizado por la fuerza F es igual a la variación de la energía mecánica:

$$W^F = E_{M(C)} - E_{M(A)} \Rightarrow Fd_{AB} = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 - 0$$

$$\Rightarrow (2mg)L = mg(3L) + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow -gL = \frac{1}{2}v_C^2$$

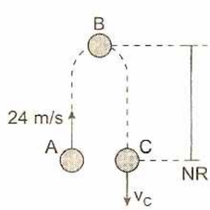
$$\Rightarrow v_C = \sqrt{-2gL}$$

Por lo tanto, el bloque no llega a la posición C.

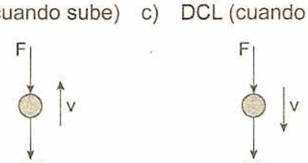
7. ¿Con qué velocidad tocará el suelo una piedra que es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 24 m/s, si ésta antes de retornar alcanza una altura máxima de 18 m? Considerar la fuerza de resistencia del aire constante. $g = 10 \text{ m/s}^2$

Resolución:

a)



b) DCL (cuando sube) c) DCL (cuando baja)



El trabajo realizado por la fuerza del aire (F) es igual a la variación de la energía mecánica en cada tramo.

Tramo A → B: $W^F = E_{M(B)} - E_{M(A)}$

$$W^F = mgh - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W^F = 180m - 288m = -108m \qquad ...(1)$$

Tramo B → C:

$$W^F = E_{M(C)} - E_{M(B)} \Rightarrow W^F = \frac{1}{2}mv_C^2 - mgh$$

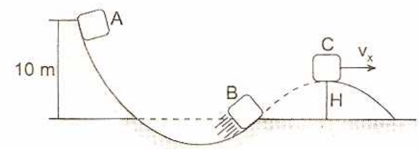
$$W^F = \frac{1}{2}mv_C^2 - 180m \qquad ...(2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - 180m = -108m \Rightarrow v_C^2 = 144$$

$$\therefore v_C = 12 \text{ m/s}$$

8. Un bloque que parte del reposo en A resbala por una rampa y pierde entre A y B el 10% de su energía mecánica por efecto del rozamiento. Si en el punto C de máxima altura su velocidad es $v_x = 6$ m/s, calcular la altura máxima H. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución:

La energía mecánica en el punto B es el 90% de la energía mecánica en A. Pero la energía mecánica en los puntos B y C son iguales: $E_{M(B)} = E_{M(C)}$

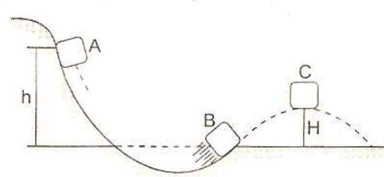
$$0{,}9E_{M(A)} = E_{M(C)} \Rightarrow 0{,}9mgh_A = mgH + \frac{1}{2}mv_x^2$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$0{,}9(10)(10) = (10)H + \frac{1}{2}(6)^2 \Rightarrow 90 = 10H + 18$$

$$\therefore H = 7{,}2 \text{ m}$$

9. Un bloque parte del reposo en A, resbala por la rampa AB. Si cuando pasa por el punto C su velocidad es 4 m/s, hallar la altura máxima H que alcanza en su movimiento parabólico. No hay rozamiento. h = 5 m.
($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución:

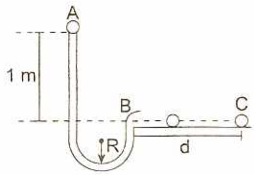
Principio de conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y C: $E_{M(A)} = E_{M(C)}$

$$E_{p(A)} + E_{C(A)} = E_{p(C)} + E_{C(C)}$$

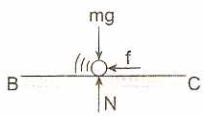
$$mgh + 0 = mgH + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow gh = gH + \frac{1}{2}v_C^2$$

$$\Rightarrow (10)(5) = (10)H + \frac{1}{2}(4)^2 \quad \therefore H = 4{,}2 \text{ m}$$

10. Una esferita de masa m se deja en libertad en la posición A. Hallar la distancia d, si el coeficiente de rozamiento entre B y C es 0,5 (cinético). La tubería es lisa.



Resolución:



La energía mecánica se conserva entre los puntos A y B: $E_{M(A)} = E_{M(B)} = mgh$ ...(1)

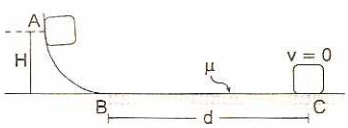
El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre B y C, es igual a la variación de la energía mecánica.

$W^f = E_{M(C)} - E_{M(B)} \Rightarrow fd = 0 - E_{M(B)}$

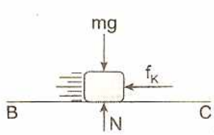
$-\mu(mg)d = -mgh \Rightarrow d = \dfrac{h}{\mu}$

Reemplazando los datos tenemos: $d = 2$ m

11. Un bloque parte de A sin velocidad inicial y se desliza por el camino mostrado. ¿Qué distancia d recorre en la parte plana, si solo existe rozamiento en la superficie horizontal? El coeficiente de rozamiento cinético es 0,5. Considere: $g = 10$ m/s^2 y $H = 2,5$ m.



Resolución:



Principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(A)} = E_{M(B)} = mgH$ ...(1)

Teorema del trabajo y la energía mecánica: el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica entre B y C.

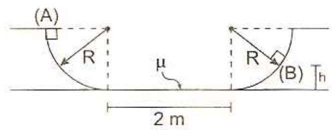
$W^f = E_{M(C)} - E_{M(B)}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$-f_k d = 0 - mgH \Rightarrow -\mu(mg)d = -mgH \Rightarrow d = \dfrac{H}{\mu}$

Reemplazando los datos tenemos: $d = 5$ m

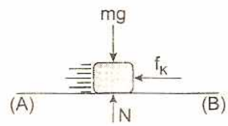
12. Un bloque parte de A sin velocidad inicial y se desliza por el camino mostrado en la figura ($R = 1$ m). Hasta que altura (B) sube el bloque, si solo hay rozamiento en la parte plana. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,4.



Resolución:

Teorema del trabajo y la energía mecánica:

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica, que experimenta el bloque.



$W^f = E_{M(B)} - E_{M(A)} \Rightarrow W^f = E_{P(B)} + E_{C(B)} - E_{P(A)} - E_{C(A)}$

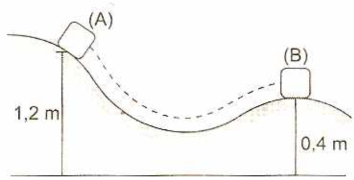
$W^f = mgh + (0) \Rightarrow -mgR - (0)$

$-f_k d = -mg(R - h)$

$\mu(mg)d = mg(R - h) \Rightarrow h = R - \mu d$

$\Rightarrow h = 1 - (0,4)(2) \quad \therefore h = 0,2$ m

13. En la figura mostrada se abandona un bloque de masa 1 kg en la posición (A) desplazándose luego por acción de su peso, cuando pasa por la posición (B) su velocidad es igual a 3 m/s. Determinar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento sobre el bloque. $g = 10$ m/s^2



Resolución:

Teorema del trabajo y la energía mecánica:

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, es igual a la variación de la energía mecánica que experimenta el bloque.

$W^f = E_{M(B)} - E_{M(A)} \Rightarrow W^f = E_{P(B)} + E_{C(B)} - E_{P(A)} - E_{C(A)}$

$\Rightarrow W^f = mg(0,4) + \frac{1}{2}mv^2 - mg(1,2) - 0$

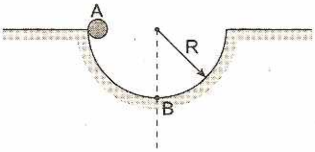
$W^f = mg(-0,8) + \frac{1}{2}mv^2$

Reemplazando los datos tenemos: $W^f = -3,5$ J

El signo (−), se debe a que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento del bloque.

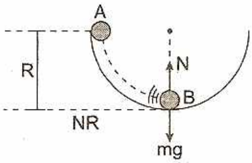
14. Una esfera de peso 3 N se abandona en la posición A, sobre una superficie cilíndrica perfecta-

mente lisa. Determinar la reacción normal sobre la esfera cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria.



Resolución:

Principio de la conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:



$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{P(A)} = E_{C(B)}$

$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2gR$ ...(1)

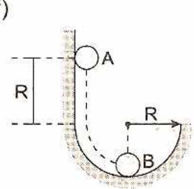
Dinámica circunferencial en la posición B:

$F_C = ma_C \Rightarrow N - mg = m\frac{v_B^2}{R}$ ...(2)

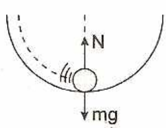
Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$N = 3mg \quad \therefore N = 9\ N$

15. Una esfera de peso 20 N se abandona en A, sabiendo que no hay rozamiento, determinar la reacción normal sobre la esfera cuando pasa por la posición B.
($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:



Principio de conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y B:

$E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$mg(2R) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_B^2 = 4gR$ ...(1)

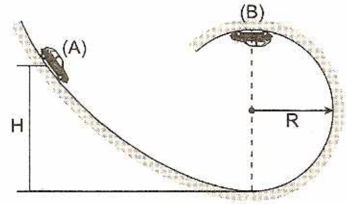
Dinámica circunferencial en B:

$F_C = ma_C \Rightarrow (N - mg) = m\frac{v_B^2}{R}$ ...(2)

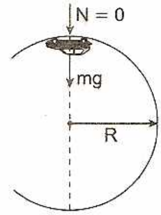
Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$N = 5mg \quad \therefore N = 100\ N$

16. Un carrito de masa m se abandona en la posición (A). Determinar la altura mínima H, tal que el móvil puede pasar por la posición B. Desprecie el rozamiento. Radio del rizo R.



Resolución:



Analizando las fuerzas que actúan sobre el móvil, en B:

Cuando el móvil pasa con su mínima velocidad en B, la reacción normal sobre las llantas tiende a cero: $N = 0$

Dinámica circunferencial en la posición B:

$F_C = ma_C \Rightarrow mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR$ ...(1)

Principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

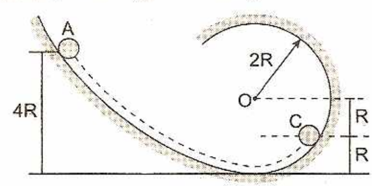
$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$

$\Rightarrow mgH + 0 = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$

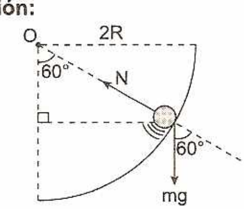
de (1): $mgH = mg(2R) + \frac{1}{2}mgR$

Luego: $H = (2,5)R$

17. Una partícula de masa $m = 2$ kg es abandonada en A. Calcular la reacción normal cuando pasa por la posición C, sobre la superficie de curvatura 2R. No hay rozamiento. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:



Principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y C: $E_{M(A)} = E_{M(C)}$

$$mg(4R) = mg(R) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_C^2 = 6gR \qquad ...(1)$$

Dinámica circunferencial en C: $F_C = ma_C$

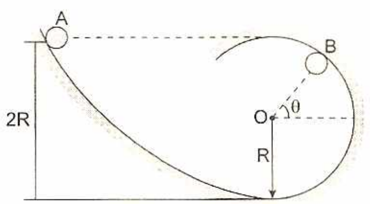
$$(N - mg\cos 60°) = m\frac{v^2}{(2R)} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$N = \frac{7}{2}mg \qquad ...(3)$$

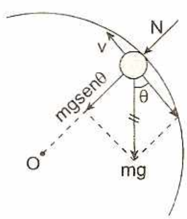
$N = 70\ N$

18. Una esfera de masa m se abandona en la posición A. Determinar la posición definida por el ángulo θ en el cual la esfera abandona la superficie cilíndrica de radio R.



Resolución:

DCL (esfera) en B:



Del principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(en\ A)} = E_{M(en\ B)}$

$$mg(2R) = mg(R + R\,\mathrm{sen}\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2Rg(1 - \mathrm{sen}\theta) \qquad ...(1)$$

En el instante que la esfera abandona la superficie, la reacción normal es igual a cero, $N = 0$.

Dinámica circunferencial en el punto B:

$$F_C = m\frac{v^2}{R}$$

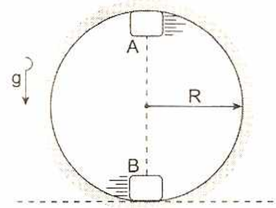
$$(mg\,\mathrm{sen}\theta + N) = m\frac{2gR(1 - \mathrm{sen}\theta)}{R}$$

$$\Rightarrow mg\,\mathrm{sen}\theta + 0 = 2mg\,(1 - \mathrm{sen}\theta)$$

$$\mathrm{sen}\theta = 2 - 2\mathrm{sen}\theta \Rightarrow \mathrm{sen}\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)$$

19. Un móvil de masa m se mueve dentro de un aro situado en un plano vertical. En el punto más alto A su velocidad es de 4 m/s y en el punto más bajo B es de 6 m/s. Si se desprecia la fricción entre la pista circular y el cuerpo, calcular el radio del aro. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

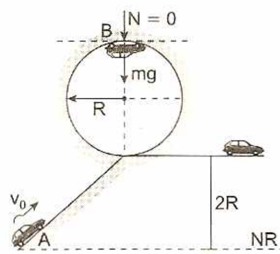
Principio de conservación de la energía mecánica, tomando como referencia la línea horizontal que pasa por B.

$$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow mg(2R) + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Reemplazamos los datos en el SI:

$$10(2R) + \frac{1}{2}(16) = \frac{1}{2}(36) \qquad \therefore R = 0{,}5\ m$$

20. En el sistema mecánico mostrado, hallar la mínima velocidad v_0 que debe tener el carrito en la posición A de modo que pueda rizar el rizo completamente. Desprecie la pérdida de energía por rozamiento.



Resolución:

Cuando el carrito pasa por el límite superior de su trayectoria, la reacción normal de la superficie sobre las ruedas es igual a cero, $N = 0$, de la condición del problema, su energía cinética debe ser mínima.

De la segunda ley de Newton, en la posición B. Dinámica circunferencial: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$, entonces:

$$mg = m\frac{v^2}{R} \qquad ...(1)$$

Luego: $v^2 = gR \qquad ...(2)$

Por principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:

$$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$$

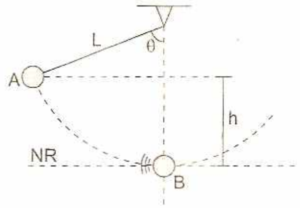
$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(4R) + \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(3)$$

Reemplazando (2) en (3):

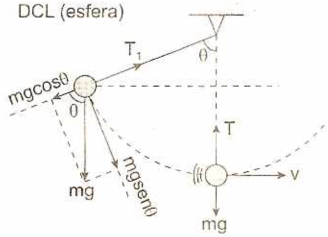
$$\frac{1}{2}v_0^2 = 4gR + \frac{1}{2}gR$$

Despejando tenemos que: $v_0 = 3\sqrt{gR}$

21. Una bola, colgada de un hilo, se balancea en el plano vertical de modo que su aceleración en las posiciones superior e inferior (límite) son de iguales módulos. Encontrar el ángulo θ de inclinación en la posición límite.



DCL (esfera)



Resolución:

De la condición del problema, la velocidad en la posición A es igual a cero. Por principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:

$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$ ...(1)

donde:

$v_A = 0, \quad h = L(1 - \cos\theta)$ ...(2)

En (1):

$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$ ...(3)

Reemplazando (2) en (3):

$v_B^2 = 2gL(1 - \cos\theta)$ ...(4)

La aceleración total en A es puramente tangencial, no tiene la componente centrípeta ($v_A = 0$).

$a_A = \frac{\Sigma F_{(tangencial)}}{m} = \frac{mg(\text{sen}\theta)}{m} = g(\text{sen}\theta)$ ...(5)

La aceleración total en B es puramente centrípeta, no tiene la componente tangencial, todas las fuerzas son radiales.

$a_B = \frac{\Sigma F_{(radiales)}}{m} = \frac{v^2}{R}$ ...(6)

Reemplazando (4) en (6):

$a_B = \frac{2gL(1 - \cos\theta)}{L} = 2g(1 - \cos\theta)$ ...(7)

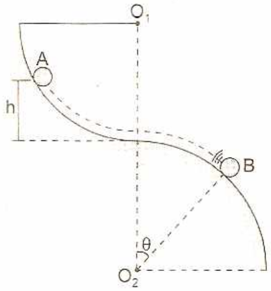
De la condición, igualamos las ecuaciones (5) y (7):

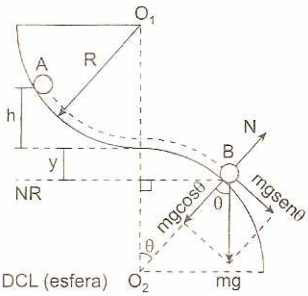
$g(\text{sen}\theta) = 2g(1 - \cos\theta)$

$\text{sen}\theta = 2 - 2\cos\theta$, entonces: $\text{sen}\theta + 2\cos\theta = 2$ ...(8)

Resolviendo la ecuación (8): $\theta = 53°$

22. Un canal se compone de dos cuadrantes con centros O_1 y O_2 respectivamente, de radios de curvatura iguales a R. Se abandona una esferita en la posición A a una altura $h = R/5$, de la horizontal que pasa por el punto de inflexión de la trayectoria curvilínea. Despreciando todo tipo de rozamiento, determinar en qué posición del segundo tramo, definido por el ángulo θ, la esferita abandona la superficie.





DCL (esfera)

Resolución:

Analizando a la esferita en la posición (B) en que abandona la superficie (deja de hacer contacto), entonces la reacción normal es igual a cero:

$N = 0$ ...(1)

De la segunda ley de Newton (Dinámica circunferencial) en B:

$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$, entonces: $mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R}$

Luego: $v_B^2 = Rg(\cos\theta)$ ...(2)

Por principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B, respecto a la línea de referencia (NR).

$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$

$mg(h + y) + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$ ...(3)

De la figura (2) se deduce que:

$y = R - R\cos\theta$ ...(4)

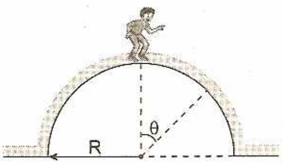
Reemplazando (2) y (4) en (3):

$mg(\frac{R}{5} + R - R\cos\theta) = \frac{1}{2}m(Rg(\cos\theta))$

$\frac{6}{5} - \cos\theta = \frac{1}{2}(\cos\theta)$, entonces: $\cos\theta = \frac{4}{5}$

Luego: $\theta = 37°$

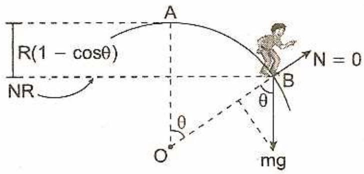
23. Un niño se deja caer desde la parte superior de un semicilindro liso. Determinar la posición definida por el ángulo θ en el instante en que el niño abandona la superficie.



Resolución:

En el instante que el niño abandona la superficie, la reacción normal N de la superficie es igual a cero, N = 0.

Principio de conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y B:



$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{P(A)} = E_{C(B)}$

$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2$

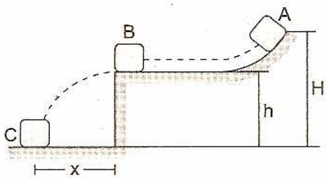
$v_B^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$ ...(1)

Dinámica circunferencial en la posición B:

$F_C = ma_C \Rightarrow mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $\theta = \arccos(2/3)$

24. En la figura se abandona un cubito de hielo en la posición A, luego se desliza sin rozamiento, abandona la rampa en dirección horizontal, describiendo un movimiento parabólico. Calcular el desplazamiento horizontal x que experimenta el hielo, donde H = 4 m; h = 2 m.



Resolución:

Principio de conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y B: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_B^2 = 2g(H - h)$ ...(1)

En el tramo B – C: caída libre

En la vertical, eje y:

$h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 0 + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ...(2)

En el eje horizontal: MRU $x = v_Bt$ ...(3)

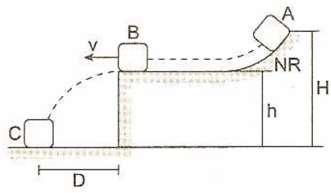
Reemplazando (1) y (2) en (3): $x = 2\sqrt{(H - h)h}$

Del dato: x = 4 m

25. Un pequeño bloque de hielo, desde la posición A, sale sin velocidad inicial de la cúspide de una rampa lisa de altura H que tiene un trampolín horizontal. ¿Para qué valor de la altura h del trampolín el bloque de hielo experimentará el máximo desplazamiento horizontal D?

Dato: H

Incógnitas: h y D.



Resolución:

Por el principio de conservación de la energía mecánica, entre A y B: $E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$

$mg(H - h) + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h)}$ ...(1)

Movimiento parabólico entre los puntos B y C:

En el eje vertical, caída libre:

$h = \frac{1}{2}gt^2$, entonces: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ...(2)

En el eje horizontal: MRU, entonces: $D = vt$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$D = 2\sqrt{(H - h)h}$ ...(4)

Analizando la ecuación (4). El desplazamiento será máximo cuando el subradicando también sea máximo. De la propiedad aritmética: el producto de dos factores es máximo cuando los factores tienen igual valor.

Luego: $(H - h)h$ = es máximo, cuando: $h = (H - h)$

Entonces: $2h = H$, luego tenemos que:

$h = \frac{H}{2}$ ...(5)

Reemplazando (5) en (4): $D_{(\text{máximo})} = H$ ...(6)

Otro modo de hallar h es analizando el subradicando y luego completar cuadrados:

$E = (H - h)h = hH - h^2 + \frac{H^2}{4} - \frac{H^2}{4}$

$E = \frac{H^2}{4} - \left(\frac{H^2}{4} - hH + h^2\right) = \frac{H^2}{4} - \left(\frac{H}{2} - h\right)^2$ ...(7)

Propiedad: El mínimo valor de un número elevado al cuadrado es igual a cero.

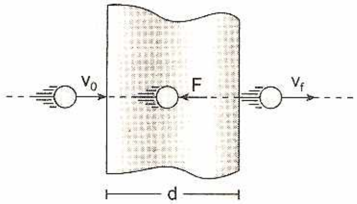
En la ecuación (7), E será máximo, cuando el sustraendo sea mínimo, esto quiere decir (de la propiedad) igual a cero.

Luego: $\left(\frac{H}{2} - h\right)^2 = 0$, entonces: $\frac{H}{2} - h = 0$

$\therefore\ h = \frac{H}{2}$

26. La velocidad horizontal de una bala de 50 gramos de masa cambia de 500 hasta 100 m/s al atravesar una tabla de 20 cm de ancho. Determinar la fuerza de resistencia media que ejerció la tabla sobre la bala.

Resolución:



Teorema del trabajo y la energía mecánica:
El trabajo realizado por la fuerza de resistencia F es igual a la variación de la energía mecánica, entre dos puntos de su trayectoria.

$$W^F = E_{M(f)} - E_{M(0)} \Rightarrow -Fd = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

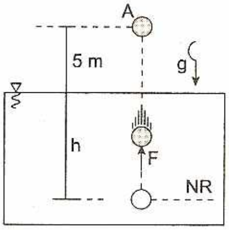
Reemplazando los datos en el SI tenemos:
F = 30 kN

27. Una esfera cuyo peso es de 10 N, se suelta desde una altura de 5 m sobre un pantano. La fuerza de resistencia media que ofrece el pantano al hundimiento de la esfera es 20 N, ¿hasta qué profundidad logrará llegar la esfera?

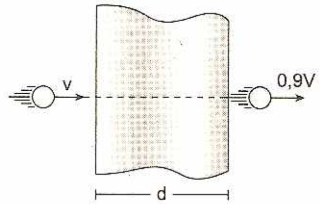
Resolución:
Teorema del trabajo y la energía mecánica:
El trabajo realizado por la fuerza de resistencia media F, es igual a la variación de la energía mecánica entre dos puntos de su trayectoria.

$$W^F = E_{M(B)} - E_{M(A)} \Rightarrow -Fh = 0 - mg[h + 5]$$

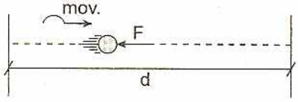
$$\Rightarrow 20h = 10(h + 5) \qquad \therefore\ h = 5\text{ m}$$



28. La figura muestra un proyectil que se mueve horizontalmente con una velocidad v y una energía cinética igual a 600 J. El proyectil atraviesa un bloque de madera de espesor d = 19 cm, de tal modo que la velocidad del proyectil cuando sale es 0,9v. Calcular la fuerza de oposición promedio que ejerce la madera al paso del proyectil.



Resolución:



Teorema del trabajo y la energía mecánica:
El trabajo realizado por fuerzas diferentes al peso, es igual a la variación de la energía mecánica del proyectil.

$$W^F = E_{M(f)} - E_{M(0)} \Rightarrow W^F = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) \qquad ...(1)$$

Pero, del dato del problema: $\frac{1}{2}mv^2 = 600$ J
Reemplazando en (1):

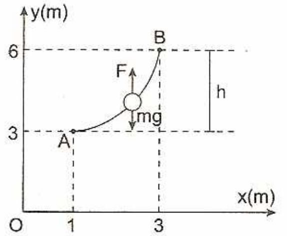
$$-Fd = -\frac{1}{2}m(0,19v^2) = -(0,19)\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\Rightarrow F(0,19) = (0,19)(600)$$

$$\therefore\ F = 600\text{ N}$$

29. Se tiene una partícula de masa 2 kg en la posición A (1; 3) m con velocidad (0; 5) m/s. Una fuerza desconocida actúa sobre dicha masa llevándola a la posición B (3; 6) m. En la segunda posición la velocidad es (6; 8) m/s, ¿cuánto vale el trabajo de la fuerza desconocida?
Existe un campo de gravedad y vale (0; −10) m/s^2.

Resolución:
La velocidad de la partícula en la posición A es 5 m/s y en B es 10 m/s. El desplazamiento en la vertical, eje y, es h = 3 m. El peso realiza un trabajo negativo igual a: −mgh.



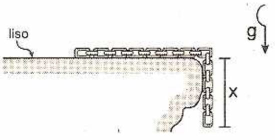
Del teorema de la energía cinética:
El trabajo realizado por todas las fuerzas, es igual a la variación de la energía cinética.

$$W_{neto} = \Delta E_{jk}$$

$$W^F - mgh = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

Reemplazando los datos tenemos: $W^F = 135$ J

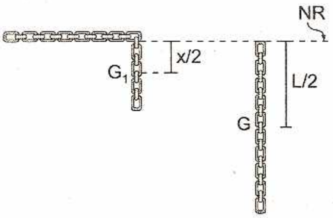
30. Una cadena uniforme de longitud L, se abandona sobre una superficie horizontal perfectamente lisa, como indica la figura. Calcular la velocidad de la cadena en el instante que el último eslabón se desprende de la superficie horizontal.



Resolución:

El peso de cada parte de la cadena homogénea es directamente proporcional a la longitud.

$$W = kx$$



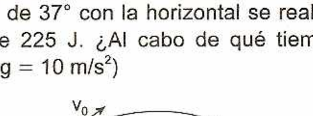
Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(0)} = E_{M(f)} \Rightarrow E_{P(0)} = E_{P(f)} + E_{C(f)}$$

$$kx\left(-\frac{x}{2}\right) = kL\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{kL}{g}\right)v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{(L^2 - x^2)}{L}g}$$

La energía potencial gravitatoria es negativa, cuando el centro de masa (G) se encuentra debajo de la línea de referencia (NR).

31. Al lanzar una partícula de 2 kg de masa con un ángulo de 37° con la horizontal se realiza un trabajo de 225 J. ¿Al cabo de qué tiempo cae al piso? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

El trabajo realizado para lanzar la partícula, es igual a la energía cinética de la partícula en el lanzamiento.

$$E_C = W^{EXT} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = 225\ J \Rightarrow v_0 = 15\ m/s$$

Luego, la velocidad de lanzamiento de la partícula es $v_0 = 15\ m/s$. La componente vertical inicial de la partícula es $V_{0(y)} = 9\ m/s$. Analizando el movimiento parabólico en el eje vertical:

$$h = v_{0(y)}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 9t - 5t^2 \Rightarrow t = 1{,}8\ s$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo de la partícula es 1,8 segundos.

32. Un cuerpo de 10 kg de masa posee una velocidad de 8 m/s, sobre él se ejercen ciertas fuerzas que realizan un trabajo total de 400 J. Determinar la velocidad final que adquiere.

Resolución:

Del teorema de la energía cinética:

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética.

$$W_{NETO} = \Delta E_C \Rightarrow W_{NETO} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow 400 = \frac{1}{2}10(v_f^2 - 8^2) \quad \therefore\ v_f = 12\ m/s$$

33. Sobre un cuerpo de masa 5 kg actúa una fuerza resultante F que le hace variar su velocidad desde 16 m/s hasta 20 m/s. Determinar el trabajo neto realizado sobre el cuerpo.

Resolución:

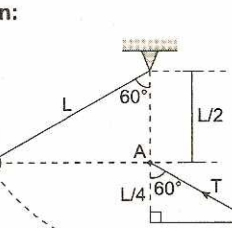
Del teorema de la energía cinética:

El trabajo neto realizado sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética.

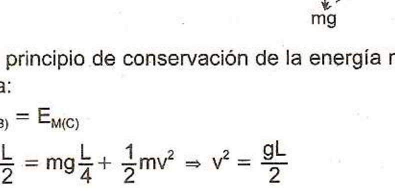
$$W_{NETO} = \Delta E_C \Rightarrow W_{NETO} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

Reemplazando los datos tenemos: $W_{NETO} = 360\ J$

34. Un péndulo formado por una esferita de peso 8 N y una cuerda de longitud L de peso despreciable, se abandona formando el hilo un ángulo de 60° con la vertical. El clavo colocado horizontalmente en A obliga al péndulo a desviarse, como muestra la figura. Determinar la tensión en la cuerda cuando forma nuevamente 60° con la vertical.



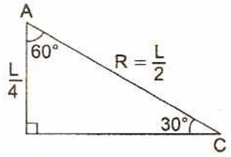
Resolución:



Del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(B)} = E_{M(C)}$$

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{4} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{gL}{2} \qquad ...(1)$$



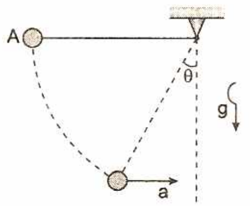
Dinámica circunferencial en C:

$F_C = m\dfrac{v^2}{R}$, donde: $R = L/2$

$T - mg(\cos 60°) = m\dfrac{(gL/2)}{(L/2)}$

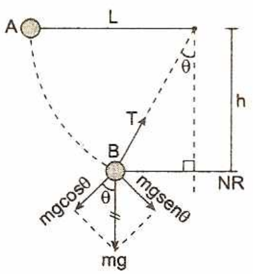
$T = \dfrac{3}{2}mg = \dfrac{3}{2}(8) \quad \therefore\ T = 12\ \text{N}$

35. Una esfera de masa m unido a un hilo es abandonado desde la posición A tal como muestra la figura. ¿Qué ángulo forma el hilo con la vertical en el instante en que su aceleración neta es horizontal?

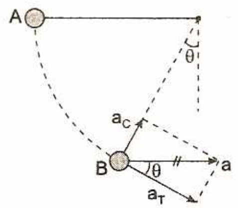


Resolución:

a) Análisis dinámico



b) Análisis cinemático



Del principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow mgh_A = \dfrac{1}{2}mv_B^2$

$gL(\cos\theta) = \dfrac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2gL(\cos\theta)$

Cálculo de la aceleración centrípeta:

$a_C = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{2gL(\cos\theta)}{L} \Rightarrow a_C = 2g(\cos\theta) \qquad ...(1)$

Cálculo de la aceleración tangencial:

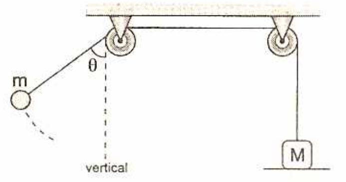
$a_T = \dfrac{F_T}{m} = \dfrac{mg(\text{sen}\theta)}{m} \Rightarrow a_T = g\,\text{sen}\theta \qquad ...(2)$

Analizando cinemáticamente:

$\tan\theta = \dfrac{a_C}{a_T} = \dfrac{2g(\cos\theta)}{g(\text{sen}\theta)}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 2 \quad \therefore\ \theta = \arctan\sqrt{2}$

36. Sabiendo que en el sistema mostrado en la figura se cumple que: M = 2m, hallar el máximo valor del ángulo θ, que define la posición desde donde se debe soltar la esfera de masa m, con la condición de que el bloque de masa M no se despegue del piso.



Resolución:

El bloque dejará de hacer contacto con el piso (reacción normal nula) cuando la tensión en la cuerda es igual al peso del bloque: T = Mg ..(1)

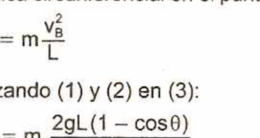
La tensión máxima en la cuerda se obtiene cuando la esfera pasa por la posición más baja de su trayectoria.

Por principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow mgh = \dfrac{1}{2}mv_B^2$

Pero: $h = L(1 - \cos\theta)$

$v_B^2 = 2gL(1 - \cos\theta) \qquad ...(2)$



Por dinámica circunferencial en el punto B: $F_C = ma_C$

$(T - mg) = m\dfrac{v_B^2}{L} \qquad ...(3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

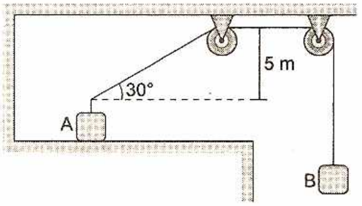
$Mg - mg = m\,\dfrac{2gL(1-\cos\theta)}{L}$

$\Rightarrow gm = 2mg(1 - \cos\theta)$

$1 = 2 - 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta = 60°$

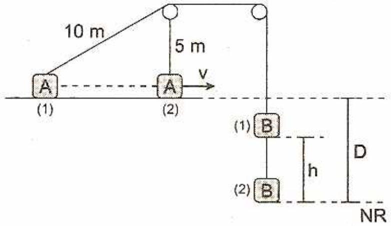
37. Si el sistema físico mostrado en la figura es dejado en libertad en la posición indicada desde el reposo,

sabiendo que no hay rozamiento, hallar la máxima velocidad que adquiere el bloque, A ($m_A = 2m_B$).



Resolución:

Cuando el bloque A adquiere su máxima velocidad, el bloque B se detiene instantáneamente, en este proceso el bloque B desciende una altura h = 5 m. Analizamos las posiciones inicial y final:



Del principio de conservación de la energía mecánica:

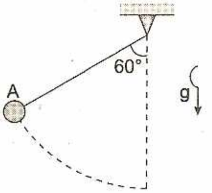
$$E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$$

$$m_A gD + m_B gh = m_A gD + \frac{1}{2}m_A v^2$$

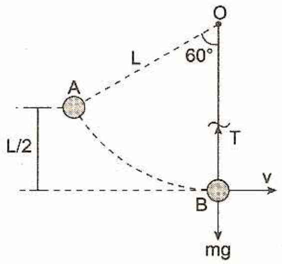
$$m_B gh = \frac{1}{2}m_A v^2$$

$$m_B(9{,}8)(5) = \frac{1}{2}(2m_B)v^2 \quad \therefore\ v = 7\ \text{m/s}$$

38. La figura muestra un péndulo de peso 2 N, que se abandona en la posición A. Hallar la tensión máxima en la cuerda, es decir cuando la partícula adquiere su máxima velocidad.



Resolución:



Principio de la conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y B:

$$E_{M(en\ A)} = E_{M(en\ B)} \Rightarrow E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$$

$$mg\frac{L}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = gL \qquad ...(1)$$

Dinámica circunferencial, en la posición B: $F_C = ma_C$

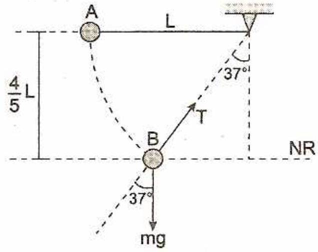
$$T - mg = m\frac{v_B^2}{L} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $T = 2mg$

$\therefore\ T = 4\ \text{N}$

39. Un péndulo formado por una pequeña esfera de 5 N de peso en el extremo de una cuerda de longitud 1 m, se abandona cuando la cuerda forma 90° con la vertical. ¿Cuánto vale la tensión en la cuerda en el instante que forma 37° con la vertical?

Resolución:



Principio de conservación de la energía mecánica, entre los puntos A y B:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$$

$$mg\frac{4}{5}L + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{8}{5}gL \qquad ...(1)$$

Dinámica circunferencial en la posición B: $F_C = ma_C$

$$T - mg(\cos 37°) = m\frac{v_B^2}{L} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $T = \frac{12}{5}mg$

$\therefore\ T = 12\ \text{N}$

40. La figura (1) muestra un péndulo de masa m y longitud L. Determinar la mínima velocidad v_0 que se le debe aplicar al cuerpo en su posición de equilibrio, tal que, puede describir por lo menos una vuelta en el plano vertical.

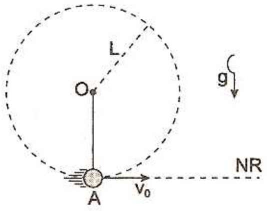


Figura 1

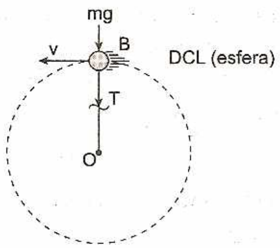


Figura 2

Resolución:

Analizando al cuerpo en la posición indicada por la figura (2):

De la segunda ley de Newton, en dinámica circunferencial.

$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$, entonces: $(mg + T) = m\dfrac{v^2}{L}$ ...(1)

Pero de la condición del problema, el cuerpo pasa con su mínima energía cinética, esto quiere decir que la tensión T en la cuerda debe ser mínima en valor, por consiguiente, $T = 0$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $v^2 = gL$ ...(3)

Principio de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:

$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$

$0 + \dfrac{1}{2}mv_0^2 = mg(2L) + \dfrac{1}{2}mv^2$ ...(4)

Reemplazando (3) en (4): $\dfrac{1}{2}v_0^2 = 2gL + \dfrac{1}{2}(gL)$

Luego: $v_0 = \sqrt{5gL}$

Velocidad mínima en la posición de equilibrio.

41. La figura (1) muestra un péndulo de masa m y longitud L, que se abandona en la posición A, de tal modo que la cuerda forma un ángulo θ respecto a la vertical. Hallar la tensión T en la cuerda cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio, esto quiere decir, cuando adquiere su máxima velocidad.

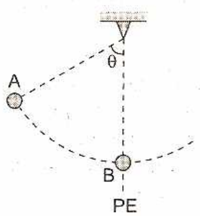


Fig. 1

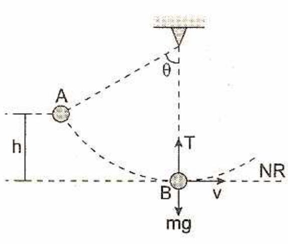


Fig. 2

Resolución:

Por principio de conservación de la energía mecánica, entre A y B.

$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)} \Rightarrow mgh + 0 = 0 + \dfrac{1}{2}mv^2$

Luego: $v^2 = 2gh$ ...(1)

Cálculo de la altura h, en la figura 2:

$h = L(1 - \cos\theta)$ ...(2)

En B, de la segunda ley de Newton en dinámica circunferencial:

$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$, entonces:

$T - mg = m\dfrac{v^2}{R}$ ...(3)

Reemplazando (1) en (3):

$T - mg = m\dfrac{2gh}{L}$ ...(4)

Reemplazando (2) en (4):

$T = mg(3 - 2\cos\theta)$ ...(5)

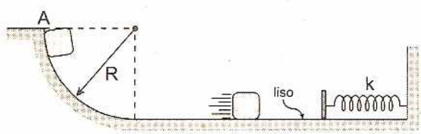
Cuando: $\theta = 90°$, entonces $\cos\theta = 0$, en (5):

$T = 3mg$

Cuando: $\theta = 60°$, entonces $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, en (5):

$T = 2mg$

42. Un bloque de masa 5 kg se abandona en la posición A sobre una superficie esférica de radio R = 4 m, sin rozamiento. Determinar la máxima deformación que experimenta el resorte de constante elástica k = 100 N/m ($g = 10\ m/s^2$)



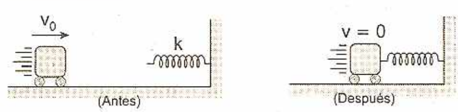
Resolución:

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$mgR = \dfrac{1}{2}kx^2 \Rightarrow (5)(10)(4) = \dfrac{1}{2}(100)x^2 \quad \therefore\ x = 2\ m$

43. Encuentre la velocidad de lanzamiento v_0 de un bloque de masa 0,1 kg sobre un piso liso, de manera que el resorte de constante elástica k = 1000 N/m tenga una deformación máxima de 0,2 m debido al choque con el bloque.

Resolución:

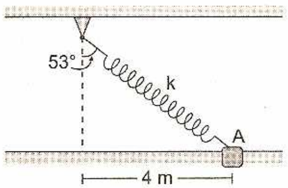


Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(antes)} = E_{M(después)}$

$\dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}kx^2 \Rightarrow mv_0^2 = kx^2$

$\Rightarrow (0,1)v_0^2 = (1000)(0,2)^2 \quad \therefore\ v_0 = 20\ m/s$

44. Una carrilera de masa 8 kg se abandona en la posición A sobre un eje horizontal que no ofrece rozamiento. La longitud natural del resorte es 3 m y su constante elástica k = 50 N/m. Determinar la máxima velocidad que adquiere el bloque durante su movimiento.

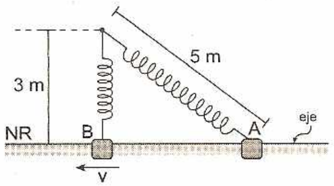


Resolución:

El bloque adquiere su máxima velocidad cuando pasa por su posición de equilibrio, en punto B.

Cálculo de la deformación en el resorte en las posiciones A y B:

longitud natural = 3 m $\Rightarrow$ $x_A = 2$ m y $x_B = 0$



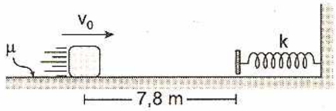
Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$$\frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{kx_A^2}{m}$$

Reemplazando los datos tenemos: $v^2 = \dfrac{(50)(2)^2}{8}$

$\therefore$ v = 5 m/s

45. Encuentre la velocidad de lanzamiento v_0 de un bloque de masa 1 kg sobre un piso áspero $\mu_k = 0,1$ de manera que el resorte de constante k = 500 N/m tenga una deformación máxima de 0,2 m debido al choque con el bloque. (g = 10 m/s²)



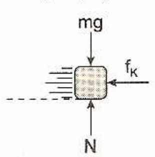
Resolución:

El bloque se desliza hasta detenerse una distancia: d = 8 m.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica:

$$W^{\text{Fricción}} = E_{M(f)} - E_{M(0)}$$

DCL (bloque)



$$-f_k d = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu_k(mg)d = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$-(0,1)(1)(10)(8) = \frac{1}{2}(500)(0,2)^2 - \frac{1}{2}(1)v_0^2$$

$$-8 = 10 - \frac{1}{2}v_0^2 \qquad \therefore v_0 = 6 \text{ m/s}$$

46. Un bloque de 4 kg se abandona sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal, sin rozamiento figura (a). En la parte inferior del plano se encuentra un resorte fijo de constante elástica k = 2000 N/m. El bloque se detiene luego de recorrer una distancia de 2 m. Hallar la máxima deformación en el resorte. (g = 10 m/s²)

Resolución:

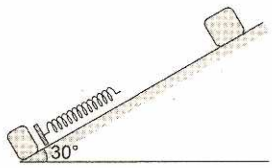


Fig. (a)

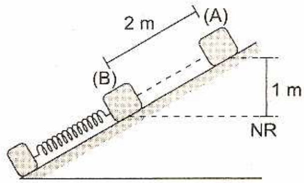


Fig. (b)

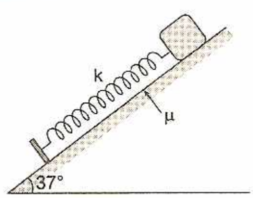
Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow (4)(10)(1) = \frac{1}{2}(2000)x^2$$

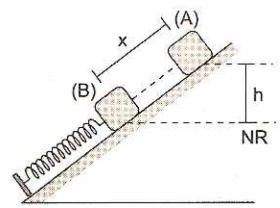
$\therefore$ x = 0,2 m

47. Un bloque de 5 kg se halla unido a un resorte de constante k = 50 N/m, sobre un plano inclinado 37° y áspero $\mu_k = 0,2$. Se abandona el bloque cuando el resorte no tiene deformación (x = 0). Halla la máxima deformación que experimenta el resorte, durante su movimiento. (g = 10 m/s²)

Resolución:



(Antes)



(Después)

La altura que desciende el bloque es:

$h = x(\text{sen}37°) = \frac{3}{5}x$

La reacción normal sobre el bloque es:

$N = mg(\cos 37°)$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica:

$W^{\text{fricción}} = E_{M(B)} - E_{M(A)}$

$-\mu_k N x = \frac{1}{2}kx^2 - mgh$

$\Rightarrow -\mu_k mg(\cos 37°)x = \frac{1}{2}kx^2 - mg(x\text{sen}37°)$

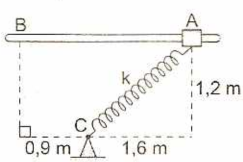
Simplificando x y reemplazando datos tenemos:

$-(0{,}2)(5)(10)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}(50)x - (5)(10)\left(\frac{3}{5}\right)$

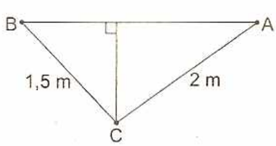
$-8 = 25x - 30 \quad \therefore x = 0{,}88$ m

48. La figura muestra un resorte CA de constante de elasticidad k = 81 N/m y está unido en A a un collarín de masa 0,75 kg el cual se mueve libremente a lo largo de una varilla horizontal. La longitud natural del resorte es $l_0 = 1$ m.

Si el collarín se deja en libertad desde el reposo en la posición A, determinar la velocidad que alcanza el collarín en la posición B.



Resolución:



La deformación del resorte en las posiciones A y B son: $x_A = 1$ m y $x_B = 0{,}5$ m

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

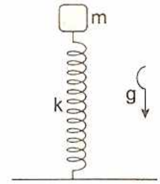
$\frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow k(x_A^2 - x_B^2) = mv^2$

Reemplazando los datos tenemos:

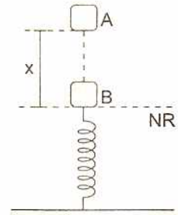
$81(1 - 0{,}25) = 0{,}75\,v^2 \quad \therefore v = 9$ m/s

49. Un bloque de masa m = 3 kg se deja caer de la posición que muestra la figura, cuando la deformación del resorte es nulo (x = 0). Si el resorte tiene una constante elástica k = 100 N/m, determinar la máxima deformación que el bloque producirá en el resorte. (g = 10 m/s²)



Resolución:

Se produce la máxima deformación en el resorte en el instante que el bloque se detiene instantáneamente, luego será impulsado hacia arriba.



Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(\text{en A})} = E_{M(\text{en B})}$

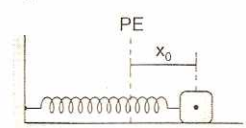
$mgh = \frac{1}{2}kx^2$

Pero: $h = x \Rightarrow x = \frac{2mg}{k}$

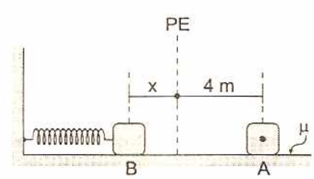
Reemplazando datos tenemos: $x = \frac{2(3)(10)}{100}$

$\therefore x = 0{,}6$ m

50. Si el sistema formado por un bloque de 3 kg de masa y un resorte de constante elástica k = 10 N/m se deja en libertad de movimiento siendo $x_0 = 4$ m, determinar en qué posición se detiene el bloque, sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético es 0,5.
(g = 10 m/s²)



Resolución:



El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica.

La reacción normal es igual al peso (N = mg) y la fuerza de rozamiento es: $f_k = \mu_k N = \mu_k mg$

Teorema: $W^{\text{ROZ}} = E_{M(B)} - E_{M(A)}$

$$\Rightarrow \ -f_k(x+4) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k(4)^2$$

$$-\mu_k mg(x+4) = \frac{1}{2}k(x-4)(x+4)$$

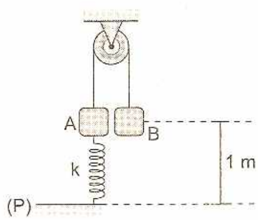
$$\Rightarrow \ -\mu_k mg = \frac{1}{2}k(x-4)$$

Reemplazando datos tenemos:

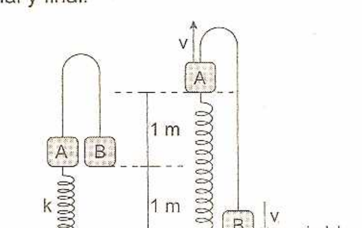
$$-(0{,}5)(3)(10) = \frac{1}{2}(10)(x-4) \qquad \therefore \ x = 1 \text{ m}$$

Se detiene a 1 m a la izquierda de la posición de equilibrio (PE).

51. En la figura el resorte está sin estirar (x=0). Si el sistema parte del reposo de la posición mostrada, hallar la velocidad del sistema cuando el bloque B alcanza el nivel P.
$m_A = 1$ kg; $m_B = 3$ kg
$k = 4$ N/m; $g = 10$ m/s^2



Resolución:
Analizamos las posiciones inicial y final:



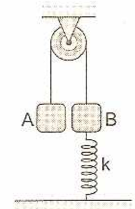
Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$$m_A g h_1 + m_B g h_1 = m_A g h_2 + \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

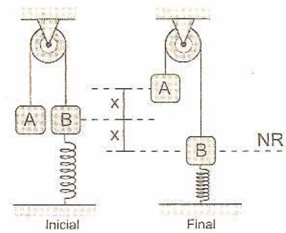
$$(1)(10)(1) + (3)(10)(1) = (1)(10)(2) + \frac{1}{2}(1)v^2 + \frac{1}{2}(3)v^2 + \frac{1}{2}(4)(1)^2$$

$$\Rightarrow \ 40 = 20 + 2v^2 + 2 \qquad \therefore \ v = 3 \text{ m/s}$$

52. En la figura el resorte está sin estirar. Si el sistema parte del reposo de la posición mostrada, hallar la máxima deformación del resorte de constante elástica $k = 20$ N/m. Desprecie las fuerzas de fricción.
($m_A = 0{,}1$ kg; $m_B = 0{,}3$ kg; $g = 10$ m/s^2)



Resolución:
Analizamos las posiciones inicial y final:



Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$$m_A g x + m_B g x = m_A g(2x) + \frac{1}{2}kx^2$$

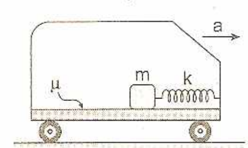
$$m_B g x - m_A g x = \frac{1}{2}kx^2$$

$$(0{,}3)(10) - (0{,}1)(10) = \frac{1}{2}(20)x$$

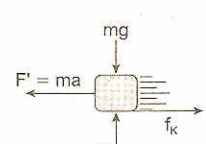
$$\therefore \ x = 0{,}2 \text{ m}$$

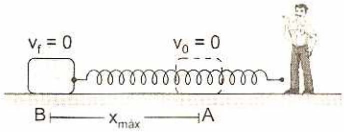
53. El móvil que muestra la figura está inicialmente en reposo y contiene en su interior un bloque de masa m unido a un resorte no deformado ($x = 0$) de constante elástica k. Si de pronto el móvil adquiere una aceleración constante a, hallar la máxima deformación que experimenta el resorte.

El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la plataforma es μ.



Resolución:
Elegimos un sistema de referencia NO inercial, sobre la plataforma, para $t = 0$, la velocidad inicial es cero y la deformación $x = 0$. Las fuerzas externas para nuestro observador son: la fuerza de inercia ($F' = ma$), el peso, la fuerza elástica y la fuerza de rozamiento.





Teorema del trabajo y la energía mecánica: El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica.

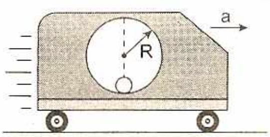
$W_{(\text{Fuerza no conservativas})} = E_{M(f)} - E_{M(0)}$

$W^{F'} - W^{f_k} = E_{P(B)} + E_{C(B)} - E_{P(A)} - E_{C(A)}$

$max - \mu Nx = \frac{1}{2}kx^2 + 0 - 0 - 0$; pero: $N = mg$

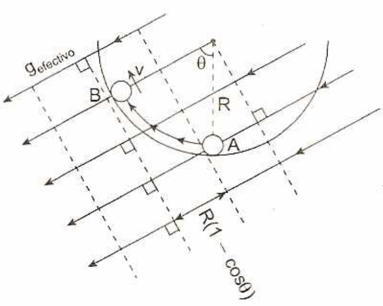
$ma - \mu mg = \frac{1}{2}kx \quad \therefore\ x = \frac{2m}{k}(a - \mu g)$

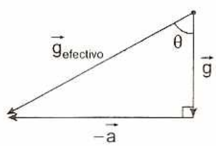
54. El carro mostrado en la figura tiene un agujero de radio de curvatura $R = 0{,}8$ m y se mueve horizontalmente con aceleración constante $a = 10\sqrt{3}$ m/s². En cierto instante se suelta de la parte inferior una esferilla de masa m. Hallar la máxima velocidad relativa de la esferilla, respecto del carro, durante su movimiento. No hay rozamiento. ($g = 10$ m/s²).



Resolución:

La esferilla alcanza su máxima velocidad cuando pasa por el punto más bajo dentro del campo local o efectivo, es decir en el punto de su posición de equilibrio.





Del triángulo vectorial deducimos que: $\theta = 60°$ y $g_{ef} = 20$ m/s².

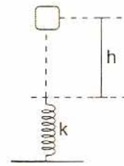
Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, dentro del campo local o efectivo (Principio de equivalencia)

$E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$mg_{ef}R(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2g_{ef}R(1 - \cos\theta) = v^2$

$\Rightarrow 2(20)(0{,}8)(1 - 0{,}5) = v^2 \quad \therefore\ v = 4$ m/s

55. Un bloque de masa $m = 1$ kg se deja caer de la posición que muestra la figura. Si el resorte tiene una constante elástica $k = 100$ N/m, determinar la máxima deformación que el bloque producirá en el resorte. ($h = 4$ m; $g = 10$ m/s²)



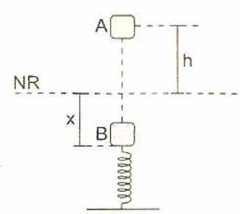
Resolución:

Se produce la máxima deformación en el resorte en el instante que el bloque se detiene instantáneamente, luego será impulsado hacia arriba.

Principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(0)} = E_{M(f)}$

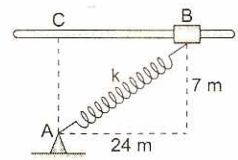
$mgh = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$



Reemplazando los datos se tiene: $x = 1$ m

La energía potencial gravitatoria es negativa (−), cuando el bloque se encuentra debajo de la línea de referencia.

56. La figura muestra un resorte AB de constante de elasticidad $k = 4$ N/m y está unido a un collar en B de 99 kg de masa, el cual se mueve libremente a lo largo de la varilla horizontal. La longitud natural del resorte es 5 m ($x = 0$). Si el collar se deja en libertad desde el reposo en la posición mostrada en la figura, determinar la velocidad máxima que alcanza el collar.



Resolución:

Cálculo de la deformación del resorte en las posiciones inicial (B) y final (C).

x_0: longitud natural: 5 m

x_B: deformación inicial: 20 m

x_C: deformación final: 2 m

Consideremos el sistema (masa + resorte):

La energía cinética del collar será máxima, cuando la energía potencial elástica sea mínima, por consiguiente cuando pasa por su posición de equilibrio en C.

Principio de conservación de la energía mecánica, entre B y C:

Tomando como línea de referencia a la varilla:

$E_{C(B)} + E_{P(B)} = E_{C(C)} + E_{P(C)}$

$0 + \frac{1}{2}k x_B^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k x_C^2$

Reemplazando los datos tenemos: $v = 4$ m/s

57. En la figura (1), se suelta el rodillo (cilindro) de masa M unido a un resorte, desde una posición donde el resorte de constante de elasticidad k no está deformado (x = 0) y el cilindro rueda sin resbalar sobre el plano inclinado. Hallar la máxima deformación del resorte. El plano forma un ángulo θ respecto a la horizontal.

Sugerencia: La fuerza de rozamiento por rodadura no realiza trabajo sobre el rodillo.

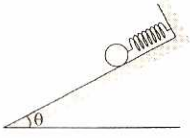


Fig. (1)

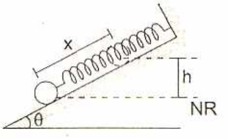


Fig. (2)

Resolución:

Cuando el resorte alcanza la máxima deformación (en la zona elástica), la velocidad del rodillo es igual a cero, en ese instante.

De la figura (2):

x = deformación máxima del resorte

$h = x(\text{sen}\theta)$ ...(1)

Por principio de conservación de la energía mecánica, debe tenerse en cuenta que el rodillo no resbala, por lo tanto, no hay fuerza de rozamiento por deslizamiento.

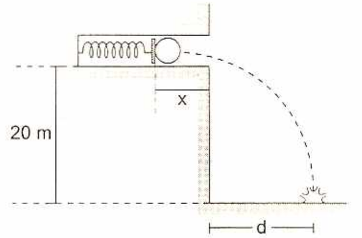
$E_{P(1)} + E_{C(1)} = E_{P(2)} + E_{C(2)}$

$\Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $mgx(\text{sen}\theta) = \frac{1}{2}kx^2$

Luego: $x_{\text{máx.}} = \dfrac{2mg(\text{sen}\theta)}{k}$

58. Un resorte se comprime 40 cm como se indica en la figura. Hallar el máximo alcance horizontal de la esferita en su movimiento parabólico, luego que se suelta el resorte de constante elástica k = 100 N/m. Masa de la esferita 1 kg ($g = 10$ m/s^2).



Resolución:

Cuando el resorte se libera, la esfera adquiere energía cinética. Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow kx^2 = mv^2 \Rightarrow v = 4$ m/s

La esfera inicia su movimiento parabólico con velocidad horizontal igual a $v_x = 4$ m/s

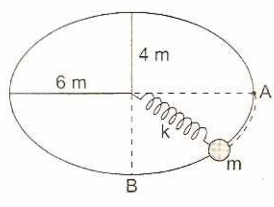
Analizando en el eje vertical:

$h = v_{0(y)}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 20 = 0 + 5t^2 \Rightarrow t = 2$ s

Analizando en el eje horizontal:

$d = v_x t \quad \therefore d = 8$ m

59. La figura muestra una partícula de masa 1 kg atada a un resorte de longitud natural 3 m y constante elástica k = 200 N/m. La partícula abandonada en A puede moverse libremente sin fricción a través de un riel de forma elíptica. Si el sistema está contenido en un plano horizontal, determinar la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición B.



Resolución:

Cálculo de la deformación del resorte en las posiciones inicial (A) y final (B):

x_0: longitud natural: 3 m

x_A: deformación inicial: 3 m

x_B: deformación final: 1 m

Principio de conservación de la energía mecánica, del sistema (masa + resorte) entre los puntos A y B:

$E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$\frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}mv^2$

Reemplazando los datos tenemos: $v = 40$ m/s

60. La figura (1) muestra un sistema mecánico en equilibrio y el resorte de constante de elasticidad k = 20 N/m, con su longitud natural de 5 m, unido

en sus extremos a dos esferas de masas, m = 2 kg; si la cuerda se corta en el punto A, determinar la máxima deformación del resorte. La longitud de la cuerda es, L = 5 m.
($g = 10\ m/s^2$)

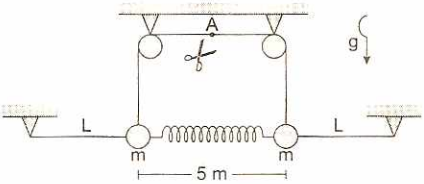


Fig. 1. Inicial

Resolución:

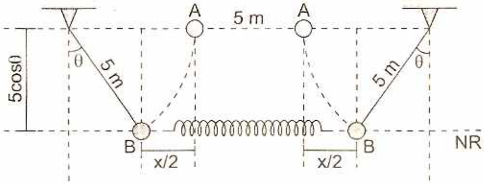


Fig. 2. Final

De la figura (2), la deformación del resorte:

$$\frac{x}{2} = 5(1 - \operatorname{sen}\theta) \qquad ...(1)$$

Cuando el resorte alcanza la máxima deformación, x, la energía cinética del sistema es igual a cero, esto quiere decir que las masas tienen velocidad igual a cero.

Por principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$$

$$2mg(5\cos\theta) + 0 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\Rightarrow\ 10mg(\cos\theta) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$10mg(\cos\theta) = \frac{1}{2}k(100)(1 - \operatorname{sen}\theta)^2 \qquad ...(3)$$

Pero: $m = 2$ kg; $k = 20$ N/m; $g = 10\ m/s^2$

Reemplazando en (3), tenemos:

$$\cos\theta = 5(1 - \operatorname{sen}\theta)^2 \qquad ...(4)$$

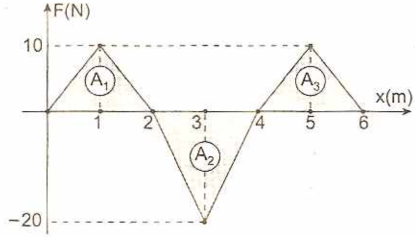
Resolviendo la ecuación tenemos:

$$\theta = 37° \qquad ...(5)$$

Reemplazando (5) en (1): $x = 10\left(1 - \frac{3}{5}\right)$

Luego: $x_{máx.} = 4$ m

61. La figura representa la fuerza aplicada sobre una partícula de masa 5 kg que se mueve en el eje x. Si en la posición x = 0 la velocidad es 6 m/s, determinar la velocidad en la posición x = 6 m.



Resolución:

El trabajo neto realizado por la fuerza es igual a la suma algebraica (se considera el signo de las áreas) por las regiones sombreadas:

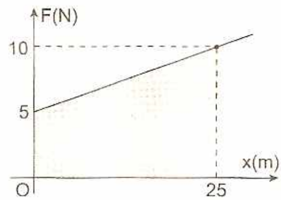
$$W^F = A_1 + A_2 + A_3 = 10 - 20 + 10 = 0\ J$$

$\Rightarrow$ el trabajo neto es nulo.

Si el trabajo neto es igual a cero, no existe variación de la energía cinética, por consiguiente la velocidad final es:

$$v_f = 6\ m/s$$

62. Un bloque de masa 15 kg está sometido a la acción de una sola fuerza en dirección horizontal y su módulo varía con la posición x tal como indica el gráfico. Si el bloque parte del reposo en la posición x = 0, ¿cuál será su velocidad en x = 25 m?



Resolución:

El trabajo neto realizado por la fuerza F es igual al área del trapecio:

$$W_{NETO} = \frac{(b + B)h}{2} = \frac{(5 + 10)(25)}{2}$$

$$\Rightarrow\ W_{NETO} = \frac{1}{2}(15)(25) = 187{,}5\ J$$

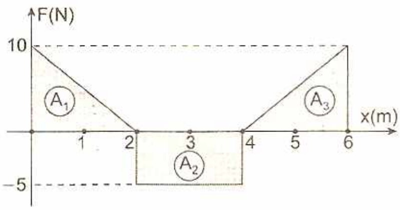
Del teorema de la energía cinética: El trabajo neto es igual a la variación de la energía cinética entre dos puntos.

$$W_{NETO} = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Pero: $mv_0 = 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(15)(25) = \frac{1}{2}(15)v_f^2\ \Rightarrow\ v_f^2 = 25$

$\therefore\ v_f = 5\ m/s$

63. La figura muestra la variación de la fuerza aplicada sobre una partícula de masa 0,5 kg que se mueve en el eje x. Si en la posición x = 0 la velocidad es 3 m/s, determinar la velocidad en x = 6 m.



Resolución:

El trabajo neto realizado por la fuerza F es igual a la suma algebraica de las áreas sombreadas (se considera el signo)

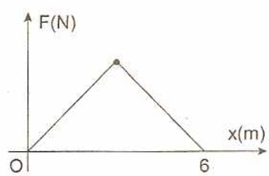
$W^F = A_1 + A_2 + A_3 = 10 - 10 + 10 = 10$ J

El trabajo neto es igual a la variación de la energía cinética: $W^F = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$

$10 = \frac{1}{2}(0,5)(v_f^2 - 9) \Rightarrow 40 = v_f^2 - 9 \Rightarrow v_f^2 = 49$

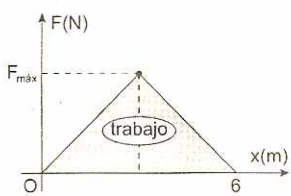
$\therefore\ v_f = 7$ m/s

64. A una partícula que tiene una energía cinética inicial de 40 J en la posición x = 0, se le aplica una fuerza resultante que varía como muestra la figura. Sabiendo que su energía cinética es igual a 400 J en la posición x = 6 m, calcular la fuerza máxima aplicada a la partícula.



Resolución:

En toda gráfica F-x, el área bajo la curva, es igual al trabajo realizado sobre la partícula.



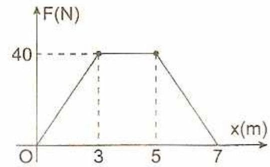
Del teorema de la energía cinética:

El trabajo realizado por todas las fuerzas, es igual a la variación de la energía cinética.

$W_{NETO} = E_{C(f)} - E_{C(0)} \Rightarrow \frac{1}{2}(6)F_{máx.} = 400 - 40$

$\Rightarrow F_{máx.} = 120$ N

65. La figura representa la fuerza aplicada sobre una partícula de masa 2 kg que se mueve en el eje x. Si en la posición x = 0 la velocidad es 4 m/s, determinar la velocidad en la posición x = 7 m.



Resolución:

En toda gráfica F-x, el área bajo la curva, es igual al trabajo realizado sobre la partícula, entre dos puntos de su posición.

$W_{NETO} = \frac{(2+7)}{2}40 \Rightarrow W_{NETO} = 180$ J ...(1)

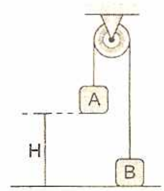
Del teorema de la energía cinética:

El trabajo neto realizado sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética.

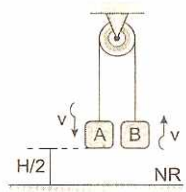
$W_{NETO} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) \Rightarrow 180 = \frac{1}{2}2(v_f^2 - 4^2)$

$\therefore\ v_f = 14$ m/s

66. En la figura A = 2,5 kg y B = 1,5 kg están inicialmente en reposo y se sueltan. Calcular la velocidad del bloque A cuando los bloques se encuentran a la misma altura. H = 40 m. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:



En el instante que los bloques se encuentran a la misma altura sus velocidades de A y B también son iguales.

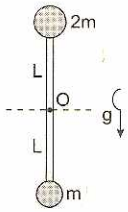
Principio de conservación de la energía mecánica del sistema: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$m_AgH = (m_A + m_B)g\frac{H}{2} + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2$

Reemplazando los datos tenemos: v = 10 m/s

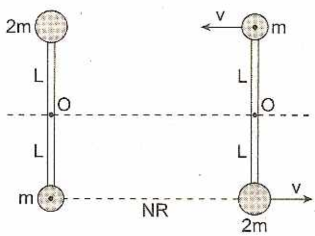
67. El sistema mostrado está compuesto por dos esferas de masas m y 2m unidas por una barra imponderable de longitud 2L que puede rotar alrededor de su centro O en un plano vertical. Si el sistema se deja en libertad cuando está dispuesta en posi-

ción vertical, hallar la máxima velocidad que alcanzan las esferas.



Resolución:

La velocidad de las esferas será máxima cuando el sistema pase por su posición de equilibrio, es decir, cuando la esfera 2m pase por el punto más bajo de su trayectoria.



Del principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(0)} = E_{M(f)}$$

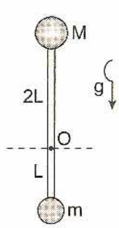
$E_{P(0)} = E_{P(f)} + E_{C(f)}$

$(2m)g(2L) = (m)g(2L) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2$

$4mgL = 2mgL + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2gL = \frac{3}{2}v^2$

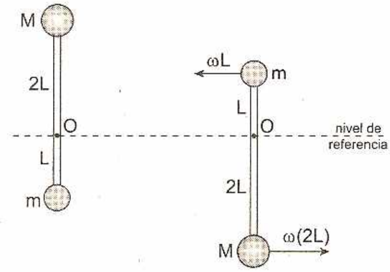
$\therefore\ v = 2\left(\sqrt{\frac{gL}{3}}\right)$

68. El sistema mostrado está compuesto por dos esferas de masas m y M (M = 2m) unidas por una barra imponderable de longitud 3L que puede rotar alrededor del eje O en un plano vertical. Si el sistema se deja en libertad en la posición vertical, hallar la máxima velocidad angular que alcanzan las esferas.



Resolución:

La velocidad angular de las esferas será máxima cuando el sistema pase por su posición de equilibrio, es decir cuando la esfera M pase por el punto más bajo de su trayectoria.



(Antes) (Después)

Del principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(antes)} = E_{M(después)}$

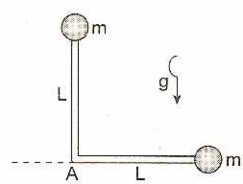
$Mg(2L) - mg(L) = mg(L) - Mg(2L) + \frac{1}{2}m(\omega L)^2 + \frac{1}{2}M(\omega L)^2$

$\Rightarrow 4MgL - 2mgL = \frac{1}{2}\omega^2L^2m + 2\omega^2LM$

Pero: $M = 2m \Rightarrow 6mg = \frac{g}{2}\omega^2Lm$

$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{g}{L}\right)}$

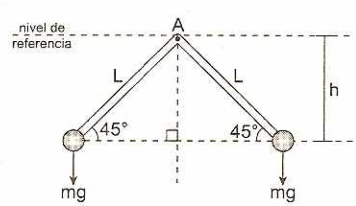
69. La figura muestra una estructura en forma de L de peso despreciable, en sus extremos se encuentran fijos dos esferas de masa m cada uno. Si se abandona en la posición mostrada, ¿cuál es la máxima energía cinética que adquiere el sistema? La estructura puede girar libremente alrededor de la rótula A.



Resolución:

Cuando un cuerpo o sistema de cuerpos es dejado en libertad, adquiere su máxima energía cinética (velocidad máxima) cuando pasa por su posición de equilibrio, es decir que su energía potencial es mínima en ese instante.

En este caso, se alcanza la posición de equilibrio cuando las esferas se encuentran en la misma línea horizontal.



Del principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(0)} = E_{M(f)} \Rightarrow E_{P(1)} + E_{C(1)} = E_{P(2)} + E_{C(2)}$

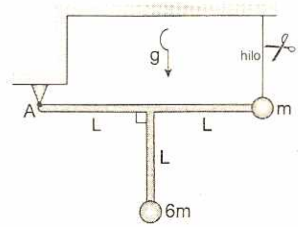
$mgL + 0 = -mgh - mgh + E_{C(2)}$

Pero, $h = \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$, reemplazando tenemos:

$E_{C(2)} = mgL(1 + \sqrt{2})$

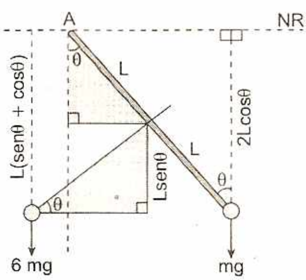
70. La figura muestra una estructura en forma de T de peso despreciable, en sus extremos se encuentran fijos dos esferas de masas m y 6m. Al romperse el hilo vertical, ¿cuál es la máxima energía cinética que adquiere el sistema?

La estructura puede girar libremente alrededor de la rótula A.



Resolución:

Cuando un cuerpo o sistema de cuerpos es dejado en libertad, adquiere su máxima energía cinética (velocidad máxima) cuando pasa por su posición de equilibrio, esto quiere decir que su energía potencial es mínima en ese instante.



En este caso, se alcanza la posición de equilibrio cuando el ángulo θ es igual a 37°, como se demuestra en el capítulo de Estática.

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$E_{P(1)} + E_{C(1)} = E_{P(2)} + E_{C(2)}$

$-6mgL + 0 = -mgh(2L\cos\theta) - 6mg(\text{sen}\theta + \cos\theta)L$

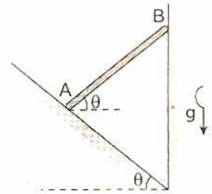
Despejando tenemos:

$E_{C(2)} = mgL(8\cos\theta + 6\text{sen}\theta - 6)$

Reemplazando: $\theta = 37°$

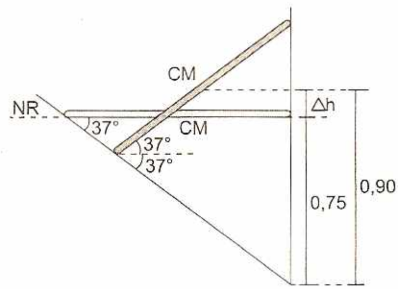
$\therefore\ E_{C(\text{máx.})} = 4mgL$

71. La barra mostrada en la figura, que pesa 60 N y tiene 1 m de longitud, se encuentra en equilibrio apoyada en dos superficies rugosas. Si un agente externo realiza un trabajo de 26 J para deslizar la barra y colocarla en posición horizontal, determinar la cantidad de calor que se desprende como resultado de esto. $\theta = 37°$.



Resolución:

Cálculo del desplazamiento vertical que experimenta el centro de masa (CM)



De la figura: $\Delta h = 0{,}15$ m

Por teorema del trabajo y la energía mecánica:

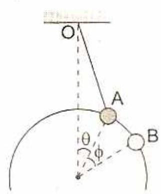
$W^f + W^{F_{ext}} = E_{M(f)} - E_{M(0)}$

$W^f + 26 = E_{C(f)} - E_{P(f)} - E_{C(0)} - E_{P(0)}$

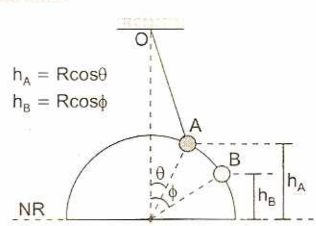
$W^f + 26 = 0 + 0 - 0 - 60(0{,}15)$

$W^f = -35\text{ J} \quad \therefore\ Q = 35\text{ J}$

72. Una partícula unida al extremo de una cuerda OA se apoya sobre una superficie cilíndrica lisa. Si la cuerda se corta, la partícula deslizará sobre la superficie y dejará de tener contacto con ésta en el punto B. Hallar ϕ en función de θ.



Resolución:



Como la superficie es lisa y al cortarse la cuerda, las fuerzas actuantes en el tramo AB sobre el cuerpo

son su peso y la reacción normal del cilindro sobre ella, lo cual son fuerzas conservativas, entonces:

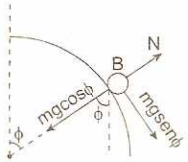
$E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$E_{C(A)} + E_{P(A)} = E_{C(B)} + E_{P(B)}$

$0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$

$v_B^2 = 2g(h_A - h_B)$

$\Rightarrow\ v_B^2 = 2gR(\cos\theta - \cos\phi)$ ...(1)



Analizando en el punto B; dinámica circular: $F_C = ma_C$

$mg(\cos\phi) - N = m\frac{v_B^2}{R}$

Pero en B dejan de tener contacto ambos cuerpos, o sea: $N = 0$

Entonces:

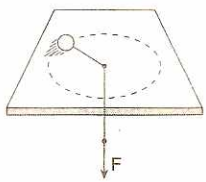
$mg(\cos\phi) = m\frac{v_B^2}{R}\ \Rightarrow\ v_B^2 = gR(\cos\phi)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$2gR(\cos\theta - \cos\phi) = gR(\cos\phi)$

$2\cos\theta = 3\cos\phi \quad \therefore\ \phi = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)$

73. Una esfera se encuentra girando uniformemente describiendo una circunferencia de radio R sobre una mesa horizontal sin fricción. La cuerda que se encuentra unida a la esfera pasa a través de un hueco tal como se indica en el gráfico. Si la esfera que posee inicialmente una energía cinética de 4,5 J es jalada hacia una nueva trayectoria circular de radio R/2, determinar el trabajo realizado por la fuerza F.



Resolución:

Ya que la fuerza de tensión que actúa sobre la esfera es una fuerza central, se conserva el momentun angular, esto es:

$\vec{L}_{(0)} = \vec{L}_{(f)} \Rightarrow m\omega_0 R^2 = m\omega_f (R/2)^2 \Rightarrow \omega_f = 4\omega_0$

O en términos de velocidad: $v_f = 2v_0$ ...(1)

Por teorema del trabajo y la energía mecánica:

$W^F = E_{M(f)} - E_{M(0)} \Rightarrow W^F = E_{C(f)} - E_{C(0)}$

$\Rightarrow W^F = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$W^F = \frac{3}{2}mv_0^2 \Rightarrow W^F = 3E_{C(0)}$

Reemplazando el dato: $W^F = 13{,}5$ J

74. La figura (1) muestra un cuerpo que se abandona en la posición A, se mueve inicialmente por una superficie cilíndrica de radio de curvatura R y posteriormente ingresa en B a una superficie plana y horizontal. Sabiendo que no existe rozamiento, hallar la gráfica, velocidad vs tiempo, que experimenta el cuerpo.

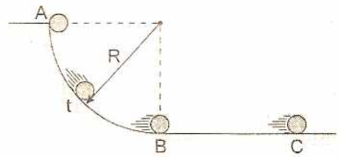


Fig. 1

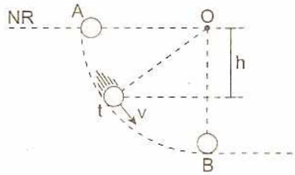


Fig. 2

Resolución:

Por principio de conservación de la energía mecánica: $E_{C(A)} + E_{P(A)} = E_{C(t)} + E_{P(t)}$

$0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + (-mgh)$

Luego: $v = \sqrt{2gh}$; $0 \le h \le R$ ...(1)

El cuerpo se mueve con velocidad y aceleración variable entre las posiciones A y B. La velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de h en cada instante de tiempo como muestra la ecuación (1). El cuerpo aumenta su velocidad en cada instante de tiempo.

El cuerpo alcanza su máxima velocidad en B y luego se mantiene constante en el plano horizontal.

La figura (3), muestra la gráfica velocidad vs. tiempo de cuerpo. Debemos tener presente que la pendiente de la tangente geométrica trazada a la curva nos da el valor de la aceleración tangencial.

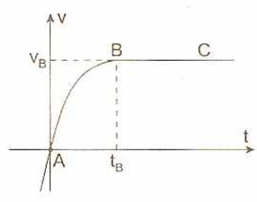
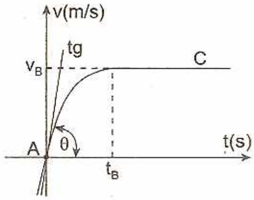


Fig. 3

En el instante que abandonamos el cuerpo en la posición A, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso, por lo tanto la aceleración tangencial es igual a $g = 9{,}8$ m/s^2.



Luego: $\tan\theta = a_T$

$\Rightarrow \tan\theta = 9{,}8$

$\theta = \arctan(9{,}8)$

75. La gráfica, velocidad versus tiempo, muestra la manera como varía la rapidez de un móvil que, abandonado en la posición A, se mueve inicialmente por una superficie cilíndrica de radio de curvatura R = 1,25 m y posteriormente por una superficie plana horizontal. Desprecie todo tipo de rozamiento. En la figura (2) hallar el valor del ángulo θ. ($g = 10\ m/s^2$)

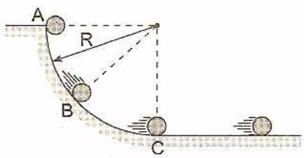


Fig. 1 Sistema mecánico

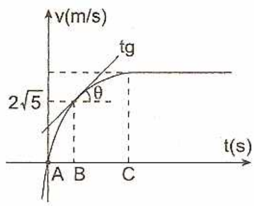


Fig. 2 Gráfica: velocidad vs. tiempo

Resolución:

Debemos recordar de cinemática que, en la gráfica velocidad vs. tiempo, la tangente trigonométrica del ángulo θ nos da el valor de la aceleración tangencial en el instante en que el cuerpo pasa por la posición B, como muestra la figura (1).

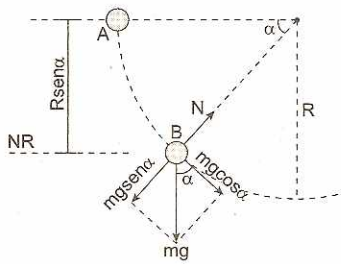
De la figura (2), la velocidad del cuerpo, cuando pasa por la posición B es:

$v(B) = 2\sqrt{5}$ m/s ...(1)

Donde la aceleración tangencial, es igual a:

$a_T(B) = \tan\theta$ ...(2)

Analizamos al cuerpo cuando pasa por la posición B.



Por principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{C(A)} + E_{P(A)} = E_{C(B)} + E_{P(B)}$

$0 + mgR(\text{sen}\alpha) = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$

Luego: $v_B^2 = 2gR(\text{sen}\alpha)$ ...(3)

Reemplazando valores en (3):

$(2\sqrt{5})^2 = 2(10)(1{,}25)(\text{sen}\alpha)$

$\text{sen}\alpha = 4/5$, entonces, $\alpha = 53°$ ...(4)

De la segunda ley de Newton, en la posición B:

$F_{(\text{tangencial})} = ma_{(\text{tangencial})}$ ...(5)

De la figura (3): $mg(\cos\alpha) = ma_T$

Entonces: $a_T = g(\cos\alpha)$ ...(6)

Reemplazando (4) en (6):

$a_T = 10(3/5) = 6\ m/s^2$ ...(7)

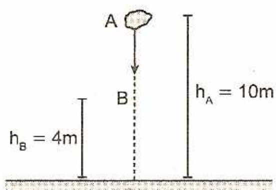
Igualando las ecuaciones (2) y (7):

$\tan\theta = 6$, luego: $\theta = \arctan(6)$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Una piedra de masa 3 kg se lanza verticalmente hacia abajo desde el punto A con rapidez v_A=10 m/s y desciende como se muestra en la figura. Suponiendo que no hay resistencia del aire, se hacen las siguientes proposiciones: ($g = 9{,}81\ m/s^2$)



I. La energía mecánica total de la piedra en el punto A es igual a 444,3 J.

II. La energía cinética de la piedra en el punto B es igual a 276,58 J.

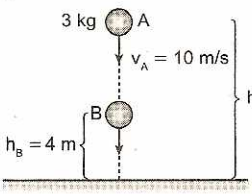
III. La energía potencial de la piedra en el punto B es igual a 117,72 J.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) VFV B) VVF C) FVF
D) VVV E) FFV

Resolución:

Del gráfico:



Debido a que la energía mecánica es relativa, es necesario considerar un nivel de referencia para el cálculo de la energía de este cuerpo.

En las siguientes proposiciones, tomaremos como nivel de referencia la superficie terrestre.

I. Como no existe perdidas de energía por fricción, la energía mecánica del cuerpo debe ser constante durante todo el movimiento:

$$E_{M(A)} = E_C + E_{P(A)}$$
$$= \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$
$$= \frac{1}{2}(3)(10)^2 + 3(9{,}81)(10)$$
$$= 150 + 294{,}3$$
$$= 444{,}3\ J \qquad ...(V)$$

II. $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$$444{,}3\ J = \frac{1}{2}mv^2 + E_{P(B)}$$
$$444{,}3 = E_C + mgh_B$$
$$444{,}3 = E_C + (3)(9{,}81)(4)$$
$$444{,}3 = E_C + 117{,}72$$
$$E_C = 326{,}58\ J \qquad ...(F)$$

III. $E_{P(B)} = mgh_B$

$$= 3(9{,}81)(4)$$
$$= 117{,}72 \qquad ...(V)$$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una energía cinética de 25 J, a partir de un punto A, sube hasta un punto B y regresa al lanzamiento. En el punto B la energía potencial de la piedra (con respecto al punto A) es de 20 J. Considerando el punto A como punto de referencia para la energía potencial, se hacen las siguientes proposiciones:

I. La energía mecánica total de la piedra en el punto A es de 25 J y en B es de 20 J.

II. Durante el ascenso de la piedra, la fuerza de resistencia del aire realizó un trabajo de −5 J.

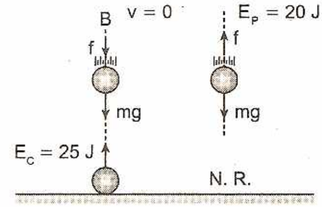
III. En el trayecto de ida y vuelta de la piedra, el trabajo de la fuerza de resistencia del aire es nulo.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta luego de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) VVF B) VFV C) VFF
D) FFV E) FVF

Resolución:

Del gráfico:



I. **Verdadero:**

$$E_{M(A)} = E_{C(A)} + E_{P(A)} = 25\ J$$
$$E_{M(B)} = E_{C(B)} + E_{P(B)} = 20\ J$$

II. **Verdadero:**

Entre "A" y "B" aplicamos:

$$W_{FNC} = E_{M_f} - E_{M_o} \Rightarrow W_f = 20 - 25$$
$$\Rightarrow W_f = -5\ J$$

III. **Falso:**

La fuerza de resistencia del aire siempre esta opuesta al movimiento, por lo tanto los trabajos realizados por "f" en el ascenso y el descenso no se anulan.

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

En las inmediaciones de la superficie terrestre se deja caer un cuerpo de 4 kg. Se sabe que a 20 m del piso su energía mecánica es 1000 J.

Considerando $g = 9{,}81\ m/s^2$, Indique la secuencia correcta, después de determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Cuando está a 20 m del piso, su rapidez es 10,37 m/s.

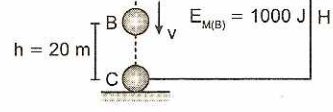
II. El cuerpo se dejó caer inicialmente desde una altura de 25,48 m.

III. Cuando alcanza el piso su rapidez es 31,60 m/s.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) FFF

Resolución:

m = 4 kg (masa) v = 0



I. $E_{M(B)} = E_{C(B)} + E_{P(B)} \Rightarrow 1000 = \frac{1}{2}(4)v^2 + 4(9{,}81)20$

$\therefore$ v = 10,37 m/s (verdadero)

II. $E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow 4(9{,}81)H = 1000$

$\therefore$ H = 25,48 m (verdadero)

III. $E_{M(C)} = E_{M(B)} \Rightarrow \frac{1}{2}(4)v_C^2 = 1000$

$\therefore$ v_c = 22,36 m/s (falso)

Clave: B

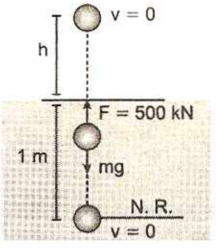
PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Un bloque de 30,0 kg de masa al caer libremente sobre la Tierra hace un agujero de 1,0 de profundidad. Un estudio experimental probó que la fuerza de resistencia del suelo al movimiento del bloque es de F = 500 kN. Calcule aproximadamente desde que altura (en m) cayó el bloque. ($g = 9{,}81\ m/s^2$)

A) 1424,3 B) 1505,4 C) 1594,3
D) 1622,4 E) 1697,4

Resolución:

Del gráfico:



$W^{FNC} = E_{MF} - E_{M0}$

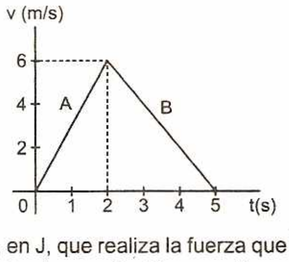
$-500(10)^3(1) = 0 - mg\,(h+1)$

$-500(10)^3 = -30(9{,}81)(h+1)$ $\therefore\ h = 1697{,}4$ m

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Un bloque cuya masa es de 4 kg se desplaza entre dos puntos a través de un recorrido horizontal. La velocidad del bloque varía con el tiempo como se indica en la figura:



Los trabajos, en J, que realiza la fuerza que actúa sobre el bloque, en los tramos A y B, respectivamente, son:

A) 36; −36 B) 48; −48 C) 72; −72
D) 96; −96 E) 109; −109

Resolución:

Del gráfico: $E_{Cf} - E_{Ci} = W_f$

Tramo A:

$\frac{1}{2}(4)(6)^2 = W_f$

$72\ J = W_f$

Tramo B:

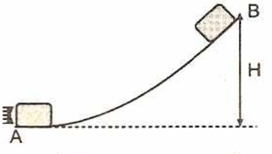
$0 - \frac{1}{2}4(6)^2 = W_f$

$-72\ J = W_f$

Clave: C

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

Un bloque ingresa con rapidez de 2 m/s, en el punto A, a una rampa como se indica en la figura. Existe fricción entre el bloque y la rampa. Si el objeto llega hasta el punto B a una altura H, regresando al punto A con una rapidez de 1 m/s, entonces la altura H que alcanza el bloque, en metros, es:
(g: aceleración de la gravedad)

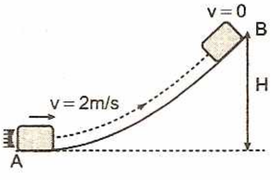


A) 2/3 g B) 5/4 g C) 4/3 g
D) 3/2 g E) 1,8/g

Resolución:

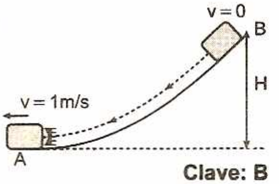
Cuando va de A hacia B

$mgH - \frac{1}{2}m(2)^2 = W_f \ ...(1)$



Cuando va de B hacia A

$\frac{1}{2}m(1)^2 - mgH = W_f \ ...(2)$



Igualando (1) y (2)

$\therefore\ H = 5/4\ g$

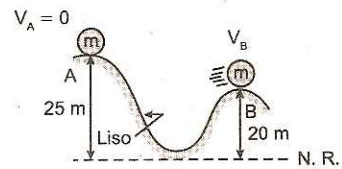
Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Qué trabajo neto hay que realizar para que un cuerpo de 10 kg de masa aumente su velocidad de 2 m/s a 8 m/s?

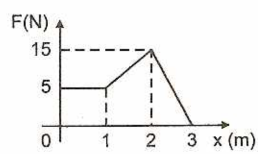
A) 280 J B) 300 J C) 350 J
D) 290 J E) 320 J

2. En la figura mostrada, hallar la velocidad en el punto B. No hay rozamiento ($g = 10\ m/s^2$)



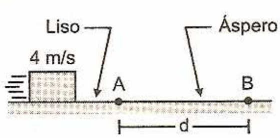
A) 10 m/s B) 11 m/s C) 13 m/s
D) 18 m/s E) 19 m/s

3. La fuerza resultante horizontal que actúa sobre un cuerpo que se desplaza sobre el eje x varía de acuerdo al gráfico. Determine su energía cinética en x = 3 m, si en x = 7,5 J de energía cinética.



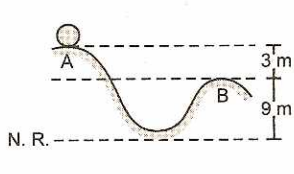
A) 30 J B) 35 J C) 25 J
D) 20 J E) 40 J

4. Si el pequeño ladrillo sale de la superficie horizontal áspera con la mitad de la rapidez con la cual ingreso, determine d. Considere $\mu_k = 0{,}2$ y $g = 10\ m/s^2$



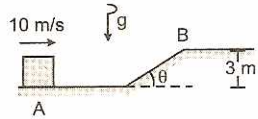
A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

5. Que trabajo realiza la fuerza de rozamiento sobre el bloque de 100 kg, cuando este se desliza a través de la superficie curva partiendo del reposo de A y llegando al reposo en B ($g = 10\ m/s^2$)



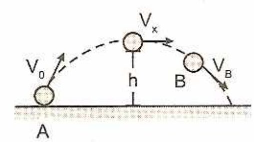
A) −12 kJ B) −3 kJ C) 4 kJ
D) −4 kJ E) −5 kJ

6. Cuando lanzamos con rapidez de 10 m/s un ladrillo de 0,5 kg, tal como se muestra, notamos que solamente llega hasta B. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de rozamiento sobre dicho ladrillo? ($g = 10\ m/s^2$)



A) −10 J B) −12 J C) −15 J
D) −18 J E) −20 J

7. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_0. Hallar la velocidad horizontal en el punto B. Desprecie la resistencia del aire (h es altura máxima).
$K = \sqrt{V_0^2 - 2gh}$



A) K B) 2 K C) 3 K
D) 5 K E) K/2

8. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) La energía cinética depende de la masa de un cuerpo y de su rapidez $E_{c.} = \frac{1}{2}mv$

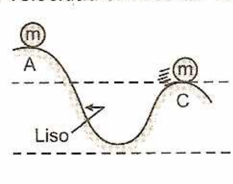
( ) La energía potencial gravitatoria equivale al trabajo que realiza el peso al caer de una altura h: $E_p = mgh$.

( ) La energía potencial elástica está asociada a los materiales elásticos cuando están estirados o comprimidos.

( ) La capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo y transmitir movimiento se denomina energía mecánica.

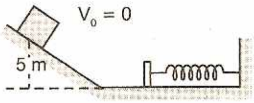
A) VVFV B) FFVV C) FFFV
D) FFFF E) FVVV

9. En la figura dada, hallar el trabajo neto realizado sobre el bloque desde A hacia C. Velocidad en C es de 15 m/s; velocidad en A es de 10 m/s; m= 2 kg.



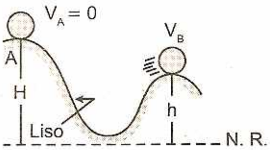
A) 120 J B) 122 J C) 125 J
D) 130 J E) 150 J

10. Determinar la deformación máxima del resorte; la masa del bloque es de 1 kg; k = 100 N/m. No hay rozamiento ($g = 10\ m/s^2$)



A) 0,8 m B) 0,6 m C) 0,5 m
D) 0,4 m E) 0,2 m

11. En la figura, hallar la velocidad en el punto B, si sale del reposo en A.



A) $\sqrt{2g(H-h)}$ B) $\sqrt{2g(H+h)}$
C) $\sqrt{g(H+h)}$ D) $\sqrt{3g(H-h)}$
E) $\sqrt{3g(H+h)}$

12. Un jugador de futbol patea una pelota que inicialmente se encontraba en reposo dándole una rapidez de 50 m/s. Si se eleva a una altura máxima de 80 m, determine la velocidad de la pelota en la altura máxima. Considere un movimiento parabólico. ($g = 10\ m/s^2$).

A) 10 m/s B) 30 m/s C) 25 m/s
D) 20 m/s E) 40 m/s

13. Por efecto del rozamiento la velocidad de una teja, que se desliza sobre un piso rugoso horizontal, disminuye de 20 m/s a 10 m/s en un recorrido de 50 m. Halle el coeficiente de rozamiento cinético ($g = 10\ m/s^2$).

A) 0,1 B) 0,3 C) 0,5
D) 0,2 E) 0,4

14. Si el trabajo resultante sobre un bloque de 12 kg a lo largo de una trayectoria horizontal es 288 J y además se sabe que para dicho tramo duplica su rapidez, ¿Qué rapidez final adquiere?

A) 2 m/s B) 6 m/s C) 8 m/s
D) 4 m/s E) 10 m/s

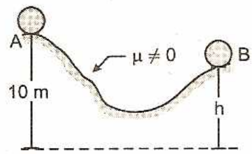
15. Un objeto cae hacia el suelo, determinar la energía cinética del objeto de 4 kg en el instante que pasa con una velocidad de 10 m/s.

A) 200 J B) 220 J C) 250 J
D) 210 J E) 230 J

16. Un bloque de 4 kg de masa, que descansa sobre un piso liso es afectado por una fuerza F = 40N, horizontal y constante. ¿Cuál será la energía cinética del bloque al cabo de un tiempo t = 3 s?

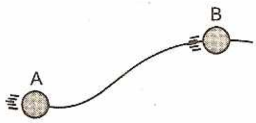
A) 1,8 kJ B) 1,6 kJ C) 1,5 kJ
D) 1,9 kJ E) 1,7 kJ

17. Hasta que altura ascenderá la esfera de 1 kg respecto al piso, si el trabajo de la fuerza de rozamiento sobre la esfera en el tramo áspero AB es de 30 J ($g = 10\ m/s^2$). La rapidez en A es 10 m/s.



A) 10 m B) 11 m C) 12 m
D) 13 m E) 14 m

18. La energía mecánica de la esfera en el punto A es 300 J, en el punto B la energía cinética es 120 J, ¿Cuál es su energía potencial en el punto B?

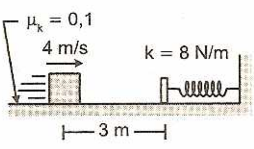


A) 175 J B) 180 J C) 190 J
D) 193 J E) 195 J

19. Un bloque de 20 kg se encuentra a 20 m de altura del pozo sobre una columna. Halle la energía potencial del bloque ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 kJ B) 2 kJ C) 5 kJ
D) 3 kJ E) 1 kJ

20. Se muestra el lanzamiento con rapidez de 4 m/s, de un bloque de 1 kg, sobre una superficie áspera. ¿Cuánto como máximo avanzará el bloque hacia la derecha? ($g = 10\ m/s^2$).

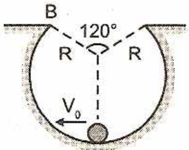


A) 3 m B) 4 m C) 4,5 m
D) 3,5 m E) 5,5 m

21. Un alumno lanza un bloque de 0,5 kg a ras del piso, con una rapidez de 8 m/s. Determine su energía cinética cuando falta 1 s para detenerse. Considere $\mu_k = 0,2$; $g = 10\ m/s^2$.

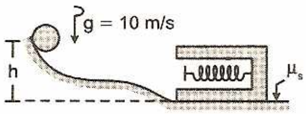
A) 2 J B) 1 J C) 3 J
D) 4 J E) 5 J

22. Calcule la rapidez v_0 con la que se debe impulsar a la bolita para que pase con las justas por B ($R = 0,3$ m; $g = 10$ m/s^2).



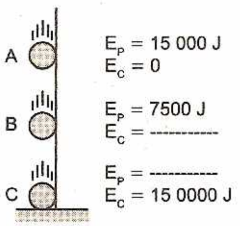
A) 1 m/s B) 3 m/s C) 5 m/s
D) 7 m/s E) 9 m/s

23. Calcule la altura desde la cual se tiene que soltar una esfera de 50 g, para que al caer pueda estar a punto de moverse el bloque de 950 g ($k = 8$ N/cm; $\mu_s = 0,8$).



A) 1 cm B) 0,5 cm C) 2 cm
D) 4 cm E) 8 cm

24. Llene los espacios en blanco con respecto a B y C.

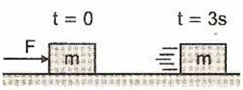


A) 0 J; 500 J B) 1500 J; 7500 J
C) 7500 J; 0 J D) 0 J; 0 J
E) 15000 J; 700 J

25 La energía cinética inicial de un cuerpo en movimiento es E_0. La velocidad del objeto se duplica por acción de las fuerzas aplicadas. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza resultante sobre el cuerpo?

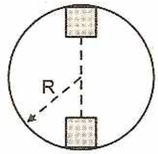
A) $2E_0$ B) $4E_0$ C) $3E_0$
D) $6E_0$ E) $12E_0$

26. Un bloque de 4 kg está en reposo sobre un piso liso, en $t = 0$ se aplica un fuerza $F = 20$N; constante, como se muestra. Calcular la variación de su energía cinética entre los instantes $t = 1$s y $t = 3$s.



A) 100 J B) 200 J C) 300 J
D) 400 J E) 500 J

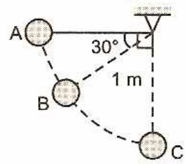
27. Un bloque está atrapado en una superficie cilíndrica lisa. Si sus velocidades en el punto más alto y bajo son 4 y 6 m/s, calcular el radio del cilindro.



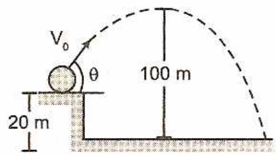
A) 1 m B) 0,5 m C) 2 m
D) 2,5 m E) 3 m

28. Luego de ser soltada la esfera en A, al pasar por B, su energía potencial gravitatoria se reduce a 5 J. Determine la energía mecánica en C ($g = 10$ m/s^2).

A) 8 J
B) 9 J
C) 10 J
D) 11 J
E) 12 J

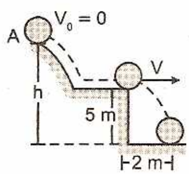


29. Una piedra se lanza tal como se muestra. Si la componente horizontal de la velocidad de lanzamiento tiene un módulo de 30 m/s, determine θ ($g = 10$ m/s^2).



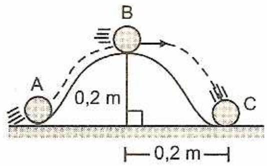
A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 74°

30. Desde que altura descendió la esfera que impacta en el piso, si fue abandonada en A? Considere que no hay fricción.



A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

31. Se muestra la trayectoria que sigue una esfera de 2 kg. Si se desprecia el rozamiento, determine su energía cinética cuando pasa por A ($g = 10$ m/s^2)



A) 3 J B) 5 J C) 4 J
D) 2 J E) 1 J

32. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) La energía es una magnitud física vectorial.
( ) Su unidad de medida en el SI es el joule (J).
( ) La energía cinética es proporcional a su velocidad al cuadrado.
( ) La energía potencial es proporcional a su altura, respecto al piso (nivel de referencia).

A) FFVV B) VVFF C) FVVV
D) VFFV E) VFFF

33. Un cuerpo de masa m se suelta desde un punto A, situado a una altura h sobre el suelo. Considere el cuerpo al pasar por el punto B, a una altura h/4 sobre el suelo. Si no hay resistencia del aire, Indicar verdadero (V) o falso (F).

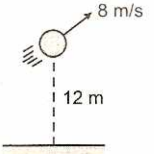
( ) La energía potencial gravitatoria del cuerpo B, vale mgh/4 respecto al piso.
( ) La energía mecánica total del cuerpo en A vale mgh respecto al piso.
( ) La energía mecánica en A, respecto a B, es mgh/6.

A) VVV B) FVF C) FVV
D) VVF E) FFF

34. Un automóvil se mueve con una rapidez v sobre una superficie horizontal. Si su rapidez se reduce en un 20%, ¿Qué porcentaje de la energía cinética anterior es su nueva energía cinética?

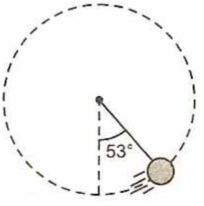
A) 10% B) 20% C) 64%
D) 74% E) 80%

35. Determinar la energía mecánica total del cuerpo de 6 kg ($g = 10\ m/s^2$).



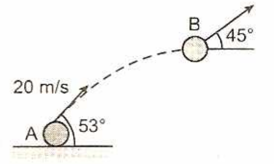
A) 612 J
B) 824 J
C) 712 J
D) 912 J
E) 600 J

36. Una piedra se hace girar en un plano vertical y en el instante mostrado se rompe la cuerda, escapando la piedra con una rapidez de 20 m/s. Determine hasta qué altura asciende la piedra ($g = 10\ m/s^2$).



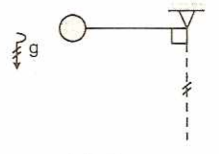
A) 10 m
B) 30 m
C) 40 m
D) 20 m
E) 15 m

37. Una esfera de 2 kg es lanzada, en la forma mostrada. No hay resistencia del aire. Calcule su energía potencial en el punto B ($g = 10\ m/s^2$)



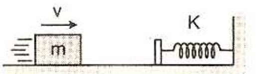
A) 144 J B) 256 J C) 156 J
D) 112 J E) 300 J

38. Un péndulo de longitud L se suelta desde su posición mostrada. ¿Con que velocidad pasará la esferilla por su posición más baja?



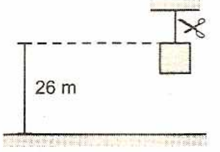
A) $2\sqrt{2\,gL}$ B) $\sqrt{gL}$ C) $\sqrt{2\,gL}$
D) $\sqrt{gL}/2$ E) $3\sqrt{gL}$

39. Un cajón de masa m se acerca, sobre un llano liso, a una muelle de constante k con rapidez v. Hallar la máxima comprensión del muelle por efecto del movimiento del cajón.



A) $v\sqrt{\frac{m}{k}}$ B) $\sqrt{vmk}$ C) $v\sqrt{\frac{2m}{k}}$
D) $v\sqrt{\frac{k}{m}}$ E) $\sqrt{vkm}$

40. Una barra homogénea de 6 m de longitud está en equilibrio en la posición que se indica. Determine con qué rapidez impacta la barra al piso luego de cortar la cuerda ($g = 10\ m/s^2$).



A) 20 m/s B) 30 m/s C) 40 m/s
D) 50 m/s E) 60 m/s

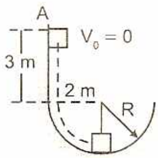
41. Un péndulo es desviado 90° de su posición de equilibrio vertical al dejarlo en libertad.
Señale las afirmaciones falsas.

I. El trabajo de la fuerza de gravedad sirve para aumentar la velocidad de la masa pendular en su descenso.
II. El trabajo de la tensión de la masa pendular permanece constante, si no se considera la fricción del aire.

III. La energía mecánica de la masa pendular permanece constante si no se considera la fricción del aire.

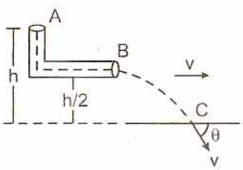
A) Solo II B) Solo I C) Solo III
D) I y II E) I y III

42. Una teja de 1 kg es soltada en la posición A resbalando sobre la superficie áspera (μ_k = 0,75). Calcular el módulo de la reacción de la superficie sobre la teja cuando esta pase por la posición de mínima energía potencial, si hasta ese instante se han disipado 20 J de energía debido al rozamiento (g = 10 m/s^2).



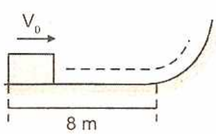
A) 40 N B) 30 N C) 50 N
D) 60 N E) 80 N

43. Se suelta en A una bolita que resbala sobre el tubo liso hasta B. ¿Qué ángulo θ forma la dirección de la velocidad de la bolita que impacta en C?



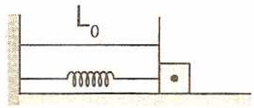
A) arctan$\frac{1}{2}$ B) arctan2 C) 45°
D) 30° E) 60°

44. Desde un horizonte rugoso (μk = 0,1) se lanza un bloque con v_0 = 6 m/s. Al final del tramo rugoso se ubica una concavidad lisa. Halle la altura máxima que alcanza el bloque sobre la concavidad lisa (g = 10 m/s^2).



A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

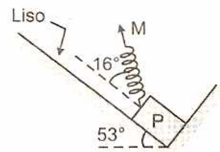
45. Un cuerpo de 1 kg de masa se encuentra sobre una superficie horizontal lisa atado a un resorte, cuya longitud natural es L_0 = 40 cm, y de constante elástica k = 10^4 N/m. Si el cuerpo es desplazado 10 cm de la posición de equilibrio y luego es soltado, determinar su energía cinética cuando la longitud del resorte sea de 35 cm.



A) 37,5 J B) 637,5 J C) 185,5 J
D) 117,5 J E) 75,0 J

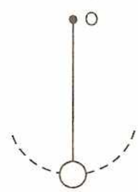
46. El resorte ideal, cuya rigidez es de 50 N/cm se encuentra soldado al bloque en la forma mostrada. Hallar el trabajo necesario para elevar al bloque de 120 N hasta una altura de 0,5 m al aplicar una fuerza en M, en la dirección PM.

A) 60 J
B) 81 J
C) 61 J
D) 241 J
E) 842 J

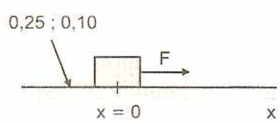


47. ¿Qué mínima rapidez debemos comunicar horizontalmente a la esferita que cuelga del hilo de 1 m de longitud para que pueda realizar una vuelta completa alrededor del punto fijo O (g = 10 m/s^2).

A) 5 m/s
B) 10 m/s
C) 2 m/s
D) $7\sqrt{2}$ m/s
E) $5\sqrt{2}$ m/s



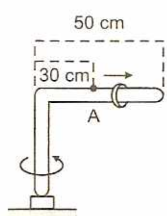
48. Un bloque de 27 kg se encuentra en reposo. Si inicia su movimiento debido a una fuerza $\vec{F} = (-3x + 90)\ \hat{i}$, determine en qué posición se determine el bloque (g = 10 m/s^2).



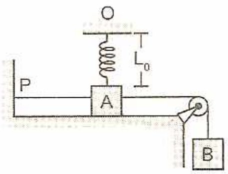
A) 15 m B) 35 m C) 30 m
D) 20 m E) 42 m

49. La figura muestra una barra que gira con rapidez angular de 20 rad/s. Si una arandela que se encuentra en reposo relativo en A comienza a resbalar, hallar la rapidez relativa a la barra de la arandela cuando sale de la barra. No considere rozamiento.

A) 2 m/s
B) 4 m/s
C) 6 m/s
D) 8 m/s
E) 10 m/s

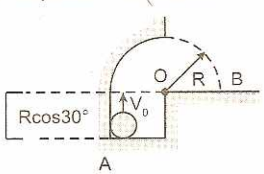


50. Sobre un plano horizontal liso hay una pequeña barreta A unida, con unos hilos al punto P y por medio de la polea de peso insignificante con la carga B de igual masa que la de la barreta. Además, la barreta se une con el punto O por un liviano resorte indeformable de longitud $L_0 = 50$ cm y rigidez $k = 5\ mg/L_0$ donde m es la masa de la barreta. Se quema el hilo PA y la barreta comienza a moverse. Determinar la magnitud de su velocidad en el momento de la separación del plano.



A) 0,2 m/s B) 0,7 m/s C) 1 m/s
D) 1,7 m/s E) 2 m/s

51. Determinar la rapidez mínima vertical v_0 con que debe lanzarse una esferilla desde el punto A para que llegue al punto B. No existe rozamiento.

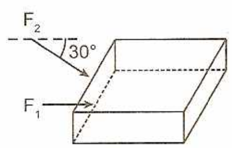


A) $\sqrt{\sqrt{3}\ gR}$ B) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}gR}$ C) $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}gR}$
D) $\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{2}gR}$ E) $\sqrt{\sqrt{2}\ gR}$

52. Se suelta una piedra desde una altura de 200 m. El rozamiento con el aire hace que su energía cinética, al momento de llegar al suelo, sea el 90% de lo que sería sino hubiese rozamiento con el aire. Hallar la velocidad de la piedra, en m/s, al momento de llegar al suelo. (Considere: $g = 10\ m/s^2$).

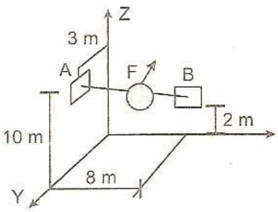
A) 50 B) 60 C) 70
D) 80 E) 90

53. El cuerpo mostrado, en la figura, tiene 4 N de peso y se desplaza con velocidad constante una distancia de 10 m sobre una superficie horizontal, con coeficiente de fricción igual a 0,4, por acción de las fuerzas F_1, paralela al plano, y F_2 de 2 N, inclinada un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. Hallar el trabajo realizado por la fuerza F_1 en *joules*.



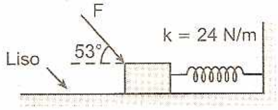
A) $0,27 \times 10^{-2}$ B) $0,27 \times 10^{-1}$ C) $0,27 \times 10^{-3}$
D) $0,27 \times 10^{1}$ E) $0,27 \times 10^{2}$

54. La pelota de 2 kg que parte del reposo en A se desliza a lo largo del alambre liso. Si durante su movimiento, actúa una fuerza F = (11x; 17y; 9z) N, estando x, y, z en metros, determine la rapidez de la pelota al llegar a B. ($\vec{g} = 10\hat{k}\ m/s^2$).



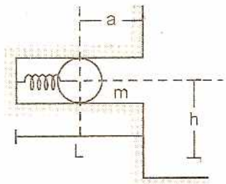
A) 5 m/s B) 10 m/s C) $5\sqrt{5}$ m/s
D) 15 m/s E) $10\sqrt{5}$ m/s

55. Sobre el bloque de 2 kg que está en reposo se empieza a ejercer la fuerza F, donde el módulo de F varía según: F = 20x + 10, tal que x es la deformación del resorte cuya rigidez es k = 24 N/m. Determine la máxima rapidez que logra alcanzar el bloque.



A) $\sqrt{12}$ m/s B) $\sqrt{15}$ m/s C) $\sqrt{13}$ m/s
D) $\sqrt{1,5}$ m/s E) 10 m/s

56. El resorte de la figura, de longitud natural L y constante k, esta comprimido una longitud a. Al recuperar su longitud natural, empuja a la masa m. Hallar la velocidad de esta masa, luego de descender una altura h.



A) $\sqrt{2gh}$ B) $\sqrt{ka^2/2m}$
C) $\sqrt{ka^2/m}$ D) $\sqrt{2gh + (ka^2/m)}$
E) $\sqrt{2ka^2/m}$

57. Un cuerpo de masa m se suelta desde el punto A, situado a una altura h sobre el suelo. Considere el cuerpo al pasar por el punto B, a una altura h/4 sobre el suelo, en su caída vertical. Si la resistencia del aire no es despreciable, indicar verdadero (V) o falso (F)

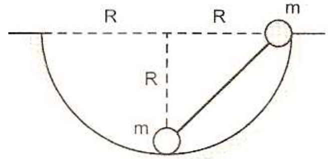
( ) La energía potencial del cuerpo en B, vale mgh/4 respecto del piso.
( ) La energía mecánica total del cuerpo en A vale mgh respecto del piso.
( ) La energía cinética del cuerpo en B, es menor que 3mgh/4. (g: aceleración de la gravedad).

A) VVV B) FVV C) FVF
D) VVF E) VFV

58. Con relación al trabajo de las fuerzas conservativas, señale la expresión falsa.

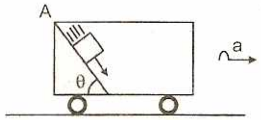
A) Es independiente de la trayectoria entre dos puntos dados.
B) Es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de la energía potencial asociada a dicha fuerza.
C) Es completamente recuperable.
D) Depende de la distancia entre el punto de partida y el punto de llegada.
E) Se puede medir en *joules*.

59. El sistema que se muestra se suelta en la posición que se indica. Si la varilla es de masa despreciable y el rozamiento entre las esferas de 2 kg y la superficie existe, pero es pequeño; determine cuanto calor se disipa al transcurrir un gran intervalo de tiempo ($R = m$; $g = 10\ m/s^2$; $\sqrt{2} = 1{,}4$).



A) 32 J B) 28 J C) 16 J
D) 12 J E) 4 J

60. Si en el instante que el coche acelera, el bloque se suelta en A, luego de recorrer una distancia horizontal igual a la longitud del plano inclinado se ubica en reposo relativo al coche, hallar la aceleración del coche. Desprecie el rozamiento.



A) $g\text{sen}\theta/2$ B) $g\cos\theta/2$ C) $g\tan\theta/2$
D) $g\cos\theta/2$ E) g

CLAVES

1. B	9. C	17. C	25. C	33. D	41. A	49. D	57. A
2. A	10. C	18. B	26. D	34. C	42. C	50. D	58. D
3. A	11. A	19. A	27. B	35. D	43. C	51. D	59. A
4. C	12. B	20. B	28. C	36. D	44. A	52. B	60. C
5. B	13. B	21. B	29. C	37. D	45. A	53. D	
6. A	14. C	22. B	30. B	38. C	46. C	54. C	
7. A	15. A	23. E	31. B	39. A	47. E	55. E	
8. E	16. A	24. C	32. C	40. A	48. E	56. D	

Cantidad de movimiento

08 capítulo

Jean Buridán (Béthune, 1300-Béthune, 1358) fue un filósofo escolástico francés y uno de los inspiradores del escepticismo religioso en Europa. Destacó en los estudios de lógica, como comentarista de Aristóteles y fue defensor del principio de causalidad. Como autor de trabajos teóricos en óptica y mecánica, formuló una noción de inercia intentando explicar el movimiento con la teoría del ímpetu. Su nombre está frecuentemente asociado al experimento mental conocido como el «asno de Buridán».

Como filósofo, Buridán adopta una posición nominalista, pero no parte de un lenguaje humano idealizado, lo que marca una diferencia importante entre su pensamiento y el de su maestro Guillermo de Occam, con quien se le compara a menudo. Su contribución más importante es la introducción del concepto de ímpetu o movimiento inercial (momento), que le hace precursor directo, en este punto fundamental, de Copérnico, Galileo y Newton; según Buridán, el ímpetu, proporcional a la masa y a la velocidad impartida por el agente del movimiento mantiene al móvil en su estado de movimiento sin necesidad de acciones ulteriores. Asimismo, fue precursor de la teoría de la formación de las imágenes ópticas y de la cinemática o ciencia del movimiento.

Fuente: Wikipedia

CANTIDAD DE MOVIMIENTO O ÍMPETU ($\vec{p}$)

La figura 8.1 muestra un cuerpo de masa "m" que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en línea recta. Una cantidad física muy importante, relacionada con el movimiento del cuerpo, es la llamada cantidad de movimiento, se define de la siguiente manera:

La cantidad de movimiento o *ímpetu*, $\vec{p}$, de un cuerpo de masa "m", que se mueve con velocidad $\vec{v}$, está definida por la expresión:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad ...(8.1)$$

Unidades: Ns

La cantidad de movimiento o *momentum* lineal se determina mediante el producto de la masa del cuerpo por su velocidad instantánea, por consiguiente el moméntum y la velocidad tienen la misma dirección y sentido.

Tabla 8.1. Cantidad de movimiento

	m (kg)	$\vec{v}$ (m/s)	$\vec{p} = m\vec{v}$ (Ns)
a	5	$6\hat{i}$	$30\hat{i}$
b	9	$3\hat{j}$	$27\hat{j}$
c	2	$2\hat{i} + 3\hat{j}$	$4\hat{i} + 6\hat{j}$
d	3	$4\hat{i} - 6\hat{j}$	$12\hat{i} + 18\hat{j}$
e	0,5	$12\hat{i} - 18\hat{j}$	$6\hat{i} - 9\hat{j}$

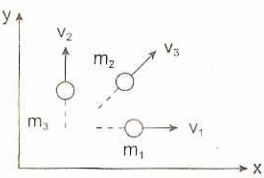
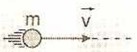


Fig. 8.1

Momentum lineal ($\vec{p}$)

A la cantidad de movimiento suele llamarse moméntum (del nombre latino *momentum*, que corresponde a *ímpetu*). Como se considera la velocidad lineal, se especifica a veces el calificativo de lineal.



$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

IMPULSO ($\vec{I}$)

Es aquella magnitud física vectorial, que nos expresa la acción casi instantánea, que realiza una fuerza externa en un cuerpo, modificándole su *momentum* lineal. Por ejemplo, cuando damos una patada a una pelota; cuando golpeamos una bola de billar con el taco (palo); cuando golpeamos una pelota de béisbol con el bate, cuando golpeamos una pelota de tenis con la raqueta. El impulso, se define como el producto de la fuerza resultante, por el intervalo de tiempo relativamente pequeño. El impulso y la fuerza resultante tienen la misma dirección y sentido.

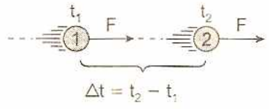


Fig. 8.2

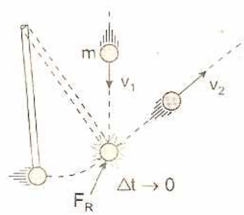
$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\Delta t} \qquad ...(8.2)$$

Unidades: Ns

"Cuando en un intervalo de tiempo relativamente pequeño casi instantáneo, actúa una fuerza sobre un cuerpo móvil, se dice que el cuerpo a recibido un impulso".

Tabla 8.2. Impulso

	$\vec{F}$ (newton)	Δt (segundos)	$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$(Ns)
a	$5000\hat{i}$	0,001	$5\hat{i}$
b	$8000\hat{j}$	0,002	$16\hat{j}$
c	$900\hat{i} + 700\hat{j}$	0,01	$9\hat{i} + 7\hat{j}$
d	$400\hat{i} - 600\hat{j}$	0,02	$8\hat{i} - 12\hat{j}$
e	$7000\hat{i} - 8000\hat{j}$	0,005	$35\hat{i} - 40\hat{j}$



En la figura mostrada el cuerpo de masa "m" de forma esférica viene con una velocidad v_1 y luego de la interacción rebota con una velocidad v_2.

De la 2.ª ley de Newton: $\vec{F}_R m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_R = m\left(\dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}\right)$

$\vec{F}_R(\Delta t) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \Rightarrow I = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{I} = \Delta\vec{p}$

"El impulso, es igual a la variación del *momentum* lineal".

Impulso y trabajo

Todo cuerpo modificará definitivamente su cantidad de movimiento, cuando sobre él se manifiesta una fuerza resultante que puede actuar sobre él. Cuando el intervalo de tiempo es relativamente pequeño casi instantáneo, se dice que el cuerpo recibe un impulso y cuando la fuerza actúa durante un intervalo de tiempo considerable entonces la fuerza estará realizando un trabajo sobre el cuerpo, por consiguiente modificará su energía cinética.

TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Consideremos un cuerpo de masa "m que se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$. Si una fuerza $\vec{F}$, constante, actúa sobre el cuerpo durante un intervalo de tiempo Δt, observaremos que su velocidad sufrirá una variación, pasando a ser $\vec{v}_2$ al final de intervalo, figura 8.3. Suponiendo que $\vec{F}$ sea la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, la segunda ley de Newton permite escribir:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad ...(8.3)$$

Donde $\vec{a}$ representa la aceleración adquirida por el cuerpo, pero sabemos que $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, luego:

$$\vec{F} = m\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)$$

De donde:

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$$

$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}} \qquad ...(8.4)$$

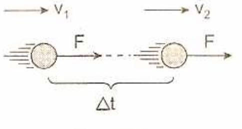


Fig. 8.3

"El impulso es igual a la variación del *momentum* lineal".

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_0} \qquad ...(8.5)$$

El impulso $\vec{I}$, ejercido por la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual a la variación de la cantidad de movimiento, $\vec{p}$, ocurrida en dicho intervalo, es decir:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1} \qquad ...(8.6)$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL *MOMENTUM* LINEAL

Si es nula la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas, la cantidad de movimiento total de este sistema se conservará en el tiempo .

De las ecuaciones (8.2) y (8.5) tenemos:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\Delta t} \qquad ...(8.2)$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_0} \qquad ...(8.5)$$

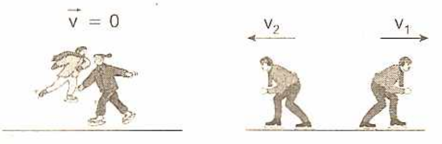
Si la fuerza resultante externa es igual a cero, $\vec{F} = 0$, entonces, el impulso es igual a cero, $\vec{I} = 0$, en (8.5).

$$0 = \vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_0$$

$$\boxed{\vec{p}_0 = \vec{p}_f} \qquad ...(17.7)$$

Ejemplos:

1. Un hombre y un muchacho que tienen patines tienen masas de 70 kg y 30 kg, respectivamente, están sobre un piso sin rozamiento. Si después que se impulsan uno a otro, el hombre se aleja con una velocidad de $3\hat{i}$ m/s respecto al piso, ¿qué velocidad tiene el muchacho?



Inicial Final

Resolución:

La fuerza resultante sobre el sistema (hombre + muchacho) es igual a cero, entonces la cantidad de movimiento del sistema se conserva en el tiempo.

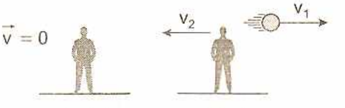
$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f$$

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow 0 = 70(3\hat{i}) + 30\vec{v}_2$$

$$-30\vec{v}_2 = 210\hat{i} \Rightarrow \vec{v}_2 = -7\hat{i} \text{ m/s}$$

El signo negativo significa que el muchacho se mueve hacia la izquierda.

2. Un niño de masa 30 kg está parado sobre una pista de hielo, lanza una esfera de 900 g horizontalmente con velocidad de 20 m/s. Despreciando la fricción entre el niño y el hielo, encuentra la velocidad de retroceso del niño.



Inicial Final

Resolución:

La fuerza resultante externa sobre el sistema (niño + esfera) es igual a cero, entonces la cantidad de movimiento del sistema se conserva en el tiempo.

$$\vec{p}_i = \vec{p}_0 \Rightarrow 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

donde m_1 es la masa de la esfera y m_2 la masa del niño. La cantidad de movimiento inicial es igual a cero, el niño está en reposo.

Reemplazando datos en el SI:

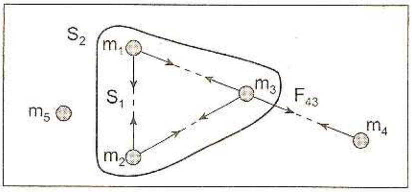
$$0 = (0{,}9)(20\hat{i}) + (30)\vec{v}_2$$

$$-30\vec{v}_2 = 18 \Rightarrow \vec{v}_2 = -0{,}6\hat{i} \text{ m/s}$$

El signo negativo significa que el niño se mueve hacia la izquierda.

SISTEMA FÍSICO

Es aquel conjunto de partículas o cuerpos considerados en estudio, elegidos en forma arbitraria. La figura muestra un sistema físico S_1, limitado por una línea curva cerrada. Las demás partículas pertenecen al sistema S_2.



Fuerza Externa

Es aquella fuerza que actúa sobre el sistema, debido a la interacción de una componente del sistema, con partículas externas al sistema. En la figura, F_{43} es una fuerza externa al sistema físico S_1.

Fuerza Interna

Es aquella fuerza debido a la interacción de las partículas consideradas dentro del sistema físico. En la figura, las masas m_1; m_2 y m_3 pertenecen al sistema S_1, la interacción entre ellas constituyen las fuerzas internas al sistema. La sumatoria de las fuerzas internas, siempre es igual a cero.

$$\Sigma F_{(\text{internas})} = 0$$

Sistema Aislado (S. A.)

Es aquel sistema físico cuya resultante de fuerzas externas es igual a cero.

$$\Sigma F_{(\text{externas})} = 0$$

DEMOSTRACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL *MOMENTUM* LINEAL

Es una Ley Universal de gran trascendencia y aplicación en la Mecánica. Se puede expresar de los siguientes modos:

I. Si el impulso sobre una partícula o sistema físico (sistema de partículas) es igual a cero, la cantidad de movimiento se conserva en el tiempo.

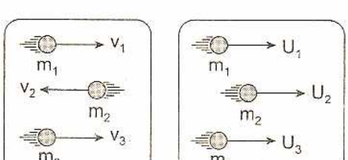
$$\vec{I} = \vec{F}_R \Delta t \qquad ...(1)$$

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \qquad ...(2)$$

Si la fuerza resultante es igual a cero, entonces el impulso es también igual a cero.

De (1) y (2): $\vec{F}_R = 0 \Rightarrow \vec{I} = 0$; luego: $\vec{p}_0 = \vec{p}_f$

II. En todo sistema físico aislado, la cantidad de movimiento se conserva en el tiempo.



Inicial   Final

$$\Sigma\vec{p}_0 = \Sigma\vec{p}_f$$

La cantidad de movimiento es una magnitud física vectorial, por consiguiente podemos escribir en función de dos componentes rectangulares.

$$\Sigma\vec{p}_{0(x)} = \Sigma\vec{p}_{f(x)}$$

$$\Sigma\vec{p}_{0(y)} = \Sigma\vec{p}_{f(y)}$$

En el movimiento parabólico, se conserva la cantidad de movimiento de la partícula en el eje (x), la fuerza resultante en el eje x es igual a cero. En cambio en el eje y la fuerza resultante es igual al peso mg, no existe conservación del *momentum* lineal en el eje (y).

VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA

Consideremos un sistema físico compuesto de partículas de masas m_1, m_2, m_3 , y velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, respecto a un sistema inercial de referencia.

El centro de masa (CM) es aquel punto donde se considera concentrada la masa del sistema y donde actúa la fuerza resultante.

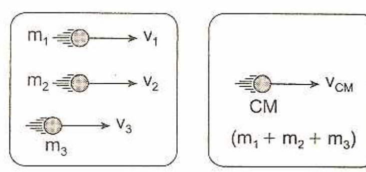
La velocidad del CM, se define del siguiente modo:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sea, M la masa del sistema físico: $M = m_1 + m_2 + m_3$

La cantidad de movimiento del sistema, será:

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = M\vec{v}_{CM}$$

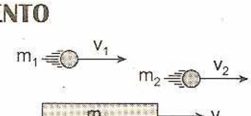


Sistema real   Sistema equivalente

Si el sistema físico está aislado (S.A.), sabemos por el principio de conservación del *momentum*, que $\vec{p}$ permanece constante en el tiempo. Por consiguiente:

"El centro de masa de un sistema aislado se mueve con velocidad constante (MRU) respecto a un sistema de referencia inercial".

SEGUNDO TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO



Consideremos un sistema físico de 3 partículas, de masas m_1, m_2 y m_3, que se mueven con velocidades v_1, v_2 y v_3 respecto de un sistema de referencia inercial.

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \sum_{i=1}^{3}\vec{p}i,\ M = m_1,\ m_2 \text{ y } m_3$$

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 \qquad ...(I)$$

Realizamos el siguiente artificio:

$0 = (m_1 + m_2)v_3 - m_1v_3 - m_2v_3$ ...(II)

Sumando las ecuaciones (I) y (II):

$P_{sist} = m_1(v_1 - v_3) + m_2(v_2 - v_3) + (m_1 + m_2 + m_3)v_3$

Velocidad relativa: $v_1 - v_3 = v_{13}$

Velocidad de (1) respecto de (3):

$\vec{p}_{sist} = m_1v_{13} + m_2v_{23} + Mv_3$

Generalizando, para un sistema de "n" partículas:

$$\vec{p}_{sist} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\vec{v}_{in} + M\vec{v}_n$$

$M = m_1 + m_2 + ... + m_n$

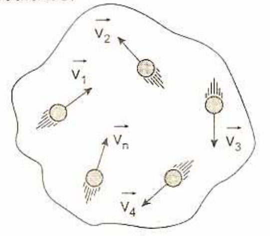
La cantidad de movimiento del sistema, es igual al *momentum* de (n − 1) partículas respecto del enésimo cuerpo, más la masa del sistema por la velocidad de la partícula enésima.

Teorema: El *momentum* lineal de un sistema físico de partículas es igual a la suma vectorial de su *momentum* lineal respecto de una de ellas y el producto de la masa total del sistema por la velocidad de dicha partícula.

$$\vec{p}_{sist} = \vec{p}_{sist/n} + m_{sist}\vec{v}_n$$

Demostración:

La cantidad de movimiento del sistema respecto de la enésima partícula es:



$\vec{p}_{sist/n} = \vec{p}_{1/n} + \vec{p}_{2/n} + \vec{p}_{3/n} + ... + \vec{p}_{(n-1)/n}$

$\vec{p}_{sist/n} = m_1\vec{v}_{1/n} + m_1\vec{v}_{2/n} + m_1\vec{v}_{3/n} + ... + m_{n-1}\vec{v}_{(n-1)/n}$

Sistema de partículas:

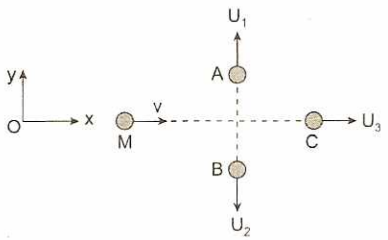
$\vec{p}_{sist/n} = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_n) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_n) + m_3(\vec{v}_3 - \vec{v}_n) + ... + m_{n-1}(\vec{v}_{n-1} - \vec{v}_n)$

$\vec{p}_{sist/n} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_{n-1}\vec{v}_{n-1}) - (m_1 + m_2 + ... + m_{n-1} + m_n)\vec{v}_n$

$\vec{p}_{sist/n} = \vec{p}_{sist} - m_{sist}\vec{v}_n \Rightarrow \vec{p}_{sist} = \vec{p}_{sist/n} + m_{sist}\vec{v}_n$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un granada de guerra de masa M = 150 g se desplaza con velocidad v = 200 m/s, explotando luego en tres fragmentos A(40 g); B(50 g) y C(60 g). Sabiendo que inmediatamente después de la explosión los fragmentos se mueven en las direcciones mostradas, donde B se mueve con velocidad U_2 = 80 m/s en dirección vertical, determinar la velocidad de A y C.



Resolución:

Aplicamos el principio de conservación del *momentum* lineal, instante antes e instante después de la explosión.

En el eje y: $\vec{p}_{y(antes)} = \vec{p}_{y(después)}$

$0 = m_AU_1 - m_BU_2 \Rightarrow 0 = (40)U_1 - (50)(80)$

Despejando, tenemos: U_1 = 100 m/s.

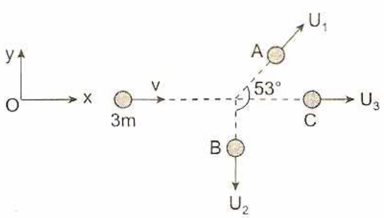
En el eje y: $\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)}$

$\Rightarrow Mv = m_cU_3 \Rightarrow (150)(200) = 60U_3$

Despejando tenemos: U_3 = 500 m/s.

Luego, inmediatamente después de la explosión, A se mueve con 100 m/s y C con 500 m/s.

2. Una granada de guerra de masa 3m se desplaza a una velocidad v = 60 m/s, explotando luego en tres fragmentos A, B y C de masas iguales a "m" cada uno. Sabiendo que inmediatamente después de la explosión los fragmentos se mueven en las direcciones mostradas, donde A se mueve con velocidad U_1 = 50 m/s formando 53° con la horizontal, determinar la velocidad de los fragmentos B y C.



Resolución:

Aplicamos el principio de conservación del *momentum* lineal, instante antes e instante después de la explosión.

Donde; $m_A = m_B = m_C = m$

En el eje y: $\vec{p}_{y(antes)} = \vec{p}_{y(después)}$

$\Rightarrow 0 = m_AU_1\text{sen}53° - m_BU_2$

Despejando ($m_A = m_B$), tenemos que: $U_2 = \frac{4}{5}U_1$

Reemplazando el dato: $U_1 = 50$ m/s y $U_2 = 40$ m/s

En el eje x: $\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})}$

$3mv = m_AU_1(\cos 53°) + m_CU_3$

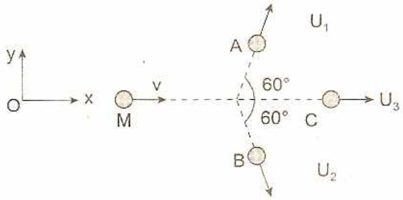
$\Rightarrow 3mv = mU_1\left(\frac{3}{5}\right) + mU_3$

$3v = U_1 + U_3 \Rightarrow 3(60) = (50) + U_3$

Despejando tenemos: $U_3 = 150$ m/s.

Luego, inmediatamente después de la explosión: B se mueve con 40 m/s y C con 150 m/s.

3. Una granada de guerra de masa M se desplaza a una velocidad v = 500 m/s, explotando luego en tres fragmentos A, B y C de masas iguales a M/3 cada uno. Sabiendo que inmediatamente después de la explosión los fragmentos se mueven en las direcciones mostradas, donde C se mueve con velocidad U_3 = 1,2 km/s en dirección horizontal, determinar la velocidad de los fragmentos A y B que forman ángulos de 60° con la línea horizontal.



Resolución:

Aplicamos el principio de conservación del *momentum* lineal, instante antes e instante después de la explosión.

Donde, $m_A = m_B = m_C = \frac{M}{3}$

En el eje y: $\vec{p}_{y(\text{antes})} = \vec{p}_{y(\text{después})}$

$\Rightarrow 0 = m_AU_1\text{sen}60° - m_BU_2\text{sen}60°$

Despejando ($m_A = m_B$) tenemos: $U_1 = U_2 = U$

En el eje x: $\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})}$

$Mv = m_AU_1(\cos 60°) + m_BU_2(\cos 60°) + m_CU_3$

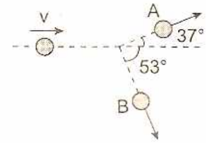
$Mv = \frac{M}{3}U\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{M}{3}U\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{M}{3}U_3 \Rightarrow 3v = U + U_3$

Reemplazando datos: $3(500) = U + 1200$

Donde: $U = 300$ m/s

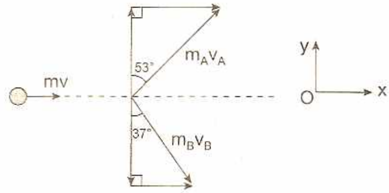
Luego, los fragmentos A y B se mueven con velocidad de 300 m/s cada uno.

4. Un proyectil de masa m = 200 g se desplaza a una velocidad v = 75 m/s, explotando luego en dos fragmentos A (50 g) y B (150 g), respectivamente. Sabiendo que inmediatamente después de la explosión los fragmentos se mueven en las direcciones mostradas en la figura, determinar la velocidad de A y B.



Resolución:

Conservación del *momentum* lineal, instante antes e instante después de la explosión.



En el eje y: $\vec{p}_{y(\text{antes})} = \vec{p}_{y(\text{después})}$

$0 = m_Av_A(\cos 53°) - m_Bv_B(\cos 37°)$

Reemplazando: $v_A = 4v_B$ ...(1)

En el eje x: $\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})}$

$mv = m_Av_A(\text{sen}53°) + m_Bv_B(\text{sen}37°)$

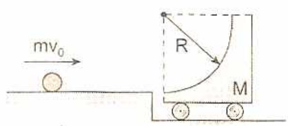
Reemplazando:

$1500 = 4v_A + 9v_B$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2):

$v_A = 240$ m/s $\wedge$ $v_B = 60$ m/s

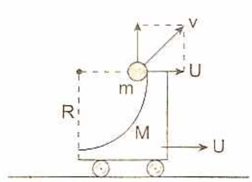
5. Un cuerpo esférico de masa "m" que se mueve horizontalmente con una velocidad v_0 = 6 m/s hace contacto con la superficie superior de un carro de masa M = 5m, inicialmente en reposo. Si no existe rozamiento, hallar la velocidad de "m" cuando sale por la parte superior de la superficie cilíndrica de radio R = 1,1 m (g = 10 m/s^2).



Resolución:

Consideramos nuestro sistema físico (M + m).

Conservación del *momentum* lineal, en el eje x:



$\vec{p}_{x(\text{inicial})} = \vec{p}_{x(\text{final})}$

$mv_0 = (m + M)U \Rightarrow m(6) = (6m)U \Rightarrow U = 1$ m/s

U es la componente de la velocidad v en el eje x, en el instante que abandona "m" a la superficie.

Conservación de la energía mecánica:

$E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$

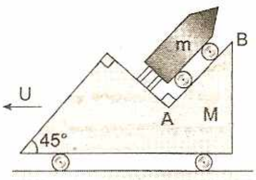
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

Reemplazando datos:

$$\frac{1}{2}m(36) = \frac{1}{2}(5m)(1) + \frac{1}{2}mv^2 + m(10)(1,1)$$

$\Rightarrow v = 3$ m/s

6. En la figura, AB es una rampa de lanzamiento de cohetes, inclinada un ángulo de 45° respecto a la horizontal. El sistema está inicialmente en reposo y el carro de masa M puede moverse libremente sobre una carrilera sin fricción. Hallar la velocidad con que el cohete de masa "m" (M = 3m) abandona la plataforma, respecto de un observador fijo en la Tierra. Sabiendo además que la velocidad del carro después del lanzamiento es U = 160 m/s.



Resolución:

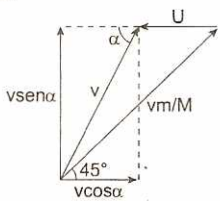


Diagrama de velocidades del cohete, que tiene una velocidad "v" cuando abandona la rampa, respecto de la Tierra.

Consideremos el sistema físico (carro + cohete).

Conservación del *momentum* lineal, en el eje x:

$$\vec{p}_{x(inicial)} = \vec{p}_{x(final)}$$

$0 = m(v\cos\alpha) - MU \Rightarrow 0 = m(v\cos\alpha) - (3m)U$

$v\cos\alpha = 3U$ ...(1)

Del diagrama de velocidades:

$$\tan 45° = \frac{v(\text{sen}\,\alpha)}{v(\cos\alpha) + U} = 1$$

$v(\text{sen}\,\alpha) = (v\cos\alpha) + U$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

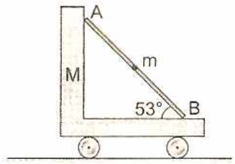
$v(\text{sen}\,\alpha) = 4U$ ...(3)

Dividiendo: (3) ÷ (1): $\tan\alpha = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53°$

Reemplazando en (3):

$v\left(\frac{4}{5}\right) = 4(160) \Rightarrow v = 800$ m/s

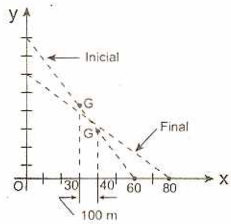
7. El sistema mostrado se deja en libertad a partir del reposo, de la posición mostrada en la figura. Sabiendo que no existe rozamiento, hallar el desplazamiento que experimenta el carro de masa M, hasta el instante en que la barra AB uniforme y homogénea de longitud L haga un ángulo de 37° con la horizontal. La masa de la barra homogénea es "m", donde: M = 4m, L = 100 cm.



Resolución:

Consideremos el sistema físico (m + M).

Conservación del *momentum* en el eje x, aplicando el teorema de la cantidad de movimiento (velocidad relativa). U: velocidad del carro de masa M.



$$\vec{p}_{x(inicial)} = \vec{p}_{x(final)}$$

$0 = m_1 v_{1/2} - (m_1 + m_2)U \Rightarrow 0 = m\left(\frac{10}{t}\right) - 5m\left(\frac{x}{t}\right)$

$\therefore x = 2$ cm

El centro de masa G de la barra homogénea experimenta un desplazamiento de 10 cm respecto del carro, en el eje x.

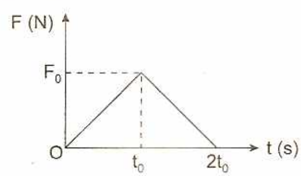
En general se cumple que:

$$x = \left(\frac{m}{m+M}\right)\left(\frac{L}{10}\right)$$

x: desplazamiento horizontal del carro.

8. Se tiene el gráfico de F_x- t para una partícula de masa "m" y velocidad inicial "v". Hallar su velocidad para $t = 2t_0$.

Resolución:



Sabemos que:

$\vec{I} = \int \vec{F}dt \Rightarrow I = \int Fdt =$ Área bajo la curva F-t

Entonces: $I_x = \dfrac{(2t_0)(F_0)}{2} \Rightarrow I_x = F_0 t_0$ ...(1)

También: $\vec{I}_x = \Delta\vec{p}_x \Rightarrow \vec{I} = m\vec{U}_x - m\vec{v}_x$

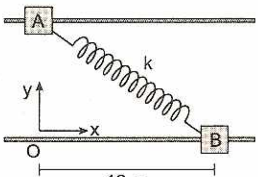
Sea: $\vec{U}_x = U\,\vec{i}$ la velocidad en $t = 2t_0$, entonces:

$\vec{I}_x = m(U - v)\,\hat{i} \Rightarrow I_x = m(U - v)$ ...(2)

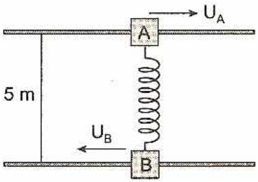
Igualando (1) y (2):

$$F_0 t_0 = m(U - v) \Rightarrow \vec{U}_x = \left(\frac{F_0 t_0 + mv}{m}\right)\hat{i}$$

9. Dos bloques A (2 kg) y B (1 kg) se encuentran sobre correderas lisas y paralelas en un plano horizontal, $\vec{r}_A = (12;\, 0)$ m y $\vec{r}_B = (0;\, 5)$ m y están unidos por un resorte de constante elástica $k = 600$ N/m cuya longitud natural es 8 m.



(Antes)



(Después)

Si los bloques parten del reposo en la posición mostrada, determinar:

a) La velocidad de A y B en el instante que el resorte es perpendicular a las correderas.
b) La posición del centro de masa (CM) en el instante descrito anteriormente.

Resolución:

a) Principio de conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

$0 = m_A\vec{U}_A + m_B\vec{U}_B \Rightarrow 0 = 2U_A + (1)(-U_B)$

El signo (−) indica que el resorte está comprimido.

Principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(0)} = E_{M(f)}$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}m_A U_A^2 + \frac{1}{2}m_B U_B^2 \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$kx_1^2 - kx_2^2 = m_A U_A^2 + 4m_B U_A^2$$

Reemplazando los datos tenemos:

$U_A = 40$ m/s $(\hat{i}) \wedge U_B = 80$ m/s $(-\hat{i})$

b) Cálculo del centro de masa en la posición inicial:

$$x_{CM_1} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{2(12) + 0}{3} = 8 \text{ m}$$

$$y_{CM_1} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} = \frac{0 + (1)(5)}{3} = 1{,}7 \text{ m}$$

$\Rightarrow \vec{r}_{CM_1} = (8;\, 1{,}7)$ m

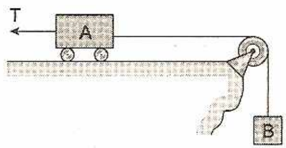
La suma de fuerzas externas es nula, entonces, se conserva el *momentum* lineal ($\vec{p}$ = constante), luego la velocidad de centro de masa se mantiene constante. Como los cuerpos salen del reposo, entonces:

$\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{CM}$ = constante.

$\vec{r}_{CM_1} = \vec{r}_{CM_2} = (8;\, 1{,}7)$ m

10. En el instante $t = 0$ en que la velocidad del contrapeso B de 25 kg es de 3 m/s hacia abajo, se aplica una fuerza T cuyo módulo vale 400 N y dirección y sentido los indicados en la figura. Masa del bloque A 50 kg. Determinar el instante "t" en que el citado contrapeso:

a) Se detiene.
b) Posee una velocidad de 3 m/s hacia arriba.



Relación entre la impulsión y la cantidad de movimiento:

$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 \Rightarrow \vec{p}_0 + \vec{I} = \vec{p}_f$

Luego:

$m_A\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t = 0 \Rightarrow m_A v_1 + (C - T)\Delta t = 0$

$\Rightarrow 50(3) + (C - 400)\Delta t = 0 \quad ...(1)$

Para el contrapeso se cumple que:

$\vec{v}_1 = -3j$ m/s; $\vec{v}_2 = 0$

Relación entre la impulsión y la cantidad de movimiento: $m_B\vec{v}_1 + \vec{I}_B = m_B\vec{v}_2$

$-m_B v_1 + (C - m_B g)\Delta t = 0$

$\Rightarrow -25(3) + (C - 25 \times 9{,}8)\Delta t = 0 \quad ...(2)$

Resolviendo (1) y (2), tenemos que: $\Delta t = 1{,}45$ s

b) Para el carro debe cumplirse que:

$\vec{v}_1 = 3\vec{i}$ m/s; $\vec{v}_2 = -3\hat{i}$ m/s

Relación entre la impulsión y la cantidad de movimiento: $m_A\vec{v}_1 + \vec{I}_A = m_A\vec{v}_2$

$m_A v_1 + (C - T)\Delta t = -m_A v_2$

$50 \times 3 + (C - 400)\Delta t = -50 \times 3 \quad ...(3)$

Para el contrapeso debe cumplirse que:

$\vec{v}_1 = -3$ m/s; $\vec{v}_2 = 3$ m/s

Relación entre la impulsión y la cantidad de movimiento: $m_B\vec{v}_1 + \vec{I}_B = m_B\vec{v}_2$

$-m_B v_1 + (C - m_B g)\Delta t = m_B v_2$

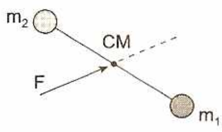
$-25 \times 3 + (C - 25 \times 9{,}8)\Delta t = 25 \times 3 \quad ...(4)$

Resolviendo (3) y (4), tenemos que: $\Delta t = 2{,}90$ s

11. Se tienen dos masas m_1 y m_2 unidas por una barra de masa despreciable sobre una superficie lisa horizontal. Si aplicamos un golpe con un martillo sobre el centro de masa de las dos masas, ¿se pondrán éstas a girar sobre el centro de masa?

Resolución:

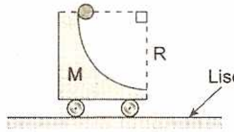
Bosquejando el sistema: $\vec{F}$ = fuerza del golpe



Como las masas se encuentran sobre una superficie horizontal lisa, entonces la única fuerza horizontal que actúa sobre el sistema va ha ser la componente horizontal de $\vec{F}$ y como pasa por el centro de masa CM, entonces el torque respectivamente al CM es cero ($\vec{T}_{CM} = 0$), condición suficiente para que el sistema no gire con respecto al CM y se trasladará en dirección de la componente horizontal de la fuerza $\vec{F}$.

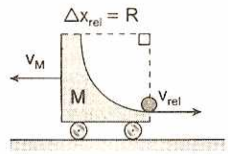
Luego, el sistema se traslada sin girar.

12. La figura muestra un sistema formado por un móvil de masa M y una esfera de masa "m" que puede moverse sin rozamiento sobre la superficie cilíndrica de radio R = 40 cm. Si el sistema se deja en libertad de movimiento de la posición indicada, determinar el desplazamiento experimentado por el móvil M hasta el instante que la esfera sale del móvil (M = 4m).



Resolución:

Como sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa horizontal, se conservará la cantidad de movimiento total en dicha dirección. Aplicaremos el principio de conservación de la cantidad de movimiento en el eje X.



$p_{0(x)} = p_{f(x)}$

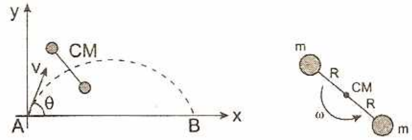
$0 = mv_{rel} - (M + m)v_M \Rightarrow (M + m)\left(\frac{\Delta x_M}{t}\right) = m\left(\frac{R}{t}\right)$

De donde reemplazando datos y despejando:

$\Delta x_M = 8$ cm

13. Se lanza al aire dos esferas de masa "m" unidas por una masa despreciable. En el sitio de lanzamiento la velocidad del centro de masa es $\vec{v}$ y forma un ángulo θ con la horizontal. Si nos colocamos en el centro de masas vemos que las masas giran a velocidad angular ω constante. Hallar:

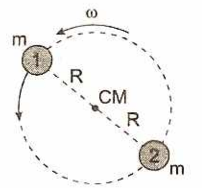
a) La energía cinética del sistema respecto del centro de masa.
b) La energía cinética respecto a un observador en el punto de lanzamiento.
c) La cantidad de movimiento lineal respecto del centro de masa.
d) ¿Se conserva la cantidad de movimiento respecto del observador?



Resolución:

a) Graficando el sistema:
Sabemos que para un sistema de partículas:

$E_C = \frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2$



Con respecto al centro de masa:

$E_C = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_1v_2^2)$, donde $v_1 = v_2 = \omega R$

Reemplazando:

$E_C = \frac{1}{2}[m(\omega R)^2 + m(\omega R)^2] \Rightarrow E_C = m\omega^2R^2$

b) Sabemos que:

$$E_{C/A} = \frac{1}{2}M_T v_{CM}^2 + E_{C/CM} \qquad ...(1)$$

Donde $E_{C/A}$ es la energía cinética del sistema respecto a un punto A, M_T la masa total del sistema, v_{CM} velocidad del centro de masa y $E_{C/CM}$ energía cinética respecto al centro de masa.

Pero: $v_{CM}^2 = v_{x(CM)}^2 + v_{y(CM)}^2$

Analizando cinemáticamente el movimiento del CM para un tiempo "t" cualquiera:

$v_{x(CM)} = v(\cos\theta)$

$v_{y(CM)} = v(\text{sen}\theta) - gt;\ t \in [0;\ t_{AB}]$

Donde: $t_{AB} = \dfrac{2v\text{sen}\theta}{g}$

Luego: $v_{CM}^2 = (v\cos\theta)^2 + (v\text{sen}\theta - gt)^2$

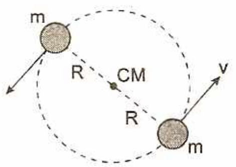
Reemplazando en (1):

$E_{C/A} = \frac{1}{2}(2m)[(v\cos\theta)^2 + (v\text{sen}\theta - gt)^2] + m\omega^2R^2$

$E_{C/A} = m[\omega^2R^2 + v^2\cos^2\theta + (v\text{sen}\theta - gt)^2]$;

$t \in [0;\ 2v\text{sen}\theta/g]$

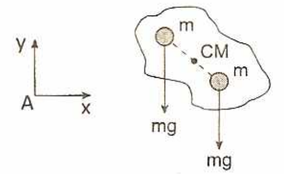
c) Por condición, con respecto al CM, las masas giran con velocidad ω constante, por lo tanto, en todo instante van a tener velocidades iguales en módulo ($v = \omega R$), pero sentidos opuestos, entonces:



$\Rightarrow \vec{p} = m(\vec{v}) + m(-\vec{v}) \quad \therefore \quad \vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v} = 0$

La cantidad de movimiento $\vec{p}$ en todo instante es igual a cero.

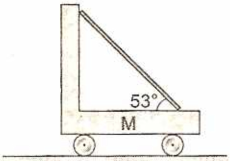
d) Analizando el sistema total respecto de A:



Del gráfico se puede observar que sobre el sistema hay fuerzas externas y como $\vec{F}$ = d/dt y $\vec{F} \neq 0$, entonces: $\vec{p} \neq$ constante.

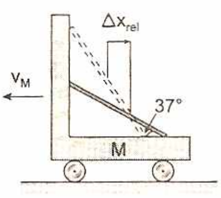
Por lo tanto la cantidad de movimiento $\vec{p}$ no se conserva respecto al punto A.

14. La figura muestra un sistema formado por un móvil de masa M y una barra uniforme y homogénea de masa "m" y 2 m de longitud que se encuentra apoyado sobre él. Si el sistema así formado se deja en libertad de movimiento de la posición indicada, determinar el desplazamiento experimentado por el móvil hasta el instante que la barra forma un ángulo de 37° con la horizontal. No existe rozamiento. (M = 9 m)



Resolución:

Aplicaremos el principio de conservación de la cantidad de movimiento en el eje x.



$p_{ix} = p_{fx}$

$0 = mv_{rel} - (M + m)v_M$

$\Rightarrow (M + m)\Delta x_M = m\Delta x_{rel} \qquad ...(1)$

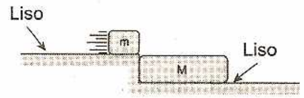
El desplazamiento horizontal que experimenta el centro de gravedad de la barra, respecto del móvil, es:

$\Delta x_{rel} = \frac{L}{2}(\cos 37° - \cos 53°) = 0{,}2$ cm

Reemplazando esto, y los demás datos, en (1) y despejando tenemos que: $\Delta x_M = 2$ cm

15. El bloque de masa "m" que muestra la figura se mueve inicialmente con una velocidad de 8 m/s mientras que el bloque de masa M = 3m se encuentra en reposo. Si el coeficiente de rozamiento entre estos es 0,25, determinar la distancia recorrida por "m" hasta el instante que termina de deslizarse sobre M.

($M = 3m$; $g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

Principio de conservación del *momentum* lineal, del sistema (m + M): $\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

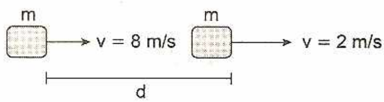
$m(8) = (M + m)U \Rightarrow m(8) = (3m + m)U$

$\therefore U = 2\ m/s$

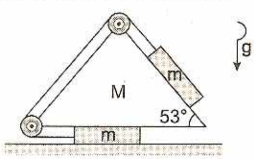
Teorema del trabajo y la energía mecánica, aplicado al bloque de masa m: $W = E_{M(f)} - E_{M(0)}$

$$-\mu mgd = \frac{1}{2}m(2)^2 - \frac{1}{2}m(8)^2$$

$-(0{,}25)(10)d = 2 - 32 \quad \therefore d = 12\ m$

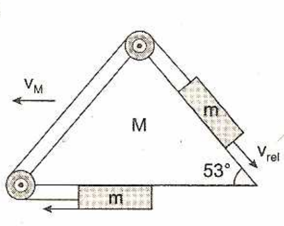


16. La figura muestra un sistema formado por dos bloques idénticos, que unidos mediante una cuerda se encuentra interactuando con la cuña cuya masa es el triple que la de cada bloque. Si el sistema parte del reposo de la posición indicada, determinar qué distancia recorrerá la cuña hasta el instante que los bloques se han desplazado 25 cm respecto de la cuña. No existe rozamiento.



Resolución:

Aplicaremos el principio de conservación de la cantidad de movimiento considerando el teorema, en el eje x:



$p_{0_x} = p_{f_x}$

$0 = mv_{rel}(\cos 53°) - mv_{rel} - (M + 2m)v_M$

$0 = \Delta x_{rel}(\cos 53° - 1) - 5\Delta x_M$

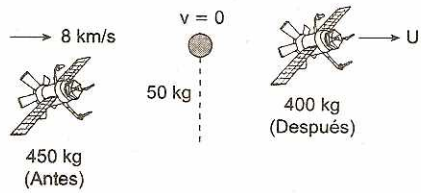
Reemplazando dato y despejando: $\Delta x_M = -2\ cm$

El signo negativo indica que la cuña se ha desplazado hacia la derecha.

17. Un satélite se mueve horizontalmente a una velocidad de 8 km/s con respecto a la Tierra. Deseamos dejar caer verticalmente una carga de 50 kg lanzándola horizontalmente del satélite. Calcular la velocidad del satélite después del lanzamiento de la carga, si la masa total (incluyendo la carga) es de 450 kg.

¿Cuál es la velocidad de la carga, con respecto a la Tierra inmediatamente después del lanzamiento?

Resolución:



Respecto de un observador ubicado en la Tierra.
Conservación del *momentum* lineal:

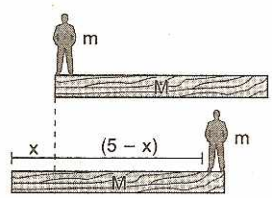
$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)} \Rightarrow Mv_1 = mv + (M - m)U$

$450(8) = 50(0) + (400)U \Rightarrow U = 9\ km/s$

La velocidad de la carga, respecto de la Tierra, inmediatamente después del lanzamiento es igual a cero.

18. Un hombre de masa "m" se mueve sobre una tabla de masa M (M = 4m). Sabiendo que la tabla puede moverse libremente sin rozamiento sobre el plano horizontal, determinar el desplazamiento del hombre respecto de la Tierra cuando se mueve de extremo a extremo de la tabla de largo 5 metros.

Resolución:



Consideremos el sistema (tabla + hombre).
Conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

$0 = mv_H - Mv_T \Rightarrow Mv_T = mv_H \quad ...(1)$

Donde "v" es la velocidad media, y se define como la relación del desplazamiento entre el tiempo (t).

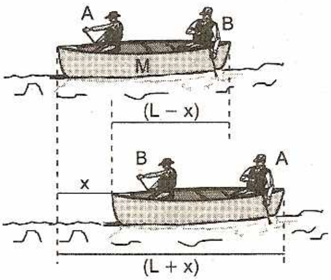
En (1): $4m\left(\frac{x}{t}\right) = m\left(\frac{5 - x}{t}\right) \Rightarrow x = 1\ m$

El hombre se desplaza respecto de la Tierra, 4 m.
La tabla retrocede respecto del piso x = 1 m.

19. En la proa y en la popa de un bote de masa M = 70 kg, están sentados a una distancia L = 8 m una de otra dos personas A (80 kg) y B (50 kg), como indica la figura. Despreciando la resistencia del agua, deter-

minar en qué sentido y distancia se desplazará el bote, si las personas se cambian de asientos.

Resolución:



Consideremos el sistema (A + B + bote)

Conservación del *momentum* lineal: $\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

$0 = Mv_b + m_A v_A - m_B v_B$

$$0 = M\left(\frac{x}{t}\right) + m_A\left(\frac{L+x}{t}\right) - m_B\left(\frac{L-x}{t}\right)$$

$$x = \frac{(m_A - m_B)L}{(m_A + m_B + M)}$$

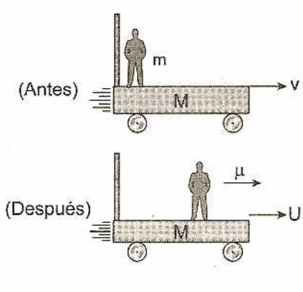
Reemplazando datos: $x = 1{,}2$ m

El bote se desplaza hacia la derecha, debido a que la masa de A es mayor que B.

Si, $m_A = m_B \Rightarrow x = 0$

Si, $m_A < m_B \Rightarrow$ el bote se desplaza hacia la izquierda.

20. Un hombre de masa "m" está parado sobre un carrito de masa M (M = 9m) que se mueve con una velocidad v = 15 m/s. Si el hombre comienza a moverse con una velocidad μ = 5 m/s, respecto del carrito, en la misma dirección y sentido, hallar la nueva velocidad del carro que se mueve libre de rozamiento.



Resolución:

Conservación del *momentum* lineal: $\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$

$(M + m)v = m(U + \mu) + MU$

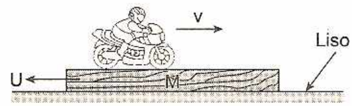
Reemplazando datos:

$10m(15) = m(U + 5) + 9mU$

$\Rightarrow 150 = U + 5 + 9U \Rightarrow U = 14{,}5$ m/s

21. Un motociclista de masa total "m" se encuentra inicialmente en reposo sobre una tabla áspera de masa M (M = 9m) y se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. Si el motociclista comienza a moverse y el velocímetro de éste marca 20 km/h, hallar la velocidad de la tabla respecto de la Tierra.

Resolución:



El velocímetro marca la velocidad relativa del motociclista respecto de la tabla.

Teorema de la cantidad de movimiento:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow 0 = m_1 v_{1/2} + (m_1 + m_2)v_2$

Reemplazando: $0 = mv_{1/2} + (m + M)(-U)$

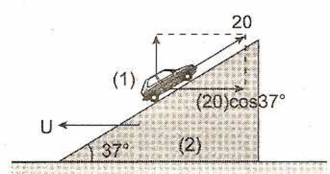
$$\Rightarrow U = \left(\frac{m}{m+M}\right)v_{1/2}$$

Del dato: U = 2 km/h

El *momentum* lineal del sistema físico (m + M) se conserva en el tiempo.

22. Un automóvil de masa "m" se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano inclinado áspero de masa M (7M = 9m) que hace un ángulo de 37° con la horizontal y se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. Si el automóvil comienza a subir sobre el plano inclinado, sin resbalar, y el velocímetro de éste marca 20 km/h, hallar la velocidad del plano inclinado respecto de la Tierra.

Resolución:



Consideremos el sistema físico (auto + plano móvil)

Conservación del *momentum* lineal, en el eje X:

$\vec{p}_{x(inicial)} = \vec{p}_{x(final)}$

Teorema del *momentum* lineal (velocidad relativa):

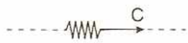
$0 = m_1 v_{1/2} + (m_1 + m_2)v_2 \Rightarrow 0 = m(20\cos 37°) + (m + M)(-U)$

$$\Rightarrow U = \left(\frac{m}{M-m}\right)(20\cos 37°)$$

Reemplazando datos: U = 7 km/h

23. Según Albert Einstein la equivalencia entre la energía E y la masa "m" de una partícula es: $E = mc^2$ donde "c" es la velocidad de la luz. Un fotón tiene una energía E = hf, donde "h" es la constante de Planck y "f" la frecuencia de la luz. Determinar el *momentum* del fotón.

Resolución:



El fotón se mueve con una velocidad igual a "c".

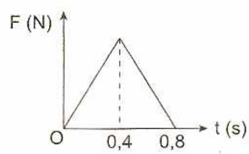
Donde: $mc^2 = E = hf \Rightarrow m = hf/c^2$ ...(1)

El *momentum* lineal del fotón:

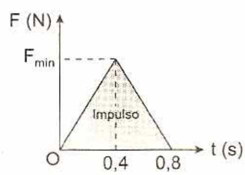
$p = mc$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $p = \dfrac{hf}{c}$

24. Una pelota de masa m = 0,5 kg, inflada con cierto gas, se encuentra inicialmente en reposo. Un niño le aplica una patada cuya fuerza varía en el tiempo como muestra la gráfica. Si después la pelota se mueve con una velocidad v = 20 m/s, determinar la fuerza máxima aplicada al cuerpo.



Resolución:



El impulso, es igual al área bajo la curva.

La fuerza aplicada será máxima en el instante $t = 0,4$ s:

$I = (0,4)F_{máx.}$ ...(1)

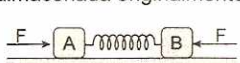
También el impulso es igual a la variación del *momentum*: $I = m(v_f - v_0)$

Pero: $v_0 = 0$ y $v_f = 20$ m/s

Reemplazando: $I = 10$ Ns ...(2)

Por lo tanto, de (1) y (2): $F_{máx} = 25$ N

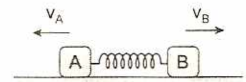
25. La figura muestra dos bloques A y B de masas 1 kg y 2 kg, respectivamente. Si se obliga a los bloques a aproximarse comprimiendo el resorte y luego se libera el sistema del reposo, se observa que el bloque B tiene una velocidad máxima de 0,5 m/s. Suponiendo que la masa del resorte es despreciable y que se desprecia la fricción, ¿cuál fue la energía potencial almacenada originalmente en el resorte?



Resolución:

Consideramos el sistema (A + resorte + B)

Conservación del *momentum* lineal:



$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow 0 = m_Bv_B - m_Av_A$

Reemplazando: $v_A = 1$ m/s

Conservación de la energía mecánica:

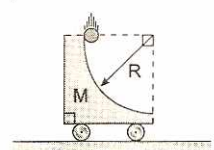
$E_{M(final)} = E_{M(inicial)}$

$\dfrac{1}{2}M_Av_A^2 + \dfrac{1}{2}M_Bv_B^2 + kx^2 = E_p$

Si: v_A y v_B, es máximo, entonces la deformación en el resorte es nulo ($x = 0$). La energía cinética es máxima.

Reemplazando los datos: $E_p = 0,75$ J

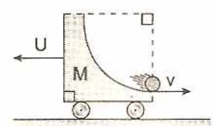
26. Una esfera de masa m = 1,0 kg se abandona en la parte superior de un bloque de masa M = 2,0 kg que se encuentra en reposo, como indica la figura. Despreciando toda forma de rozamiento, hallar la velocidad de la esfera cuando abandona la superficie cilíndrica de radio de curvatura R = 0,3 m. (g = 10 m/s²)



Resolución:

Consideremos el sistema (M + m).

Conservación del *momentum* lineal, en el eje X:



$\vec{p}_{x(inicial)} = \vec{p}_{x(final)}$

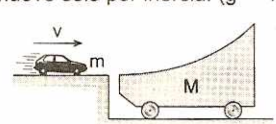
$0 = mv - MU \Rightarrow U = \left(\dfrac{m}{M}\right)v \Rightarrow U = \dfrac{1}{2}v$ ...(1)

Conservación de la energía mecánica:

$E_{M(0)} = E_{M(f)} \Rightarrow mgR = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MU^2$

Reemplazando: $v = 2,0$ m/s

27. Un carrito de masa "m" se mueve horizontalmente con una velocidad v = 5,0 m/s y hace contacto con la superficie superior de otro carro de masa M (M = 4m) inicialmente en reposo. Despreciando toda forma de rozamiento, determinar la altura máxima que alcanza el carrito sobre M. El móvil "m" se mueve solo por inercia. (g = 10 m/s²).



Resolución:

Cuando "m" alcanza su altura máxima H, la velocidad relativa de "m" respecto de M es igual a cero, por consiguiente el sistema (m + M) se mueve con una velocidad común U respecto de la tierra, solo un instante.

Conservación del *momentum* lineal en el eje x:

$\vec{p}_{x(\text{inicial})} = \vec{p}_{x(\text{final})} \Rightarrow mv = (m + M)U$

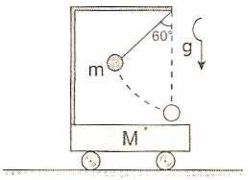
$\Rightarrow U = 1\ m/s$ ...(1)

Conservación de la energía mecánica:

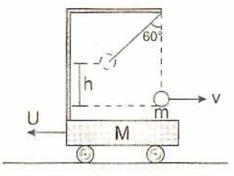
$E_{M(0)} = E_{M(f)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m + M)U^2 + mgH$

Reemplazando datos: H = 1 m

28. Un carro de masa M puede moverse sin fricción sobre un plano horizontal. En el techo del carro fue colgada una esfera de masa "m" (M = 9m) unido a una cuerda de longitud 1,0 m. En el momento inicial el carro y la esfera estaban en reposo, y la cuerda fue inclinada un ángulo de 60° con respecto a la vertical. Luego es soltada la esfera. ¿Cuál será la velocidad del carro en el instante, cuando la cuerda está en posición vertical? g = 10 m/s²



Resolución:



Consideremos el sistema (M + m).

Conservación del *momentum* lineal, en el eje X:

$\vec{p}_{x(0)} = \vec{p}_{x(f)}$

$0 = mv - MU \Rightarrow v = \frac{M}{m}$ ...(1)

Principio de conservación de la energía mecánica:

$E_{M(\text{inicial})} = E_{M(\text{final})}$

$mgh = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mv^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$U = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}} \Rightarrow U = \frac{1}{3}\ m/s$

29. Una pelota de 100 g se mueve con una velocidad $\vec{v}_1 = (10\hat{i} + 5\hat{j})$ m/s; hallar el impulso necesario en (Ns) para que se mueva con $\vec{v}_2 = -4\hat{j}$ m/s

Resolución:

El impulso se define como el cambio de la cantidad de movimiento.

$\vec{v}_1 = (10\hat{i} + 5\hat{j})\ m/s;\ \vec{v}_2 = (0\hat{i} - 4\hat{j})\ m/s;$

$m = 100\ g = 0,1\ kg$

Se sabe: $\vec{I} = \Delta\vec{P} \Rightarrow \vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_0$

Además: $\vec{P} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

$\vec{I} = 0,1(-10\hat{i} - 9\hat{j}) \Rightarrow \vec{I} = (-1\hat{i} - 0,9\hat{j})\ Ns$

30. Un sistema esta formado por tres masas:

$m_1 = 0,1\ kg;\ \vec{v}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j})\ m/s$

$m_2 = 0,2\ kg;\ \vec{v}_2 = (4\hat{i} + 2\hat{j})\ m/s$

$m_3 = 0,4\ kg;\ \vec{v}_3 = (\vec{v}_{3x}\hat{i} + \vec{v}_{3y}\hat{j})\ m/s$

Si la cantidad del movimiento del sistema es $\vec{P} = 5\hat{i}$ kg m/s; determinar $\vec{v}_3$

Resolución:

Cantidad de movimiento del sistema:

$\vec{p}_{\text{sist.}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$

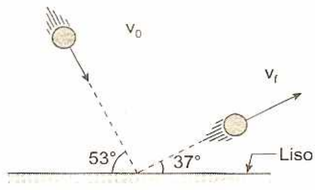
Reemplazando los datos en el sistema:

$(5; 0) = 0,1(2; 3) + 0,2(4;2) + 0,4\vec{v}_3$

$(50; 0) = (2; 3) + (8; 4) + 4\vec{v}_3 \Rightarrow (40; -7) = 4\vec{v}_3$

$\vec{v}_3 = \left(10; -\frac{7}{4}\right) m/s \quad \therefore\ \vec{v}_3 = (10; -1,75)\ m/s$

31. Una pelota de 200 g de masa rebota contra un piso horizontal como se muestra en la figura. Si v_0 = 12 m/s y v_f = 5 m/s, ¿cuánto es el módulo de la fuerza media que recibió la pelota durante el rebote, si este duró 0,01 s? (Desprecie la fuerza de gravedad).



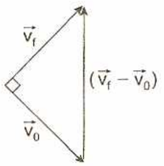
Resolución:

a) El impulso se puede expresar de dos formas:

$\vec{I} = \vec{F}_R\Delta T \quad \wedge \quad \vec{I} = m(v_f - v_0)$

b) Si no hay rozamiento el impulso es vertical.

Tenemos: $\vec{I} = \vec{F}_R\Delta T$



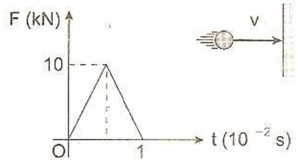
$m(\vec{v}_f - \vec{v}_0) = \vec{F}_R\Delta T$

$\Rightarrow m|\vec{v}_f - \vec{v}_0| = |\vec{F}_R|\Delta T$

Reemplazando los datos:

$0,2 \times 13 = |\vec{F}_R|(0,01) \Rightarrow |\vec{F}_R| = 260\ N$

32. Una pelota de 1 kg de masa, choca contra una pared con una rapidez de 30 m/s. Si la fuerza de interacción pared-pelota es la que se muestra. Determinar la rapidez con la que rebota.



Resolución:

a. El impulso que recibe la pelota es numericamente igual al área del triángulo.

$$I = \frac{(b)(h)}{2} = \frac{10\,000 \times 10^{-2}}{2} = 50$$

$\Rightarrow \vec{I} = -50\,\hat{i}$ Ns

b. Relación entre la cantidad de movimiento y el impulso.

$\vec{P}_f = \vec{P}_0 + \vec{I}$

$\Rightarrow \vec{P}_f = m\vec{v}_0 + \vec{I} = 1 \times 30\,\hat{i} + (-50\,\hat{i})$

$\Rightarrow \vec{P}_f = -20\,\hat{i}$ Ns

c. Cálculo de la velocidad final:

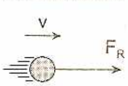
$\vec{P}_f = m\vec{v}_f$

$-20\,\hat{i} = 1(\vec{v}_f) \Rightarrow \vec{v}_f = -20\,\hat{i}$ m/s

$\vec{v}_f = 20$ m/s

33. Una bola de billar de 1 kg es golpeada simultáneamente por dos tacos, de tal manera que adquiere 200 J de energía cinética. Calcular el valor del impulso recibido por la bola.

Resolución:



Datos:
$m = 1$ kg
$E_C = 200$ J

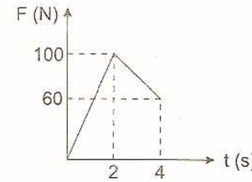
Energía cinética: $\frac{1}{2}mv^2 = 200$

$\frac{1}{2}(1)v^2 = 200 \Rightarrow v = 20$ m/s

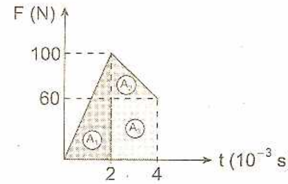
El impulso que recibe es igual al cambio de la cantidad de movimiento.

$|\vec{I}| = m|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{I}| = 1 \times 20 = 20 \quad \therefore |\vec{I}| = 20$ N.s

34. Una bola que se mueve con una rapidez de 600 m/s, incide y penetra en un bloque de madera, el cual le ofrece una fuerza de oposición F que varía con el tiempo según se indica en la grafica. Si la bala sale con una rapidez de 400 m/s. Determinar la magnitud (en N.s) del impulso que recibió la madera y la masa (en g) de la bala.



Resolución:



a. El valor del impulso es igual al área bajo la curva

$\vec{I} = A_1 + A_2 + A_3$

$I = 100 + 40 + 120 \Rightarrow I = 260 \times 10^{-3}$ N.s

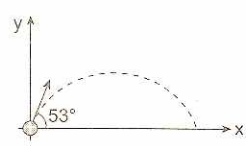
b. $\vec{I} = \Delta\vec{P}$

$\vec{I} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_0) \Rightarrow |\vec{I}| = m|\vec{v}_f - \vec{v}_0|$

$260 \times 10^{-3} = m(200)$

$m = 1{,}3 \times 10^{-3}$ kg $\Rightarrow m = 1{,}3$ g

35. Un proyectil de 1 kg se lanza con una rapidez de 5 m/s formando un ángulo de 53°. Calcular la magnitud del impulso de la fuerza gravitatoria desde que el proyectil alcanza su altura máxima hasta que llegue nuevamente al piso. Desprecie resistencia del aire (dar respuesta en unidades kgm/s)



Resolución:

Datos: $m = 1$ kg; $g = 10$ m/s^2; $v = 5$ m/s

a. Descomponiendo la velocidad: $v_x = 3$ m/s y $v_y = 4$ m/s

La velocidad en el eje X no cambia por consiguiente no varía la cantidad de movimiento.

b. El tiempo que demora en alcanzar la altura máxima es:

$$T = \frac{v_y}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \text{ s}$$

c. El impulso que recibe en el eje vertical es:

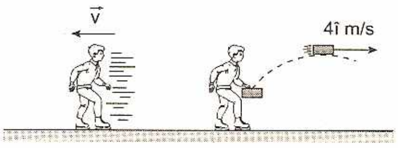
$\vec{I} = \vec{F}_R \Delta T = -mg\Delta T\,\hat{j}$

$\vec{I} = -1(10)(0{,}4)\,\hat{j}$ Ns $\Rightarrow \vec{I} = -4\,\hat{j}$ (N.s)

El valor del impulso es: $I = 4$ kgm/s

36. Un muchacho está sobre sus patines con un ladrillo en reposo, lanza el ladrillo tal como muestra la figura. Determinar la velocidad del muchacho

después del disparo. Las masas del muchacho, los patines, el ladrillo son, respectivamente, 55 kg; 5 kg; 10 kg.

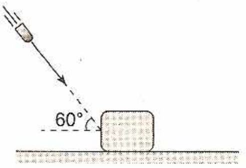


Resolución:

a. En todo movimiento parabólico, la velocidad en el eje x es $v_L = 4$ m/s
   m_L: masa del ladrillo (10 kg)
   m_H: masa del hombre (55 kg)
   m_p: masa de los patines (5 kg)

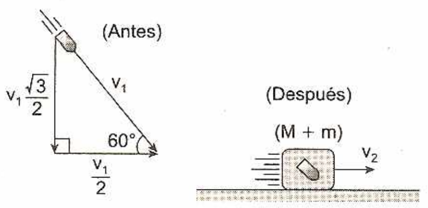
b. Principio de conservación de la cantidad de movimiento. $\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{después}$
   $0 = \vec{P}_L + \vec{P}_{HP} \Rightarrow 0 = m_L v_L - (m_H + m_P)v$
   $0 = 10(4) - (60)v \Rightarrow v = \dfrac{2}{3}$ m/s $= 0{,}67$ m/s
   La velocidad del hombre es: $\vec{v} = -0{,}67\,\hat{\imath}$ (m/s)

37. Un bloque de madera de masa M = 3,99 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa cuando es alcanzado por una bala de 10 g de masa, con rapidez v_1 como se muestra en la figura. Después de que la bala se ha incrustado en el bloque, este se desliza hacia la derecha con una rapidez v_2. Encuentre la relación v_1/v_2



Resolución:

Datos:
M: masa del bloque (3,99 kg)
m: masa de la bala (0,01 kg)
Descomponiendo la velocidad de la bala:

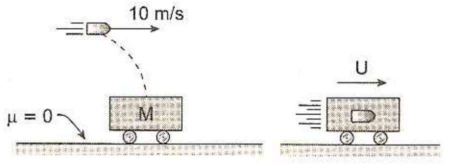


Principio de conservación de la cantidad de movimiento en el eje horizontal. $\vec{P}_{x(bala)} = \vec{P}_{x(bala+bloque)}$

$$m\left(\frac{v_1}{2}\right) = (M+n)v_2 \Rightarrow 0{,}01\left(\frac{v_1}{2}\right) = 4v_2$$

$$\therefore\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{800}{1}$$

38. En la figura, el proyectil de 5 kg tiene una velocidad inicial horizontal de módulo 10 m/s y cae sobre el móvil de 15 kg inicialmente en reposo. Hallar la rapidez final del conjunto una vez adherido el proyectil al bloque.



Resolución:

Datos:
m: masa del proyectil (5 kg)
M: masa del bloque (15 kg)
$\vec{v}_x$: velocidad horizontal del proyectil (10 m/s)

Principio de conservación de la cantidad de movimiento.
$\vec{P}_{x(0)} = \vec{P}_{x(f)} \Rightarrow mv_x = (m+M)U$
$5(10) = (5+15)U$
El valor de la velocidad es v = 2,5 m/s.

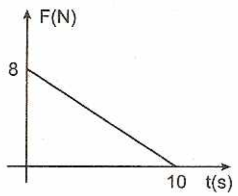
39. Una partícula A de masa "m" y velocidad $2\hat{\imath}$ m/s va al encuentro de una partícula B de masa 2m y en reposo. Si después de la colisión entre A y B; adquiere la velocidad $1\hat{\imath}$ m/s, determinar la velocidad de A.

Resolución:

En todo choque se conserva la cantidad de movimiento.
Principio de conservación de la cantidad de movimiento en el eje x.
$\vec{P}_{x(antes)} = \vec{P}_{x(despues)}$
$m_A v_A + m_B v_B = m_A U_A + m_B U_B$
$m(2) + 2m(0) = mU_A + 2m(1) \Rightarrow 2 + 0 = v_A + 2$
$\therefore\ v_A = 0$

Esto nos indica que después del choque, A se queda en reposo.

40. Se sabe que un cuerpo recibió una fuerza variable durante su movimiento. ¿Qué impulso le imprimió esta fuerza durante los 10 s de su aplicación?



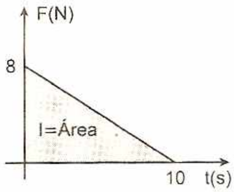
Resolución:

Cuando una fuerza varia en el tiempo, el impulso producido por esta es igual al área bajo la gráfica F vs. t, donde se cumple:

Área = Impulso

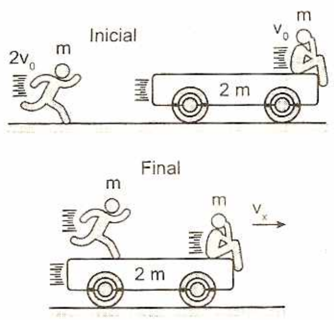
$\Rightarrow I = \dfrac{10 \times 8}{2}$

$I = 40$ Ns



41. Un niño se encuentra sentado sobre una plataforma, la cual se mueve con una rapidez v_0, la masa del niño es "m" y la de la plataforma 2m, otro niño de masa "m" corre hacia la plataforma con una rapidez $2v_0$, la alcanza y luego sube en ella. ¿Cuál será la velocidad que habrá adquirido la plataforma luego de este suceso?

Resolución:



Analizando todo el sistema (plataforma-los 2 niños), se cumple que al inicio y al final la cantidad de movimiento se conserva, es decir:

$P_{Inicial} = P_{Final}$

$m(2v_0) + (2m + m)v_0 = (m + 2m + m)v_x$

$2\,mv_0 + 3mv_0 = 4mv_x$

$5mv_0 = 4mv_x \quad \therefore\ v_x = \dfrac{5v_0}{4}$

42. La fuerza aplicada sobre un cuerpo varia según la siguiente ecuación: F = 3t + 1; donde F esta *newtons* y "t" en segundos. Determine el impulso producido por la fuerza durante los primeros 6 s.

Resolución:

Sabemos que cuando una fuerza es variable en el tiempo, su impulso viene dado por el área bajo la gráfica F vs. t; entonces graficamos: F = 3t + 1.

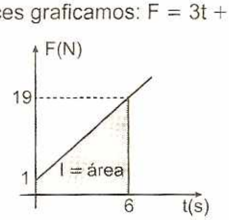
Para t = 6 s

$F = 3(6) + 1$

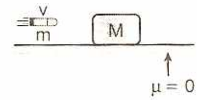
$F = 19$ N

$I = \left(\dfrac{1 + 19}{2}\right)6$

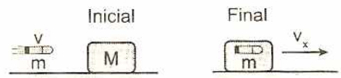
$I = 60$ Ns



43. Una bola de 250 g impacta contra un bloque de madera de 3,75 kg, incrustándose en él. ¿Cuál es la velocidad que adquiere el conjunto después del impacto, si la velocidad de la bola fue v = 200 m/s?



Resolución:



Analizando el sistema (bloque-bola), se cumple que la cantidad de movimiento se conserva antes y después del impacto, es decir:

(m = 250 g = 0,25 kg; M = 3,75 kg)

$P_{Inicial} = P_{Final}$

$mv + M(0) = (m + M)v_x$

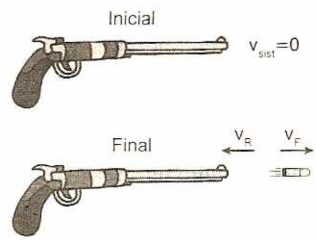
$0{,}25(200) = (0{,}25 + 3{,}75)v_x$

$50 = 4v_x$

$\therefore\ v_x = 12{,}5$ m/s

44. Un rifle de 10 kg dispara un proyectil de 200 g con una velocidad de 200 m/s. Calcular la velocidad de retroceso del rifle.

Resolución:



Si analizamos el sistema (rifle-proyectil) se cumple que, antes y después del disparo, la cantidad de movimiento se conserva. Los datos son:

$m_R = 10$ kg

$m_p = 200$ g $= 0{,}2$ kg

$v_p = 200$ m/s

Luego: $P_{Inicial} = P_{Final}$

$(m_R + m_P)v_{Sist} = m_P v_P + m_R v_R$

$(10 + 0{,}2)0 = +(0{,}2)(200) + (10)(-v_R)$

$0 = 40 - 10v_R$

$40 = 10v_R$

$v_R = 4$ m/s

45. Si la cantidad de movimiento lineal de una partícula permanece constante, se puede afirmar:

I. Su energía cinética también permanece constante.
II. El sentido de movimiento de partícula no varía.
III. La partícula se encuentra en equilibrio de traslación.

Resolución:

I. Verdadero

Si P = cte. $\Rightarrow$ mv = cte.

$\Rightarrow$ v = cte.

Es decir, la partícula posee MRU; por lo tanto, su energía cinética (E_c) permanece constante.

II. Verdadero

Del análisis hecho en la parte (I) se concluye que v = cte., en consecuencia el sentido del movimiento de la partícula no cambia.

III. Verdadero

Si P = cte. $\Rightarrow \Delta P = 0$

Pero: $I = F_R \Delta t = \Delta P$

$\Rightarrow F_R \Delta t = 0$

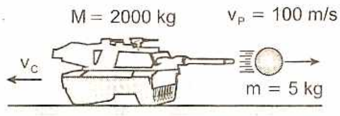
$\Rightarrow F_R = 0$ (Fuerza resultante)

Es decir, la partícula se encuentra en equilibrio de traslación.

$\therefore$ VVV

46. Con que rapidez (en m/s) retrocede un cañón de 2000 kg cuando dispara un proyectil de 5 kg con una rapidez de 100 m/s en dirección horizontal.

Resolución:



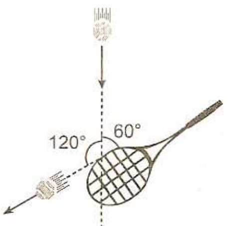
Por el principio de conservación de la cantidad de movimiento en la horizontal, se cumple:

$P_{Inicial} = P_{Final} \Rightarrow (m_C + m_P)v_{Sist} = m_C v_C + m_P v_P$

$(2000 + 5)0 = (2000)(-v_C) + 5(100)$

$\therefore v_C = 0{,}25$ m/s

47. En la figura se muestra el instante previo y posterior al impacto de una raqueta sobre una pelota de tenis de 100 g. Si la rapidez de llegada de la pelota es de 20 m/s y la salida de 10 m/s, determine el módulo de la fuerza promedio (en N) del impacto si este duró 0,5 s.



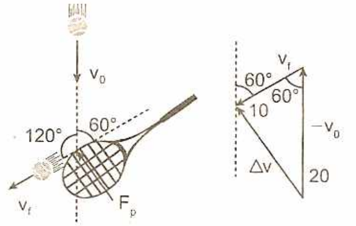
Resolución:

El impulso (I) de la fuerza promedio (F_P) está determinado por la ecuación:

$$I = F_P \Delta t = \Delta P = m\Delta\vec{v}$$

El módulo de F_P será:

$$F_P = \frac{m|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \qquad \ldots(1)$$



Del triángulo de velocidades:

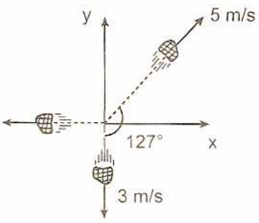
$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 20^2 - 2(10)(20)\cos(60)}$

$\Rightarrow |\Delta\vec{v}| = 10\sqrt{3}$ m/s

En (1): m = 100 g = 100×10^{-3} kg; $\Delta t = 0{,}5$ s

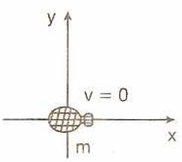
$F_P = \dfrac{(100 \times 10^{-3})(10\sqrt{3})}{0{,}5} \qquad \therefore F_P = 2\sqrt{3}$ N

48. Una granada ubicada en un piso liso (plano xy) explora en tres fragmentos iguales. La figura muestra las velocidades de los fragmentos inmediatamente después de la explosión. Determine la cantidad de movimiento del fragmento cuya dirección es $-\hat{i}$, si la masa de la granada es "m".

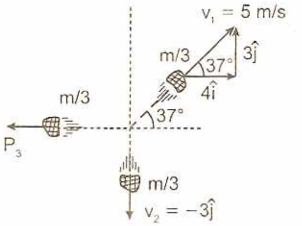


Resolución:

Antes de la explosión:



Después de la explosión:



Por conservación de la cantidad de movimiento.

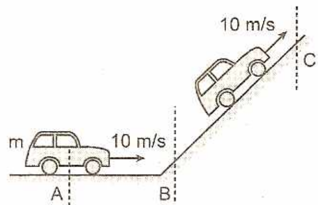
En el eje X: $\vec{P}_{0x} = \vec{P}_{fx} \Rightarrow 0 = \vec{P}_3 + \dfrac{m}{3}(4\,\hat{i})$

Cantidad de movimiento del fragmento:

$\vec{P}_3 = -\dfrac{4}{3}m\,\hat{i}$

49. Un auto de masa "m" viaja horizontalmente en el tramo AB con una rapidez constante de 10 m/s y en el tramo BC a lo largo de un plano inclinado con la misma rapidez, luego respecto a las siguientes proposiciones responda verdadero (V) o falso (F).

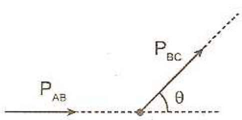
I. Existe impulso como responsable del cambio de la cantidad de movimiento entre tramos AB y BC.
II. La cantidad de movimiento entre los tramos AB y BC cambia.
III. No existe impulso debido a que no cambia la cantidad de movimiento.



Resolución:

I. Verdadera
El impulso entre los tramos AB y BC es el responsable del cambio de la cantidad de movimiento. El impulso (I) produce un cambio en la dirección de la cantidad de movimiento.

II. Verdadera
La cantidad de movimiento en el tramo AB es horizontal, mientras que en BC es oblicua, es decir, en B la cantidad de movimiento cambia.

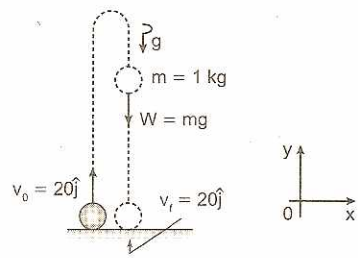


III. Falsa
La cantidad de movimiento experimenta un cambio de dirección siendo su módulo constante, por lo tanto, existe un impulso.

$\therefore$ VVF

50. Una partícula de masa 1 kg es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. Determine la variación de su cantidad de movimiento (en Ns) desde que es lanzada hasta que regresa al piso.

Resolución:



La variación de la cantidad de movimiento ($\Delta\vec{P}$) que experimenta la partícula debido a la acción del peso o fuerza de gravedad (W = mg) desde que es lanzada hasta que regresa al piso es:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_0 = m(v_f) - m(v_0)$$

$$\Delta\vec{P} = 1(-20\hat{j}) - 1(20\hat{j})$$

$$\therefore\ \Delta\vec{P} = -40\hat{j}\ \text{Ns}$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2008 - II)

Para detener un carro de 2000 kg de masa, que se mueve en línea recta a 25 m/s, se le aplica una fuerza constante durante 2 segundos, quedando el carro en reposo. Calcule la magnitud del impulso que recibe el carro, en 10^4 Ns, durante los 2 segundos.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

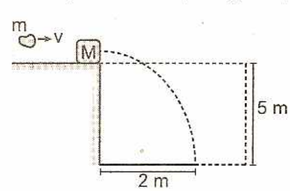
Resolución:

Según la definición de impulso:
$I = P_f - P_o \Rightarrow I = mv_f - mv_o$
Del problema, los datos son:
$m = 2000$ kg; $v_o = 25$ m/s
$v_f = 0$; reemplazando en la ecuación:
$I = 50\,000$ N.s
$\therefore\ I = 5 \times 10^4$ N.s

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

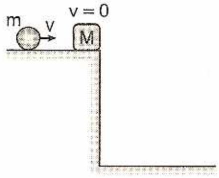
Una porción de plastilina de 100 gramos impacta horizontalmente en un bloque de madera de 200 gramos que se encuentra sobre una cornisa de 5 m de altura. Cuando la plastilina impacta en el bloque se pega a este haciendo que el conjunto caiga e impacte con el suelo a 2,0 m de la pared, como se indica en la figura. Calcule aproximadamente, en m/s, la velocidad con la cual la plastilina impacta al bloque. ($g = 9{,}81$ m/s^2)



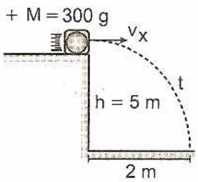
A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Resolución:

Antes del impacto.



Después del impacto.



Para el sistema:

$\vec{P}_{\text{Antes del choque}} = \vec{P}_{\text{espués del choque}}$

$mv = (m + M)v_x$

$100v = 300v_x$

$\Rightarrow v = 3v_x$ ...(1)

Cálculo de v_x:

Trabajamos en el eje X (MRU)

$\Rightarrow d = v_x t \Rightarrow 2 = v_x t$ ...(2)

Trabajamos en el eje Y (MVCL)

$$-h = v_o y t^o - g\frac{t^2}{2}$$

$$-5 = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{10}{g}}$$

Reemplazando en (2): $2 = v_x\sqrt{\frac{10}{g}}$

Reemplazando en (1): $v = 6\sqrt{\frac{g}{10}} \Rightarrow v_x \approx 6$ m/s

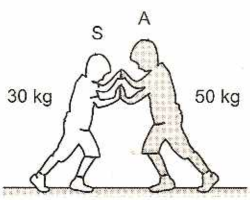
Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

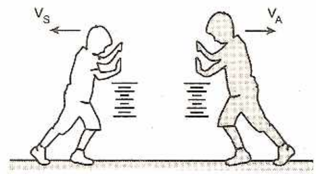
Sergio y Antonio, dos jóvenes de masas 30 kg y 50 kg respectivamente, están de pie juntos y en reposo sobre una superficie lisa de hielo. Si después de que se empujan uno al otro, se alejan y luego de 10 s están separados 8 m, calcule la rapidez en m/s con la que se desplaza Sergio con respecto a un sistema de referencia fijo al hielo.

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5

Resolución:



Antes de empujarse

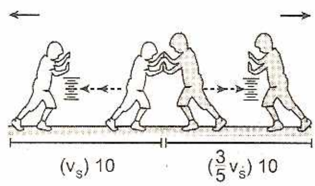


Después de empujarse

$\vec{P}_O = \vec{P}_F$

$0 = 50v_A - 30v_S \Rightarrow 3v_S = 5v_A \Rightarrow v_A = \frac{3}{5}v_S$

Luego de 10 segundos:



$10v_s + 6v_s = 8 \Rightarrow v_s = 0{,}5$ m/s

Clave: E

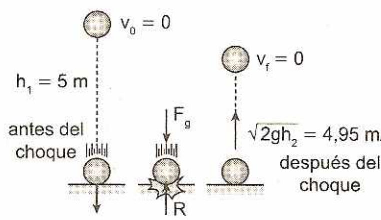
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

Una pelota de masa m = 2 kg se suelta desde una altura h = 5 m. Si luego del primer rebote alcanza una altura máxima h/4, calcule la fuerza promedio, en N, que la Tierra ejerce sobre la pelota, considerando que el tiempo de contacto fue de 0,1 s. ($g = 9{,}81\ ms^{-2}$)

A) 9,8 B) 99,0 C) 148,5
D) 198,0 E) 297,1

Resolución:

Graficamos lo ocurrido:



$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 9{,}9$ m/s

Durante el choque, del teorema del impulso resultante ($\vec{I}_{RE}$) y la variación de la cantidad de movimiento ($\vec{P}_{final} - \vec{P}_{inicial}$), tenemos:

$\vec{I}_{RE} = \vec{P}_{final} - \vec{P}_{inicial}$

$\vec{I}_R + \vec{I}_{F_g} = \vec{P}_{final} - \vec{P}_{inicial}$

$\vec{R}t + \vec{F}_g t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

Reemplazamos datos:

$\vec{R}(0{,}1) + (-19{,}62)(0{,}1) = (2)(4{,}95) - (2)(-9{,}9)$

Reemplazamos:

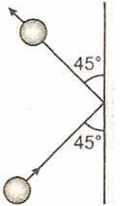
$\vec{R} = +316{,}62$ N

Si se desprecia el impulso de la fuerza de gravedad ($F_g t = 0$), se tiene: $\vec{R} = +297$ N

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

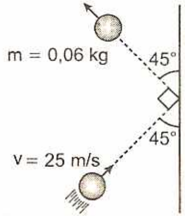
Una bola de tenis de 0,06 kg golpea una pared en un ángulo de 45° y rebota con la misma rapidez de 25 m/s en un ángulo de 45° (ver figura). Calcule aproximadamente, la magnitud del impulso, en kgm/s, que la pared ejerció sobre la bola.



A) 1,81 B) 2,12 C) 3,42 D) 4,37 E) 5,89

Resolución:

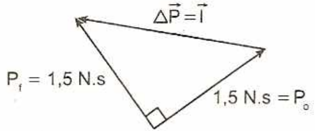
Del gráfico:



$P_o = mv = 0{,}06(25) = 1{,}5$ N.s

$P_f = mv = 0{,}06(25) = 1{,}5$ N.s

Despreciando el impulso de la fuerza de gravedad.



$$|\vec{I}| = 1{,}5\sqrt{2}$$

$$\therefore\ |\vec{I}| = 2{,}12\ \text{N.s}$$

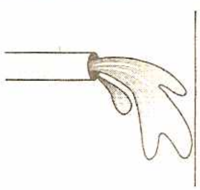
Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una partícula A de masa "m" se encuentra sujeta por medio de un resorte comprimido a la partícula B de masa 2m. Si la energía almacenada en el resorte es de 90 J, ¿Qué energía cinética adquirirán las partículas A y B, respectivamente, luego de liberarlas?

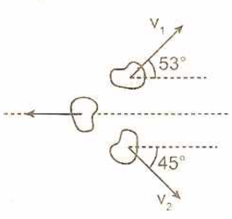
A) 80 J y 10 J B) 20 J y 70 J C) 60 J y 30 J
D) 50 J y 40 J E) 75 J y 15 J

2. Se rocía una pared con agua, empleando una manguera. La velocidad del chorro de agua es de 8 m/s y su caudal es de 300 m^3/s. Si la densidad del agua es 1 g/cm^3 y se supone que el agua después de chocar con la pared se mueve paralelamente a la pared, ¿Cuál es la fuerza media que el chorro de agua ejerce sobre la pared?



A) 1,2 N B) 1,6 N C) 1,8 N
D) 2 N E) 2,4 N

3. Un objeto de 2 kg de masa, inicialmente en reposo, estalla en tres fragmentos de masas 1; 0,5 y 0,5 kg. El fragmento de 1 kg sale con una rapidez de 200 m/s hacia la izquierda y los otros formando 53° y 45° como se muestra en la figura. Determinar el módulo de v_1.



A) 400 m/s B) 285 m/s C) 285,7 m/s
D) 100 m/s E) 500 m/s

4. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

( ) La cantidad de movimiento de un cuerpo solo depende de la velocidad.

( ) El impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento.

( ) Un ciclista que viaja hacia el Este tiene la misma cantidad de movimiento que otro ciclista que viaja al Norte con la misma rapidez. Las masas de los ciclistas son iguales.

A) FFV B) VVF C) FVF
D) FVV E) VVV

5. Respecto al impulso, indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

( ) Es una cantidad física vectorial.

( ) Es igual a la variación de la velocidad, que experimenta el cuerpo.

( ) En una gráfica de fuerza y tiempo, es igual al área debajo de la gráfica.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFV E) FFF

6. Una bola de billar de 420 g se mueve en línea recta a razón de 3 m/s. ¿Qué tan rápido debe moverse una bola de *ping-pong* de 4,5 g en línea recta de manera que las dos bolas tengan la misma cantidad de movimiento?

A) 280 m/s B) 140 m/s C) 560 m/s
D) 120 m/s E) 420 m/s

7. Un auto de 800 kg tiene una velocidad de 12 m/s y otro auto de 1000 kg tiene una velocidad de −8 m/s. Determinar la cantidad de movimiento del sistema formado por los dos autos.

A) 17 600 kgm/s B) 9600 kgm/s
C) 8000 kgm/s D) 48 000 kgm/s
E) 1600 kgm/s

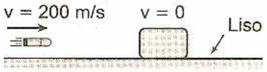
8. Un ciclista cuya masa total es de 60 kg, se mueve rectilíneamente y aumenta su rapidez de 20 a 56 km/h. ¿Cuál es la variación de su cantidad de movimiento?

A) 400 kgm/s B) 500 kgm/s
C) 600 kgm/s D) 750 kgm/s
E) 800 kgm/s

9. Una bala de 200 g se dispara horizontalmente hacia un bloque en reposo, de madera, de 8 kg ubicado sobre un piso liso. Si luego del impacto el bloque puede recorrer 2 m en 0,5 s, determinar la rapidez con que se disparó la bala.

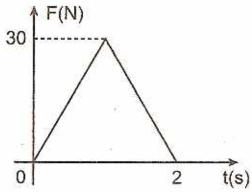
A) 82 m/s B) 123 m/s C) 164 m/s
D) 196 m/s E) 246 m/s

10. Una bala de 100 g es disparada con una rapidez de 200 m/s e impacta horizontalmente con un bloque de madera en reposo de 1 kg de masa, atravesándolo y saliendo con una rapidez de 50 m/s. Determine la rapidez que adquiere el bloque de madera.



A) 15 m/s B) 18 m/s C) 20 m/s
D) 12 m/s E) 10 m/s

11. La fuerza F, que actúa sobre una particular de 2 kg, varia en el tiempo como se muestra en la figura. Calcular la velocidad final de la partícula, si para $t = 0$, la partícula tiene una velocidad de -2 m/s. La partícula se mueve en todo momento sobre el eje x.



A) 10 m/s B) 12 m/s C) 13 m/s
D) 15 m/s E) 17 m/s

12. Un muchacho de 60 kg está parado sobre un tablón que tiene una masa de 180 kg. El tablón se encuentra sobre una superficie horizontal lisa. Si el muchacho comienza a caminar a lo largo del tablón con una velocidad constante de 2 m/s con respecto al tablón, ¿Cuál es la velocidad del muchacho respecto a la superficie lisa?

A) 2 m/s B) 1,8 m/s C) 1,5 m/s
D) 1,2 m/s E) 1 m/s

13. Un móvil cuyo peso es de 300 N se desplaza con una rapidez de 10 m/s. En un instante dado actúa una fuerza constante durante un intervalo de tiempo. Si su rapidez aumentó a 24 m/s, determinar el impulso recibido por el móvil ($g = 10\ m/s^2$).

A) 360 kgm/s B) 240 kgm/s
C) 400 kgm/s D) 420 kgm/s
E) 300 kgm/s

14. ¿Qué fuerza de resistencia promedio debe actuar sobre una bola de beisbol de 400 g, para reducir su velocidad de 90 km/h a cero en 0,02 s?

A) 500 N B) 1200 N C) 750 N
D) 1000 N E) 1500 N

15. Una pelota de futbol de 1250 g de masa adquiere una velocidad de 40 m/s mediante un puntapié de 0,2 s de duración. ¿Qué fuerza media recibió la pelota?

A) 200 N B) 250 N C) 180 N
D) 125 N E) 300 N

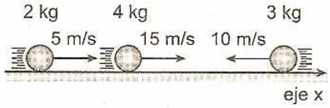
16. En una explosión un objeto se fragmenta en tres partes, una de ellas de 4 kg de masa sale disparada con una velocidad de 10 m/s formando un ángulo recto con la parte de 6 kg que posee una velocidad de 5 m/s. ¿Cuál es la velocidad del tercer pedazo cuya masa es 2 kg.

A) 10 m/s B) 20 m/s C) 25 m/s
D) 70 m/s E) 80 m/s

17. Un proyectil de 10 g es disparado contra un saco de arena de 1,5 kg, colocado en una superficie sin fricción, logrando incrustarse en él para que finalmente todo el conjunto se desplace en la misma línea recta. Si la velocidad del proyectil antes del impacto es 151 m/s, hallar la velocidad del conjunto inmediatamente después del choque.

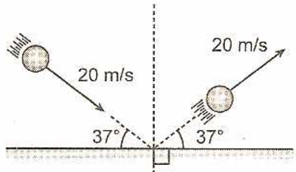
A) 151 m/s B) 111 m/s C) 11 m/s
D) 10 m/s E) 1 m/s

18. Calcular la cantidad de movimiento del sistema en el instante mostrado.



A) 70 kgm/s $\hat{i}$ B) 100 kgm/s $\hat{i}$
C) 30 kgm/s $\hat{i}$ D) 40 kgm/s $\hat{i}$
E) 50 kgm/s $\hat{i}$

19. Calcular el impulso resultante sobre el cuerpo de 10 kg debido al impacto mostrado.



A) 12 Ns $\hat{j}$ B) 16 Ns $\hat{j}$ C) 24 Ns $\hat{j}$
D) 32 Ns $\hat{j}$ E) 40 Ns $\hat{j}$

20. Una persona de 80 kg se desplaza con una velocidad de 4 m/s al encuentro de una plataforma de 120 kg, que se desplaza con una velocidad de 5 m/s. Calcular el valor de la cantidad de movimiento del sistema.

A) 150 kgm/s B) 200 kgm/s
C) 280 kgm/s D) 320 kgm/s
E) 600 kgm/s

21. Un policía de masa $m = 80$ kg se encuentra en reposo sobre patines en una pista de hielo y empieza a disparar su metralleta horizontalmente dando 20 tiros. La masa de cada bala es de 0,05 kg y su velocidad al salir del arma es 200 m/s. ¿Cuál es la velocidad, en m/s, que adquiere el policía, supo-

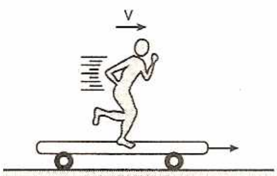
niendo que todos los disparos salen en la misma dirección?

A) 2,5 B) 5 C) 10 D) 200 E) 40

22. Un vehículo de 1000 kg acelera desde el reposo hasta 108 km/h en 10 s. ¿Qué impulso se aplica al vehículo durante dicho tiempo? Si se supone que la fuerza resultante es constante, ¿cuál es la magnitud de la fuerza resultante?

A) 20 kNs; 2 kN B) 50 kNs; 8 kN
C) 30 kNs; 3 kN D) 40 kNs; 2 kN
E) 60 kNs; 3 kN

23. Una persona de masa "m" se encuentra parado sobre una plataforma de masa M = 4m que se encuentra en reposo. Si súbitamente la persona corre con velocidad "v" respecto a la plataforma, indique con qué velocidad se mueve la plataforma.

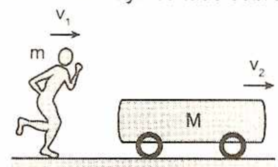


A) v/3 B) v/4 C) v/5 D) v/6 E) 4v/5

24. Una granada estalla en el aire dividiéndose en dos fragmentos de masa m_1 y m_2 ($m_1 = 3m_2$). Ambos son disparados verticalmente con velocidades v_1 y v_2, el primero hacia arriba y el segundo hacia abajo. La aceleración del centro de masa luego de la explosión será:

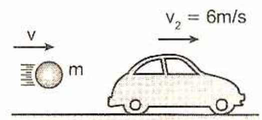
A) g/3 B) g/5 C) 4g/5
D) 2g/5 E) g

25. Si el hombre de 60 kg corre a razón de 5 m/s en la misma dirección que lo hace una plataforma de 300 kg que se desplaza a 2 m/s, según como se indica, ¿qué velocidad (en m/s) tendrán los dos cuando el hombre haya saltado sobre aquella?



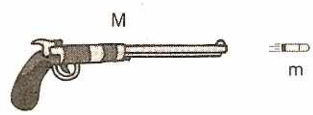
A) 5,2 B) 2 C) 5 D) 2,5 E) 3

26. Una bola de barro es lanzada tal como se indica con una velocidad v = 15 m/s. Si después del impacto queda adherida al coche de 6 kg, este sistema se mueve a razón de 6 m/s. ¿Qué masa (en kg) tenía la bola?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

27. Un rifle dispara balas con una velocidad de 300 m/s, siendo la masa de cada proyectil igual a 200 g ¿Cuál es la masa (en kg) del rifle, si en cada disparo que realiza retrocede con una velocidad de 10 m/s?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

28. Un cuerpo de 3 kg tiene $\vec{v}_0 = (5; -3)$ m/s. Si experimenta un cambio en su cantidad de movimiento: $\Delta\vec{P} = (-18; 12)$ kgm/s, ¿cuál es su velocidad (en m/s, al final de este proceso?

A) (−1; 1) B)(−2; 2) C) (3; 4)
D) (5; 2) E) (−3; 2)

CLAVES

1. C	5. B	9. C	13. D	17. E	21. A	25. D
2. E	6. A	10. A	14. A	18. D	22. C	26. D
3. C	7. E	11. C	15. B	19. C	23. C	27. A
4. C	8. C	12. C	16. C	20. C	24. E	28. A

Choques | 09 capítulo

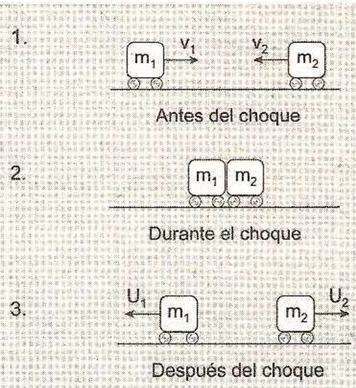
Christiaan Huygens (La Haya, 14 de abril de 1629-La Haya, 8 de julio de 1695) fue un astrónomo, físico y matemático holandés. Estudió mecánica y geometría con preceptores privados hasta los 16 años. Su formación universitaria transcurrió entre 1645 y 1647 en la Universidad de Leiden y entre 1647 y 1649 en el Colegio de Orange de Breda. En ambos centros estudió Derecho y Matemáticas.

Los trabajos de Huygens en física se centraron principalmente en dos campos: la mecánica y la óptica. En el campo de la mecánica publicó su libro *Horologium Oscillatorium* (1675); en él se halla la expresión exacta de la fuerza centrífuga en un movimiento circular, la teoría del centro de oscilación, el principio de la conservación de las fuerzas vivas (antecedente del principio de la conservación de la energía) centrándose esencialmente en las colisiones entre partículas y el funcionamiento del péndulo simple y del reversible. En el campo de la óptica elaboró la teoría ondulatoria de la luz, partiendo del concepto de que cada punto luminoso de un frente de ondas puede considerarse una nueva fuente de ondas (principio de Huygens). A partir de esta teoría explicó, en su obra Traité de la lumiére, la reflexión, refracción y doble refracción de la luz. Dicha teoría quedó definitivamente demostrada por los experimentos de Thomas Young, a principios del siglo XIX.

Fuente: Wikipedia

CONCEPTO

Es la interacción mutua entre dos o más partículas en un tiempo relativamente pequeño, por ejemplo cuando una pelota soltada de una altura de 1,5 m, interacciona con el piso. Durante el choque las fuerzas internas generadas son muy grandes comparadas con las fuerzas externas (despreciable), por consiguiente el momentum se conserva durante el choque.



El *momentum* instante antes del choque, es igual al *momentum* instante después del choque.

$$\boxed{\vec{p}_{\text{Antes del choque}} = \vec{p}_{\text{Después del choque}}} \qquad ...(9.1)$$

Durante el choque, la fuerza resultante sobre el sistema ($m_1 + m_2$) es igual a cero, se tienen en consideración solamente las fuerzas de acción y reacción.

VELOCIDAD RELATIVA DE ACERCAMIENTO

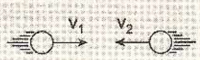
Consideremos dos partículas en movimiento rectilíneo con velocidades $v_1 = 8\hat{i}$ y $v_2 = 5\hat{i}$ m/s, sobre el eje X. Entonces la velocidad relativa de acercamiento, uno respecto al otro será:

$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 8 - 5 = 3$ m/s, es decir en cada segundo se acercan en 3 m, $v_1 - v_2$.

Fig. 9.1

El otro caso, es cuando las partículas se mueven en sentidos contrarios, entonces la velocidad relativa de acercamiento será igual a la suma de los módulos de las velocidades.

¡Importante!
Dos móviles se mueven sobre el eje X, con velocidades de $\vec{v}_1 = 5\hat{i}$ y $\vec{v}_2 = -3\hat{i}$ m/s al encuentro.
La velocidad relativa de acercamiento es:
$v_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (5\hat{i}) - (-3\hat{i}) = 8\hat{i}$
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 8\hat{i}$ m/s $\Rightarrow \vec{v}_{1/2} = 8\hat{i}$ m/s



VELOCIDAD RELATIVA DE ALEJAMIENTO

Consideremos dos partículas en movimiento rectilíneo con velocidades $\vec{U}_1 = 2\hat{i}$ y $\vec{U}_2 = 7\hat{i}$ m/s, sobre el eje x. Entonces la velocidad relativa de acercamiento, uno respecto al otro será:

$$\vec{U}_{1/2} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2 = 2\hat{i} - 7\hat{i} = -5\hat{i} \text{ m/s}$$

Significa que el móvil 1 se aleja del móvil 2 a razón de 5 m en cada segundo con sentido hacia la izquierda. $U_1 < U_2$.

Fig. 9.2

El otro caso, es cuando las partículas se mueven en sentidos opuestos.

Recuerda:
Cuando dos móviles se mueven en el eje X, con velocidades de $\vec{U}_1 = -4\hat{i}$ y $\vec{U}_2 = 5\hat{i}$ m/s

La velocidad relativa de alejamiento es:
$\vec{U}_{1/2} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2 = (-4\hat{i}) - (5\hat{i})$
$\vec{U}_{1/2} = -9\hat{i}$ m/s
El signo negativo significa que el móvil 1 se aleja del móvil 2 a razón de 9 m en cada segundo, con sentido hacia la izquierda.

Regla práctica

Cuando dos móviles se mueven en la misma dirección y sentido, la velocidad relativa de alejamiento o acercamiento es igual a la diferencia de sus velocidades en módulo. Cuando dos móviles se mueven en la misma dirección pero sentidos opuestos, la velocidad relativa de alejamiento o acercamiento es igual a la suma de sus velocidades en módulo.

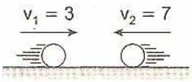
COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN (e)

Es aquel factor adimensional que nos define la relación entre la velocidad relativa de alejamiento después del choque y la velocidad relativa de acercamiento antes del choque. Su valor está comprendido en cero y la unidad.

$$\boxed{e = \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}} \qquad ...(9.2)$$

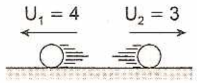
$$\boxed{0 \leq e \leq 1} \qquad ...(9.3)$$

La figura 9.3 muestra el choque de dos esferas. Por comodidad y didáctica la velocidad antes del choque denotaremos con la letra $\vec{v}$ y la velocidad después del choque con la letra $\vec{U}$.



Antes del choque

Fig. 9.3.a



Después del choque

Fig. 9.3.b

La velocidad relativa de alejamiento después del choque es igual a la suma de los módulos de las velocidades:

$$U_{1/2} = 4 + 3 = 7 \text{ m/s}$$

La velocidad relativa de acercamiento antes del choque es igual a la suma de los módulos de las velocidades:

$$v_{1/2} = 3 + 7 = 10 \text{ m/s}$$

Reemplazando en la ecuación (9.2), tenemos:

$$e = \frac{U_{1/2}}{v_{1/2}} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

En la ecuación 9.2 se reemplaza el módulo de las velocidades relativas de alejamiento y acercamiento respectivamente, el valor del coeficiente de restitución es positivo siempre.

CLASIFICACIÓN DE LOS CHOQUES SEGÚN LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA

Choque perfectamente elástico (e = 1)

Es un choque ideal, durante la cuál los cuerpos no experimentan ninguna deformación permanente, ni tampoco liberan energía (calor). Por consiguiente la energía cinética se conserva durante el choque.

Choque elástico ($0 < e < 1$)

Es aquel choque, que durante la interacción de los cuerpos se libera energía en forma de calor o por deformación de los cuerpos. Por consiguiente la energía cinética final es menor que la inicial.

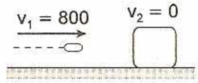
Choque perfectamente inelástico (e = 0)

Es aquel choque que durante su realización se libera energía en forma de calor, deformándose permanentemente los cuerpos, tal que después del choque los cuerpos avanzan juntos con la misma velocidad. La energía cinética que se pierde se gasta en la deformación de los cuerpos.

La energía cinética que se pierde se gasta en la deformación de los cuerpos.

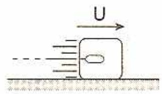
Ejemplos:

1. La figura (9.4), muestra un proyectil de masa 200 g que avanza horizontalmente con velocidad de $800\hat{i}$ m/s en dirección de un bloque de masa 1,8 kg que se encuentra en reposo sobre un piso perfectamente liso. Si después del impacto el proyectil se queda incrustado en el bloque, determinar la velocidad final del conjunto (bloque + proyectil).



(antes)

Fig. 9.4.a



(después)

Fig. 9.4.b

Resolución:

Se trata de un choque perfectamente inelástico (e = 0):

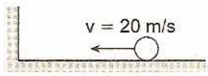
$\vec{p}_{Antes} = \vec{p}_{Después} \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{U}$

Donde: $m_1 = 0{,}2$ kg, es la masa del proyectil, m_2 es la masa del bloque. Reemplazando datos en el SI:

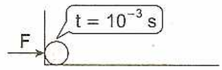
$(0{,}2)800 = 2\vec{U} \Rightarrow \vec{U} = 80\hat{i}$ m/s

2. Una pelota elástica de masa 0,25 kg se mueve horizontalmente con velocidad de $-20\hat{i}$ m/s, impacta con una pared vertical y luego rebota con una velocidad de $14\hat{i}$ m/s como muestra la figura 9.5. Calcula:

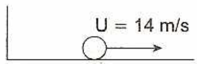
   a) La cantidad de movimiento antes y después del choque.
   b) El impulso que le da la pared a la pelota.
   c) El coeficiente de restitución.
   d) La fuerza promedio de la pared sobre la pelota, si la interacción duró 1 milésimo de segundo.



(antes)



(durante)



(después)

Fig. 9.5

Resolución:

a) $\vec{p}_{Antes} = m\vec{v} = (0{,}25)(-20\hat{i}) = -5\hat{i}$ Ns

$\Rightarrow \vec{p}_{Después} = m\vec{U} = (0{,}25)(14\hat{i}) = 3{,}5\hat{i}$ Ns

b) $\vec{I} = \vec{p}_{Después} - \vec{p}_{Antes} = 3{,}5\hat{i} - (-5\hat{i})$

$\Rightarrow \hat{i} = 8{,}5\hat{i}$ Ns

c) $e = \dfrac{U_{1/2}}{v_{1/2}} = \dfrac{14}{20} \Rightarrow e = 0{,}7$

d) $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$, ecuación 9.2, reemplazando los datos tenemos: $8{,}5\hat{i} = \vec{F}(10^{-3}) \Rightarrow \vec{F} = 8500\hat{i}$ N

GRÁFICA FUERZA VERSUS TIEMPO

Cuando una pelota elástica choca contra una pared, durante la interacción la pelota se deforma, entonces recupera su forma inicial en un tiempo muy pequeño, entonces la fuerza de reacción normal (fuerza externa) es variable en el tiempo. Por consiguiente, la gráfica F-t es una curva, figura 9.6.

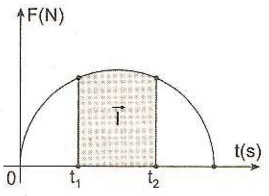


Fig. 9.6

En toda gráfica F-t, el área bajo la curva es igual al impulso que recibe la pelota en un intervalo de tiempo, $\Delta t = t_2 - t_1$.

El área bajo la curva se puede interpretar como la variación del *momentum* lineal, en un intervalo de tiempo.

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p} = \text{Área sombreada}} \quad ...(9.4)$$

CLASIFICACIÓN DE LOS CHOQUES SEGÚN SU LÍNEA DE ACCIÓN

Choque frontal

Son aquellos que se caracterizan porque antes y después de producido el choque, los cuerpos se desplazan a lo largo de la misma línea de acción. Estos choques se denominan también unidimensionales, como muestra la figura 9.3.

Choque oblicuo o excéntrico

Son aquellos a través de los cuales se transfiere cantidad de movimiento lineal e inclusive se transmite *momentum* angular ($\vec{L}$), puesto que las líneas de acción de los cuerpos antes y después del choque son diferentes. Estos choques se denominan también bidimensionales (x e y), como muestra la figura 9.7.

Este caso es frecuente en los juegos de billar. Por comodidad tendremos en consideración solamente el movimiento de traslación, despreciando el movimiento de rotación de las bolas de billar.

I. **Antes del choque:**

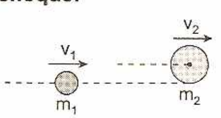


Fig. 9.7.a

En la mesa de billar, $v_2 = 0$

II. **Después del choque:**

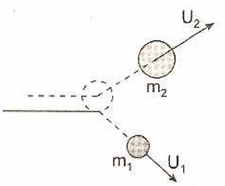
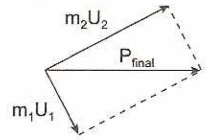


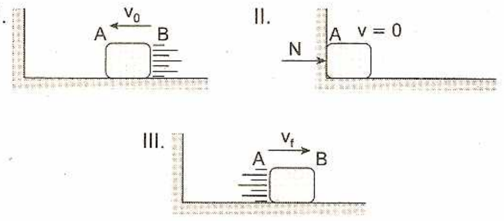
Fig. 9.7.b

Del principio de conservación del *momentum* lineal:

$$\Delta\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{p}_0 = \vec{p}_f$$



Analicemos el choque frontal. Durante el choque los cuerpos experimentan deformación y dependiendo de sus propiedades elásticas existirá una recuperación, pero después del choque puede quedar un remanente de deformación.



En la figura mostrada, cuando se inicia el choque de la barra con la pared, el extremo A de la barra está en contacto con la pared impidiendo que continúe el avance, pero la inercia de las demás partes del cuerpo continúan su avance, causando la deformación o compresión de la barra (se inicia la etapa de deformación). En este proceso la barra se comporta como un resorte comprimiéndose contra la pared. Debido a las fuerzas internas las partes se van frenando hasta que se detiene por un instante.

Las mismas fuerzas internas ponen en movimiento las partes de la barra (extremo B) causando de esta manera que se recupere su forma (se inicia la etapa de recuperación) hasta que cese la interacción entre el extremo A de la barra y la pared. La reacción normal en la pared impulsa al extremo A de la barra.

De esto podemos concluir que el rebote de los cuerpos durante el choque se debe a sus propiedades elásticas.

Durante el choque las fuerzas entre los cuerpos varían conforme van deformándose o recuperando su forma.

Coeficiente de Restitución (e) (definición dinámica)

Construimos una gráfica que muestra la variación de la fuerza externa versus el tiempo transcurrido desde el instante que el extremo de la barra hace contacto con la pared hasta el instante que la interacción cesa.

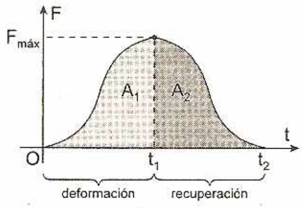
$$e = \frac{|A_2|}{|A_1|} = \frac{|\vec{I}_{\text{recuperaci n}}|}{|\vec{I}_{\text{deformaci n}}|}$$

Donde: $0 \leq e \leq 1$

A_1: Impulso de deformación.

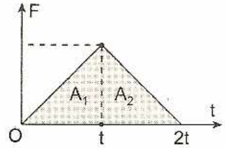
A_2: Impulso de recuperación.

$A_2 \leq A_1$

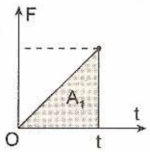


Casos especiales:

1. Si el choque es perfectamente elástico (e = 1):
   $A_2 = A_1$



2. Si el choque es perfectamente ineslático (e = 0):
   $A_2 = 0$, pero: $A_1 \neq 0$



LEY DE REFLEXIÓN EN LOS CHOQUES

Una partícula incide sobre una superficie rugosa μ, formando un ángulo α respecto de la normal y rebota formando un ángulo β. El coeficiente de restitución "e" entre la partícula y la superficie es:

$$e = \frac{\tan\alpha - \mu}{\tan\beta + \mu}$$

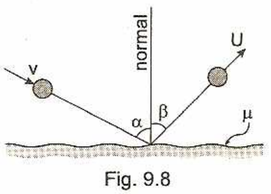
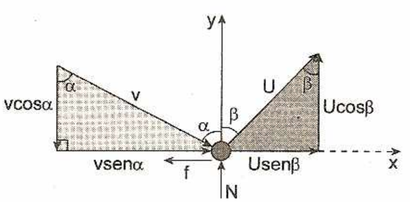


Fig. 9.8

Demostración:



Consideremos que la partícula incide con una velocidad "v" y se refleja con una velocidad U.

El impulso en cada eje, es igual a la variación del *momentum* lineal:

$\vec{I} = \vec{F}_R \Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_0)$

En el eje X, actúa la fuerza de rozamiento: $f = \mu N$

$-\mu N = m(U\text{sen}\beta - v\text{sen}\alpha)$ ...(I)

En el eje Y, actúa la reacción normal N, el peso es despreciable comparado con la fuerza de reacción.

$N = m(U\cos\beta + v\cos\alpha)$ ...(II)

Dividiendo las ecuaciones (I) y (II):

$$-\mu = \frac{U\text{sen}\beta - v\text{sen}\alpha}{U\cos\beta + v\cos\alpha} \quad \text{...(III)}$$

Definición del coeficiente de restitución: $e = \dfrac{\vec{U}_{1/2}}{\vec{v}_{1/2}}$

La velocidad de la superficie (Tierra), antes y después del choque es igual a cero.

$$e = \frac{U\cos\beta}{v\cos\alpha} \Rightarrow U = (ev)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad \text{...(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III): $-\mu = \dfrac{e\tan\beta - \tan\alpha}{e + 1}$

Despejando: $e = \dfrac{\tan\alpha - \mu}{\tan\beta + \mu}$

Casos particulares:

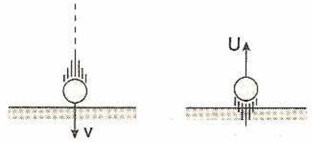
I. Una partícula incide sobre una superficie perfectamente lisa, formando un ángulo α respecto de la normal y rebota formando un ángulo β. El coeficiente de restitución entre la partícula y la superficie es:

   $e = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ Sabiendo que: $0 \leq e \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \beta$

II. Para un choque perfectamente elástico (e = 1), el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales.

   Si, $e = 1 \Rightarrow \alpha = \beta$

III. Cuando una partícula choca perpendicularmente con una superficie fija (tierra), su velocidad de incidencia "v" y su velocidad de reflexión U se relacionan del siguiente modo:



   $U = ev \Rightarrow e \leq 1$

   Si el choque es perfectamente elástico (e = 1), las velocidades de incidencia y reflexión son iguales.

IV. Cuando una partícula es abandonada desde una altura H y choca con una superficie horizontal, la **altura máxima que alcanza después del primer rebote** será: $h = e^2H$ $e < 1$

   En general, la altura máxima después del enésimo rebote será: $h_n = e^{2n}(H)$ $n = 1; 2; 3; 4; ...$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una pelota pequeña de 0,5 kg se mueve con una velocidad de 20 m/s horizontalmente, impacta con una pared vertical y luego rebota. Si el coeficiente de restitución es 0,8, calcular el impulso que le da la pared a la pelota.

Resolución:

El impulso, es igual a variación del *momentum* lineal:

$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_0)$ ...(1)

$\vec{v}_0 = +20\hat{i}$ m/s $\Rightarrow$ $\vec{v}_f = -ev = -16\hat{i}$ m/s

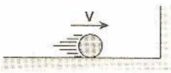
Reemplazando en (1), tenemos:

$\vec{I} = 0{,}5$ kg $(-16 - 20)$ m/s

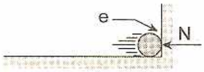
$\vec{I} = -18\hat{i}$ Ns

(−): sentido a la izquierda

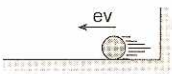
I.



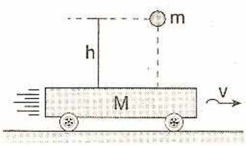
II.



III.



2. Un carro de masa M = 10 kg, se desplaza por inercia a razón de v = 6 m/s. Desde una altura h = 1,0 m se abandona una esfera de masa m = 2 kg, como muestra la figura. Calcular la energía calorífica desprendida en el choque, si la esfera se adhiere al carro. No hay rozamiento en el plano horizontal. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Conservación del *momentum* lineal, en el eje x:

$(x) = p_0(x) \Rightarrow Mv = (M + m)U$

Reemplazando los datos: U = 5 m/s

Conservación de la energía en todas sus formas:

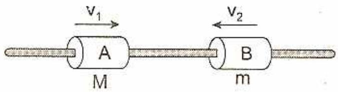
$E_{(antes)} = E_{(después)}$

$mgh + \frac{1}{2}Mv^2 = (m + M)U^2 + Q$

Reemplazando los datos: Q = 50 J

Q: energía mecánica, que se transforma en calor.

3. Dos cuerpos cilíndricos de masas A (12 kg) y B (2 kg) se desplazan con velocidades de $v_1 = 4$ m/s, y $v_2 = 6$ m/s respectivamente, en sentidos opuestos, sobre un eje horizontal que no ofrece rozamiento. Después del choque el cuerpo de mayor masa mantiene el mismo sentido con una velocidad $U_1 = 2$ m/s. Determinar el coeficiente de restitución y la energía calorífica desprendida.



Resolución:

Conservación del *momentum* lineal (eje x):

$\vec{p}_0(x) = \vec{p}_f(x)$

$Mv_1 - mv_2 = MU_1 + mU_2$

$\Rightarrow (12)4 - (6)6 = (12)2 + (2)U_2$

$U_2 = -6$ m/s

Coeficiente de restitución: $e = \dfrac{U_1 - U_2}{v_1 - v_2} = \dfrac{2-(-6)}{4-(-6)}$

$e = 0{,}8$

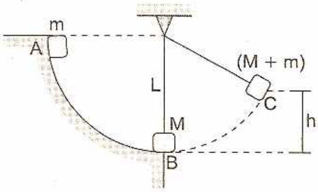
Conservación de la energía:

$E_{C(inicial)} = E_{C(final)} + Q$

$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mU_1^2 + \frac{1}{2}mU_2^2 + Q$

Reemplazando: Q = 72 J

4. Un bloquecito de masa "m" se desliza partiendo del reposo por un tobogán completamente liso que termina horizontalmente, de tal manera que el bloquecito impacta sobre el péndulo de masa M, al que queda adherido, elevándose los dos hasta una altura "h" máxima. Hallar "h" (L: longitud de la cuerda).



Resolución:

Cálculo de la velocidad de "m" cuando impacta con M.

Conservación de la energía mecánica, instante antes del choque: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$mgL = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gL$ ...(1)

Choque inelástico (e = 0):

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$

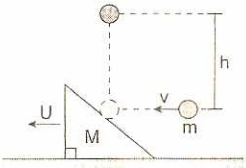
$\Rightarrow mv = (m + M)U \Rightarrow U = \dfrac{mv}{(m + M)}$ ...(2)

Conservación de la energía mecánica, después del choque: $E_{M(B)} = E_{M(C)}$

$\frac{1}{2}(m + M)U^2 = (m + M)gh \Rightarrow \frac{1}{2}U^2 = gh$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $h = \dfrac{m^2L}{(m + M)^2}$

5. Una esfera de masa "m" se lanza horizontalmente con una velocidad $v = 5$ m/s y choca elásticamente ($e = 1$) con una cuña de masa M ($M = 5m$), rebotando verticalmente. Calcular la altura máxima que alcanza la esferilla después del choque. No hay rozamiento. La cuña se encuentra en reposo antes del choque. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

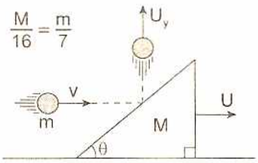
Conservación del *momentum* lineal (eje x):

$\vec{p}_{0(x)} = \vec{p}_{f(x)} \Rightarrow -mv = -MU \Rightarrow U = 1$ m/s

Conservación de la energía mecánica antes y después del choque:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MU^2 + mgh \Rightarrow h = 1$ m

6. En la figura mostrada se tiene una cuña de masa M inicialmente en reposo. Si se lanza horizontalmente una esferita de masa "m", determinar el ángulo θ de tal manera que después del choque elástico ($e = 1$), la esferita rebota verticalmente. Desprecie el rozamiento.



Resolución:

Considerando U la velocidad de la cuña M después del choque:

En el eje x:

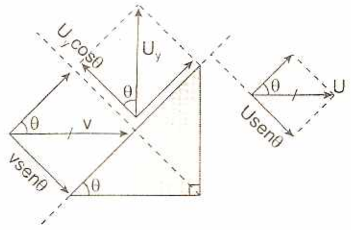
$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)} \Rightarrow mv = MU \Rightarrow v = \frac{M}{m}U$ ...(1)

Considerando U_y la velocidad de "m" después del choque. Conservación de la energía cinética, en el choque elástico ($e = 1$):

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mU_y^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $U_y^2 = \left(\frac{M}{m} - 1\right)\frac{M}{m}U^2$ ...(3)

Definición del coeficiente de restitución (e), para choques frontales o perpendiculares, luego hay la necesidad de descomponer las velocidades y tomaremos como referencia la dirección perpendicular a la cuña.



$$e = \frac{vR\,(\text{alejamiento})}{vR\,(\text{acercamiento})}$$

$$e = \frac{U_y\cos\theta + U\text{sen}\theta}{v\text{sen}\theta} = 1$$

Despejando: $\tan\theta = \frac{U_y}{v - U}$ ...(4)

Reemplazando (1) y (3) en (4): $\tan\theta = \sqrt{\frac{M}{M - m}}$

Del dato: $m = \frac{7}{16}M \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{3}$ $\quad\therefore\ \theta = 53°$

7. En un plano horizontal descansa una cuña cuyo ángulo de inclinación es igual a 30°, y su masa, igual a M. Desde una altura H cae libremente una esferita de masa "m" y después de golpear en forma elástica ($e = 1$) a la cuña, rebota formando un ángulo de 30° con la horizontal. ¿A qué altura se elevará la esferita? Despreciar la fricción entre la cuña y el plano horizontal.

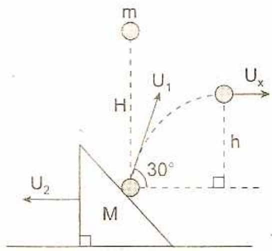
Resolución:

La cantidad de movimiento se conserva en el eje horizontal, en el choque:

$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)}$

$0 = mU_1(\cos 30°) - MU_2$

$U_2 = \frac{m}{M}U_1(\cos 30°)$ ...(1)



Sabemos que la velocidad v_y de la esferita instante antes del choque es: $v_y = \sqrt{2gH}$ ...(2)

Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Cinética, por tratarse de un choque elástico ($e = 1$), tenemos:

$E_{C(antes)} = E_{C(después)}$

$\frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}mU_1^2 + \frac{1}{2}MU_2^2$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$m(2gH) = mU_1^2 + M\left(\frac{m^2}{M^2}\right)U_1^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$U_1^2 = 2gH\left(\frac{4M}{4M+3m}\right) \qquad ...(4)$$

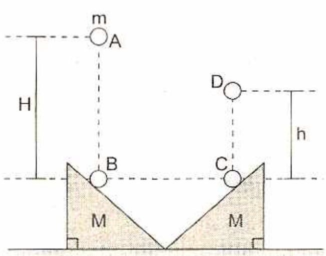
En el movimiento parabólico, la altura máxima que alcanza es:

$$h = \frac{U_1^2(\text{sen}^2 30°)}{2g} = \left[\frac{2gH(4M)}{4M+3m}\right]\left(\frac{1/4}{2g}\right)$$

$$\therefore\ h = \frac{MH}{4M+3m}$$

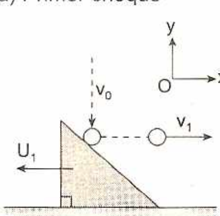
Nota: Para el cálculo de "h" no es necesario conocer el ángulo de inclinación de la cuña.

8. En un plano horizontal descansan dos cuñas cuyos ángulos de inclinación son iguales a 45° y la masa de cada una de ellas es igual a M. Desde una altura H cae libremente una esferita de masa "m" ($m < M$), que choca primero a una cuña, luego a la otra y rebota
verticalmente hacia arriba. Encontrar la altura a la cual rebota la esferita. Tener en cuenta que ambos choques son elásticos ($e = 1$) y que no hay fricción entre las cuñas y el plano horizontal.

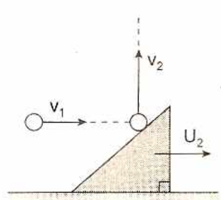


Resolución:

a) Primer choque



b) Segundo choque



Sabemos por caída libre que la velocidad v_0 de la esferita instante antes del primer choque es:

$$v_0 = \sqrt{2gH} \qquad ...(1)$$

La cantidad de movimiento se conserva en el primer choque:

$$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$$

$$0 = mv_1 - MU_1 \Rightarrow U_1 = \frac{m}{M}v_1 \qquad ...(2)$$

- Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía cinética, por tratarse de un choque elástico ($e = 1$):

$$E_{C(antes)} = E_{C(después)}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mU_1^2 \qquad ...(3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3), tenemos:

$$v_1^2 = \left(\frac{m+M}{M}\right)2gH \qquad ...(4)$$

- La cantidad de movimiento se conserva en el segundo choque: $p_{x(antes)} = p_{x(después)}$

$$mv_1 = MU_2 \Rightarrow U_2 = \frac{m}{M}v_1^2 \qquad ...(5)$$

- Después del segundo choque la esferita tiene velocidad v_2 y alcanza una altura máxima "h", entonces deducimos que:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \qquad ...(6)$$

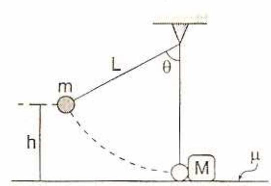
- Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Cinética:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MU_2^2 \qquad ...(7)$$

Reemplazando (4), (5) y (6) en (7), tenemos:

$$h = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)H$$

9. Un péndulo formado por una esferita de masa "m" e hilo de longitud $L = 2$ m, se desvía un ángulo $\theta = 60°$ respecto de la vertical y se suelta sin velocidad inicial. La esferita choca con un bloque de masa M ($M = 2m$) con coeficiente de restitución $e = 1/2$. Determinar el recorrido del bloque sobre el plano horizontal hasta detenerse, si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,5.

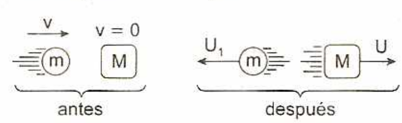


Resolución:

Cálculo de la velocidad "v" de "m" instante antes del choque. De la figura $h = L/2$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = gL \qquad ...(1)$$

Conservación del *momentum*, instante antes e instante después del choque:



$$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$$

$$mv = MU - mU_1 \Rightarrow U_1 = -v + 2U \qquad ...(2)$$

Coeficiente de restitución "e":

$$e = \frac{U + U_1}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 2U + 2U_1 \qquad ...(3)$$

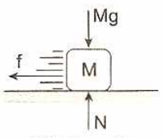
Reemplazando (2) en (3): $U = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{gL}}{2}$ $\qquad ...(4)$

Después del choque el bloque de masa M se mueve horizontalmente.

Teorema del trabajo y la energía mecánica:

$W = E_{M(f)} - E_{M(0)} \Rightarrow -fd = E_{C(f)} - E_{C(0)}$

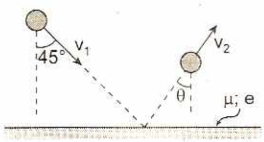
$-\mu(Mg)d = 0 - \frac{1}{2}MU^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\left(\frac{U^2}{\mu g}\right)$ ...(5)



DCL (bloque M)

Reemplazando (4) en (5): $d = \frac{1}{8}\left(\frac{L}{\mu}\right) \Rightarrow d = 0{,}5$ m

10. Se dispara una partícula con un ángulo de incidencia de 45° sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción es $\mu = 2/9$. Calcular la medida del ángulo θ de rebote, si el coeficiente de restitución del choque es $e = 0{,}8$.



Resolución:

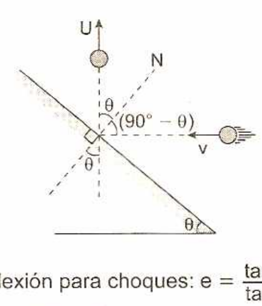
Ley de reflexión para choques: $e = \dfrac{\tan\alpha - \mu}{\tan\beta + \mu}$

Reemplazando los datos: $0{,}8 = \dfrac{\tan 45° - 2/9}{\tan\theta + 2/9}$

Resolviendo: $\tan\theta = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$

11. Sobre un plano inclinado $\theta = 60°$ con la horizontal se dispara un proyectil horizontalmente, rebotando verticalmente. Sabiendo que no existe rozamiento, determinar el coeficiente de restitución "e" entre la esferita y el plano inclinado fijo.

Resolución:

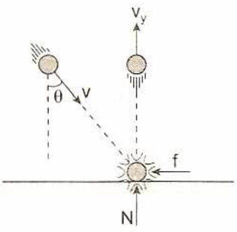


Ley de reflexión para choques: $e = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ ...(1)

Donde: $\alpha = (90° - \theta) \;\wedge\; \beta = \theta$

Reemplazando en (1): $e = \cot^2\theta \Rightarrow e = \dfrac{1}{3}$

12. Una partícula es lanzada contra una superficie horizontal con un ángulo θ respecto de la vertical. El coeficiente de restitución para el choque es $e = 1/2$ y el coeficiente de fricción estática entre la partícula y la superficie es $\mu = 0{,}5$. ¿Para que ángulo de incidencia θ el rebote será vertical?



Resolución:

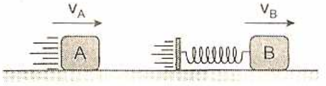
Ley de reflexión para choques: $e = \dfrac{\tan\alpha - \mu}{\tan\beta + \mu}$ ...(1)

En este caso: $\alpha = \theta \;\wedge\; \beta = 0°$

Reemplazando en (1):

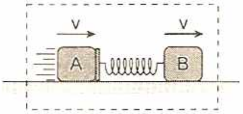
$\tan\theta = \mu(e + 1) \Rightarrow \tan\theta = 3/4 \Rightarrow \theta = 37°$

13. Un bloque A de masa 2 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s directamente y frente a él se mueve un bloque B de masa 5 kg con una velocidad de 3 m/s, en la misma dirección y sentido. Si un resorte de masa despreciable y coeficiente de elasticidad k = 1120 N/m esta fijo en la parte posterior de B, como indica la figura, hallar la máxima deformación del resorte cuando chocan los bloques.



Resolución:

La máxima deformación en el resorte se produce cuando ambos cuerpos se desplazan con la misma velocidad, esto quiere decir que la velocidad relativa de acercamiento entre A y B es igual a cero.



Conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v$

Reemplazando: $v = 5$ m/s ...(1)

Conservación de la energía mecánica:

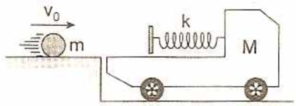
$E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$

$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$

Reemplazando: $x = 0{,}25$ m

14. Un cuerpo esférico de masa $m = 0{,}5$ kg se mueve horizontalmente con una velocidad $v_0 = 9$ m/s y hace contacto con la superficie de un carro de masa $M = 4$ kg, inicialmente en reposo. En el carro se encuentra instalado un resorte de masa

despreciable y constante elástica $k = 400$ N/m. Despreciando toda forma de rozamiento, determinar la máxima deformación en el resorte.



Resolución:

La deformación en el resorte será máxima, cuando la velocidad relativa de "m" respecto del carro M es igual a cero. Por consiguiente el sistema (m + M) marcha con una velocidad común igual a U, solo un instante.

Conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow mv_0 = (m + M)U$

Reemplazando: $U = 1$ m/s

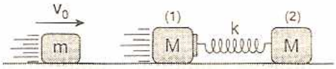
Conservación de la energía mecánica:

$E_{M(inicial)} = E_{M(final)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)U^2 + \frac{1}{2}kx^2$

Reemplazando datos: $x = 0{,}3$ m

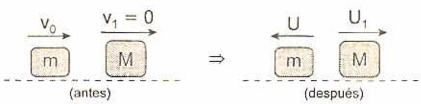
x: máxima deformación en el resorte.

15. Un bloque de masa $m = 1$ kg se mueve sobre una superficie horizontal, sin rozamiento, con una velocidad constante $v_0 = 6$ m/s acercándose al sistema formado por dos bloques de masas $M = 2$ kg, unidos por un resorte de constante elástica $k = 10\,000$ N/m, inicialmente en reposo. Después del choque perfectamente elástico ($e = 1$), hallar la máxima deformación del resorte, de masa despreciable.



Resolución:

Interacción del bloque "m" con el bloque (1) de masa M:



Principio de conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$

$mv_0 = -mU + MU_1 \Rightarrow 1(6) = -U + 2U_1$

$U = 2U_1 - 6$ ...(1)

Coeficiente de restitución "e":

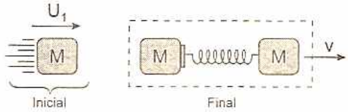
$e = \frac{U + U_1}{v_0} = 1 \Rightarrow U + U_1 = v_0$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $U_1 = 4$ m/s ...(3)

El bloque (1) transmite movimiento al bloque (2) mediante el resorte. Cuando la deformación en el resorte sea máxima, el sistema marchará con una misma velocidad, en un instante, por consiguiente la velocidad relativa entre los bloques (1) y (2) será cero.

Después del choque.

Conservación del *momentum* lineal:



$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow MU_1 = (M + M)v \Rightarrow U_1 = 2v$

$\therefore\ v = 2{,}0$ m/s ...(4)

Conservación de la energía mecánica:

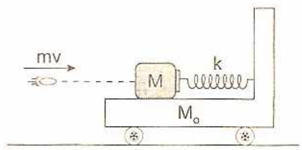
$E_{M(inicial)} = E_{M(final)} \Rightarrow \frac{1}{2}MU_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(2M)v^2$

Reemplazando los valores obtenidos: $x = 0{,}04$ m

x: deformación máxima en el resorte.

16. Un bloque de masa M se encuentra asociado a un carrito de masa M_0 mediante un resorte ingrávido de constante elástica $k = 20\,000$ N/m, inicialmente en reposo. Se dispara horizontalmente una bala de masa "m" con velocidad "v" ($mv = 300$ Ns). Si después del choque la bala queda incrustada en el bloque de masa M ($M = 8m$), hallar la máxima deformación del resorte. Desprecie toda forma de rozamiento.

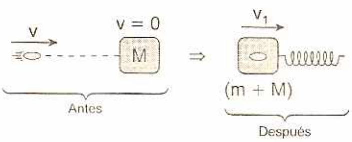
Considere: $M_0 = 9m$



Resolución:

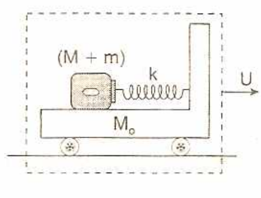
Choque del proyectil con el bloque de masa M:

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$



$mv = (m + M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{mv}{M + m}$ ...(1)

La máxima deformación del resorte se establece cuando el conjunto tiene la misma velocidad, esto quiere decir que la velocidad de M respecto del carrito es igual a cero.



La cantidad de movimiento se conserva en el tiempo, entonces el *momentum* del proyectil antes del impacto es igual al *momentum* del sistema cuando la deformación es máxima.

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow mV = (M + m + M_0)U$

$$U = \frac{mv}{(M + m + M_0)} \quad ...(2)$$

Conservación de la energía mecánica, después del choque entre "m" y M:

$E_{M(1)} = E_{M(2)}$

$$\frac{1}{2}(m + M)v_1^2 = \frac{1}{2}(m + M + M_0)U^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad ...(3)$$

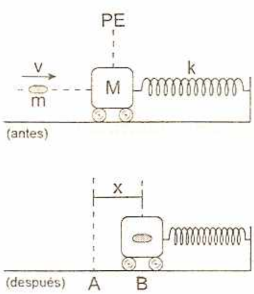
Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$x = mv\sqrt{\frac{M_0}{(M + m + M_0)(M + m)k}}$$

De los datos: $x = 5$ cm

x = máxima deformación del resorte.

17. Un proyectil de masa 100 g se dispara horizontalmente con velocidad de 500 m/s en dirección de un bloque de masa 900 g que se encuentra unido a un resorte de constante elástica $k = 400$ N/cm. Si el proyectil se incrusta al bloque, ¿cuál es la máxima deformación que experimenta el resorte? No hay rozamiento.



Resolución:

Después del choque inelástico ($e = 0$) el bloque más el proyectil tienen una velocidad común U. La cantidad de movimiento se conserva durante el choque:

$\vec{p}_{A.CH} = \vec{p}_{D.CH} \Rightarrow mv = (m + M)U$

$(0,1)(500) = (1)U \Rightarrow U = 50$ m/s

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, inmediatamente después del choque, en el tramo $A \rightarrow B$:

$E_{M(en\ A)} = E_{M(en\ B)} \Rightarrow E_{C(en\ A)} = E_{pe(en\ B)}$

$$\frac{1}{2}(m + M)U^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

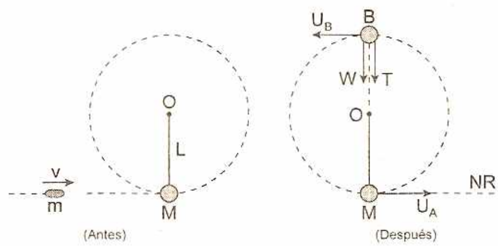
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)(50)^2 = \frac{1}{2}(40\ 000)x^2$$

Despejando: $x = 0,25$ m

Nota: Cuando el resorte alcanza su máxima deformación, la velocidad del bloque es nulo.

18. Una esfera de masa M pende de un hilo de longitud L. La esfera es golpeada horizontalmente por un proyectil de masa "m" y que se introduce en ella. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima del proyectil para que después de golpear la esfera, ésta alcance a realizar un ciclo completo en el plano vertical?

Resolución:



Aplicamos el concepto de fuerza centrípeta en el punto B [$W = (M + m)g$]:

$$F_c = (M + m)a_c \Rightarrow F_c = (M + m)\frac{U_B^2}{L}$$

$$W + T = (M + m)\frac{U_B^2}{L}$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{M + m}{L}\right)(U_B^2 - gL)$$

De la ecuación anterior se deduce que para:

a) $T > 0$, $U_B^2 > gL$, da una vuelta

b) $T < 0$, $U_B^2 < gL$, no da vuelta

c) $T = 0$, $U_B^2 = gL$, punto crítico

Por lo tanto, $T = 0$ en B, $U_B = \sqrt{gL}$ ...(1)

Principio de conservación de la energía mecánica, inmediatamente después del choque inelástico ($e = 0$): $E_{M(en\ A)} = E_{M(en\ B)}$

$$\frac{1}{2}(M + m)U_A^2 = (M + m)g(2L) + \frac{1}{2}(M + m)U_B^2 \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}U_A^2 = g(2L) + \frac{1}{2}(gL) \Rightarrow U_A^2 = \sqrt{5gL} \quad ...(3)$$

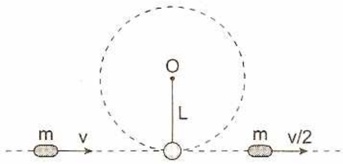
Principio de conservación del *momentum* lineal, instante antes e instante después del choque:

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)} \Rightarrow mv = (m + M)U_A$ ...(4)

Reemplazando (3) en (4) tenemos:

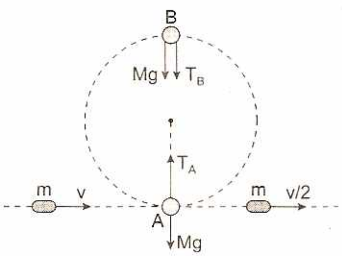
$$v = \left(\frac{m + M}{m}\right)\sqrt{5gL}$$

19. Una bala de masa "m" con velocidad "v" pasa a través de la esfera de un péndulo de masa M, saliendo con una velocidad v/2, tal como se aprecia en la figura. La esfera pendular cuelga del extremo de la cuerda de longitud L. ¿Cuál es el menor valor de "v" para el cual el péndulo realizará una circunferencia completa?



Resolución:

DCL de la esfera:



En B: Dinámica circunferencial: $F_C = Ma_C$

$$Mg + T_B = M\frac{v_B^2}{L} \Rightarrow T_B = \frac{M}{L}(v_B^2 - gL)$$

De la ecuación anterior se deduce que para:

1. $T_B > 0$ ($v_B^2 > gL$), da vuelta.
2. $T_B < 0$ ($v_B^2 < gL$), no da vuelta.
3. $T_B = 0$ ($v_B^2 = gL$), punto crítico

Por lo tanto: $T_B = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{gL}$ ...(1)

Principio de la conservación de la energía mecánica: (esfera)

$$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{C(A)} + E_{p(A)} = E_{C(B)} + E_{P(B)}$$

$$\frac{Mv_A^2}{2} + 0 = \frac{Mv_B^2}{2} + Mg(2L) \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) y operando:

$v_A = \sqrt{5gL}$ ...(3)

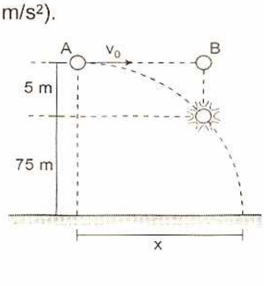
Principio de conservación del *momentum* lineal: (esfera y bala)

$$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)} \Rightarrow mv = m\frac{v}{2} + Mv_A \quad ...(4)$$

Reemplazando (3) en (4):

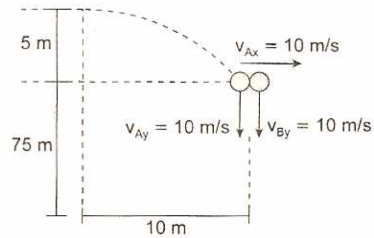
$$mv = \frac{mv}{2} + M\sqrt{5gL} \Rightarrow v_{mín} = \frac{2M}{m}\sqrt{5gL}$$

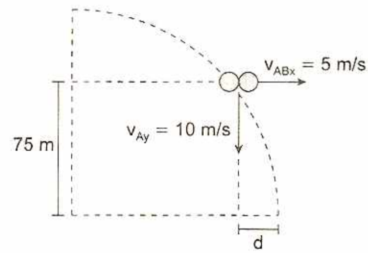
20. En el instante que la esfera A de masa "m" se lanza horizontalmente con una velocidad inicial de 10 m/s, la esfera B de igual masa es dejada caer de la posición indicada. Si las esferas realizan un choque completamente inelástico, hallar x. ($g = 10$ m/s²).



Resolución:

En el instante del choque inelástico ($e = 0$):





Analizando cinemáticamente (A + B) después del choque inelástico:

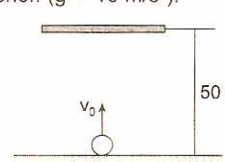
$$h = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 75 = 10t + 5t^2$$

$t^2 + 2t - 15 = 0 \Rightarrow t = 3$ s

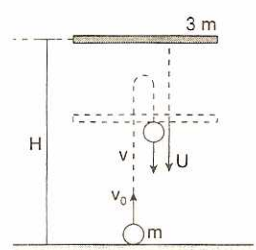
Analizando el movimiento de (A + B) en el eje horizontal: $d = vt$

$d = 5t \Rightarrow d = 15$ m $\quad \therefore x = 25$ m

21. En el instante que la plataforma es dejada caer de la posición que se indica, la esfera es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad $v_o = 20$ m/s. Si la plataforma tiene una masa triple de la esfera, determinar la velocidad que adquiere esta última después de chocar elásticamente ($e = 1$) con la anterior. ($g = 10$ m/s²).



Resolución:



El tiempo que tardan en chocar: $t = \frac{H}{v_0}$

Reemplazando datos se tiene que: $t = 2{,}5$ s

Las velocidades de la esfera y la plataforma en ese instante son:

$v = 5$ m/s y $U = 25$ m/s

Principio de conservación del *momentum* lineal, en el choque: $\vec{p}_{ACH} = \vec{p}_{DCH}$

$m(5) + 3m(25) = mv' + 3mU'$

$\Rightarrow v' + 3U' = 80$ ...(1)

Relación entre la velocidad relativa y el coeficiente de restitución: $v_{DCH} = ev_{ACH}$

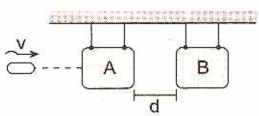
$v' - U' = (1)(25 - 5) \Rightarrow v' - U' = 20$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2): $v = 35$ m/s

22. Se dispara una bala de 20 g en dirección horizontal hacia el bloque A (1 kg) y se introduce en el bloque B (3 kg). La bala comunica a los bloques A y B velocidades de 5 y 4 m/s respectivamente. Calcular:

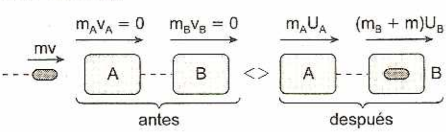
a) La velocidad inicial "v" de la bala.

b) La velocidad de la bala en el espacio comprendido entre ambos bloques.



Resolución:

a) Como no existe una fuerza externa en la dirección horizontal, la cantidad de movimiento en esa dirección se conserva. (Obsérvese que las únicas fuerzas son los pesos de los bloques y las tensiones de las cuerdas, ambas en dirección vertical).



El esquema representa las cantidades de movimiento, inicial y final.

Principio de conservación del *momentum* lineal:

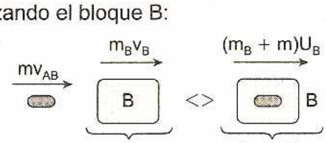
$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$

$m\vec{v} + m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{U}_A + (m_B + m)\vec{U}_B$

$mv + 0 + 0 = m_AU_A + (m_B + m)U_B$

Reemplazando: $v = 854$ m/s

b) Analizando el bloque B:



v_{AB}: velocidad de la bala en el espacio comprendido entre ambos bloques.

Consideremos el sistema constituido únicamente por el bloque B, y la bala una vez que ha atravesado el bloque A.

Nuevamente, la cantidad de movimiento en la dirección horizontal se conserva, debido a que no existe ninguna fuerza externa en esa dirección.

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)} \Rightarrow m\vec{v}_{AB} + m_B\vec{v}_B = (m_B + m)\vec{U}_B$

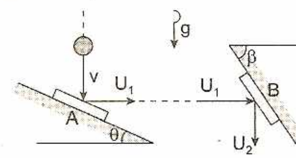
$\Rightarrow mv_{AB} + 0 = (m_B + m)\vec{U}_B$

Reemplazando: $v_{AB} = 604$ m/s

23. Una esfera que es de acero, cae verticalmente y golpea una placa rígida A y rebota horizontalmente tal como se muestra en la figura, golpeando luego una segunda placa rígida B; si en ambos casos el coeficiente de restitución es "e", hallar:

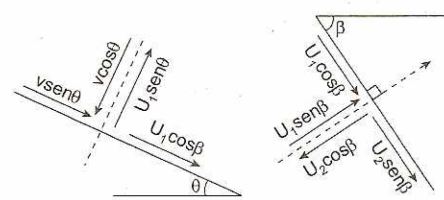
a) Los ángulos θ y β en función de "e".

b) Las magnitudes de las velocidades U_1 y U_2 en función de "v" y "e".



Resolución:

Velocidades antes y después del choque:



Placa (A) Placa (B)

a) Placa A:

En la línea perpendicular a la línea de choque:

$v\,\text{sen}\theta = U_1\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{U_1}{v}$ ...(1)

En línea de choque: $e = \dfrac{U_1\text{sen}\theta}{v\cos\theta} = \dfrac{U_1}{v}(\tan\theta)$

De (1): $e = \tan^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{e}$

$\Rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{e})$

Placa B:

En la línea perpendicular a la línea de choque:

$U_1\cos\beta = U_2\text{sen}\beta \Rightarrow \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1}{\tan\beta}$ ...(2)

En la línea de choque: $e = \dfrac{U_2\cos\beta}{U_1\text{sen}\beta} = \dfrac{U_2}{U_1}\left(\dfrac{1}{\tan\beta}\right)$

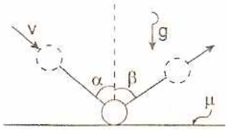
De (2): $e = \dfrac{1}{\tan^2\beta} \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{\sqrt{e}}{e}$

$\Rightarrow \beta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

b) De (1): $U_1 = v\tan\theta \Rightarrow U_1 = v\sqrt{e}$

De (2): $U_2 = \dfrac{U_1}{\tan\beta} = \dfrac{v\sqrt{e}}{\dfrac{\sqrt{e}}{e}} \Rightarrow U_2 = ve$

24. Una pelota rebota sobre una superficie horizontal tal como se muestra en la figura. Si el coeficiente de restitución es "e" y el coeficiente de fricción cinético es μ, encuentre una relación entre el ángulo de incidencia α y el ángulo de rebote β en función de "e" y μ. Considerar que la colisión duró "t" segundos.



Resolución:

Diagrama de fuerzas:

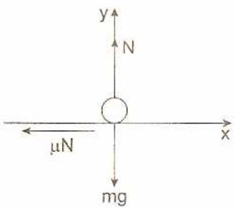
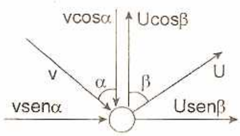


Diagrama de velocidades:



Teorema de la cantidad de movimiento:

$\vec{p}_f = \vec{p}_0 + \int_0^t \vec{F}\,dt$

En el eje X: $mUsen_\beta = mv\cos\alpha - \mu\int Ndt$ ...(1)

En el eje Y: $mU\cos\beta = -\,mv\cos\alpha + \int Ndt$

$\int Ndt = m(U\cos\beta + v\cos\alpha)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$mUsen\beta = mvsen\alpha - \mu m(U\cos\beta + v\cos\alpha)$ ...(3)

Pero: $e = \dfrac{U\cos\beta}{v\cos\alpha} \Rightarrow U = \dfrac{ev\cos\alpha}{\cos\beta}$

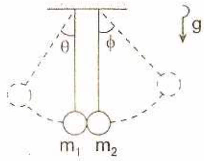
Luego, reemplazando en (3):

$ev\cos\alpha\tan\beta = vsen\alpha - \mu(ev\cos\alpha + v\cos\alpha)$

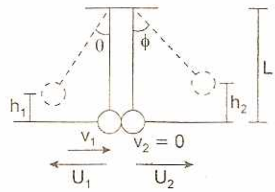
$\tan\beta = \dfrac{1}{e}\tan\alpha - \mu\left(1 + \dfrac{1}{e}\right) \Rightarrow \dfrac{\tan\alpha - \mu}{\tan\beta + \mu} = e$

En todo choque, las fuerzas internas producidas son muy grandes comparadas con las fuerzas externas. Es decir, la reacción normal N es mayor, mucho mayor que el peso de la partícula.

25. Dos esferas de acero de masas m_1 y m_2 están suspendidas de la manera que se indica en la figura. La primera se desvía un ángulo θ y se suelta sin velocidad inicial. Después del choque la segunda esfera se desvía un ángulo ϕ. Hallar el coeficiente de restitución entre las esferas.



Resolución:



Cálculo de las alturas inicial y final:

$h_1 = L - L\cos\theta$ ...(1)

$h_2 = L - L\cos\phi$ ...(2)

Principio de conservación de la energía (tramo 1):

$E_{inicial} = E_{antes\ del\ choque}$

$m_1gh_1 = \dfrac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1}$ ...(3)

Principio de conservación de la energía (tramo 2):

$E_{después\ del\ choque} = E_{final}$

$\dfrac{m_2U_2^2}{2} = m_2gh_2 \Rightarrow U_2 = \sqrt{2gh_2}$ ...(4)

Principio de conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1v_1 = m_2U_2 - m_1U_1$ ...(5)

Reemplazando (3) y (4) en (5):

$m_1\sqrt{2gh_1} = m_2\sqrt{2gh_2} - m_1U_1$ ...(6)

Por definición: $e = \dfrac{U_1 + U_2}{v_1}$ ...(7)

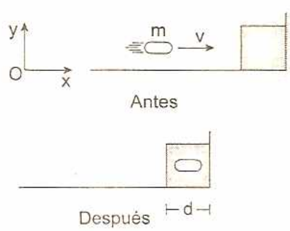
Reemplazando (3) y (4) en (7) y despejando, tenemos:

$U_1 + \sqrt{2gh_2} = e\sqrt{2gh_1}$ ...(8)

Resolviendo (6) y (8): $e = \sqrt{\dfrac{1-\cos\phi}{1-\cos\theta}}\left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right) - 1$

26. Una bala de masa "m" va a una velocidad "v" horizontal. Choca con un bloque de madera de masa M que se encuentra fijo en una superficie horizontal. Si la bala penetra una distancia "d" dentro del bloque, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la madera sobre la bala?

Resolución:



Para la bala: el impulso es igual a la variación del *momentum* lineal:

$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = m(\vec{U} - \vec{v})$

$\vec{F}\Delta t = m\,(0 - v\hat{i}) \Rightarrow \vec{F} = -\dfrac{mv}{\Delta t}\hat{i}$ ...(1)

También por cinemática:

i. $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$

$0 = v\hat{i} + \vec{a}\Delta t \Rightarrow \vec{a} = -\dfrac{v}{\Delta t}\hat{i}$ ...(2)

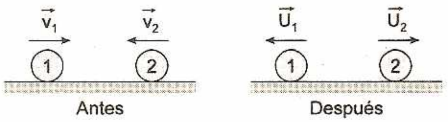
ii. $\Delta\vec{x} = \vec{v}_0\Delta t + \dfrac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2$

De (2): $d\hat{i} = v\hat{i}\Delta t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-v\hat{i}}{\Delta t}\right)\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \dfrac{2d}{v}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1): $\vec{F} = -\dfrac{mv}{\frac{2d}{v}}\hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -\dfrac{mv^2}{d}\hat{i}$

27. Dos masas m_1 y m_2 realizan una colisión frontal elástica ($e = 1$). Si sus velocidades finales son U_1 y U_2, hallar la velocidad inicial de cada una de ellas.

Resolución:



Como el choque es frontal y elástico ($e = 1$):

$e = 1 = \dfrac{U_2 + U_1}{v_1 + v_2} \Rightarrow U_2 + U_1 = v_1 + v_2$ ...(1)

Del principio de conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(antes)} = \vec{p}_{(después)}$

$m_1v_1 - m_2v_2 = m_2U_2 - m_1U_1$ ...(2)

Multiplicando por m_2 a (1) miembro a miembro:

$m_2v_1 + m_2v_2 = m_2U_2 - m_2U_1$ ...(3)

Sumando (2) y (3):

$v_1(m_1 + m_2) = 2m_2U_2 + U_1(m_2 - m_1)$

$\therefore\ v_1 = \dfrac{2m_2U_2 + (m_2 - m_1)U_1}{m_1 + m_2}$

Multiplicando por m_1 a la ecuación (1) miembro a miembro:

$m_1v_1 + m_1v_2 = m_1U_2 + m_1U_2$ ...(4)

Restando (4) y (3):

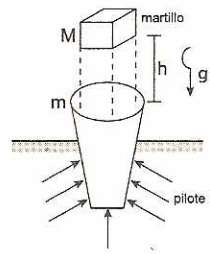
$v_2(m_1 + m_2) = U_2(m_1 - m_2) + 2\,m_1U_1$

$\therefore\ v_2 = \dfrac{2m_1U_1 + (m_1 - m_2)U_2}{m_1 + m_2}$

28. El martillo de masa M, cae desde una altura "h" sobre un pilote de masa "m", tal como se muestra en la figura.

a) Si el choque es perfectamente plástico, determinar la velocidad del pilote inmediatamente después de producido el impacto.

b) Si luego se introduce una distancia "d" en el piso, determinar la resistencia promedio que ejerce el suelo sobre el pilote.

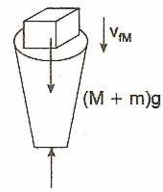


Resolución:

a) Para el martillo (caída libre):

$v_{0M} = 0 \Rightarrow v_{fM}^2 = 2gh \Rightarrow \vec{v}_{fM} = -\sqrt{2gh}\,\hat{j}$

DCL del sistema:



Choque perfectamente plástico.

R = fuerza promedio

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow Mv_{fM} = (m + M)U \Rightarrow U = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\sqrt{2gh}$

$\therefore\ \vec{U} = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\sqrt{2gh}\left(-\hat{j}\right)$ ...(1)

b) Segunda ley de Newton:

$\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow (M + m)g - R = (M + m)a$

$\Rightarrow R = (M + m)(g - a)$ ...(2)

Pero, por cinemática:

$v_f^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow \vec{a} = -\dfrac{U^2}{2d}\hat{j}$ ...(3)

Reemplazando (1) en (3):

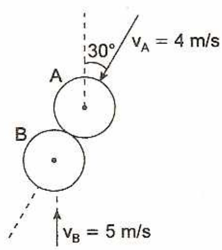
$a = -\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^2\dfrac{(2gh)}{2d} \Rightarrow a = -\dfrac{M^2}{(M+m)^2}\left(\dfrac{gh}{d}\right)$ ...(4)

Luego (4) en (2):

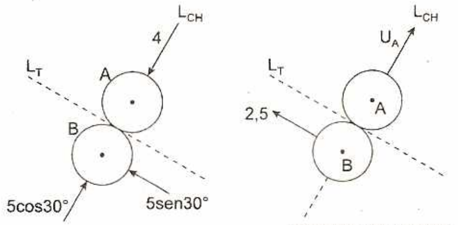
$R = (M + m)\left[g + \dfrac{M^2}{(M+m)^2}\left(\dfrac{gh}{d}\right)\right]$

$R = \left[M + m + \left(\dfrac{M^2}{M+m}\right)\left(\dfrac{h}{d}\right)\right]g$

29. Dos esferas de masas iguales colisionan como se muestra en la figura. Si la velocidad de la esfera B después del impacto es de 2,5 m/s, determinar el coeficiente de restitución de las dos esferas, sabiendo que tienen el mismo diámetro. Las esferas se mueven en un plano horizontal.



Resolución:



(Antes del choque) (Después del choque)

Para B en la línea tangente (L_T) se conserva su cantidad de movimiento.

Luego, su velocidad será igual a 5(sen30°) = 2,5 m/s y por condición del problema no debe tener componente en la línea de choque (L_{CH}).

Por lo tanto, en la L_{CH} se conserva su cantidad de movimiento, entonces:

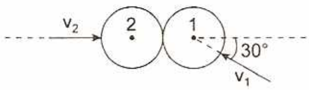
$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

$m(5\cos30°) - m(4) = mU_A \Rightarrow U_A = 0{,}33$ m/s

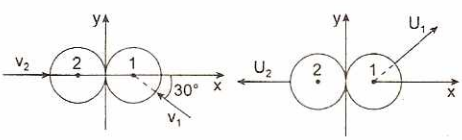
Cálculo del coeficiente de restitución "e", en la línea de choque:

$$e = \frac{0{,}33}{5\cos 30° - (-4)} \Rightarrow e = 0{,}03963$$

30. Las dos esferas idénticas de acero, se desplazan con las velocidades iniciales v_1 y v_2, tal como se indica en la figura y chocan de modo que la línea que une los centros tiene la dirección de v_2, con e = 0,6. Determinar la velocidad de cada esfera inmediatamente después del impacto.
(v_1 = 183 m/s; v_2 = 122 m/s)



Resolución:



Antes del choque Después del choque

Eje x: línea de choque

Principio de conservación del *momentum* lineal en el eje x:

$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)}$

$mv_2 - mv_1(\cos30°) = mU_{1x} - mU_2$

Simplificando y reemplazando datos tendremos:

$U_{1x} - U_2 = -36{,}48$ ...(1)

También: $e = \dfrac{U_{1x} - (-U_2)}{U_2 - (-v_1\cos 30°)} = 0{,}6$

Operando: $U_{1x} + U_2 = 168{,}29$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2) tendremos que:

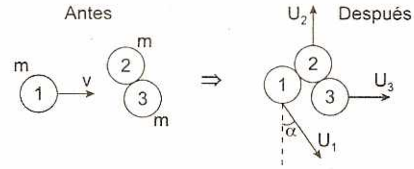
$U_{1x} = 65{,}91$ m/s $\wedge$ $U_2 = 102{,}38$ m/s

En el eje y: $U_{1y} = v_1(\text{sen}30°) \Rightarrow U_{1y} = 91{,}5$ m/s

Pero: $U_1 = \sqrt{U_{1x}^2 + U_{1y}^2} \Rightarrow U_1 = \sqrt{(65{,}91)^2 + (91{,}5)^2}$

$U_1 = 112{,}76$ m/s

31. En un juego de billar, la bola (1) se mueve con velocidad "v" cuando chocan con las bolas (2) y (3) que están en reposo uno junto a la otra como se muestra en la figura. Después del choque, las tres bolas se mueven en las direcciones mostradas. Suponiendo choques perfectamente elásticos y las tres bolas idénticas, determinar las velocidades finales de (1), (2) y (3).



Resolución:

Para la bola (1): $\vec{v}_1 = (v; 0)$

$\vec{U}_1 = (U_1\text{sen}\alpha; -U_1\cos\alpha)$

Para la bola (2): $\vec{v}_2 = (0; 0)$ y $\vec{U}_2 = (0; U_2)$

Para la bola (3): $\vec{v}_3 = (0; 0)$ y $\vec{U}_3 = (U_3; 0)$

Principio de conservación del *momentum* lineal:

$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$

$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 + m\vec{U}_3$

$\vec{v}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$

Reemplazando:

$(v; 0) = (U_1\text{sen}\alpha; -U_1\cos\alpha) + (0; U_2) + (U_3; 0)$

Luego:

$v = U_1\text{sen}\alpha + U_3 \Rightarrow U_3 = v - U_1\text{sen}\alpha$ ...(1)

$0 = -U_1\cos\alpha + U_2 \Rightarrow U_2 = U_1\cos\alpha$ ...(2)

Conservación de la energía:

$E_{C(antes)} = E_{C(después)}$ ($E_P = 0$)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mU_1^2 + \frac{1}{2}mU_2^2 + \frac{1}{2}mU_3^2$$

$v^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$v^2 = U_1^2 + (U_1\cos\alpha)^2 + (v - U_1\text{sen}\alpha)^2$

$v^2 = U_1^2 + U_1^2\cos^2\alpha + v^2 - 2vU_1\text{sen}\alpha + U_1^2\text{sen}^2\alpha$

Resolviendo: $U_1 = v\text{sen}\alpha$

En (1): $U_3 = v - (v\text{sen}\alpha)(\text{sen}\alpha) \Rightarrow U_3 = v\cos^2\alpha$

En (2): $U_2 = (v\text{sen}\alpha)(\cos\alpha) \Rightarrow U_2 = \frac{v}{2}\text{sen}2\alpha$

$\vec{U}_1 = (U_1\text{sen}\alpha; -U_1\cos\alpha)$

$\vec{U}_1 = (v\text{sen}\alpha\text{sen}\alpha; -v\text{sen}\alpha\cos\alpha)$

$\Rightarrow \vec{U}_1 = v(\text{sen}2\alpha; -\frac{1}{2}\text{sen}2\alpha)$

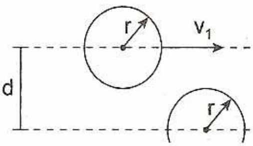
También:

$\vec{U}_2 = (0; U_2) \Rightarrow \vec{U}_2 = v(0; \frac{1}{2}\text{sen}2\alpha)$

$\vec{U}_3 = (U_3; 0) \Rightarrow \vec{U}_3 = v(\cos2\alpha; 0)$

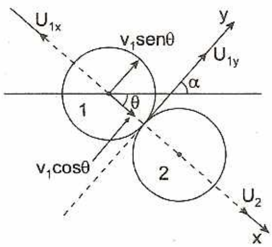
a) Demuestre que después de la colisión, sus velocidades son perpendiculares.

b) Determinar una relación entre el ángulo de desviación de la bola incidente y el parámetro de impacto "d" que se muestra en la figura como la distancia entre los centros de las bolas en dirección perpendicular a la velocidad incidente. Considerar choque perfectamente elástico.(e = 1)



Resolución:

a)



Eje x: línea de choque

$\vec{U}_1 = -U_{1x}\hat{i} + U_{1y}\hat{j};\ \ \vec{U}_2 = U_2\hat{i};\ U_{2y} = 0$

Calculemos el producto escalar entre $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$:

$$\vec{U}_1\vec{U}_2 = -U_{1x}U_2 = -\frac{U_{1x}}{U_2}(U_2^2)$$

$$\vec{U}_1\vec{U}_2 = -\left(\frac{U_{1x}}{U_2}\right)U_2^2 \qquad ...(1)$$

Conservación del *momentum* lineal en el eje X:

$\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})}$

$v_1\cos\theta = U_2 - U_{1x} \qquad ...(2)$

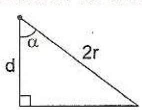
Pero: $e = \dfrac{U_2 + U_{1x}}{v_1\cos\theta} \qquad ...(3)$

(2) en (3): $e = \dfrac{U_2 + U_1}{U_2 - U_{1x}} \Rightarrow \dfrac{U_{1x}}{U_2} = \dfrac{e-1}{e+1}$

Por dato: $e = 1 \Rightarrow \dfrac{U_{1x}}{U_2} = 0$

Reemplazando en (1): $\vec{U}_1\vec{U}_2 = 0 \quad \Rightarrow \vec{U}_1 \perp \vec{U}_2$

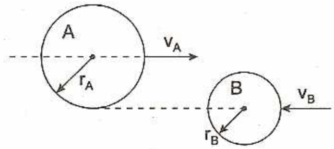
b) Cálculo de la desviación de la bola incidente:



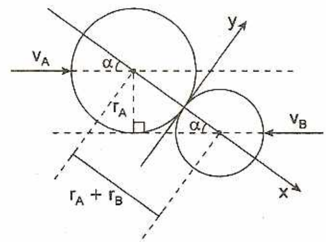
De la figura: $\cos\alpha = \dfrac{d}{2r} \quad \therefore\ \alpha = \arccos(d/2r)$

33. La esfera A tiene una masa $m_A = 23$ kg y tiene un radio $r_A = 3$ cm, mientras que B tiene una masa $m_B = 4$ kg y tiene un radio $r_B = 2$ cm. Si las esferas las velocidades de las esferas inmediatamente después del impacto. Considerar e = 0,4 y despreciar el rozamiento.

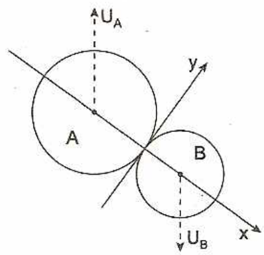
($v_A = 120$ m/s y $v_B = 360$ m/s)



Resolución:



(Antes del choque)



(Después del choque)

Eje X: línea de choque.

De la figura:

$$\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{r_A}{r_A + r_B}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{3}{3+2}\right) \Rightarrow \alpha = 37°$$

En el eje y:

$U_{Ay} = v_A\text{sen}\alpha = 120(\text{sen}37°) \Rightarrow U_{Ay} = 72$ m/s,

$U_{By} = v_B\text{sen}\alpha = 360(\text{sen}37°) \Rightarrow U_{By} = 216$ m/s

Conservación del *momentum* lineal en el eje x:

$\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})}$

$m_Av_A\cos\alpha - m_Bv_B\cos\alpha = m_BU_{Bx} - m_AU_{Ax}$

Reemplazando: $4U_{Bx} - 23U_{Ax} = 1056 \qquad ...(1)$

Coeficiente de restitución:

$$e = \frac{U_{Ax} + U_{Bx}}{v_A\cos\alpha + v_B\cos\alpha} = 0{,}4$$

Despejando y reemplazando datos tendremos:

$U_{Ax} + U_{Bx} = 153{,}6 \qquad ...(2)$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

$-U_{Ax} = 16{,}4$ cm/s (sentido opuesto a lo supuesto)

$U_{Bx} = 170$ cm/s (sentido correcto)

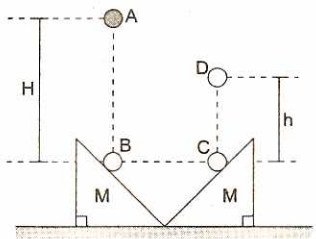
Luego: $U_A = \sqrt{U_{Ax}^2 + U_{Ay}^2} \ \wedge\ U_B = \sqrt{U_{Bx}^2 + U_{By}^1}$

Reemplazando datos:

$U_A = \sqrt{(16,4)^2 + (72)^2} \Rightarrow U_A = 73,84$ cm/s

$U_B = \sqrt{(170)^2 + (216)^2} \Rightarrow U_B = 274,87$ cm/s

34. En un plano horizontal descansan dos cuñas de masa M cada una de ellas. Desde una altura H cae libremente una esfera de masa "m" (M = 9m), que golpea primero a una cuña, luego a otra y rebota verticalmente hacia arriba. Encontrar la altura a la cual rebota la esferita. Tener en cuenta que ambos choques son elásticos (e = 1) y que no hay fricción entre las cuñas y el plano.



Resolución:

Aplicamos el principio de conservación de *momentum* lineal en el eje X en el primer choque; (a):

$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)} \Rightarrow 0 = mv_1 - MU_1$

$0 = mv_1 - (9m)U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{9}v_1$ ...(1)

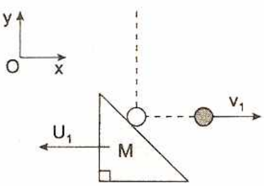


Fig. (a)

Principio de conservación de la energía mecánica en el tramo A → B. Línea de referencia BC:

$mgH = \frac{1}{2}MU_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{9}{10}(mgH)$ ...(3)

Aplicamos el principio de conservación del *momentum* lineal en el eje x en el segundo choque; (b):

$\vec{p}_{x(antes)} = \vec{p}_{x(después)} \Rightarrow mv_1 = MU_2$

$mv_1 = (9m)U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{9}v_1$ ...(4)

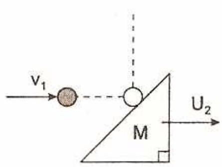


Fig. (b)

Principio de conservación de la energía mecánica en el tramo B → C → D. Línea de referencia BC:

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}MU_2^2 + mgh$ ...(5)

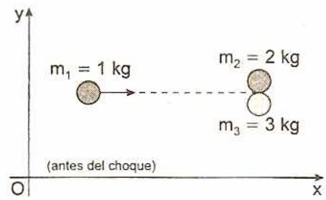
$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(9m)\frac{1}{81}v_1^2 + mgh$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{9}{8}mgh$ ...(6)

Comparando (3) y (6): $h = \frac{4}{5}H$

En general se cumple: $h = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)H$

35. Sobre una mesa horizontal lisa se encuentran dos esferas juntas en reposo y una tercera va al encuentro de ellas. Si las velocidades después del choque son: $\vec{U}_1 = (2\hat{i} - 0,5\hat{j})$ m/s, $\vec{U}_2 = (\hat{i} + 4\hat{j})$ m/s y $\vec{U}_3 = (3\hat{i} - 3\hat{j})$ m/s, hallar la velocidad de la esfera que se estaba moviendo, antes del choque.



Resolución:

En todo choque la cantidad de movimiento se conserva.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

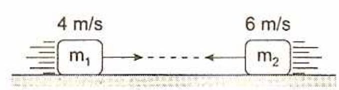
$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2 + m_3\vec{U}_3$

$\vec{v}_1 = (2; 0,5) + 2(1; 4) + 3(3; -3)$

$\vec{v}_1 = \left(2; -\frac{1}{2}\right) + (2; -8) + (9; -9)$

$\vec{v}_1 = (13; -1,5)$ m/s $\Rightarrow \vec{v}_1(13\hat{i} - 1,5\hat{j})$ m/s

36. Los cuerpos mostrados en la figura, realizan un choque perfectamente inestático saliendo luego con una velocidad de $0,25\hat{i}$ m/s. Determinar la relación m_1/m_2.



Resolución:

En todo choque la cantidad de movimiento se conserva.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento.

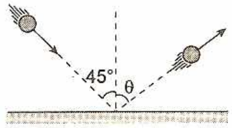
$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)U$

$m_1(4) - m_2(6) = (m_1 + m_2)\frac{1}{4} \Rightarrow 15m_1 = 25m_2$

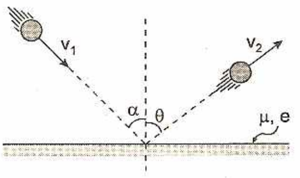
$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{25}{15} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{3}$$

37. Se lanza una partícula con un ángulo de incidencia de 45° sobre una superficie horizontal, cuyo coeficiente de fricción mínima que evita el deslizamiento durante la colisión es 2/9. Calcular el ángulo θ de rebote, si el coeficiente de restitución es de 0,8.



Resolución:

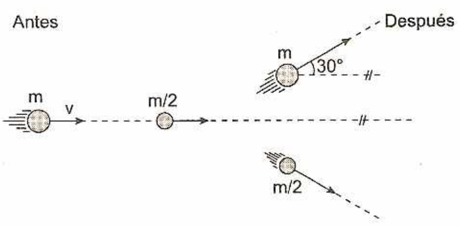
Ley de reflexión para los choques:



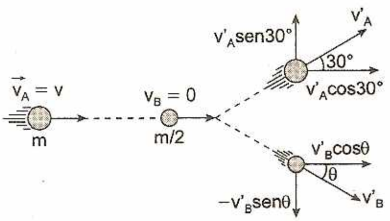
Sabemos: $e = \dfrac{\tan\alpha - \mu}{\tan\theta + \mu}$

$$\Rightarrow 0,8 = \frac{\tan 45° - \frac{2}{9}}{\tan\theta + \frac{2}{9}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$$

38. Una partícula de masa "m" que se mueve con rapidez "v", choca elásticamente con otra partícula en reposo, cuya masa es m/2, y despedida por ella formando un ángulo de 30° con la dirección inicial de su movimiento. ¿Con qué rapidez empezará a moverse la segunda partícula?



Resolución:



En X: $\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$$mv_A + \frac{m}{2}v_B = mv_A^1\cos 30° + \frac{m}{2}v_B^1\cos\theta$$

$$v_A = \frac{v_A^1}{2}\sqrt{3} + \frac{v_B^1}{2}\cos\theta \qquad \text{...(1)}$$

En Y: $0 = mv'_A\text{sen}30° + \frac{m}{2}(-v'_B\text{sen}\theta)$

$$v'_B = v'_B\text{sen}\theta \qquad \text{...(2)}$$

Choque elástico se conserva la E_C.

$$E_{C(0)} = E_{C(f)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'_A + \frac{1}{2}m_Bv_B^2$$

$$v^2 = v_A'^2 + \frac{v'B^2}{2} \qquad \text{...(3)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$v = v'_B\text{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{v'_B}{2}\cos\theta$$

$$v = \frac{v'_B}{2}[(\text{sen}\theta)(\sqrt{3}) + \cos\theta]$$

Elevando al cuadrado: $v^2 = \frac{v'_B}{4}[(\text{sen}\theta)(\sqrt{2}) + \cos\theta]^2$

$$4v^2 = v_B'^2[(\text{sen}\theta)(\sqrt{3}) + \cos\theta]^2 \qquad \text{...}(\alpha)$$

Reemplazando (2) en (3): $v^2 = (v'_B\text{sen}\theta)^2 + \frac{v_B'^2}{2}$

$$v^2 = v_B'^2\text{sen}^2\theta + \frac{v_B'^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_B'^2\left(\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{...}(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α):

$$4\left[v_B'^2\left(\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\right)\right] = v_B'^2[(\sqrt{3})(\text{sen}\theta) + \cos\theta]^2$$

$4\text{sen}^2\theta + 2 = (3)\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\theta\cos\theta$

$\text{sen}^2\theta + 2 = \cos^2\theta + \sqrt{3}(2\text{sen}\theta\cos\theta)$

$2 = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + \sqrt{3}\,\text{sen}2\theta$

$2 = \cos 2\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}2\theta \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}2\theta$

$1 = (\text{sen}30°)(\cos 2\theta) + (\cos 30°)(\text{sen}2\theta)$

$1 = \text{sen}(30° + 2\theta)$

$\text{sen}90° = \text{sen}(30° + 2\theta) \Rightarrow 30° + 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 30°$

En (2): $v'_A = v'_B\text{sen}30° \Rightarrow v'_A = \frac{v'_B}{2}$

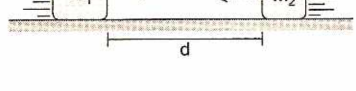
$$v^2 = \left(\frac{v'_B}{2}\right)^2 + \frac{v_B'^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{v_B'^2}{4} + \frac{v_B'^2}{2}$$

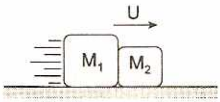
$$v^2 = \frac{3}{4}v_B'^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}v'_B$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}v'_B \Rightarrow v'_B = \frac{2v}{\sqrt{3}}$$

39. Dos cuerpos de masas $M_1 = 7$ kg y $M_2 = 3$ kg se encuentran separados inicialmente 50 m, y se mueven en sentidos contrarios a lo largo de una superficie horizontal. Si luego de un tiempo de 2 s chocan entre sí, quedándose unidos, determinar la rapidez, luego del impacto, sabiendo que la rapidez inicial de M_1 es de 15 m/s.

Resolución:





I. Tiempo de encuentro:

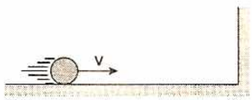
$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} \Rightarrow 2 = \frac{50}{15 + v_2} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

II. Principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{x(\text{antes})} = \vec{p}_{x(\text{después})} \Rightarrow m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)U$$

$$\Rightarrow 7(15) - 3(10) = (7 + 3)U \Rightarrow U = 7{,}5 \text{ m/s}$$

40. En el instante mostrado en la figura, la rapidez de la esfera, de masa 100 g es de 30 m/s. Si la pérdida de energía producida hasta que impacta con la pared es de 25 J. ¿Cuál es la rapidez con la que rebota de la pared instantes después de impactarla, si el coeficiente de restitución es de 0,6?

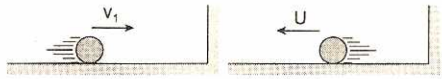


Resolución:

a) Principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 - Q = \frac{1}{2}mv_1^2$$

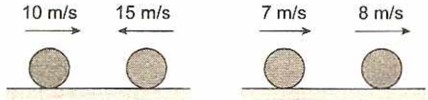
$$\frac{1}{2}(0,1)(30)^2 - 25 = \frac{1}{2}(0,1)v_1^2 \Rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s}$$



b) Propiedad de los choques:

$$U = ev_1 \Rightarrow U = (0{,}6)(20) \Rightarrow U = 12 \text{ m/s}$$

41. De los gráficos a continuación se puede afirmar que:



Antes del choque — Después del choque

I. La velocidad relativa de alejamiento tiene una magnitud de 15 m/s.
II. La velocidad relativa de acercamiento tiene una magnitud de 25 m/s.
III. El coeficiente de restitución es 0,04.

Resolución:

I. Velocidad relativa de alejamiento:
$8 - 7 = 1$ m/s

II. Velocidad relativa de acercamiento:
$10 + 15 = 25$ m/s

III. $e = \dfrac{v_{R(\text{alejamiento})}}{v_{R(\text{acercamiento})}} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

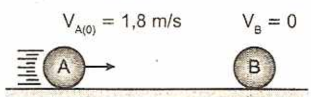
PROBLEMA 1 (UNI 2009 - I)

Una bola de 0,6 kg de masa se mueve en el sentido positivo del eje X con una rapidez de 1,8 m/s y choca frontalmente con una bola de 0,3 kg en reposo. Si la colisión es perfectamente elástica, las velocidades, en m/s, de la bola incidente y la que estaba inicialmente en reposo, respectivamente, son:

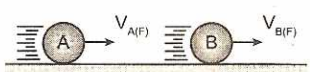
A) $-0{,}6\hat{i}$; $0{,}6\hat{i}$ B) $0{,}6\hat{i}$; $1{,}2\hat{i}$ C) $-0{,}6\hat{i}$; $1{,}2\hat{i}\,i$
D) $0{,}6\hat{i}$; $2{,}4\hat{i}$ E) $-0{,}6\hat{i}$; $2{,}4\hat{i}$

Resolución:

1.er caso: (antes del choque)



2.° caso: (después del choque)



Como $\vec{F}_R = 0$, se cumple: $\vec{P}_{0(s)} = \vec{P}_{f(s)}$

$$\Rightarrow m_A\vec{v}_{A(0)} = m_A\vec{v}_{A(f)} + m_B\vec{v}_{B(f)}$$

Reemplazando datos:

$(0{,}6)(1{,}8) = (0{,}6)v_{A(f)} + (0{,}3)v_{B(f)}$

$\Rightarrow 3{,}6 = 2v_{A(f)} + v_{B(f)}$ ...(I)

Por condición el choque es elástico, luego:

$e = 1$ ...(II)

Sabemos:

$e = \dfrac{v_{B(f)} - v_{A(f)}}{v_{A(0)} - v_{B(0)}}$ ...(III)

Reemplazamos (II) en (III): $1 = \dfrac{v_{B(f)} - v_{A(f)}}{v_{A(0)} - v_{B(0)}}$

Por dato: $1 = \dfrac{v_{B(f)} - v_{A(f)}}{1{,}8 - 0}$

$\Rightarrow v_{B(f)} - v_{A(f)} = 1{,}8$ ...(IV)

De (I) y (IV): $v_{A(f)} = 0{,}6$ m/s $\wedge$ $v_{B(f)} = 2{,}4$ m/s

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2010 - I)

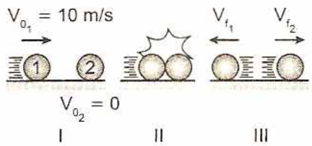
Una bola de 50 g de masa moviéndose con una rapidez de 10 m/s en la dirección +x choca frontalmente con una bola de 200 g en reposo, siendo el choque inelástico. Si el coeficiente de restitución es 0,5 calcule las velocidades, en m/s, de la bola incidente y la de la bola que estaba en reposo, después del choque.

A) $-2\hat{i};\ \hat{i}$ B) $-2\hat{i};\ 2\hat{i}$ C) $-2\hat{i};\ 3\hat{i}$
D) $-\hat{i};\ 3\hat{i}$ E) $\hat{i};\ 3\hat{i}$

Resolución:

Datos: $m_1 = 50$ g; $m_2 = 200$ g; $v_{0_1} = 10$ m/s; $e = 0{,}5$

Del enunciado:
Antes del choque Después del choque



Cuando dos esferas chocan frontalmente, se cumple:

$$e = \frac{\vec{v}_{f_2} - \vec{v}_{f_1}}{|\vec{v}_{0_1} - \vec{v}_{0_2}|}$$

$$0{,}5 = \frac{v_{f_2} - v_{f_1}}{10} \Rightarrow v_{f_2} - v_{f_1} = 5 \quad \ldots(\text{I})$$

Ahora, en todo tipo de choque, la cantidad de movimiento se conserva, esto es:

$$P_{\text{antes del choque}} = P_{\text{después del choque}}$$

$$m_1\vec{v}_{0_1} + m_2\vec{v}_{0_2} = m_1\vec{v}_{f_1} + m_2\vec{v}_{f_2}$$

$$(50)(10) = (50)(v_{f_1}) + (200)v_{f_2}$$

$$\Rightarrow 4v_{f_2} - v_{f_1} = 10 \quad \ldots(\text{III})$$

De (I) y (II): $v_{f_2} + v_{f_1} = 5 \ \wedge\ 4v_{f_2} - v_{f_1} = 1$

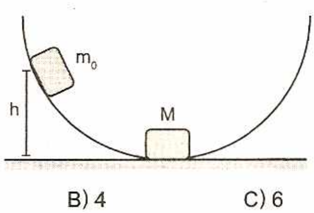
$$\Rightarrow v_{f_1} = 2 \Rightarrow \vec{v}_{f_1} = -2\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_{f_2} = 3 \Rightarrow \vec{v}_{f_2} = 3\hat{i} \text{ m/s}$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

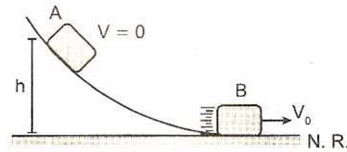
En la figura mostrada, el bloquecito de masa m_o parte del reposo desde una altura $h = 12$ m y se desliza sobre la superficie lisa semicircular de radio $R = 15$ m. Al llegar a la parte inferior, el bloquecito choca elásticamente con el bloque de masa $M = 3m_o$ que se encuentra en reposo. Como resultado de esta colisión el bloque de masa M sube hasta una altura H (en metros) igual a:



A) 3 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

Resolución:

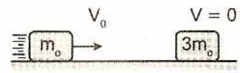
Al descender el bloque de masa m_o por la superficie lisa, este adquiere energía cinética a costa de su energía potencial. Por el principio de conservación de la enérgica mecánica tendremos:



Luego: $E_M A = E_M B$

$$mgh_i = \frac{mV_o^2}{2} \Rightarrow V_o = \sqrt{2gh}$$

Analizando el choque elástico tenemos:
Antes del choque:



Después del coche:

Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$$m_oV_o = -m_o(U_1) + 3m_o(U_2)$$

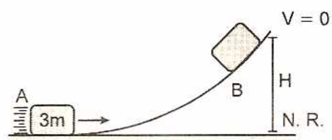
$$V_o = 3U_2 - U_1 \quad \ldots(1)$$

Choque elástico: $e = 1 \Rightarrow \dfrac{U_2 + U_1}{V_o} = 1$

$$V_o = U_1 + U_2 \quad \ldots(2)$$

Resolviendo ambas ecuaciones: $U_2 = \dfrac{V_o}{2};\ \ U_1 = \dfrac{V_o}{2}$

Como deseamos averiguar la altura que logra alcanzar el bloque, 3m, aplicamos nuevamente el principio de conservación de la energía.



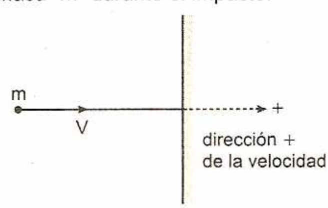
$$E_M^{\,A} = E_M^{\,B} \Rightarrow \frac{(3m)(U_2)^2}{2} = (3m)gH$$

$$H = \frac{U_2^2}{2g} = \frac{\left(\frac{V_o}{2}\right)^2}{2g} = \frac{h}{4} = 3 \text{ m}$$

Clave: A

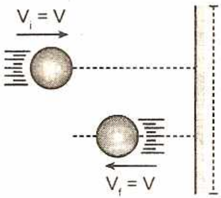
PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Una masa "m" con rapidez horizontal constante V, incide perpendicularmente sobre una pared produciéndose un choque totalmente elástico, Calcule el impulso que recibe la masa "m" durante el impacto.



A) -2 mv B) $-$mv C) 2 mv
D) mv E) 1/2 mv

Resolución:



Para un choque elástico: $V_f = V$

$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$

$\vec{I} = m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)$

$\vec{I} = m(-V - V)$

$\vec{I} = -2mV$

Clave: A

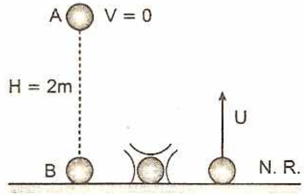
PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Una pelota de masa 200 g se suelta desde una altura de 2 m, el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es e = 0,4. Calcule, en J, la diferencia entre la energía mecánica de la pelota antes de llegar al piso y su energía mecánica después de su primer rebote. ($g = 9,81\ m/s^2$)

A) 1,29 B) 2,29 C) 3,29 D) 4,29 E) 5,29

Resolución:

Analizando la colisión:



Como el coeficiente de restitución es e = 0,4, la rapidez de salida será: U = eV

La variación de la energía cinética será:

$$E_k^i - E_k^f = \left(\frac{mV^2}{2}\right)\left(\frac{mU^2}{2}\right)$$

$$\Delta E = \frac{m}{2}V^2(1 - e^2)$$

Al aplicar el principio de conservación de energía mecánica entre A y B:

$$E_M^A = E_M^B$$

$$mgH = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{2gH}$$

Reemplazando:

$$\Delta E = mgH(1 - e^2) = 3,29\ J$$

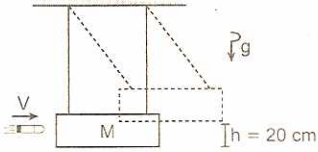
Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una masa de 3 kg se desplaza con una rapidez de 10 m/s y choca frontalmente con otra masa de 2 kg en reposo. Si luego del choque permanecen unidas, determinar la energía perdida durante el choque.

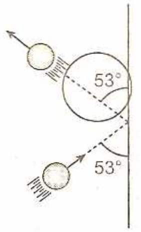
A) 30 J B) 40 J C) 60 J D) 80 J E) 90 J

2. Una bala de 10 g de masa choca contra un péndulo balístico cuya masa es de 2 kg. Por efecto del choque, la base del péndulo se eleva una altura de 20 cm, quedando la bala incrustada en él. Calcular la velocidad inicial de la bala ($g = 10\ m/s^2$).



A) 201 m/s B) 362 m/s C) 396 m/s
D) 402 m/s E) 432 m/s

3. Una bola de acero de masa 2 kg golpea una pared con una velocidad de módulo 10 m/s y formando un ángulo de 53° con la superficie. Si rebota con la misma rapidez y el mismo ángulo, determinar la fuerza media ejercida por la pared sobre la bola, sabiendo que el contacto con la pared duro 0,02 s.



A) 1600 N B) 1200 N C) 1800 N
D) 2400 N E) 800 N

4. Una bola de 2 kg se mueve a 10 m/s, y choca con otra, de 4 kg, inicialmente en reposo. Si después del choque, la primera queda en reposo, ¿Con que velocidad sale la segunda?

A) 4 m/s B) 5 m/s C) 3 m/s
D) 6 m/s E) 2 m/s

5. Una masa de 120 g se mueve en la dirección X positiva a razón de 4 m/s, mientras otra masa de 60 g se mueve en la dirección X negativa a razón de 5 m/s. Si chocan de frente y permanecen unidas, calcule la velocidad del conjunto luego del choque.

A) +0,5 m/s B) +1 m/s C) +1,5 m/s
D) +2 m/s E) +2,5 m/s

6. Dos deslizadores de masas m_1 y m_2 son libres de moverse en una superficie completamente lisa. Uno se encuentra en reposo y el otro se dirige hacia él. Si el choque es elástico, luego del cual de los deslizadores tienen velocidades de igual valor y opuestas, la relación entre sus masas m_1/m_2 es igual a:

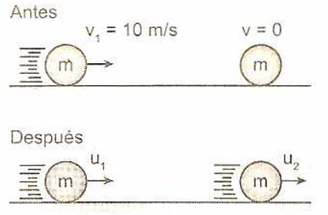
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. Dos cuerpos inelásticos tiene una masa total de 12 kg, moviéndose en sentidos opuestos con velocidades de +4 m/s y −6 m/s. Si colisionan y adquieren una velocidad común de +1/4 m/s, ¿en qué relación están las masas de los cuerpos?

A) 3/2 B) 5/3 C) 8/3 D) 6/5 E) 5/4

8. Si la energía se conserva, hallar las velocidades después del choque en m/s.

A) 0; 10
B) 5; 5
C) 0; 5
D) 4; 10
E) 10; 10



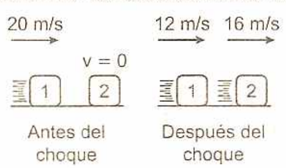
9. Dos masas "m" y 2m se desplazan con movimiento uniforme sobre una misma recta, colisionando elásticamente. Si para la masa 2m, la velocidad final es el doble de inicial, la relación:
(velocidad final/velocidad inicial), para la masa "m", en valor absoluto, es:

A) 1/5 B) 1/2 C) 1 D) 2 E) 4

10. Una partícula de masa "m" es la lanzada verticalmente hacia abajo desde una altura "h" con una velocidad inicial "v". Si colisionan elásticamente con una masa de altura $c < h$ puesta sobre el piso, ¿Cuál es el módulo de su velocidad, justo después que rebota?

A) vc/h B) v C) $\sqrt{2g(h-c)}$
D) $\sqrt{2gh+v}$ E) $\sqrt{2g(h-c)+v^2}$

11. La figura muestra la colisión de los bloques 1 y 2 Hallar el coeficiente de restitución entre los bloques.



A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

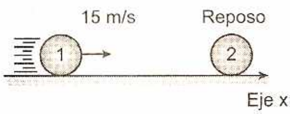
12. Dos masas idénticas chocan elásticamente y frontalmente sobre una mesa lisa teniendo inicialmente una de ellas una velocidad de 1,2 m/s y estando la otra en reposo. Hallar las velocidades, en m/s de las masas después del choque.

A) 1,2 y 1,2 B) 12 y 12 C) 0 y 1,2
D) 0,12 y 0,12 E) 0 y 12

13. Una partícula de masa $4{,}65 \times 10^{-36}$ kg moviéndose con una velocidad de 600 m/s en dirección perpendicular a una pared lisa choca con esta y rebota elásticamente. Calcular aproximadamente el impulso, en Ns, que recibe la pared durante el choque.

A) $0{,}2 \times 10^{-22}$ B) 3×10^{-23} C) $5{,}6 \times 10^{-23}$
D) 2×10^{-22} E) 3×10^{-22}

14. En la figura mostrada; m_1=4 kg y m_2=5 kg. Si después del choque la velocidad del cuerpo de masa m_1 es $v_2 = 10\hat{i}$ m/s, determinar la velocidad del cuerpo de masa m_1 después del choque.

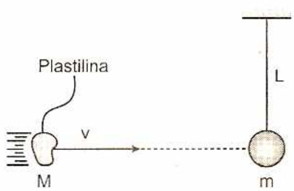


A) $0{,}5\hat{i}$ m/s B) $1{,}5\hat{i}$ m/s C) $2{,}5\hat{i}$ m/s
D) $3{,}5\hat{i}$ m/s E) $4{,}5\hat{i}$ m/s

15. El péndulo de la figura, inicialmente en reposo, consta de una cuerda cuya longitud es L=1 m y su masa m= 0,5 kg. La plastilina de la figura de masa M=1,5 kg y velocidad v = 4 m/s choca con la masa pendular "m" e inicia un movimiento adosado al péndulo. Determine la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

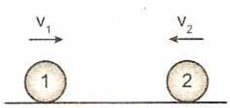
( ) El cambio de la energía cinética del sistema inmediatamente después del choque es de 3 J.

( ) El móvil resultante se eleva una altura máxima de 0,45 m.



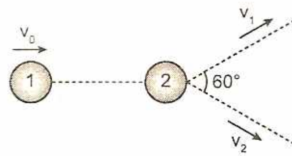
A) VF B) VV C) FV D) FF E) F. D.

16. Calcular el coeficiente de restitución, si se sabe que después del choque la velocidad de la bola 1 es −9 m/s mientras que la bola 2 queda detenida; además, v_1 = 12 m/s y v_2=6 m/s.



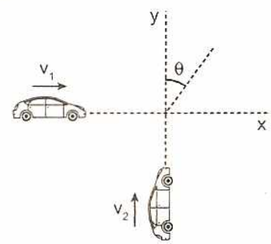
A) 1/3 B) 1/4 C) 1/2
D) 1/5 E) 1/6

17. Una bola golpea a otra que se encontraba inicialmente en que reposo, de modo que cada una se separa con velocidad de 3 m/s y 5 m/s, (sus direcciones forman 60°). ¿Cuál es el valor de v_0? Las masas de las bolas son iguales.



A) 5 m/s B) 4 m/s C) 6 m/s
D) 7 m/s E) 8 m/s

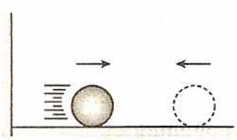
18. Dos coches de igual masa se desplazan con velocidades v_1 = 12 m/s y v_2 = 16 m/s por rectas que se cortan perpendicularmente. Si ellos colisionan de modo que quedan unidos, ¿Qué ángulo θ forma la dirección de su movimiento con el eje y después del choque?



A) 35° B) 37° C) 36°
D) 38° E) 39°

19. Una bola de billar de 0,4 kg impacta contra una baranda de manera frontal con una velocidad de 10 m/s. Sabiendo que rebota en dirección contraria a razón de 6 m/s, ¿Qué fuerza (en N) experimentó durante el choque, si este duro 0,2 s?

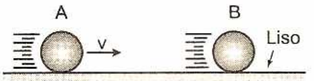
A) 32
B) 36
C) 38
D) 40
E) 42



20. Si se sabe que antes del choque v_1=10 m/s 7 v_2=0 e inmediatamente después del choque las velocidades de las bolas 1 y 2 son +2 m/s y +8 m/s respectivamente, ¿Cuál es el coeficiente de restitución entre las bolas?

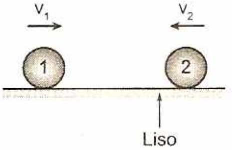
A) 3/2 B) 3/5 C) −3/2 D) 5 E) 6

21. Una bola de 3 kg avanza con una velocidad de 5 m/s y choca elásticamente con otra detenida, de 2 kg. ¿Cuáles son las velocidades de cada una después del choque que tuvieron?



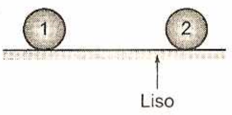
A) +6 m/s; −1 m/s B) +6 m/s; +1 m/s
C) −6 m/s; +1 m/s D) −6 m/s; −2 m/s
E) +5 m/s; 0 m/s

22. En la figura se muestran 2 bolas que chocan elásticamente con $v_1 = 6$ m/s y $v_2 = 3$ m/s. Si después del choque la bola 2 queda detenida mientras que la bola 1 rebota con una velocidad de 9 m/s, ¿Cuál es la masa (en kg) de la bola 1, si $m_2 = 10$ kg?



A) 2/3 B) 3 C) 2
D) 1 E) 4

23. Determinar en qué relación se encuentran las masas de las bolas mostradas, si se sabe que sus velocidades antes del choque son $v_1 = +4$ m/s y $v_2 = -5$ m/s, y sus velocidades finales: $v_{1(f)} = 0$ m/s y $v_{2(f)} = +9$ m/s



A) 7 B) 7/2 C) 9/2
D) 3 E) 9

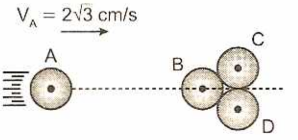
24. En la figura, las masas están en reposo y el choque es elástico. Si no hay rozamiento, ¿Cuál es la altura "h" que alcanza el bloque M? (M = 3m)

A) H B) 3H/8 C) 3H/4
D) H/4 E) H/3

25. Una partícula de masa "m" impacta con una rapidez de 6 m/s sobre otro de masa 2m en reposo. Luego del choque excéntrico, halle la relación de la rapidez de las partículas en coordenadas del centro de masa (es decir para un observador ubicado en el centro de masa).

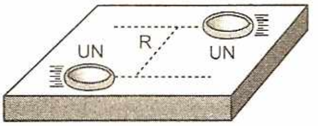
A) 1/6 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/4 E) 1/5

26. Se tiene 4 esferas de masas iguales y del mismo material sobre una mesa de billar lisa. La esfera A choca frontalmente con las otras 3 que se encuentran en reposo. Si después del choque elástico la esfera B queda en reposo. ¿Qué rapidez adquieren C y D?



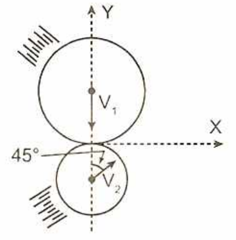
A) 2 cm/s B) $2\sqrt{3}$ cm/s C) $3\sqrt{3}$ cm/s
D) $4\sqrt{3}$ cm/s E) $5\sqrt{3}$ cm/s

27. Dos monedas idénticas se desplazan en direcciones opuestas sobre una superficie horizontal lisa. ¿Qué ángulo se desvían las direcciones de su movimiento a causa del choque elástico (R es radio de la moneda)?



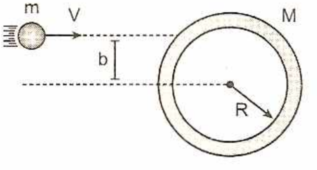
A) 90° B) 60° C) 30°
D) 15° E) 5°

28. Dos discos se mueven sobre una superficie horizontal lisa. La más grande es de 10 kg y la otra es de 5 kg. Si sus velocidades antes del choque tienen un módulo de $V_1 = 3$ m/s y $V_2 = 2\sqrt{2}$ m/s, ¿Cuál es la rapidez de la más pequeña, después del choque? (Considere que el coeficiente de restitución es 0,8).



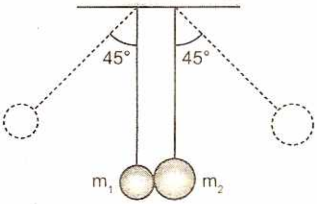
A) $\sqrt{7}$ m/s B) $\sqrt{11}$ m/s C) $\sqrt{13}$ m/s
D) $\sqrt{15}$ m/s E) $2\sqrt{15}$ m/s

29. Una esferita de acero desliza sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez de 5 m/s e impacta con un aro circular homogéneo liso inicialmente en reposo. Determine la rapidez de aro después del choque elástico. (M = 2m; b = 0,8R)



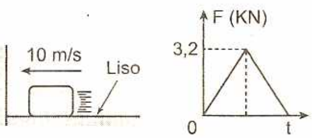
A) 2 m/s B) 3 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 6 m/s

30. Dos esferas de acero de masas m_1 y m_2, están suspendidos de hilos de igual longitud como se indica en la figura. La primera se desvía un ángulo de 45° y se suelta sin velocidad inicial. Después del choque la segunda esfera se desvía en 45°. Halle el "e" entre las esferas. ($m_1 = 2m_2$)



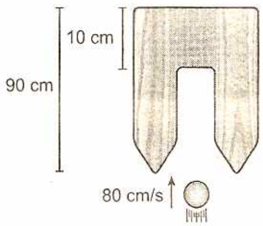
A) 0,75 B) 0,35 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,4

31. Cuando una barra de 1 kg choca contra una pared vertical experimenta una fuerza cuyo valor varía según la gráfica. ¿Qué intervalo de tiempo estuvo el cuerpo en contacto con la pared? Considere e = 0,6.



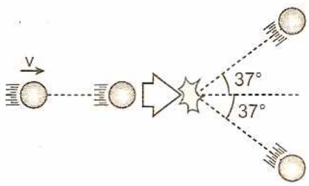
A) 5 s
B) 10 s
C) 20 s
D) 30 s
E) 40 s

32. Un gráfico nos muestra un pedazo de madera inicialmente en reposo y una pequeña esfera sobre una superficie horizontal lisa. Si la esfera estuvo dentro del bloque durante 4 s; determine el coeficiente de restitución del choque.



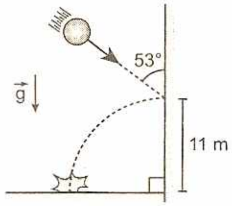
A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/5
E) 1/6

33. Una bola choca con otra idéntica en reposo. Si después del choque se mueven como se indica, ¿Qué tipo de choque es? Las bolas se mueven en una mesa horizontal lisa.



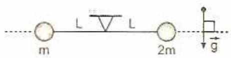
A) elástico B) inelástico
C) plástico D) falta conocer "e"
E) falta conocer V

34. La esfera lisa de 0,5 kg impacta con la pared con 10 m/s tal como se muestra la figura. Si todos los choques son inelásticos (e = 0,5) determine la distancia entre los puntos del segundo y tercer impacto. Desprecie el impulso de la fuerza de gravedad en el primer choque.



A) 1,6 m B) 3,2 m C) 6,4 m
D) 0,8 m E) 1,2 m

35. Las esferas son soltadas en la posición indicada. Si después del choque 2m queda en reposo, determine el coeficiente de restitución del choque.

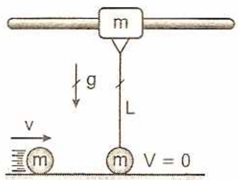


A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

36. Un cuerpo de 6 kg desliza sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez V y choca elásticamente con otro cuerpo en reposo, sobre la misma superficie, saliendo despedido con un ángulo de 90° con respecto a la dirección inicial de su movimiento y con una rapidez V/2. Determine la masa del segundo cuerpo.

A) 2 kg B) 6 kg C) 8 kg
D) 10 kg E) 15 kg

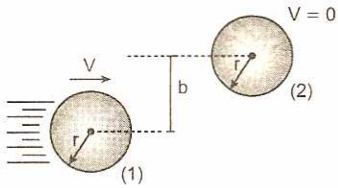
37. Si el choque entre las dos pequeñas esferas idénticas es frontal elástico, determine el menor valor de "v" para que la varilla de masa despreciable que une el collarín con una de las esferas logre colocarse en forma horizontal. Desprecie todo rozamiento.



A) $\sqrt{gL}$ B) $\sqrt{2gL}$ C) $2\sqrt{gL}$

D) $4\sqrt{gL}$ E) $\dfrac{\sqrt{gL}}{8}$

38. Dos discos idénticos se encuentran sobre una mesa horizontal lisa tal como se muestra. Si el choque que experimentan es central y tiene un coeficiente de restitución "e"; determine la rapidez que adquiere el disco (2) luego del choque.

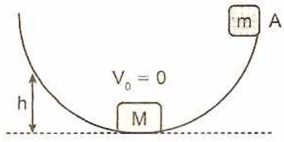


A) $\dfrac{V(e-1)}{4}\sqrt{2r^2-b^2}$ B) $\dfrac{V(e-1)}{4}\sqrt{\dfrac{4r^2-b^2}{b}}$

C) $\dfrac{V(e+1)}{2}\sqrt{\dfrac{4b^2-r^2}{r^2}}$ D) $\dfrac{V(e+1)}{2}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4r^2}}$

E) $V(e+1)\sqrt{1+\dfrac{b^2}{r^2}}$

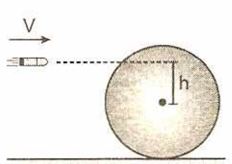
39. El bloque de masa "m" se abandona en A para luego chocar elásticamente con el otro bloque. Determine qué altura "h" logra ascender el bloque de masa M.



A) $\left(\dfrac{m}{M+m}\right)H$ B) $\left(\dfrac{m}{M-m}\right)H$ C) $\dfrac{m}{M}H$

D) $\left(\dfrac{M}{m+M}\right)H$ E) $\left[\dfrac{4m^2}{(m+M)^2}\right]H$

40. Sobre el disco homogéneo de masa M y radio R se encuentra en reposo, impacta plásticamente una bala de masa "m". Considerando $m \leq M$, determine la rapidez con la cual se traslada el disco luego del choque y la rapidez angular con la cual rueda. Desprecie todo rozamiento.

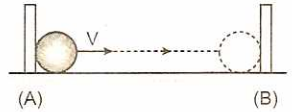


A) $\dfrac{m}{M}V$; $\dfrac{2mVh}{MR^2}$ B) $\left(\dfrac{m+M}{2M}\right)V$; $\dfrac{2mVh}{MR^2}$

C) $\dfrac{m}{M}V$; $\dfrac{mVh}{R^2}$ D) $\left(\dfrac{m}{M}+1\right)V$; $\dfrac{mVR}{h^2}$

E) $\left(1-\dfrac{m}{M}\right)V$; $\dfrac{mVh}{2M(R+h)^2}$

41. En la figura la esferita de masa "m" es lanzada en la posición A y hace un choque frontal inelástico con B cuyo coeficiente de restitución es "e". Despreciando la fricción, calcule la cantidad de calor que se disipa hasta que se lleva a cabo el n-ésimo choque.



A) $mV^2(1-e^2)$ B) $0{,}5[mv^2(1-e^{2n})]$

C) $0{,}5[mV^2(1-e^n)]$ D) $mV^2(1-e^2)$

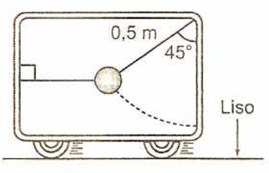
E) $0{,}5[mV^2(1-e^{2n})]$

42. En el interior de un anillo, de radio R, el cual se mueve a una velocidad $\vec{u}$ se encuentra una bola de radio "r", la cual se mueve a una velocidad $\vec{V}$ (ambos sobre una mesa horizontal lisa y $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{V}$). La masa del anillo es mucho mayor que la masa de la bola. Determine la frecuencia con que la bola choca con la pared interior del anillo, si consideramos un choque perfectamente elástico.

A) $\dfrac{\sqrt{a^2+r^2}}{2Rr}$ B) $\dfrac{u}{2R}$ C) $\dfrac{\upsilon}{2(R-r)}$

D) $\dfrac{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2(R-r)}$ E) $\dfrac{\sqrt{u^2-\upsilon^2}}{4(R-r)}$

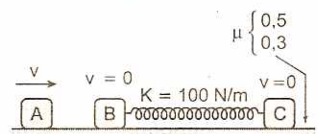
43. El vagón mostrado de 5000 kg, desarrolla un M.R.U., desplazándose con 6 m/s por inercia. En cierto momento se rompe hilo horizontal que sostiene a la bolita de 5 kg, impactando en forma plástica contra la pared del vagón; luego de ello el vagón tiene una rapidez de:



A) $2\sqrt{2}$ m/s B) 4 m/s C) 6 m/s

D) 8 m/s E) 3 m/s

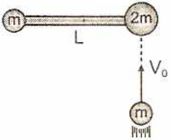
44. Se tiene 3 bloques de 1 kg cada uno, en donde el bloque A se mueve con una rapidez V y choca elásticamente con el bloque B. Determine el mayor valor de V, tal que el bloque C no se mueva (suponer que A y B son lisos).



A) 0,1 m/s B) 0,2 m/s C) 0,3 m/s

D) 0,5 m/s E) 0,6 m/s

45. El cuerpo de masa "m" va a realizar un choque plástico con el sistema mostrado que reposa sobre una superficie horizontal lisa. Despreciando la masa de la varilla señale la alternativa incorrecta.



A) Después del choque "m" se adhiere a 2m.

B) Después del choque el sistema gira y se traslada a la vez.

C) Después del choque solo observamos movimiento de rotación, si corremos en la dirección de V_0 con $V_0/4$.

D) Después del choque el sistema gira en torno al centro de masa.

E) El centro de masa se ubica a 2L/3 respecto de la masa "m" sobre la varilla.

CLAVES

Estática de fluidos

10 capítulo

Arquímedes de Siracusa (Siracusa, Sicilia, 287 a. C.-Siracusa, Sicilia, 212 a. C.) fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego. Aunque se conocen pocos detalles de su vida, es considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad clásica. Entre sus avances en física se encuentran sus fundamentos en hidrostática, estática y la explicación del principio de la palanca. Es reconocido por haber diseñado innovadoras máquinas, incluyendo armas de asedio y el tornillo de Arquímedes, que lleva su nombre.

Una de las anécdotas más conocidas sobre Arquímedes cuenta cómo inventó un método para determinar el volumen de un objeto con una forma irregular. Arquímedes da una solución en la que aplicaba el principio de la hidrostática conocido como el «*Principio de Arquímedes*», descrito en su tratado *Sobre los cuerpos flotantes*. Este principio plantea que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del fluido desalojado. En la primera parte de este tratado, Arquímedes explica la ley del equilibrio de los líquidos y prueba que el agua adopta una forma esférica alrededor de un centro de gravedad. En la segunda parte, Arquímedes calcula las posiciones de equilibrio de las secciones de los paraboloides. Algunas de sus secciones flotan con la base bajo el agua y la parte superior sobre el agua.

Fuente: Wikipedia

FLUIDO

Un fluido es una sustancia que puede escurrir fácilmente y que puede cambiar de forma debido a la acción de pequeñas fuerzas. Por lo tanto, el término fluido incluye a los líquidos y los gases.

Los fluidos que existen en la naturaleza siempre presentan una especie de fricción interna o viscosidad que complica un poco el estudio de su movimiento.

Sustancias como el agua y el aire presentan muy poca viscosidad (escurren fácilmente), mientras que la miel y la glicerina tienen una viscosidad elevada.

DENSIDAD (ρ)

Consideremos una sustancia de masa m y cuyo volumen es V. La densidad ρ de una sustancia se define como la relación entre su masa y su volumen:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \qquad \text{...(10.1)}$$

Unidades: $\frac{g}{cm^3}$; $\frac{kg}{m^3}$

$$\boxed{m = \rho V} \qquad \text{...(10.2)}$$

El peso de una sustancia es igual al producto de la masa por la aceleración de la gravedad:

$$\boxed{W = mg} \qquad \text{...(10.3)}$$

Reemplazando (10.2) en (10.3) tenemos:

$$\boxed{W = \rho g V} \qquad \text{...(10.4)}$$

Tabla 10.1

Densidades (a 0 °C y a la presión de 1 atm)	
Sustancia	kg/m^3
Hidrógeno	0,090
Aire	1,300
Corcho	240
Gasolina	700
Hielo	920
Agua	1000
Agua de mar	1030
Glicerina	1250
Aluminio	2700
Hierro	7600
Cobre	8900
Plata	10 500
Plomo	11 300
Mercurio	13 600
Oro	19 300
Platino	21 400

Equivalencia:

1 litro = 1000 cm^3

1 m^3 = 1000 L

1 kg = 1000 g

$1\ \frac{g}{cm^3} = 1000\ \frac{kg}{m^3}$

Ejemplo:

¿Cuánto pesa 10 m^3 de hielo?

Resolución:

Sabemos que la densidad del hielo es 920 $\frac{kg}{m^3}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$.

Usando la relación (10.4):

$$W_{Hielo} = \rho_{Hielo} g V \Rightarrow W_{Hielo} = \left(920\frac{kg}{m^3}\right)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(10\ m^3)$$

$$\Rightarrow W_{Hielo} = 90\ 160\ N$$

PRESIÓN (P)

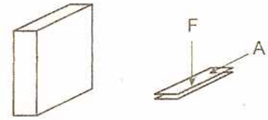
La presión P que produce la fuerza normal F sobre el área A, es la relación de la magnitud F entre el valor del área A, es decir:

$$\boxed{P = \frac{F}{A}} \qquad \text{...(10.5)}$$

Unidades: $1\frac{N}{m^2} = 1$ pascal $= 1$ Pa

La presión P, representa la distribución de la fuerza F por cada unidad de área. Por ejemplo, si el peso de un bloque fuera F = 500 N, y estuviese distribuido en un área A = 2 m^2, la presión sobre la superficie sería:

$$P = \frac{F}{A} = 250\frac{N}{m^2} = 250\ Pa$$

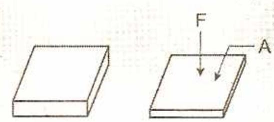


P = 250 Pa, significa que la fuerza se distribuye a razón de 250 N por cada metro cuadrado.

Importante:

Debe observarse que el valor de la presión no solo depende del valor de la fuerza ejercida F, sino también del área A sobre el cuál se distribuye la fuerza.

$$P = \frac{F}{A}$$



«Cuánto menor sea el área A sobre la cual actúa una fuerza F, tanto mayor será la presión que produzca».

PRESIÓN HIDROSTÁTICA

La presión hidrostática se debe a la acción de la gravedad sobre el líquido, esto quiere decir que se debe al peso del propio líquido y se manifiesta como un efecto de compresión que actúa perpendicularmente en cada punto de la superficie del cuerpo sumergido.

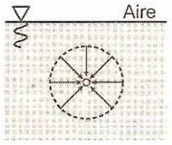


Fig. 10.1.a

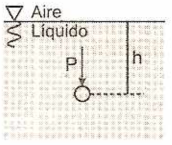


Fig. 10.1.b

La presión hidrostática en un punto interior de un líquido, es igual al producto de la densidad del líquido, la aceleración de la gravedad y la profundidad o altura:

$$\boxed{P = \rho_{\text{líquido}} g h} \qquad \ldots(10.6)$$

Por ejemplo, una piscina de 5 m de profundidad se encuentra totalmente llena de agua. ¿Cuál es la presión, en el fondo, debida únicamente al peso del agua? Aplicamos la ecuación (10.6):

$P_{\text{Hidrostática}} = \rho_{\text{agua}} g h$

$P_{\text{Hidrostática}} = (1000)(9{,}8)(5) \Rightarrow P_{\text{Hidrostática}} = 49\,000\ \dfrac{N}{m^2}$

La presión que ejerce el agua en el fondo es de 49 000 N por cada m^2.

PRESIÓN ATMOSFÉRICA (P_{atm})

El aire, como cualquier sustancia cercana a la Tierra es atraído por ella; es decir, el aire tiene peso. Debido a esto, la capa atmosférica que envuelve a la Tierra y que alcanza una altura de decenas de kilómetros, ejerce una presión sobre los cuerpos sumergidos en ella. Esta presión se denomina presión atmosférica.

«Es la presión que ejerce el aire sobre los cuerpos sumergidos debido a la acción del campo gravitatorio».

EXPERIMENTO DE TORRICELLI (BARÓMETRO)

El físico italiano E. Torricelli, contemporáneo de Galileo, para efectuar su experimento tomó un tubo de vidrio, de casi 1 metro de longitud y cerrado por uno de sus extremos, y lo llenó de mercurio, figura 10.2. Tapando el extremo abierto con un dedo e invirtiendo el tubo, sumergió este extremo en un recipiente que también contenía mercurio. Al destapar el tubo, estando este en posición vertical, Torricelli comprobó que la columna líquida bajaba hasta tener una altura de 76 cm, al nivel del mar.

Torricelli, llegó a la conclusión que el valor de la presión atmosférica, P_{atm}, es equivalente a la presión que ejerce una columna de mercurio de 76 cm de altura, es decir:

$P_{atm} = 76\ \text{cmHg}$

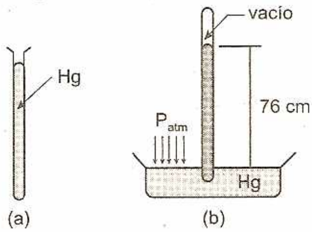


Fig. 10.2

Aplicando la ecuación (10.5) tenemos:

$P_{atm} = \rho_{Hg} g h$

$\Rightarrow P_{atm} = (13\,600)(9{,}8)(0{,}76)$

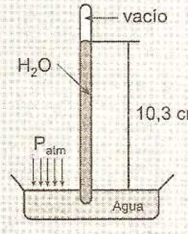
$P_{atm} = 1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa}$

Luego, en el SI:

$$\boxed{P_{atm} = 1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa}} \qquad \ldots(10.7)$$

Por comodidad en los problemas se considera $P_{atm} = 10^5$ Pa. Es importante aclarar que la presión atmosférica varía con la altura.

Importante:
Si el experimento de Torricelli se hiciera con agua (al nivel del mar), la altura de la columna del líquido sería de 10,3 metros.



$P_{atm} = 10{,}3\ m\ H_2O$

PRESIÓN EN EL INTERIOR DE UN LÍQUIDO

Consideremos un recipiente que contiene un cierto líquido de densidad ρ. La presión a una profundidad h está dada por:

$$\boxed{P = P_{atm} + \rho g h} \qquad \ldots(10.8)$$

La presión en el interior de líquido es igual a la suma de la presión atmosférica, más, la presión hidrostática.

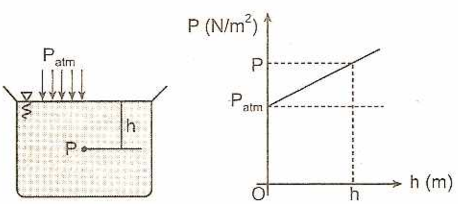


Fig. 10.3

Por ejemplo, una piscina de 5 m de profundidad se encuentra totalmente llena de agua. ¿Cuál es la presión en el fondo? Aplicamos la relación (10.8):

$P = P_{atm} + \rho_{\text{agua}} g h$

$\Rightarrow P = (10^5) + (1000)(9{,}8)(5)$

$P = 100\,000 + 49\,000$

$\Rightarrow P = 149\,000\ \dfrac{N}{m^2}$

Luego, la presión en el fondo es de 149 000 N por cada m^2.

¿Cómo se aprovecha la presión?

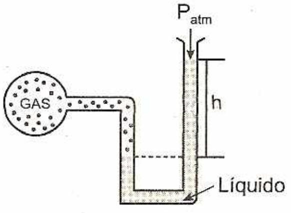
De la fórmula P = F/A, si el área A fuese muy pequeña, podríamos obtener grandes presiones incluso con pequeñas fuerzas. Por este motivo, los utensilios para cortar (un cuchillo, unas tijeras, un hacha, etc.) deben estar bien afilados, y las herramientas o útiles de perforación (un clavo, una broca, un tornillo para madera, etc.) deben ser puntiagudos.

En otros casos, cuando se quieren obtener presiones pequeñas hay que hacer que la fuerza se distribuya sobre áreas grandes. Para caminar en nieve se usan zapatos especiales, con un área de apoyo muy grande, a fin de reducir la presión y evitar el hundimiento.

Manómetro

El dispositivo que se muestra en la figura (manómetro) permite medir la presión del gas contenido en el recipiente.

a) $P_{Gas} = P_{atm} + \rho_{Líq.}gh$



b) $P_{Gas} = P_{atm} - \rho_{Líq.}gh$

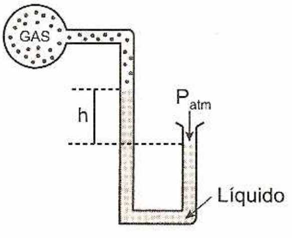
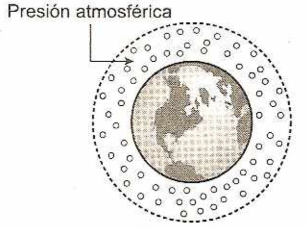


Tabla 10.2

Variación de la presión atmosférica con la altitud

Altitud (m)	P_{atm} en cmHg
0	76
500	72
1000	67
2000	60
3000	53
4000	47
5000	41
6000	36
7000	31
8000	27
9000	24
10 000	21

El aire que rodea a la Tierra está compuesto en mayor porcentaje por nitrógeno (78%) y oxígeno (21%)



PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA

La diferencia de presiones entre dos puntos situados en un mismo líquido en reposo es directamente proporcional a la altura entre dichos puntos.

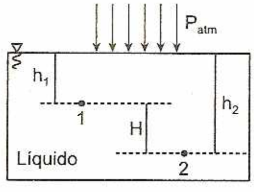


Fig. 10.4

De la ecuación (10.8) tenemos las presiones en los puntos (1) y (2):

$P_2 = P_{atm} + \rho g h_2$ ...(α)

$P_1 = P_{atm} + \rho g h_1$ ...(β)

Restando las ecuaciones (α) y (β) obtenemos:

$(P_2 - P_1) = \rho_{líquido}\, g(h_2 - h_1)$

$$\boxed{(P_2 - P_1) = \rho_{líquido}\, gH} \quad ...(10.9)$$

Por consiguiente, todos los puntos situados en un mismo líquido en reposo y a un mismo nivel (H = 0) o profundidad soportan la misma presión.

$P_1 = P_2 = P_3$

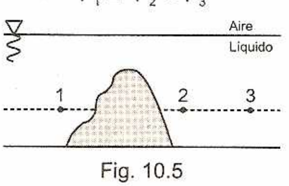
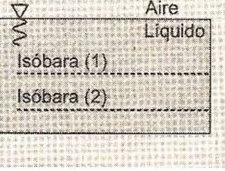


Fig. 10.5

Isóbara

La isóbara es la línea o plano formado por puntos que soportan la misma presión.



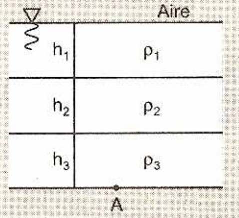
Líquidos no miscibles

Si mezclamos varios líquidos no miscibles en un recipiente, al cabo de un tiempo éstos se separarán de modo que el más denso se coloca en el fondo y sobre él en orden de densidades decrecientes los otros líquidos.

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$$

La presión en A es:

$$P_A = P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$$



VASOS COMUNICANTES

Son recipientes de diversas formas comunicados entre sí por su base. Si por una de las ramas se vierte un solo líquido, la altura que alcanza en todas las ramas dicho líquido es la misma, esto es porque cuando un líquido se encuentra en reposo las presiones en todos los puntos correspondientes a un mismo nivel es la misma.

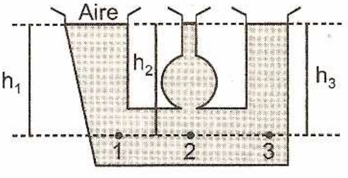


Fig. 10.6

Del principio fundamental de la hidrostática:

$$P_1 = P_2 = P_3 \Rightarrow P_{atm} + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 = P_{atm} + \rho g h_3$$

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 = \rho g h_3 \Rightarrow h_1 = h_2 = h_3$$

PRINCIPIO DE PASCAL

Los líquidos como los gases tienen la propiedad de transmitir únicamente presiones, verificándose que: "Toda variación de presión en un punto de un fluido se transmite íntegramente por igual y en toda dirección a todos los otros puntos del mismo".

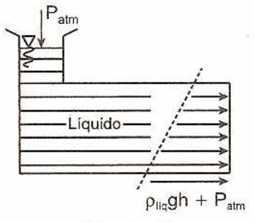


Fig. 10.7

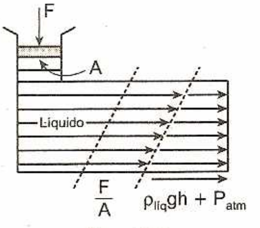


Fig. 10.8

La figura 10.7 muestra un recipiente conteniendo un cierto líquido. En la figura 10.8, al émbolo de área A se le aplica una fuerza F, de tal modo que se transmite una presión (F/A) al líquido. Luego se observa que la presión en la pared vertical de la derecha se incrementa en (F/A).

PRENSA HIDRÁULICA

Una importante aplicación del principio de Pascal lo encontramos en las máquinas hidráulicas capaces de multiplicar fuerzas. La prensa hidráulica consta de dos recipientes cilíndricas comunicantes que contienen un líquido (aceite, por ejemplo), en los que el área de la sección transversal de uno de ellos es mayor que la del otro ($A_1 < A_2$). Si aplicamos una fuerza F_1 en el pistón del cilindro que es más pequeño, se provoca un aumento en la presión del líquido bajo el pistón. Siendo A_1 el valor del área de este pistón. Esta presión P_1 se transmite al pistón de mayor área, A_2. Cuando los émbolos se encuentran al mismo nivel y en equilibrio se cumple que: $P_1 = P_2$, donde P_1 es la presión debajo del émbolo A_1 y P_2 es la presión debajo del émbolo A_2.

$$\boxed{P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}} \quad \ldots(10.10)$$

$$\boxed{A_1 < A_2 \Rightarrow F_2 > F_1} \quad \ldots(10.11)$$

$$\boxed{F_2 = Q = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) F_1} \quad \ldots(10.12)$$

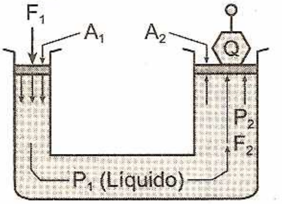


Fig. 10.9

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

En el siglo III a. C., el gran filósofo, matemático y físico griego Arquímedes, al realizar cuidadosos experimentos descubrió la manera de calcular el empuje ascendente que actúa en los cuerpos sumergidos en forma parcial o total en líquidos. Sus conclusiones fueron expresadas en un enunciado que recibe el nombre de principio de Arquímedes y cuyo texto es: "Todo cuerpo sumergido en forma parcial o total en un líquido recibe un empuje vertical hacia arriba, igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo".

Fig. 10.10.a

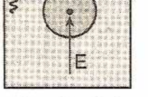


Fig. 10.10.b

El peso del líquido desplazado se determina mediante la relación (10.4):

$$W_{líquido} = \rho_{liq} g V_{sumergido}$$

Luego el empuje (vertical hacia arriba) tiene como módulo:

$$\boxed{E = \rho_{liq} g V_s} \qquad \ldots(10.13)$$

En la figura 10.10 la esfera se encuentra en reposo, entonces se concluye que el empuje se equilibra con el peso de la esfera. Cuando un globo está sumergido en un gas (aire, por ejemplo) la ecuación (10.13) se transforma en:

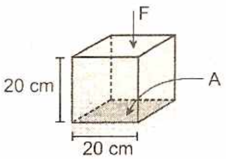
$$\boxed{E = \rho_{gas} g V_s} \qquad \ldots(10.14.)$$

El principio de Arquímedes es válido para líquidos y gases. La figura muestra un globo aerostático, donde E es la fuerza que ejerce el aire sobre el globo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un cuerpo cúbico de 20 cm de arista y 800 N de peso se encuentra sobre el piso. Hallar la presión sobre el piso.

Resolución:



$A = 0,04\ m^2$; $F = W = 800\ N$

$P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{800}{0,04} = 20\,000 \quad \therefore\ P = 20\ kPa$

2. El fondo de una piscina es de forma rectangular cuyas medidas son: 5 m y 10 m. Si llenamos la piscina hasta una profundidad de 2 m. Determinar:
   I. La fuerza hidrostática en el fondo
   II. La fuerza total en el fondo

   Considere $g = 9,8\ m/s^2$

Resolución:

Datos:

$A = (5)(10) = 50\ m^2$; $h = 2\ m$

I. $P_H = \rho_{H_2O} gh \Rightarrow P_H = 1000(9,8)(2) = 19\,600\ Pa$

$F_H = P_H A \Rightarrow F_H = 19\,600(50) \Rightarrow F_H = 980\ kN$

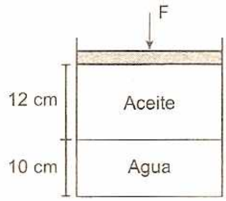
II. $P_{absota} = P_{hidrostatica} + P_{atm}$; donde: $P_{atm} = 1\ atm = 10^5\ Pa$

$P_{absoluta} = 19\,600 + 100\,000 \Rightarrow P_{absoluta} = 119\,600\ Pa$

$F_{total} = P_{absoluta} A$

$F_{total} = 119\,600(50) \quad \therefore\ F_{total} = 5980\ kN$

3. La figura muestra un cilindro de sección cuadrada de lado L = 20 cm, contiene dos líquidos no miscibles (agua y aceite) cuyas densidades son 1 g/cm³ y 0,8 g/cm³. Sobre el pistón de 10 kg de masa actúa una fuerza de 50 N. Calcular la presión absoluta en el fondo.



Resolución:

Datos:

$\rho_{agua} = 1\ g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$; $\rho_{aceite} = 0,8\ g/cm^3$

$W = mg = 10(10) = 100\ N$; $F = 50\ N$; $P_{atm} = 10^5\ Pa$

I. $P_{H_2O} = \rho_{H_2O}\, gh$

$P_{H_2O} = 1000(10)(0,1) \Rightarrow P_{H_2O} = 1000\ N/m^2$

$P_{aceite} = 800(10)(0,12) \Rightarrow P_{aceite} = 960\ N/m^2$

$P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{100+50}{0,04} = 3750\ Pa$

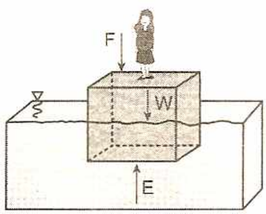
II. $P_{absoluta} = P_{hidrostática} + P + P_{atm}$

$P_{absoluta} = 1000 + 960 + 3750 + 100\,000$

$P_{absoluta} = 105\,710\ Pa \quad \therefore\ P_{absoluta} = 105,71\ kPa$

4. Un bloque de hielo flota en un lago de agua dulce. Calcular el volumen mínimo (en m³) que debe tener, para que una mujer de 58 kg pueda estar sobre el bloque sin mojarse los pies. Densidad de hielo 917 kg/m³.

Resolución:



$F = mg = (58)(10) = 580\ N$

$W = \rho_{hielo} gV = 917(10)V = 9170\ V$

$E = \rho_{H_2O} gV = 1000(10)V = 10\,000\ V$

$\Sigma F_y = 0$: $E = F + W$

$10\,000V = 580 + 9170V \Rightarrow V = 0{,}698795\ m^3$

$\therefore\ V = 0{,}7\ m^3$

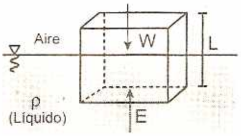
5. Un cubo de arista L esta flotando en líquido de densidad ρ. Si el volumen de la parte sumergida (V_s) es una fracción "r" de su volumen total (V_T) esto es $V_s = rV_T$, calcular el peso del cubo.

Resolución:

L: lado del cubo; A: área de la base = L^2

V_S: volumen sumergido; V_T: volumen total = L^3

$V_s = rV_T$



$\Sigma F_y = 0$: $W = E$

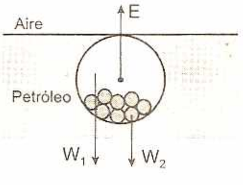
$\rho_{cubo} gV_T = \rho_{sumergido} gV_s$

$\rho_c V_T = \rho_s rV_T \Rightarrow \rho_c = \rho r$

$W_c = \rho_c gV_T = \rho rgL^3$

6. Una esfera hueca de 10 cm de diámetro exterior tiene una masa de 80 g. ¿Cuántos perdigones de 0,1 g aproximadamente habrá que introducir en ella para que quede sumergida totalmente y suspendida en el petróleo contenido en un cilindro? (Considere $\rho_p = 0{,}88\ g/cm^3$)

Resolución:



$R = 5\ cm = 5 \times 10^{-2}\ m$; $M_{total} = 80 \times 10^{-3} + n \times 10^{-4}$

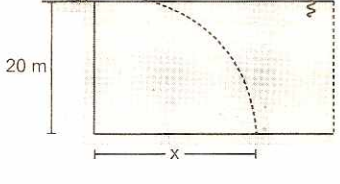
$\Sigma F_y = 0$: $E = W_1 + W_2$

$$\rho_{petróleo}\, g \left(\frac{4\pi}{3}\right) R^3 = M_{total} g$$

$$0{,}88(10)^3 \frac{4\pi}{3}(125)10^{-6} = (800 + n)10^{-4}$$

$4607,67 = 800 + n \Rightarrow n = 3807{,}669 \qquad \therefore\ n = 3807$

7. Una billa de acero de densidad 5000 kg/m^3, ingresa horizontalmente a una piscina con una rapidez de 10 m/s. Determinar el alcance horizontal x, desprecie toda fricción.

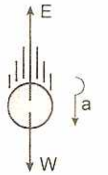


Resolución:

$\rho_{acero} = 5000\ kg/m^3$

$V_x = 10\ m/s$

$\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$



$$a = \left(\frac{W - E}{m}\right) = \frac{W - E}{\frac{W}{g}} = \left(\frac{W - E}{W}\right) g$$

$$a = \left(1 - \frac{E}{W}\right) g \Rightarrow a = \left(1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{acero}}\right) g$$

$$a = \left(1 - \frac{1000}{5000}\right) 10 \Rightarrow a = 8\ m/s^2$$

Eje y: caída libre

$$h = \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}(8)t^2 \Rightarrow t^2 = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5}\ s$$

Eje x: MRU

$d = vt \Rightarrow x = 10\sqrt{5} \qquad \therefore\ x = 10\sqrt{5}\ m$

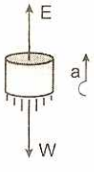
8. Un pequeño corcho tiene una densidad de 0,5 g/cm^3, se suelta desde el fondo de un recipiente que contiene agua. Calcular la aceleración (en m/s^2) con que asciende el corcho.

Resolución:

$\rho_{corcho} = 0{,}5\ g/cm^3 = 500\ kg/m^3$

Cálculo de la aceleración:

$$a = \left(\frac{E - W}{m}\right) = \frac{E - W}{\frac{W}{g}}$$



$$a = \left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{corcho}} - 1\right) g$$

$$a = \left(\frac{1000}{500} - 1\right) 10$$

$\therefore\ a = 10\ m/s^2 \approx 9{,}8\ m/s^2$

9. Desde la superficie de un lago de 15 m de profundidad se suelta una piedra de densidad: $\rho = 4000\ kg/m^3$. Hallar el tiempo que tardará la piedra en llegar al fondo del lago.

Resolución:

$V_{0(y)} = 0$; $h = 15\ m$; $\rho_c = 4000\ kg/m^3$

Ley de aceleración:

$$a = \frac{W - E}{\frac{W}{g}} = \left(1 - \frac{E}{W}\right) g \Rightarrow a = \left(1 - \frac{\rho_{liq}}{\rho_{aire}}\right) g$$

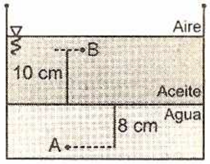
$$a = \left(1 - \frac{1000}{4000}\right) 10 = \frac{3}{4}(10) = 7{,}5\ m/s^2$$

Caída libre:

$$H = \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow 15 = \frac{1}{2}(7{,}5)t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \qquad \therefore\ t = 2\ s$$

10. En el sistema mostrado determinar la diferencia de presiones entre los puntos A y B.

$\rho_{aceite} = 800\ kg/m^3$; $\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$; $g = 10\ m/s^2$



Resolución:

Principio de Pascal: "Si se aplica una presión a un fluido, la presión se transmite, a través de todo el fluido, en toda dirección y sentido y con la misma intensidad".

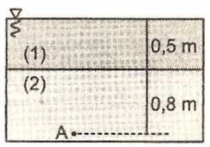
$P_A = \rho_{agua}gh_1 + \rho_{aceite}gh_2 + P_B$

$P_A - P_B = \rho_{agua}gh_1 + \rho_{aceite}gh_2$

$(P_A - P_B) = (1000)(10)(0{,}08) + (800)(10)(0{,}1) = 1600\ N/m^2$

$\therefore\ (P_A - P_B) = 1{,}6\ kPa$

11. En la figura mostrada, determinar la presión hidrostática en el punto A. La densidad de los líquidos no miscibles son: $\rho_1 = 800\ kg/m^3$; $\rho_2 = 1000\ kg/m^3$ ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Presión hidrostática debido a varios líquidos:

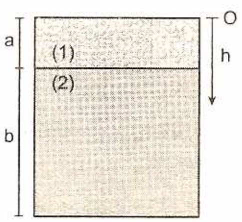
$P_A = \rho_1gh_1 + \rho_2gh_2$

Reemplazando datos en el SI:

$P_A = 800(10)(0{,}5) + 100(10)(0{,}8)$

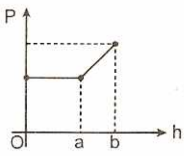
$P_A = 12\ 000\ Pa \quad \therefore\ P_A = 12\ kPa$

12. El gas (1) y el líquido (2) se encuentran en un recipiente cerrado, como indica la figura. Determinar la gráfica, presión absoluta al interior de los fluidos al aumentar la profundidad. Considere h positivo hacia abajo.

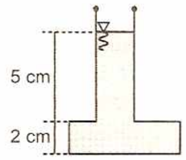


Resolución:

La presión en el gas (1) es igual en todos los puntos, es decir, la presión es constante. La presión en el líquido (2) varía con la profundidad linealmente. En el intervalo $\langle a;\ b \rangle$ la presión absoluta es la suma de la presión del gas (1) más la presión hidrostática.



13. La figura muestra la vista frontal de un tintero cuyo fondo tiene una sección de 5 cm^2 y de boca 2 cm^2. Si la densidad de la tinta es 1200 kg/m^3, hallar la fuerza hidrostática total sobre el fondo del tintero. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

La presión hidrostática en el fondo del tintero es:

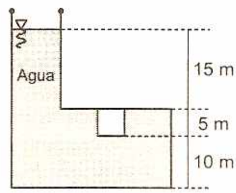
$P = \rho_{liq}gh \Rightarrow P = (1200)(10)(0{,}07) \Rightarrow P = 840\ N/m^2$

La fuerza hidrostática total en el fondo del tintero es:

$F = PA \Rightarrow F = (840)(5 \times 10^{-4}) \Rightarrow F = 0{,}42\ N$

$\therefore\ F = 420\ mN$

14. En el sistema mostrado determinar el peso del cilindro, cuya sección tiene un área de 0,1 m^2. La fuerza de rozamiento sobre el cilindro es nula. ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:

La presión hidrostática en la base del cilindro es:

$P = \rho_{agua}gh \Rightarrow P = (10^3)(10)(20) \Rightarrow P = 2 \times 10^5\ N/m^2$

La fuerza hidrostática en la base del cilindro es:

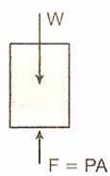
$F = PA \Rightarrow F = (2 \times 10^5)(0{,}1) \Rightarrow F = 2 \times 10^4\ N$

Analizando el DCL (cilindro):

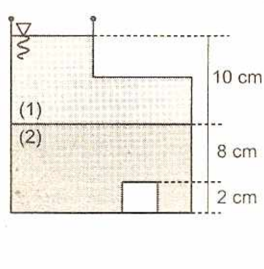
$\Sigma F_y = 0$: $W = F$

$\Rightarrow W = 2 \times 10^4\ N$

$\therefore\ W = 20\ kN$



15. El recipiente con un agujero en la base está taponado por un cuerpo cilíndrico de peso 2 N y área de base 15 cm^2. Hallar la fuerza que ejerce el recipiente alrededor del cilindro, si éste permanece fijo. La densidad de los líquidos son: $\rho_1 = 1500\ kg/m^3$; $\rho_2 = 2000\ kg/m^3$ ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

La presión hidrostática en la base superior del cilindro es: $P = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$

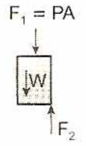
$P = (1500)(10)(0{,}1) + (2000)(10)(0{,}08) = 3100\ N/m^2$

La fuerza hidrostática en la base superior del cilindro es:

$F_1 = PA$

$\Rightarrow F_1 = (3100)(15 \times 10^{-4})$

$\Rightarrow F_1 = 4{,}65\ N$



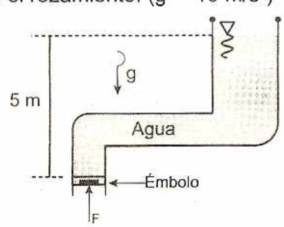
DCL (cilindro)

Analizando el DCL del cilindro:

$\Sigma F_y = 0$: $F_2 = F_1 + W \Rightarrow F_2 = 4{,}65 + 2$

$\therefore F_2 = 6{,}65\ N$

16. Determinar la magnitud de la fuerza F que se le debe aplicar al émbolo de área $A = 0{,}4\ m^2$ y peso despreciable, para mantener el agua en equilibrio. Desprecie el rozamiento. $(g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

La presión hidrostática sobre el émbolo es:

$P = \rho_{agua} g h \Rightarrow P = (1000)(10)(5) = 50\ 000\ N/m^2$

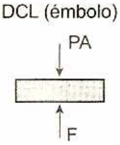
Analizando el DCL del émbolo:

$\Sigma F_y = 0$: $F = PA$

$\Rightarrow F = (50\ 000)(0{,}4)$

$\therefore F = 20\ kN$

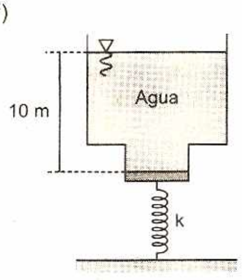
DCL (émbolo)



Nota: En este caso no se toma en cuenta la presión atmosférica, por que ambos extremos del tubo están abiertos.

17. La figura muestra un émbolo de peso despreciable de área $A = 2\ m^2$, acoplado a un resorte de constante elástica $k = 5000\ N/cm$. Si el recipiente contiene agua, determinar la deformación en el resorte.

$(g = 10\ m/s^2)$



Resolución:

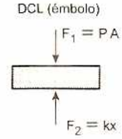
La presión hidrostática sobre el émbolo es:

$P = \rho_{agua} g h \Rightarrow P = (1000)(10)(10) \Rightarrow P = 10^5\ N/m^2$

La fuerza hidrostática sobre el émbolo es:

$F_1 = PA \Rightarrow F_1 = (10^5)(2) \Rightarrow F_1 = 2 \times 10^5\ N$

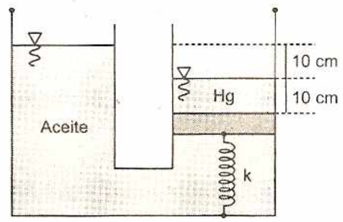
DCL (émbolo)



Analizando el DCL (émbolo): $\Sigma F_y = 0$: $F_2 = F_1$

$\Rightarrow kx = F_1 \Rightarrow (5000)x = 2 \times 10^5\ N \quad \therefore x = 40\ cm$

18. Si el sistema mostrado se encuentra en equilibrio y el émbolo de $20\ cm^2$ de área es de peso despreciable, determinar la deformación del resorte de rigidez $k = 6\ N/cm$; $g = 10\ m/s^2$; $\rho_{Hg} = 13\ 600\ kg/m^3$ y $\rho_{aceite} = 800\ kg/m^3$



Resolución:

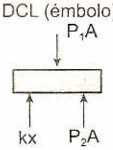
La presión hidrostática en la base superior del émbolo es:

$P_1 = \rho_{Hg} g h \Rightarrow P_1 = (13\ 600)(10)(0{,}1) = 13\ 600\ N/m^2$

La presión hidrostática en la base inferior del émbolo es:

$P_2 = \rho_{aceite} g h \Rightarrow P_2 = (800)(10)(0{,}2) \Rightarrow P_2 = 1600\ N/m^2$

DCL (émbolo)



Analizando el DCL (émbolo), sobre el émbolo actúan tres fuerzas, dos hidrostáticas y una fuerza elástica. De la condición de equilibrio se cumple que:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow kx + P_2 A = P_1 A \Rightarrow kx = (P_1 - P_2)A$

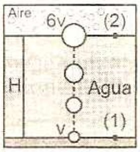
$\Rightarrow (6)x = (12\ 000)(20 \times 10^{-4}) \quad \therefore x = 4\ cm$

19. Una burbuja de aire asciende desde el fondo de un lago aumentando en 5 veces su volumen inicial. ¿Cuál es la profundidad del lago? Considere la presión atmosférica equivalente a una columna de 10 m de agua.

Resolución:

Sea P_{atm} la presión atmosférica. La presión absoluta en el fondo del lago es la suma de la presión hidrostática más P_{atm}.

$P_1 = H + P_{atm} \Rightarrow P_1 = (H + 10)$ m de H_2O



La presión en la superficie libre es:

$P_2 = P_{atm} = 10$ m de H_2O

El volumen inicial de la burbuja de aire es: $V_1 = V$

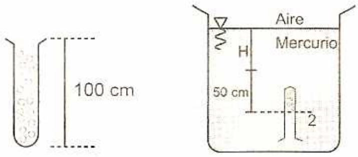
El volumen final de la burbuja de aire es : $V_2 = 6V$

Considerando la temperatura constante, aplicamos la ley de Boyle - Mariotte:

$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow (H + 10)(V) = (10)(6V)$

$H + 10 = 60 \quad \therefore H = 50$ m

20. La figura (1) muestra un tubo de vidrio de 100 cm de largo, abierto por uno de sus extremos. Se introduce en forma invertida en un recipiente que contiene mercurio. Calcular a qué profundidad se encuentra el extremo cerrado del tubo, figura (2), sabiendo que el volumen del aire se reduce a la mitad. Considere la presión atmosférica equivalente a una columna de Hg de altura 76 cm.



Resolución:

Sea P_{atm} la presión atmosférica. La presión absoluta del aire comprimido, en la figura (2) es igual a:

$P_2 = (H + 50) + P_{atm} = (H + 126)$

Considerando el volumen inicial del aire V y el volumen final V/2, aplicamos la ley de Boyle - Mariotte, temperatura constante:

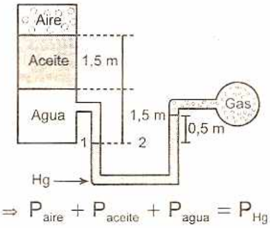
$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow (76)(V) = (H + 126)(V/2)$

$76 = \dfrac{H}{2} + 63 \quad \therefore H = 26$ cm

21. Si el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determinar la diferencia de presiones entre el aire y el gas. $\rho_{aceite} = 800$ kg/m^3; $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3

Resolución:

Tomando como referencia la línea horizontal que pasa por la superficie en la interfaz agua-mercurio, aplicamos el principio fundamental de la hidrostática:

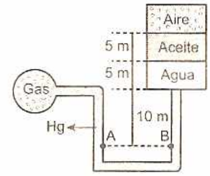


$P_1 = P_2 \Rightarrow P_{aire} + P_{aceite} + P_{agua} = P_{Hg} + P_{gas}$

$P_a + (800)(10)1{,}5 + (1000)(10)1{,}5 = (13\,600)(10)0{,}5 + P_g$

$\therefore (P_a - P_g) = 41$ kPa

22. En el sistema mostrado determinar la presión del gas, sabiendo que la presión del aire comprimido es 1500 kPa. Considere la densidad del aceite 800 kg/m^3. $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2



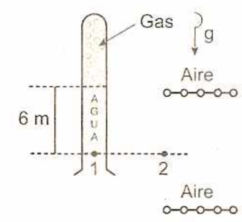
Resolución:

Principio fundamental de la hidrostática:

$P_A = P_B \Rightarrow P_{gas} + P_{Hg} = P_{agua} + P_{aceite} + P_{aire}$

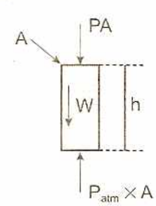
$P_{gas} + 1360 = 150 + 40 + 1500 \;\therefore\; P_{gas} = 330$ kPa

23. En el tubo vertical mostrado determinar la presión absoluta del gas, sabiendo que la columna de agua se encuentra en equilibrio. Considere la presión de la atmósfera igual a 100 kPa.
($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Haciendo el DCL de la columna de agua. Sea A el área de la sección recta del tubo, además la fuerza F que ejerce el fluido es igual a F = PA, donde P es la presión del gas.



La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$PA + W = P_{atm}A \qquad ...(1)$

Si el volumen V de la columna de agua es V = Ah, entonces, el peso W se puede expresar del siguiente modo:

$W = \rho_{agua}gAh \qquad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$P + \rho_{agua}gh = P_{atm}$

Reemplazando los datos en el sistema internacional tenemos:

$P + 1000(10)6 = 100\,000 \quad \therefore P = 40$ kPa

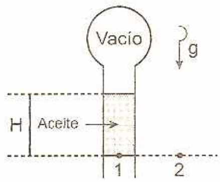
Otro modo de solución:

Igualando las presiones en los puntos (1) y (2):

$P_1 = P_2 \Rightarrow P_{gas} + \rho_{agua}gh = P_{atm}$

$P_{gas} + 1000(10)6 = 100\ 000 \quad \therefore\ P_{gas} = 40\ \text{kPa}$

24. En el tubo vertical mostrado, determinar la altura H máxima de la columna de aceite de densidad 800 kg/m^3 se puede mantener en reposo. Considere la presión atmosférica igual a 100 kPa. ($g = 10\ m/s^2$)



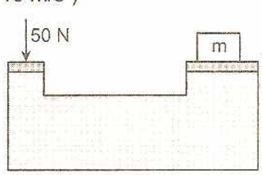
Resolución:

Usando la conclusión del problema anterior, igualamos las presiones en los puntos (1) y (2): $P_1 = P_2$

$\rho_{aceite}gh = P_{atm} \Rightarrow (800)(10)H = 100\ 000$

$\therefore\ H = 12{,}5\ m$

25. Determinar la masa m necesaria para equilibrar la prensa hidráulica, si se aplica una fuerza vertical de módulo 50 N en el émbolo menor, sabiendo que los diámetros de los émbolos están en relación de 1 a 5. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

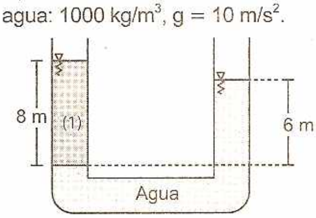
Si los diámetros están en relación de 1 a 5, entonces las áreas de los discos están en relación de 1 a 25.

$\frac{F}{1^2} = \frac{mg}{5^2}$

Reemplazando los datos tenemos que: $\frac{50}{1} = \frac{m(10)}{25}$

Por lo tanto, la masa es: 125 kg.

26. Se muestra dos líquidos no miscibles que están en equilibrio. Determinar la densidad del líquido (1) (en kg/m^3), sabiendo que el otro es agua. Densidad del agua: 1000 kg/m^3, $g = 10\ m/s^2$.



Resolución:

Del principio fundamental de la hidrostática:

$P_1 = P_2$

$\rho_1gh_1 = \rho_2gh_2 \Rightarrow \rho_1h_1 = \rho_2h_2$

Reemplazando tenemos que:

$\rho_1(8) = (1000)(6)$

Por lo tanto, la densidad del líquido 1 es 750 kg/m^3

27. Calcular la densidad de la esfera si flota con el 50% de su volumen sumergido en ambos líquidos A y B, cuyas densidades son de 400 kg/m^3 y 1000 kg/m^3, respectivamente.

Resolución:

Cada líquido A y B ejerce sobre la esfera un empuje independiente. De la primera condición de equilibrio tenemos que:

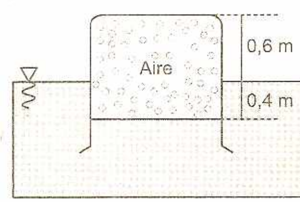
$W_{peso} = E_A + E_B$

$\rho_{esfera}gV = \rho_Ag\frac{V}{2} + \rho_Bg\frac{V}{2} \quad \rho_{esfera} = \frac{\rho_A + \rho_B}{2}$

Reemplazando los datos tenemos que:

$\rho_{esfera} = 700\ kg/m^3$

28. Despreciando el espesor de las paredes del recipiente cilíndrico de radio 0,5 m, ¿cuál será el peso de dicho recipiente, si se encuentra en flotación en el agua? ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

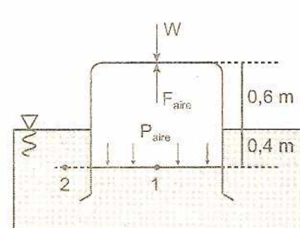
Cálculo de la presión manométrica del aire comprimido.

Principio fundamental de la hidrostática:

$P_1 = P_2 \Rightarrow P_{aire} = \rho gh$

$P_{aire} = 1000(10)(0{,}4) \Rightarrow P_{aire} = 4000\ N/m^2 \qquad ...(1)$

Realizamos el DCL del recipiente. Despreciamos el volumen de las paredes, por consiguiente, el empuje es nulo.



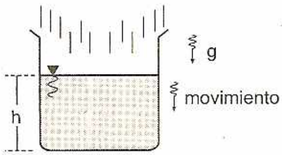
Se tiene en consideración solo la presión hidrostática, para el cálculo de la presión del aire comprimido:

$F_y = 0: W = F_{aire} = P_{aire}S \Rightarrow W = P_{aire}\pi R^2 \qquad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2): $W = 4000\pi\frac{1}{4}$

$\therefore\ W = 3141{,}6\ N$

29. El recipiente mostrado contiene agua, donde $h = 0{,}4$ m. Si el recipiente acelera hacia abajo con 6 m/s^2, determinar la presión hidrostática en el fondo del recipiente. Densidad del agua: 1000 kg/m^3, $g = 10$ m/s^2.



Resolución:

La magnitud de la presión es directamente proporcional al módulo de la gravedad efectiva.

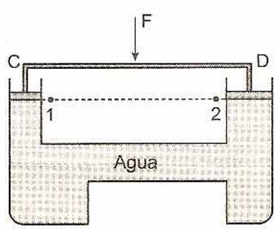
$P = \rho_{agua}(g - a)h$

Reemplazando tenemos:

$P = (1000)(10 - 6)(0{,}4)$

Por lo tanto, la presión hidrostática es: 1600 Pa

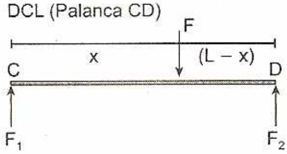
30. ¿En qué punto de la varilla CD, a partir de C será necesario aplicar la fuerza vertical F para que la varilla de longitud L, unida rígidamente a émbolos ingrávidos permanezca horizontal? La sección transversal de un émbolo es el doble de la sección del otro.



Resolución:

Sea F_1 la fuerza aplicada sobre el émbolo menor y F_2 sobre el émbolo mayor. Igualando presiones en la base de los émbolos:

DCL (Palanca CD)



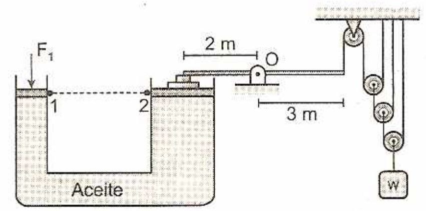
$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A} = \frac{F_2}{(2A)} \Rightarrow F_2 = 2F_1$$

Aplicando la segunda condición de equilibrio a la palanca CD.

$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_1x = F_2(L - x) \Rightarrow x = 2(L - x)$

$\therefore\ x = \frac{2}{3}L$

31. La figura muestra una prensa hidráulica, donde el área del émbolo mayor es el triple del émbolo menor. Determinar la fuerza F_1 que se debe aplicar en el émbolo menor para mantener en equilibrio al bloque de peso $W = 144$ N. Despreciar el peso de los émbolos, poleas y barra. No hay rozamiento.

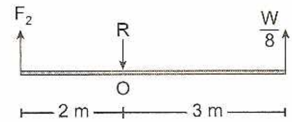


Resolución:

Sea F_2 la fuerza que se transmite al émbolo mayor. Igualando presiones en los émbolos tenemos que:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A} = \frac{F_2}{3A} \Rightarrow F_2 = 3F_1$$

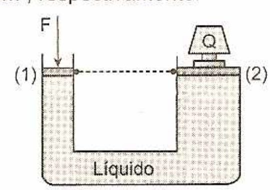
DCL (Palanca)



Aplicando la 2.ª condición de equilibrio a la palanca:

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_2(2) = \left(\frac{W}{8}\right)(3) \Rightarrow F_2 = 27\ \text{N} \therefore\ F_1 = 9\ \text{N}$$

32. En la prensa hidráulica mostrada, determinar la magnitud de la fuerza F al émbolo (1), para mantener en equilibrio el bloque Q de peso 60 kN. Los émbolos (1) y (2) son ingrávidos y tienen áreas de 0,3 m^2 y 3 m^2, respectivamente.



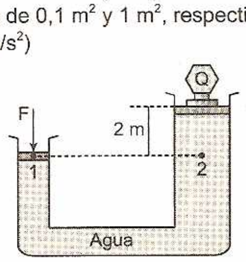
Resolución:

Si dos puntos se encuentran contenidos en el mismo líquido y al mismo nivel, estos soportan igual presión:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{Q}{A_2} \Rightarrow \frac{F}{0{,}3} = \frac{60}{3} \qquad \therefore\ F = 6\ \text{kN}$$

La prensa hidráulica se utiliza para multiplicar fuerzas: $Q = 10F$

33. En la prensa hidráulica mostrada, determinar la magnitud de la fuerza F aplicada al émbolo menor, para mantener en reposo al bloque Q de peso 30 kN. Los émbolos menor y mayor son ingrávidos y tienen áreas de 0,1 m^2 y 1 m^2, respectivamente. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

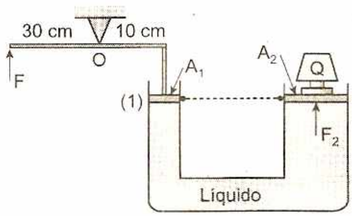
Del principio fundamental de la hidrostática, igualamos las presiones en los puntos (1) y (2):

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \rho_{agua}gh + \frac{Q}{A_2}$$

Reemplazando los datos en el SI:

$$\frac{F}{0,1} = (1000)(10)(2) + \frac{30\,000}{1} \qquad \therefore\ F = 5\ \text{kN}$$

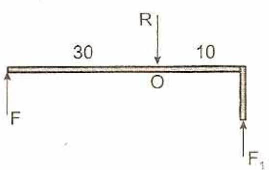
34. En la figura mostrada se tiene una prensa hidráulica cuyos émbolos tienen un área A_1 y A_2 ($A_2 = 20A_1$). Determinar la magnitud de la fuerza F que se debe aplicar a la palanca, para mantener en equilibrio el bloque Q de peso 3000 N. Desprecie el peso de los émbolos y de la palanca.



Resolución:

Para mantener el bloque Q en equilibrio, la fuerza F_2 aplicada al émbolo de área A_2, debe ser igual al peso de Q: $F_2 = 3000$ N

$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)F_1 \Rightarrow 3000 = 20F_1 \Rightarrow F_1 = 150\ \text{N}$$

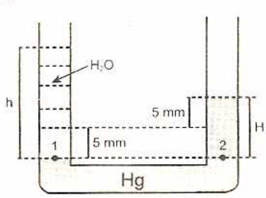


Analizando el DCL de la palanca:

$\Sigma M_o = 0$: $F(30) = F_1(10)$ $\quad\therefore\ F = 50$ N

35. Un tubo en U contiene mercurio ($\rho = 13,6\ g/cm^3$). ¿Qué altura de agua se debe verter en una rama para que el mercurio se eleve en la otra rama 5 mm?

Resolución:



Principio fundamental de la hidrostática:

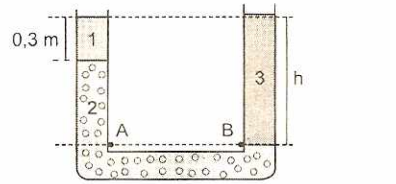
$$P_1 = P_2 \Rightarrow P_{atm} + \rho_{H_2O}gh = \rho_{Hg}g(H) + P_{atm}$$

$$\rho_{H_2O}h = \rho_{Hg}H \Rightarrow h = \frac{\rho_{Hg}H}{\rho_{H2O}}H$$

Reemplazando datos tenemos: h = 136 mm

36. En un tubo en U de ramas verticales y de igual sección se vierten tres líquidos (1); (2) y (3) obteniéndose el equilibrio en la forma mostrada. Hallar la altura h.

$\rho_1 = 3000\ kg/m^3$; $\rho_2 = 5000\ kg/m^3$; $\rho_3 = 4000\ kg/m^3$



Resolución:

Principio fundamental de la hidrostática:

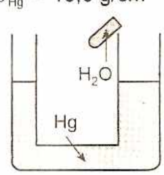
$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1gh_1 + \rho_2gh_2 = \rho_3gh_3$$

Reemplazando en el SI:

$$\rho_1h_1 + \rho_2h_2 = \rho_3h_3$$

$$\Rightarrow 3000(0,3) + 5000(h - 0,3) = 4000(h)\ \therefore\ h = 0,6\ \text{m}$$

37. Un tubo en U cilíndricos de 4 cm^2 y 20 cm^2 de sección transversal, como muestra la figura, contiene mercurio a un mismo nivel. Por el tubo de mayor sección se vierte lentamente 816 gramos de H_2O. Determinar la altura que sube el nivel del mercurio en el otro tubo. $\rho_{Hg} = 13,6\ g/cm^3$

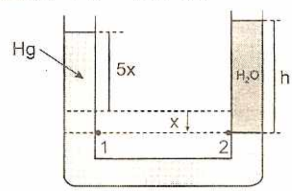


Resolución:

Cálculo de la altura de la columna de agua:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow M = \rho V$$

$816 = (1)(20)h \Rightarrow h = 40,8$ cm



Del principio de conservación de la masa (Hg), el volumen desplazado en el tubo de mayor sección es igual al volumen que ocupa en el tubo de menor sección. El mercurio en el tubo de mayor sección desciende x y en el tubo de menor sección sube 5x.

Principio fundamental de la hidrostática:

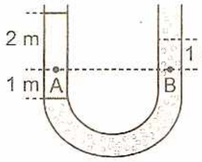
$$P_1 = P_2 \Rightarrow \rho_{Hg}g(6x) = \rho_{H_2O}gh$$

$$\Rightarrow \rho_{Hg}(6x) = \rho_{H_2O}h$$

$13,6(6x) = 1(40,8) \Rightarrow x = 0,5$ cm

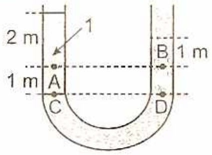
El mercurio sube en el tubo de menor sección 5x, por consiguiente: 2,5 cm

38. Dos líquidos no miscibles están en equilibrio en el tubo en U que se muestra. Determinar la relación entre las presiones hidrostáticas en los puntos A y B.



Resolución:

Principio fundamental de la hidrostática:



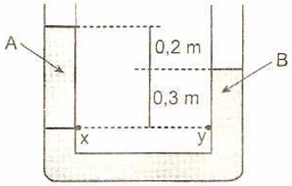
$P_C = P_D \Rightarrow \rho_1 g(3) = \rho_2 g(2) \Rightarrow \rho_1 = \frac{2}{3}\rho_2$ ...(1)

Hallando la relación entre las presiones hidrostáticas en A y B:

$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_1 g(2)}{\rho_2 g(1)} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{2\rho_1}{\rho_2}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $\frac{P_A}{P_B} = \frac{4}{3}$

39. La figura muestra un tubo en U conteniendo dos líquidos A y B no miscibles. Hallar la densidad de los líquidos sabiendo que: $\rho_A + \rho_B = 1600\ kg/m^3$



Resolución:

Principio fundamental de la hidrostática:

$P_x = P_y \Rightarrow P_{atm} + \rho_A g h_1 = \rho_B g h_2 + P_{atm} \Rightarrow \rho_A = \frac{h_2}{h_1}\rho_B$

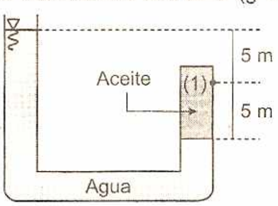
Reemplazando: $\rho_A = \frac{0,3}{0,5}\rho_B \Rightarrow \rho_A = \frac{3}{5}\rho_B$

Reemplazando en la condición inicial:

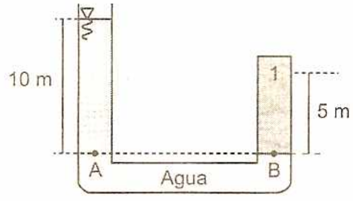
$\rho_A + \rho_B = 1600\ kg/m^3 \Rightarrow \frac{8}{5}\rho_B = 1600\ kg/m^3$

$\therefore\ \rho_A = 600\ kg/m^3;\ \rho_B = 1000\ kg/m^3$

40. En el sistema mostrado determinar la presión absoluta en el punto (1). Considere densidad del aceite 800 kg/m³ y la presión atmosférica 100 kPa. ($g = 10\ m/s^2$).



Resolución:



Tomando como referencia la línea horizontal que pasa por la superficie de interfaz aceite-agua, aplicamos el principio fundamental de la hidrostática:

$P_A = P_B \Rightarrow P_{atm} + \rho_{agua} gh = \rho_{aceite} gh + P_1$

Reemplazando los datos en el SI:

$100\,000 + 1000(10)10 = 800(10)5 + P_1$

$\therefore\ P_1 = 160\ kPa$

41. La figura (1) muestra un recipiente que contiene agua, la balanza indica un peso de 25 N. En la figura (2) el bloque atado por una cuerda se sumerge hasta la mitad. Si el empuje que actúa sobre el bloque es E = 5 N, hallar la lectura de la balanza en la figura (2).

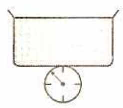


Fig. 1

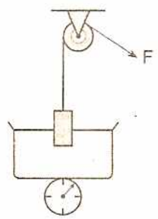


Fig. 2

Resolución:

De la figura (1) se deduce que el peso total (agua más recipiente) es igual a W = 25 N.

Realizamos el DCL (bloque) y el DCL (recipiente-agua) como indican las figuras (3) y (4), respectivamente:

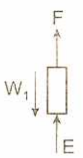


Fig. 3

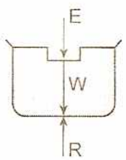
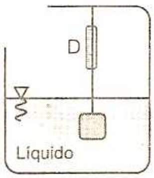


Fig. 4

El empuje es una fuerza de acción y reacción. La acción actúa sobre el sistema (agua más recipiente) y la reacción sobre el bloque. De la figura (4), la lectura en la balanza es R.

$\Sigma F_y = 0: R = W + E \Rightarrow R = 25 + 5 \quad \therefore\ R = 30\ N$

42. Un cuerpo pesa 100 N en el aire, 90 N en el agua y 80 N en un líquido X. Determinar la densidad del liquido X.



Resolución:

Consideremos su peso real en el aire, igual a 100 N. El dinamómetro D nos indica el peso aparente. La diferencia entre el peso real y el peso aparente es igual al empuje que ejerce el líquido sobre el cuerpo.

$E_{H_2O} = \rho_{H_2O} gV = 10$ N ... (1)

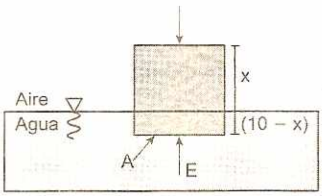
$E_X = \rho_X gV = 20$ N ... (2)

Dividiendo las ecuaciones (1) y (2):

$\rho_X = 2\rho_{H_2O} \quad \therefore \rho_X = 2000 \text{ kg/m}^3$

43. Un corcho cúbico de arista 10 cm, con densidad 0,25 g/cm³ flota en el agua. ¿Qué altura del bloque queda por encima de la superficie del agua?

Resolución:



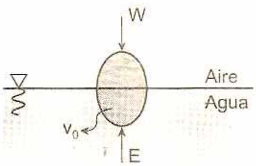
La fuerza resultante en la vertical es igual a cero:

$E = W \Rightarrow \rho_{liq.} gV_s = \rho_c gV \Rightarrow V_s = \dfrac{\rho_c}{\rho_{liq}} V$

$A(10 - x) = \dfrac{1}{4} A(10) \quad \therefore x = 7{,}5$ cm

44. Un bloque está sumergido parcialmente en el agua, sabiendo que el volumen no sumergido es el 20% de su volumen total, determinar la densidad del cuerpo. $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$

Resolución:



V_s: volumen sumergido; V: volumen total

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$W = E \Rightarrow \rho_C gV = \rho_{liq} gV_s \Rightarrow \rho_C = \dfrac{V_S}{V} \rho_{liq.}$

Porcentaje de volumen sumergido: $\%V_s = \dfrac{V_S}{V} 100\%$

Reemplazando los datos tenemos:

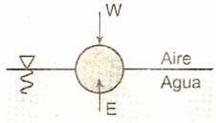
$\rho_C = (0{,}8)D_{liq} \quad \therefore \rho_C = 800 \text{ kg/m}^3$

45. Una esfera de peso 30 kN se encuentra flotando en agua sumergido hasta la mitad. Determinar el volumen de la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución:

Sea V el volumen de la esfera, entonces, el volumen sumergido es V/2.

Haciendo el DCL de la esfera:



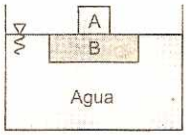
La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$E = W \Rightarrow \rho_{H_2O} g \dfrac{V}{2} = W$

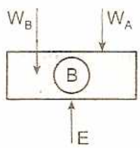
Reemplazando los datos en el SI:

$1000(10)\left(\dfrac{V}{2}\right) = 30\,000 \quad \therefore V = 6 \text{ m}^3$

46. En la figura se muestra un bloque A de peso 20 N sobre otro bloque B, de densidad 600 kg/m³ flotando en agua. Determinar el mínimo volumen del bloque B, tal que, el bloque A no se moje. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución:



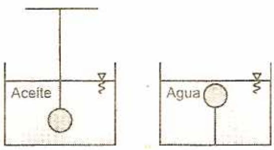
Analizando el DCL del bloque B, observamos que actúan tres fuerzas:

$\Sigma F_y = 0$: $E = W_A + W_B \Rightarrow (E - W_B) = W_A$

$gV(\rho_{agua} - \rho_B) = W_A \Rightarrow (10)(V)(400) = 20$

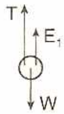
$\Rightarrow V = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \therefore V = 5$ L

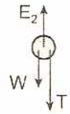
47. La figura muestra dos cuerpos idénticos, sumergidos en líquidos diferentes. Si la tensión en los hilos tienen el mismo valor, determinar la densidad del cuerpo esférico. $\rho_{aceite} = 800 \text{ kg/m}^3$.



Resolución:

Analizamos el DCL de la esfera sumergida en aceite y agua, respectivamente, en ambos diagramas el peso W y la tensión T son los mismos.

1. En aceite 

2. En agua 

Aplicamos la condición de equilibrio: $\Sigma F_y = 0$

En aceite: $E_1 + T = W$ ...(1)

En agua: $E_2 = T + W$ ...(2)

Si, $\rho_{agua} > \rho_{aceite} \Rightarrow E_2 > E_1$

(1) + (2): $E_1 + E_2 = 2W$

$\rho_{aceite} gV + \rho_{agua}\, gV = 2\rho gV$

ρ: densidad del cuerpo esférico

$$\rho = \frac{\rho_{aceite} + \rho_{agua}}{2} \quad \therefore\ \rho = 900\ \text{kg/m}^3$$

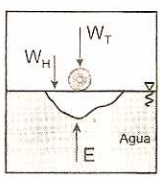
48. Un tronco de peso 5,5 kN flota sobre un bloque de hielo en el mar. ¿Cuál será el volumen mínimo de hielo a fin que el tronco no se moje? Densidad relativa del hielo 920 kg/m^3 y del agua salada 1030 kg/m^3.

Resolución:

Analizamos el DCL del bloque de hielo, sobre el cual actúan tres fuerzas, donde:

W_T: peso del tronco; W_H: peso de hielo

E: empuje sobre el hielo



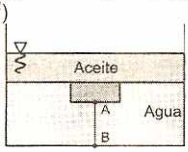
De la condición de equilibrio establecemos que:

$\Sigma F_y = 0$: $E = W_H + W_T \Rightarrow E - W_H = W_T$

$\rho_{agua} gV - \rho_{hielo} gV = W_T \Rightarrow gV(\rho_{agua} - \rho_{hielo}) = W_T$

$\Rightarrow (10)(V)(110) = 5500 \quad \therefore\ V = 5\ \text{m}^3$

49. La figura muestra un bloque de volumen 4 L y densidad 300 kg/m^3 sumergido totalmente en agua por acción de la cuerda AB. Determinar la tensión en la cuerda. $\rho_{aceite} = 800$ kg/m^3; $\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3 ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Debemos recordar que el empuje E depende de la densidad del líquido que rodea al bloque, en este caso solo el agua.

Analizando el DCL del bloque:

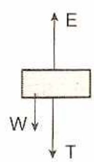
$\Sigma F_y = 0$: $W + T = E \Rightarrow T = E - W$

D: Densidad del bloque

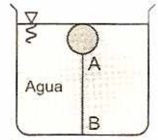
$T = \rho_{agua} gV - \rho gV$

$\Rightarrow T = gV(\rho_{agua} - \rho)$

$T = (10)(4 \times 10^{-3})(700) \quad \therefore\ T = 28$ N



50. La figura muestra una esfera de volumen 2 L y densidad 400 kg/m^3 sumergido totalmente en el agua por acción de la cuerda AB. Determinar la tensión en la cuerda. $\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2

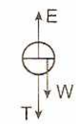


Resolución:

Diagrama del cuerpo libre de la esfera:

$\Sigma F_y = 0$

$T + W = E \Rightarrow T = E - W$ ...(1)

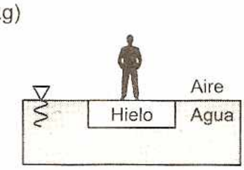


Reemplazando en (1) tenemos:

$T = \rho_L gV - \rho_C gV \Rightarrow T = gV(\rho_L - \rho_C)$

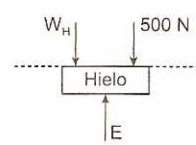
En el SI: $T = (10)(2 \times 10^{-3})(600) \quad \therefore\ T = 12$ N

51. ¿Cuál es la superficie del menor bloque de hielo de 50 cm de espesor que soportará exactamente el peso de un hombre de 500 N? Densidad del hielo 900 kg/m^3. ($g = 10$ N/kg)



Resolución:

Haciendo el diagrama del cuerpo libre del bloque de hielo:



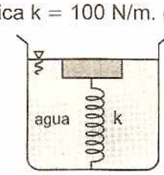
La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$E - W_H = 500\ \text{N} \Rightarrow \rho_{agua} gV - \rho_{hielo} gV = 500$ N

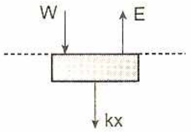
Reemplazando los datos en el SI: $V = 0{,}5$ m^3

Pero: $V = Ah$, donde A es el área del bloque y h su espesor. Entonces: $0{,}5 = A(0{,}5) \quad \therefore\ A = 1$ m^2

52. La figura muestra un bloque de volumen 0,002 m^3 y densidad 300 kg/m^3, sumergido totalmente en agua. Determinar la deformación en el resorte de constante elástica $k = 100$ N/m. ($g = 10$ N/kg)



Resolución:



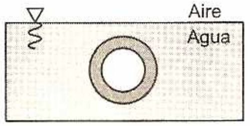
Haciendo el DCL del bloque. Si x es la deformación en el resorte, entonces, la tensión será kx.

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero: $kx = E - W \Rightarrow kx = gV(\rho_{agua} - \rho_{bloque})$

Reemplazando los datos en el SI:

$100x = 10(0{,}002)(1000 - 300) \quad \therefore\ x = 0{,}14\ m$

53. Determinar la densidad del material de un cascarón esférico de radios exterior e interior 3 m y 2 m, respectivamente, que se encuentra flotando en el interior de un líquido de densidad 1900 kg/m^3.

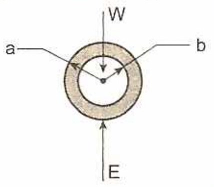


Resolución:

El volumen V de una esfera es directamente proporcional al cubo del radio: $V = kR^3$.

Haciendo el DCL del cascarón esférico:

La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:



$W = E \Rightarrow \rho g V = \rho_{liq} g V_s$

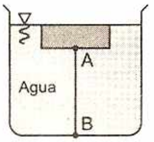
$\rho k(a^3 - b^3) = \rho_{liq} k a^3$

$$\Rightarrow \rho = \frac{a^3}{(a^3 - b^3)}\rho_{liq}$$

Reemplazando los datos:

$\rho = 2700\ kg/m^3$

54. La figura muestra a un bloque de volumen 2000 cm^3 sumergido en agua totalmente, unido a una cuerda vertical que se encuentra atada en el fondo del recipiente. Si la masa del bloque es igual a 700 gramos, determinar la tensión en la cuerda AB. (g = 10 m/s^2)



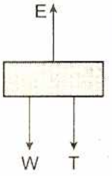
Resolución:

Cálculo de la densidad del bloque:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{700}{2000} = 0{,}350\ g/cm^3$$

$\Rightarrow \rho = 350\ kg/m^3$

Realizamos el DCL del bloque:



$\Sigma F_y = 0: W + T = E$

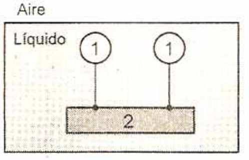
$\Rightarrow T = E - W$

$T = \rho_{liq} g V - \rho_C g V = gV(\rho_{liq} - \rho_C)$

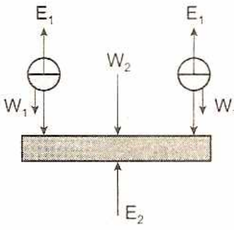
$\therefore\ T = 10(2)(10)^{-3}(650) = 13\ N$

55. La figura muestra un sistema formado por dos esferas y un bloque, en equilibrio. Si cada cuerpo tiene un volumen de 4 L, determinar la tensión en la cuerda que une la esfera con el bloque. g = 10 m/s^2

$$\rho_1 = 1000\ \frac{kg}{m^3};\ \rho_2 = 4000\ \frac{kg}{m^3}$$



Resolución:



Analizando el DCL (sistema): $\Sigma F_y = 0$

$2E_1 + E_2 = 2W_1 + W_2 \Rightarrow 2(E_1 - W_1) = W_2 - E_2$

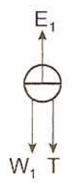
ρ: densidad del líquido

$2gV(\rho - \rho_1) = gV(\rho_2 - \rho)$

$$2\rho - 2\rho_1 = \rho_2 - \rho \Rightarrow \rho = \frac{2\rho_1 + \rho_2}{3}$$

$\Rightarrow \rho = 2000\ kg/m^3$

Analizando el DCL (esfera):



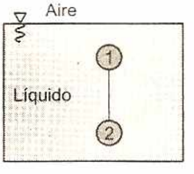
$\Sigma F_y = 0$

$T + W_1 = E_1 \Rightarrow T = E_1 - W_1$

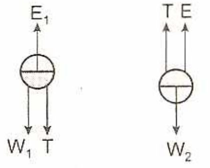
$T = gV(\rho - \rho_1)$

$\therefore\ T = (10)(4 \times 10^{-3})(1000) = 40\ N$

56. Dos esferas de pesos 10 N y 40 N, y de igual volumen flotan en el interior de un líquido unidos por una cuerda de peso despreciable, en la forma que muestra la figura. Hallar la tensión en la cuerda.



Resolución:



Analizando el DCL de la esfera (1):

$\Sigma F_y = 0: E = W_1 + T \quad ...(1)$

El empuje E sobre los cuerpos son iguales, dado que los volúmenes son iguales.

Analizando el DCL de la esfera (2):

$\Sigma F_y = 0$: $W_2 = T + E$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$W_2 = W_1 + 2T \Rightarrow T = \dfrac{W_2 - W_1}{2}$

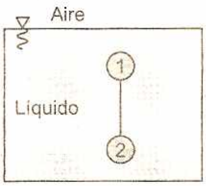
Reemplazando los datos: $T = 15$ N

57. La figura muestra dos esferas (1) y (2) de volúmenes iguales y densidades 900 kg/m^3 y 1700 kg/m^3, respectivamente, flotando en el interior de un líquido, unidos mediante una cuerda de peso despreciable. Determinar la densidad del líquido que establece el equilibrio de los cuerpos.

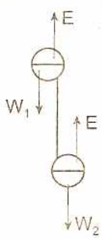
Resolución:

Consideremos nuestro sistema físico (1 + cuerda + 2)

El empuje sobre las esferas (1) y (2) tienen el mismo módulo, por tener igual volumen.



La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:



$2E = W_1 + W_2$

$2\rho_{liq}gV = \rho_1 gV + \rho_2 gV$

$\rho_{liq} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$

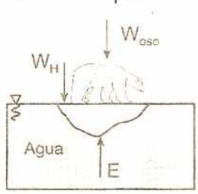
Reemplazando datos:

$\rho_{liq} = 1300$ kg/m^3

58. Un oso polar de peso 2500 N se encuentra parado sobre un bloque de hielo (densidad 900 kg/m^3) flotando en el agua. Determinar el mínimo volumen del bloque de hielo, tal que, el oso no se hunde. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:

Analizando el DCL del bloque de hielo.



La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$E = W_{oso} + W_H \Rightarrow E - W_H = W_{oso}$

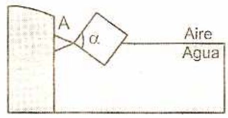
$\rho_L gV - \rho_H gV = W_{oso} \Rightarrow gV(\rho_L - \rho_H) = W_{oso}$

Reemplazando datos en el SI:

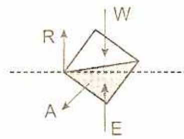
$10V(100) = 2500 \quad \therefore V = 2{,}5$ m^3

59. Un cubo homogéneo de arista 1 m se encuentra sumergido parcialmente en agua y sujeto en la rótula A como indica la figura. Hallar el ángulo α que define la posición de equilibrio. La densidad del cuerpo cúbico es 400 kg/m^3. La fuerza de reacción en la rótula A tiene módulo de 1500 N. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:



Siendo el peso W y el empuje E fuerzas verticales, entonces la tercera fuerza en el punto A es necesariamente vertical.



El peso del cubo es: $W = \rho_c gV$

$W = (400)(10)(1) \Rightarrow W = 4000$ N

El empuje que ejerce el agua es:

$E = \rho_{agua} gV_s \Rightarrow E = (1000)(10)(V_s) = 10^4 V_s$

donde V_s es el volumen sumergido en el agua.

De la condición de equilibrio:

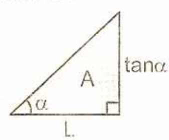
$\Sigma F_y = 0$: $E + R = W \Rightarrow (10^4)V_s + 1500 = 4000$

$\Rightarrow V_s = 0{,}25$ m^3

El volumen del prisma sumergido es:

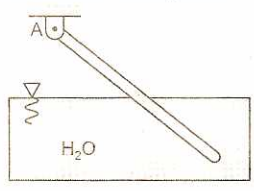
$V_s = Ah \Rightarrow 0{,}25 = A(1) \Rightarrow A = 0{,}25$ m^2

El área de la base es:



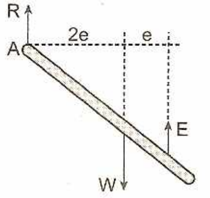
$A = \dfrac{1}{2}LH \Rightarrow 0{,}25 = \dfrac{1}{2}(1)(\tan\alpha) \therefore \tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

60. Una barra uniforme de longitud L está articulada en A como muestra la figura. La barra flota con la mitad de su longitud sumergida en agua. Hallar la densidad de la barra homogénea.



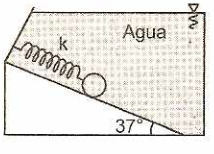
Resolución:

Analizando el DCL de la barra observamos que actúan tres fuerzas paralelas, el empuje E actúa en el centro de gravedad del volumen sumergido.

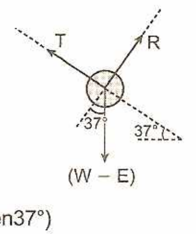


Aplicando la 2.ª condición de equilibrio a la barra:
$\Sigma M_A = 0$: $W(2e) = E(3e)$
ρ: densidad de la barra
$2\rho gV = 3\rho_{agua}g(V/2) \Rightarrow \rho = \frac{3}{4}\rho_{agua}$
$\therefore \rho = 750 \text{ kg/m}^3$

61. La figura muestra una esfera de volumen 2 L y densidad 1500 kg/m³, sumergido en agua. La esfera es sujetada por un resorte sobre el plano inclinado 37°. Determinar la deformación del resorte de constante elástica k = 100 N/m (g = 10 N/kg)

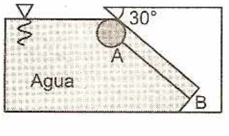


Resolución:
Analizando el DCL de la esfera, el empuje E y el peso W son verticales, si W > E se puede reemplazar por único vector vertical hacia abajo.
De la condición de equilibrio, la fuerza resultante en la dirección del plano inclinado es nula, entonces se cumple que:

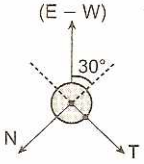


$T = (W - E)(\text{sen}37°)$
$\Rightarrow T = gV(\rho_{esf} - \rho_{agua})(\text{sen}37°)$
$T = (10)(2 \times 10^{-3})(500)\left(\frac{3}{5}\right) = 6 \text{ N}$
De la ley de Hooke, sabemos que la tensión en el resorte es directamente proporcional a la deformación lineal:
$T = kx \Rightarrow 6 = (100)x \quad \therefore x = 6 \text{ cm}$

62. La figura muestra una esfera de volumen 4000 cm³ y densidad 400 kg/m³, sumergida totalmente en agua. Determinar la tensión en la cuerda AB. (g = 10 N/kg)

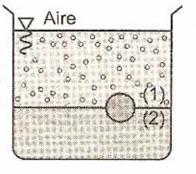


Resolución:
Haciendo el DCL de la esfera, el empuje E y el peso W son verticales, si E > W se puede reemplazar por un único vector vertical hacia arriba.



La fuerza resultante en la dirección del plano inclinado es igual a cero:
$T = (E - W)(\text{sen}30°) \Rightarrow T = gV(\rho_{Liq} - \rho_{esf})(\text{sen}30°)$
Reemplazando los datos en el SI:
$T = (10)(0{,}004)(1000 - 400)\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore T = 12 \text{ N}$

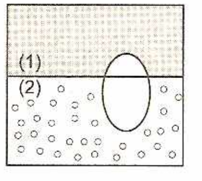
63. La figura muestra una esfera flotando entre dos líquidos no miscibles (1) y (2). Si el 50% de su volumen está sumergido en el líquido (2), determinar la densidad de la esfera. $\rho_1 = 400$ kg/m³; $\rho_2 = 1000$ kg/m³



Resolución:
Cuando un cuerpo está sumergido en varios líquidos, cada líquido ejerce un empuje independiente.
Analizando el DCL (esfera): $\Sigma F_y = 0$
$W = E_1 + E_2$
$\rho_C gV = \rho_1 g\left(\frac{V}{2}\right) + \rho_2 g\left(\frac{V}{2}\right)$
$\rho_C = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$

Reemplazando los datos: $\rho_C = 700$ kg/m³

64. La figura muestra dos líquidos (1) y (2) no miscibles contenido en un recipiente. Determinar la densidad del cuerpo, sabiendo que el 10% de su volumen está sumergido en el líquido (1). Las densidades de los líquidos son: $\rho_1 = 1000$ kg/m³; $\rho_2 = 3000$ kg/m³



Resolución:
Cuando un cuerpo está sumergido en varios líquidos, cada líquido ejerce un empuje independiente sobre el cuerpo. Haciendo el DCL del cuerpo:

$W = E_1 + E_2$ ... (1)

V: volumen del cuerpo

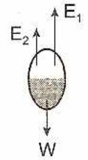
$V_1 = 0{,}1V$ y $V_2 = 0{,}9V$

Reemplazando en (1):

$\rho_C gV = \rho_1 gV_1 + \rho_2 gV_2$

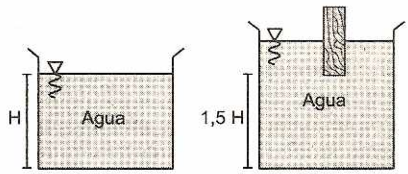
$\Rightarrow \rho_C = (0{,}1)\rho_1 + (0{,}9)\rho_2$

$\therefore \rho_C = 2800 \text{ kg/m}^3$



La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero.

65. Un recipiente de 2 m² de área en su fondo, contiene agua hasta una altura H, inicialmente. Si en la superficie se coloca un bloque de madera de 800 kg de masa, se observa que el nivel de agua aumenta en un 50% de H. Determinar la magnitud de H.



Resolución:

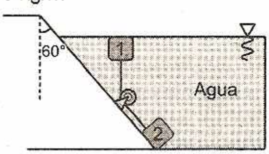
Sea A el área en el fondo. La fuerza en el fondo del recipiente aumenta de F_1 a F_2, esto debido al peso W de la madera:

$F_2 - F_1 = W \Rightarrow A(P_2 - P_1) = mg$

$\Rightarrow A\rho_{agua} g(0{,}5) = mg$

Reemplazando los datos en el SI: $H = 0{,}8$ m

66. La figura muestra dos bloques (1) y (2) de volúmenes iguales y de pesos 10 N y 40 N, respectivamente. Despreciando toda forma de rozamiento, determinar el volumen de cada bloque, sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio. $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\rho_{agua} = 1000 \text{ kg/m}^3$



Resolución:

Analizando el DCL del bloque (1): $\Sigma F_y = 0$

$T = E - W_1 \Rightarrow T = E - 10$ ...(1)

Los bloques (1) y (2) tienen igual volumen por consiguiente los empujes serán iguales.

Analizando el DCL del bloque (2): ΣF // plano = 0

$\Rightarrow T = (W_2 - E)\cos 60° \Rightarrow T = (40 - E)\left(\frac{1}{2}\right)$ ...(2)

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$E - 10 = (40 - E)\left(\frac{1}{2}\right)$

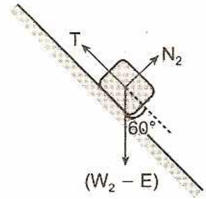
$\Rightarrow E = 20$ N

Pero: $E = \rho_{liq} gV$

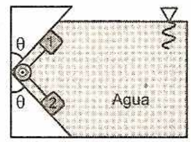
$\Rightarrow 20 = (10^3)(10)V$

$V = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$\therefore V = 2$ L



67. La figura muestra dos bloques (1) y (2) de igual volumen y peso 10 N y 40 N, respectivamente. Despreciando toda forma de rozamiento, hallar el volumen de cada bloque para el equilibrio. $\rho_{agua} = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 10 \text{ m/s}^2$



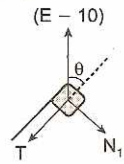
Resolución:

1. DCL bloque (1): ΣF // plano = 0

   $T = (E - 10)\cos\theta$ ...(1)

   La resultante vertical entre el empuje E y el peso $W_1 = 10$ N, tiene sentido hacia arriba.

   Si los bloques (1) y (2) tienen igual volumen, entonces los empujes también son iguales.



2. DCL bloque (2): ΣF // plano = 0

   $T = (40 - E)\cos\theta$ ...(2)

   La resultante vertical entre el empuje E y el peso $W_2 = 40$ N, tiene sentido hacia abajo.

   Igualando (1) y (2):

   $(E - 10)\cos\theta = (40 - E)\cos\theta$

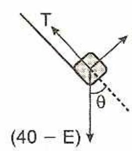
   $\Rightarrow E = 25$ N

   Pero: $E = \rho_{Liq} gV$

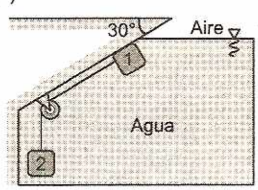
   $\Rightarrow 25 = (10^3)(10)(V)$

   $V = 2{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

   $\therefore V = 2{,}5$ L

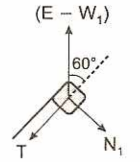


68. La figura muestra dos bloques (1) y (2) de pesos 10 N y 40 N, respectivamente, y volúmenes iguales, en equilibrio. Desprecie toda forma de rozamiento. Determinar el volumen de cada bloque.
($g = 10 \text{ m/s}^2$)



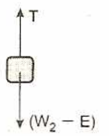
Resolución:

DCL del bloque (1):



$\Sigma F//$ plano $= 0$: $T = (E - W_1)\cos 60°$ ...(1)

DCL del bloque (2):



$\Sigma F_y = 0$: $T = (W_2 - E)$ ...(2)

Igualando las ec. (1) y (2): $(E - W_1)\frac{1}{2} = W_2 - E$

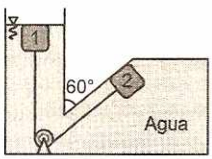
Reemplazando los datos: $E = 20$ N

Pero: $\rho_{liq} g V = 20$ N

Reemplazando:

$1000(10)V = 20 \Rightarrow V = 2 \times 10^{-3}\,m^3 \Rightarrow V = 2$ L

69. La figura muestra dos bloques (1) y (2) de pesos 40 N y 30 N, respectivamente, cuyos volúmenes son iguales. Despreciando toda forma de rozamiento, hallar el volumen de los bloques, para establecer el equilibrio.
($g = 10\,m/s^2$)



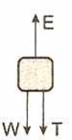
Resolución:

El empuje E sobre cada bloque tiene igual módulo, por tener igual volumen.

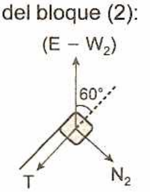
Haciendo el DCL del bloque (1):

$\Sigma F_y = 0$: $T + W_1 = E$

$\Rightarrow T = E - W_1$ ...(1)



Haciendo el DCL del bloque (2):



ΣF // plano $= 0$:

$T = (E - W_2)\cos 60°$ ...(2)

Igualando las ec. (1) y (2):

$(E - W_1) = (E - W_2)\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow E = 50$ N ...(3)

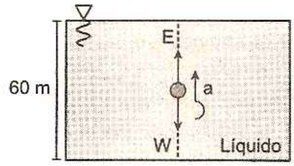
Pero: $\rho_{liq} g V = E \Rightarrow 1000(10)V = 50$ N

$V = 5 \times 10^{-3}\,m^3 \Rightarrow V = 5$ L

70. A la profundidad de 60 m se abandona una esfera de corcho de densidad 250 kg/m^3, ¿cuánto tiempo demora en salir a la superficie libre de agua? Desprecie toda forma de rozamiento. ($g = 10\,m/s^2$)

Resolución:

Cálculo de la aceleración a que experimenta la esfera de densidad ρ en el interior del líquido.



$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{E - W}{\frac{W}{g}} \Rightarrow a = g\frac{(E - W)}{W}$$

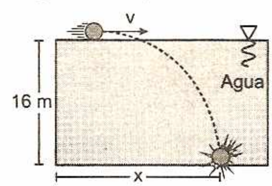
$$a = g\frac{(\rho_{liq} - \rho)}{\rho} \quad ...(1)$$

Reemplazando los datos en (1): $a = 3g = 30\,m/s^2$

Analizando el movimiento cinemáticamente:

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 60 = 0 + \frac{1}{2}(30)t^2 \quad \therefore t = 2\text{ s}$$

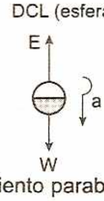
71. Una billa de acero con densidad $\rho = 5$ g/cm^3 ingresa rodando horizontalmente con una velocidad $v = 10$ m/s. Encuentre el desplazamiento horizontal x, desprecie el rozamiento de la billa con el agua del estanque. ($g = 10\,m/s^2$)



Resolución:

La aceleración a de la esferilla en el interior del líquido es:

DCL (esfera)



$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{W - E}{\frac{W}{g}} = g\frac{(W - E)}{W}$$

$$\Rightarrow a = g\frac{(\rho - \rho_{agua})}{\rho} = 8\,m/s^2$$

La esferilla experimenta un movimiento parabólico en el interior del líquido:

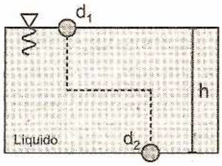
En el eje vertical: $h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$

El tiempo empleado es: $t = 2$ s

En el eje horizontal: $x = v_x t \Rightarrow x = (10)(2)$

$\therefore x = 20$ m

72. Dos esferitas de densidad $\rho_1 = 4$ g/cm^3 y $\rho_2 = 2$ g/cm^3 son abandonadas simultáneamente como se indica en la figura mostrada. Si $h = 15$ m, ¿después de cuánto tiempo se cruzan en el interior del líquido de densidad $\rho = 3$ g/cm^3? ($g = 10\,m/s^2$)



Resolución:

Sea a_1 la aceleración de la esferita con densidad d_1, que desciende:

$$a_1 = g\frac{(\rho_1 - \rho)}{\rho_1} \Rightarrow a_1 = 10\frac{(4-3)}{4} = 2,5\ m/s^2$$

Sea a_2 la aceleración de la esferita con densidad d_2, que asciende:

$$a_2 = g\frac{(\rho - \rho_2)}{\rho_2} \Rightarrow a_2 = 10\frac{(3-2)}{2} = 5\ m/s^2$$

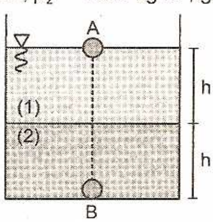
Analizando cinemáticamente, el recorrido e_1 y e_2 por cada esfera suman h en el instante del cruce.

$$e_1 + e_2 = h \Rightarrow \frac{1}{2}a_1t^2 + \frac{1}{2}a_2t^2 = h$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2h}{(a_1 + a_2)} = \frac{2(15)}{7,5} = 4$$

$\therefore\ t = 2\ s$

73. En la figura mostrada, la esfera se deja en libertad sobre la superficie libre del líquido (1) y se observa que cuando llega al fondo del recipiente su velocidad es nula. Determinar la densidad de la esfera.
$\rho_1 = 2000\ kg/m^3$; $\rho_2 = 4000\ kg/m^3$; $g = 10\ m/s^2$



Resolución:

Sea a_1 la aceleración de la esfera de densidad ρ que desciende en el interior del líquido de densidad ρ_1:

$$a_1 = \frac{(\rho - \rho_1)}{\rho}g$$

Sea a_2 la aceleración de la esfera de densidad ρ, que desacelera en el interior del líquido de densidad ρ_2:

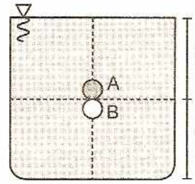
$$a_2 = \frac{(\rho_2 - \rho)}{\rho}g$$

Analizando cinemáticamente, deducimos que la esfera acelera en el líquido (1) y desacelera en el líquido (2), pero con igual módulo:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{\rho - \rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

Reemplazando los datos tenemos que:
$\rho = 3000\ kg/m^3$

74. Si la esferita A llega a la superficie libre, en el mismo tiempo en que B llega al fondo, saliendo del reposo de la posición mostrada, hallar la densidad del líquido.
$\rho_A = 3000\ kg/m^3$; $\rho_B = 6000\ kg/m^3$



Resolución:

Sea a_1 la aceleración de la esferita A que asciende en el interior del líquido de densidad ρ:

$$a_1 = g\frac{(\rho - \rho_A)}{\rho_A}$$

Sea a_2 la aceleración de la esferita B que desciende en el interior del líquido de densidad ρ:

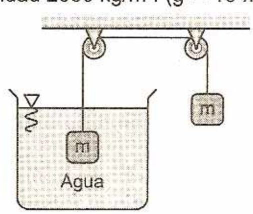
$$a_2 = g\frac{(\rho_B - \rho)}{\rho_B}$$

Analizando cinemáticamente, deducimos que los cuerpos tienen igual aceleración en módulo pero sentidos opuestos:

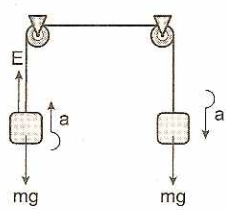
$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{\rho - \rho_A}{\rho_A} = \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} \Rightarrow \rho = \frac{2\rho_A - \rho_B}{\rho_A + \rho_B}$$

Reemplazando: $\rho = 4000\ kg/m^3$

75. Determinar el valor de la aceleración que adquiere cada bloque, de masas iguales, cuando el sistema se deja en libertad. Los bloques tienen igual volumen y densidad $2000\ kg/m^3$. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:



Analizando el DCL (sistema). Aplicamos la segunda ley de Newton:

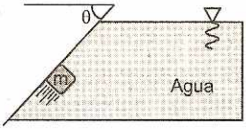
$F_R = (\Sigma m)a \Rightarrow E = 2ma$

ρ: densidad del bloque

$\rho_{Agua}gV = 2(\rho V)a$

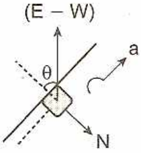
$$a = \frac{\rho_{agua}}{2\rho}g \quad \therefore\ a = 2,5\ m/s^2$$

76. Un bloque de masa m y densidad 500 kg/m^3 es abandonado sobre el plano inclinado. Despreciando toda forma de rozamiento, determinar la aceleración del bloque. $\theta = 30°$. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Realizamos el DCL del bloque:



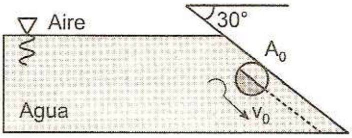
Segunda ley de Newton en el eje del movimiento:

F_R // al plano = ma

$$(E - W)\text{sen}\theta = \frac{W}{g}a \Rightarrow a = \left(\frac{E}{W} - 1\right)g\text{sen}\theta$$

$$a = \left(\frac{\rho_{liq}}{\rho_C} - 1\right)g\text{sen}\theta \;\therefore\; a = 5 \text{ m/s}^2$$

77. Considerando que no hay resistencia del agua debido a la viscosidad, una esfera de volumen 0,006 m^3 se lanza del punto A con una velocidad de 3 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo vuelve a pasar por el punto de partida, sobre el plano inclinado? La masa de la esfera es 5 kg. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Cálculo de la densidad de la esfera:

$$\rho_C = \frac{m}{V} = \frac{5}{6}(10)^3 \text{ kg/m}^3$$

Del problema anterior, la aceleración de la esfera se determina del siguiente modo:

$$a = \left(\frac{\rho_{liq}}{\rho_c} - 1\right)g\text{sen}\theta$$

$$a = \left(\frac{6}{5} - 1\right)10\frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

De la ecuación cinemática: $v_f = v_0 - at$

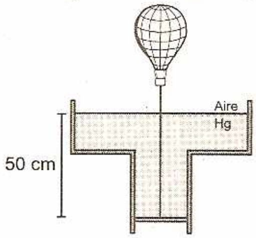
Cuando se detiene instantáneamente para regresar:

$v_f = 0 \Rightarrow 0 = 3 - (1)t \Rightarrow t = 3$ s

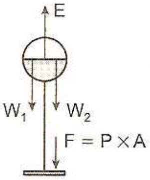
Luego, el cuerpo regresa al punto A después de 6s.

78. Si el globo aerostático mostrado en la figura está inflado con hidrógeno ($\rho_H = 0{,}1$ kg/m^3) y el peso del material con que está hecho es 50 N, determinar el volumen del globo para que el sistema se encuentre en equilibrio. El émbolo tiene área 25 cm^2 y peso despreciable.

$\rho_{aire} = 1{,}2$ kg/m^3; $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2



Resolución:



La presión hidrostática sobre el émbolo es:

$P = \rho_{Hg}gh \Rightarrow P = (13\,600)(10)(0{,}5) \Rightarrow P = 68\,000$ N/m^2

La fuerza hidrostática sobre el émbolo es:

$F = PA \Rightarrow F = (68 \times 10^3)(25 \times 10^{-4}) \Rightarrow F = 170$ N

El empuje sobre el globo es:

$E = \rho_{aire}gV \Rightarrow E = (1{,}2)(10)V \Rightarrow E = 12V$

El peso del gas hidrógeno es:

$W_1 = \rho_H gV \Rightarrow W_1 = (0{,}1)(10)(V) \Rightarrow W_1 = V$

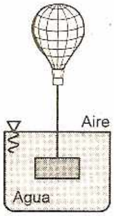
El peso del material del globo es: $W_2 = 50$ N

De la condición de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0$: $E = W_1 + W_2 + F$

$\Rightarrow 12V = V + 50 + 170 \quad \therefore V = 20$ m^3

79. Un trozo de metal de 75 kg y 0,02 m^3 se mantiene en equilibrio por acción de un globo cuyo peso total es 100 N. Hallar el volumen del globo. Considere la densidad del aire 1,3 kg/m^3 y $g = 10$ m/s^2.

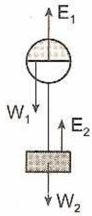


Resolución:

Sea E_1 el empuje que ejerce el aire sobre el globo:

$E_1 = \rho_{aire}gV_1 \Rightarrow E_1 = (1{,}3)(10)V$

$\Rightarrow E_1 = 13V$



Sea E_2 el empuje que ejerce el agua sobre el trozo de metal:

$E_2 = \rho_{agua}gV_2 \Rightarrow E_2 = (1000)(10)(0{,}02)$

$\Rightarrow E_2 = 200$ N

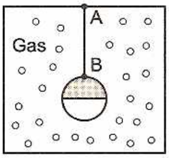
El peso del globo es: $W_1 = 100$ N

El peso del trozo es: $W_2 = 750$ N

Analizando el DCL del sistema (globo + cuerda + trozo): $\Sigma F_y = 0$: $E_1 + E_2 = W_1 + W_2$

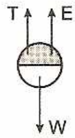
$\Rightarrow 13V + 200 = 100 + 750 \quad \therefore V = 50$ m^3

80. La figura muestra un recipiente cerrado, en su interior contiene un cierto gas de densidad 10 kg/m^3. La esfera de volumen 0,005 m^3 y densidad 250 kg/m^3, se encuentra suspendido en el techo. Hallar la tensión en la cuerda AB. (g = 10 m/s^2)



Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera:



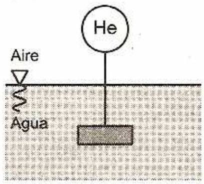
La fuerza resultante en el eje vertical es igual a cero:

$T + E = W \Rightarrow T = W - E$

$T = gV(\rho_c - \rho_{gas})$

$\therefore\ T = (10)(5\times 10^{-3})240 = 12\ N$

81. La figura muestra un globo esférico inflado con helio de densidad 0,1 kg/m^3 y volumen 1 m^3, y está unido por una cuerda de peso despreciable a un bloque de densidad 1100 kg/m^3 y volumen 0,005 m^3 sumergido totalmente en agua. Sabiendo que el bloque se encuentra en equilibrio, determinar el peso del material que está fabricado el globo. ρ_{aire} = 1,2 kg/m^3; g = 10 m/s^2



Resolución:

La figura muestra el DCL del sistema físico (globo + cuerda + bloque)

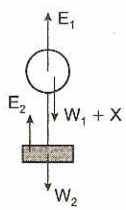
E_1: empuje que experimenta el globo debido al aire que lo rodea.

W_1: peso del gas que está inflado el globo (helio)

X: peso del material del globo.

E_2: empuje que experimenta el bloque debido al agua que lo rodea.

W_2: peso del bloque



$\Sigma F_y = 0$: $E_1 + E_2 - W_1 - W_2 - X = 0$

$X = E_1 + E_2 - W_1 - W_2 = (E_1 - W_1) + (E_2 - W_2)$

$X = gV_1(\rho_{aire} - \rho_{He}) + gV_2(\rho_{agua} - \rho_c)$

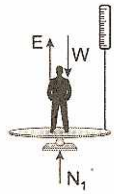
Reemplazando datos:

$X = 10(1)(1,1) + (10)(5\times 10^{-3})(-100) \quad \therefore\ X = 6\ N$

82. Un hombre cuyo volumen es 80 litros, sube a una balanza y observa que la aguja indica una lectura de 800 N. Sabiendo que la densidad del aire es 1,2 kg/m^3, determinar el peso real del hombre. (g = 10 m/s^2)

Resolución:

La balanza nos indica, la reacción normal entre los pies del hombre y la plataforma de la balanza.



$\Sigma F_y = 0$: $W = E + N_1$ ...(1)

Cálculo del empuje, sobre el hombre:

$E = \rho_{aire}gV \Rightarrow E = 1,2(10)(80)(10)^{-3}$

$\Rightarrow E = 0,96\ N$

Reemplazando en (1) tenemos:

$W = 0,96 + 800 \quad \therefore\ W = 800,96\ N$

83. Un oso polar de volumen 0,25 m^3 sube a una balanza y observa una lectura de 2497 N. Considerando la densidad del aire de 1,2 kg/m^3, determinar el peso real del oso. (g = 10 m/s^2)

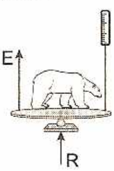
Resolución:

La lectura en la balanza nos indica la reacción R entre los pies del oso y la plataforma de la balanza, R = 2497 N.

Cálculo del empuje E que ejerce el aire sobre el oso:

$E = \rho_{aire}gV \Rightarrow E = (1,2)(10)(0,25) \Rightarrow E = 3\ N$

Haciendo el DCL del oso:



La fuerza en el eje vertical es igual a cero:

$W = R + E \Rightarrow W = 2497 + 3 \Rightarrow W = 2500\ N$

El peso real del oso es 250 kg-f y tiene un volumen de 250 L.

84. Un globo aerostático de volumen 30 m^3 ha sido inflado con hidrógeno cuya densidad es 0,1 kg/m^3. El peso del material del que está fabricado el globo es 30 N. Determinar la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque A de peso 1000 N; se sabe que el coeficiente de rozamiento estático es 0,4. Considere la densidad del aire 1,2 kg/m^3. (g = 10 m/s^2)

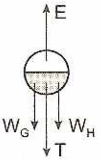
Resolución:

Cálculo del empuje que ejerce el aire sobre el globo:

$E = \rho_{aire}gV \Rightarrow E = 360\ N$ ...(1)

Cálculo del peso del gas hidrógeno encerrado en el globo: $W_H = \rho_H gV \Rightarrow W_H = 30$ N ...(2)

Diagrama del cuerpo libre del globo:

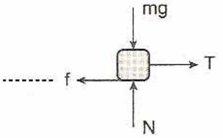


$\Sigma F_y = 0$: $T + W_H + W_G = E$

$\Rightarrow T + 30 + 30 = 360$

$\Rightarrow T = 300$ N

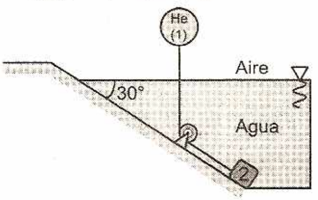
Analizando el bloque A. La fuerza de rozamiento estático máximo es: $\mu N = \mu mg = 400$ N. Si la tensión en la cuerda es $T = 300$ N, entonces deducimos que el bloque permanece en reposo.



f: fuerza de rozamiento estático, $f < 400$ N.

$\therefore f = T = 300$ N

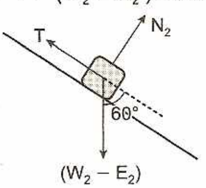
85. La figura muestra un globo esférico inflado con helio de densidad 0,1 kg/m^3 y volumen 1,0 m^3, unido por una cuerda de peso despreciable a un bloque de densidad 1100 kg/m^3 y volumen 0,006 m^3 sumergido totalmente en agua. Sabiendo que el bloque se encuentra en equilibrio, determinar el peso del material que está fabricado el globo. No hay rozamiento. $\rho_{aire} = 1,2$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2.



Resolución:

Realizamos el DCL del bloque:

$\Sigma F//$ plano $= 0$: $T = (W_2 - E_2)\cos 60°$ ...(α)



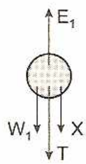
Realizamos el DCL del globo:

E_1: empuje sobre el globo, debido al aire que lo rodea.

W_1: peso del gas helio.

X: peso del material que está fabricado el globo.

$\Sigma F_y = 0$: $T + W_1 + X = E_1$ ...(β)



Reemplazando (α) en (β):

$$X = (E_1 - W_1) - \frac{1}{2}(W_2 - E_2)$$

$$X = gV_1(\rho_a - \rho_{He}) - \frac{gV_2}{2}(\rho_c - \rho_{H_2O})$$

$$\Rightarrow X = 10(1)(1,1) - \left(\frac{10}{2}\right)(6 \times 10^{-3})(100) \therefore X = 8 \text{ N}$$

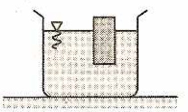
Teorema

Si un fluido se mueve aceleradamente con una aceleración constante a, la fuerza de empuje que ejerce el fluido sobre el cuerpo que se encuentra parcial o totalmente sumergido en él, es proporcional a la gravedad efectiva que soporta dicho fluido.

$$E_{ef} = \rho_L g_{ef} V_s$$

Siendo: $g_{ef} = g - a$

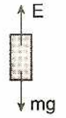
86. Un bloque flota en agua con medio volumen fuera del líquido. Con qué aceleración debe elevarse el recipiente que contiene el líquido, para que el bloque se hunda completamente.



Resolución:

Hagamos el DCL del bloque cuando se encuentra en reposo respecto de la tierra.

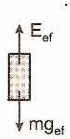
$E = mg \Rightarrow \rho_L g(V/2) = \rho_C Vg \Rightarrow \rho_L = 2\rho_C$ ...(1)



A continuación hagamos el DCL del bloque cuando se encuentra en reposo respecto del recipiente.

$E_{ef} = mg_{ef} \Rightarrow \rho_L(a + g)V_s = \rho_C V(a + g)$

$\Rightarrow \rho_L V_s = \rho_C V$ ...(2)

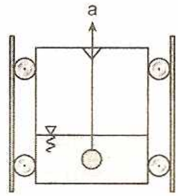


Reemplazando (1) en (2): $V_s = \frac{1}{2}V$

Es decir, el volumen sumergido en el agua permanecerá inalterado.

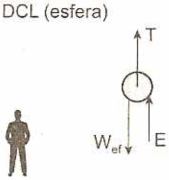
En general, si el sistema así formado es llevado a cualquier punto del espacio, el volumen sumergido va a ser el mismo.

87. En un recipiente que contiene agua se encuentra una esfera de masa m = 5 kg y volumen 2 L, atada mediante una cuerda al techo del ascensor. Si el sistema acelera hacia arriba con $a = 3\ m/s^2$, halle la tensión en la cuerda. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

DCL (esfera)



Fijamos nuestro sistema de referencia en el interior del ascensor.

La gravedad efectiva $\vec{g}_{ef}$ en el interior del líquido es:

$g_{ef} = (g + a) = 13\ m/s^2$

El peso efectivo es: $W_{ef} = mg_{ef} = 65\ N$

La magnitud del empuje E depende de la gravedad efectiva.

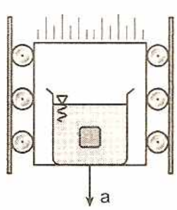
$E = \rho_{agua} g_{ef} V \Rightarrow E = (1000)(13)(2 \times 10^{-3}) = 26\ N$

Para nuestro observador, la esfera se encuentra en reposo:

$\Sigma F_y = 0$: $T = W_{ef} - E \Rightarrow T = 65 - 26$

$\therefore\ T = 39\ N$

88. El ascensor mostrado en la figura, dentro del cual existe un recipiente que contiene agua, desciende verticalmente con una aceleración constante a. Determinar el valor de a para que un bloque de madera, que se encuentra dentro del agua, no se mueva respecto de la tierra. $\rho_{mad} = 0{,}8\ g/cm^3$; $g = 10\ m/s^2$



Resolución:

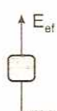
Hagamos el DCL del bloque cuando este se encuentra en reposo respecto de la tierra.

$E_{ef} = mg$

$\Rightarrow \rho_L g_{ef} V = \rho_C g V$

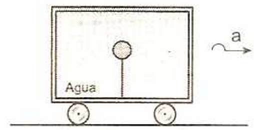
$1(10 - a) = 0{,}8(10)$

$\Rightarrow a = 2\ m/s^2$

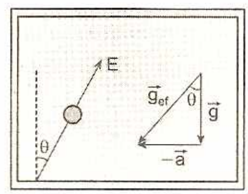


89. En un recipiente que contiene agua se encuentra una esfera de corcho atada mediante una cuerda al fondo. El recipiente comienza a moverse con aceleración constante $a = 7{,}5\ m/s^2$ hacia la derecha. Si el volumen de la esfera es 2 litros, ¿qué ángulo se desvía la cuerda?, ¿cuál es el módulo del empuje sobre la esfera?

($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:



La gravedad efectiva g_{ef} en el interior del líquido es:

$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} \Rightarrow g_{ef} = 12{,}5\ m/s^2$

Del principio de equivalencia sabemos que los cuerpos se alinean con la gravedad efectiva.

El ángulo de inclinación de la cuerda es:

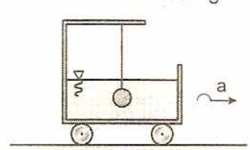
$\tan\theta = \dfrac{a}{g} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{7{,}5}{10} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$

La magnitud del empuje E depende de la gravedad efectiva:

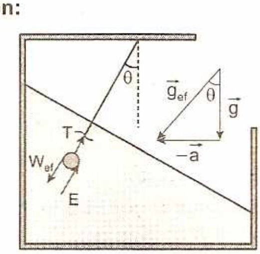
$E = \rho_{agua} g_{ef} V \Rightarrow E = (1000)(12{,}5)(2 \times 10^{-3}) = 25\ N$

$\therefore\ \theta = 37°$; $E = 25\ N$

90. En un recipiente que contiene agua se encuentra una esfera de masa 9 kg y volumen 3 litros, atada mediante una cuerda al techo del carro. Si el sistema comienza a moverse con aceleración constante $a = 10\sqrt{3}\ m/s^2$ hacia la derecha, ¿qué ángulo se desvía la cuerda?, ¿qué empuje soporta la esfera? ¿cuál es la tensión en la cuerda? $g = 10\ m/s^2$.

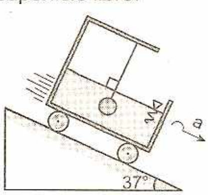


Resolución:

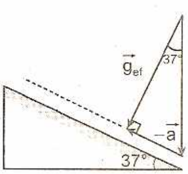


La gravedad efectiva g_{ef} en el interior del líquido es:
$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} = 20\ m/s^2$
Del principio de equivalencia sabemos que los cuerpos se alinean con la gravedad efectiva.
El peso efectivo es:
$W_{ef} = mg_{ef} \Rightarrow W_{ef} = (9)(20) = 180\ N$
El ángulo de inclinación de la cuerda es:
$\tan\theta = \dfrac{a}{g} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$
La magnitud del empuje E depende de la gravedad efectiva:
$E = \rho_{agua} g_{ef} V \Rightarrow E = (1000)(20)(3 \times 10^{-3}) = 60\ N$
Para un sistema de referencia ubicado en el carro, la esfera se encuentra en reposo relativo.
$\Sigma\vec{F} = 0:\ T = W_{ef} - E \Rightarrow T = 180 - 60 = 120\ N$
$\therefore\ \theta = 60°;\ E = 60\ N;\ T = 120\ N$

91. En la figura mostrada hallar la aceleración a del carro sobre el plano inclinado, tal que, la superficie libre del líquido sea paralelo al plano y a su vez el hilo que sujeta a la esfera se dispone perpendicularmente a la superficie libre.

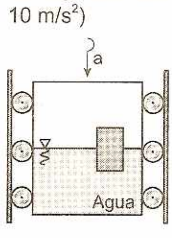


Resolución:



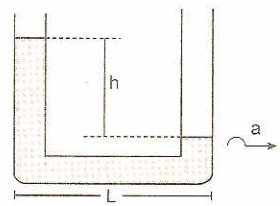
Del principio de equivalencia sabemos que los cuerpos se alinean con la gravedad efectiva, esto significa que la cuerda que sostiene a la esfera es colineal con la gravedad efectiva.
Analizando vectorialmente tenemos que:
$a = g(\text{sen}37°) = 6\ m/s^2;\ g_{ef} = g(\cos 37°) = 8\ m/s^2$
$\therefore\ a = 6\ m/s^2$

92. En el sistema mostrado, cuando el ascensor baja a velocidad constante el empuje que actúa sobre el cuerpo parcialmente sumergido es E = 20 N. Determinar la magnitud del empuje, cuando el sistema baja con una aceleración de $a = 5\ m/s^2$. ($g = 10\ m/s^2$)

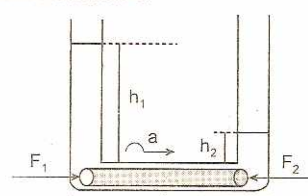


Resolución:
La magnitud del empuje depende de la gravedad local que afecta al fluido que lo rodea.
$E = \rho_{liq} V(g \pm a)$
(+): cuando sube con a
(−): cuando baja con a
Cuando el sistema baja con velocidad constante ($a = 0$)
$E = \rho_{liq} Vg \Rightarrow 20 = (1000)(V)(10) \Rightarrow V = 2 \times 10^{-3}\ m^3$
Cuando el sistema baja con aceleración constante a:
$E_1 = (1000)(2 \times 10^{-3})(10 - 5)\ \therefore\ E_1 = 10\ N$

93. Un tubo en U, de sección transversal constante, que contiene un líquido, es acelerado hacia la derecha con una aceleración constante a, como indica la figura. ¿Cuál es la diferencia de alturas h entre las columnas de líquido de las ramas verticales?

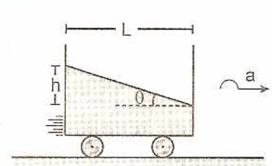


Resolución:
Consideramos como nuestro sistema físico, el tubo horizontal de sección S.



Si: $F = PS$
$F_1 = \rho g h_1 S$ y $F_2 = \rho g h_2 S$
Segunda ley de Newton:
$F_R = ma \Rightarrow (F_1 - F_2) = ma$
$S\rho g(h_1 - h_2) = \rho(SL)a \Rightarrow h_1 - h_2 = \dfrac{a}{g}L$
Luego: $h = \dfrac{a}{g}L$

Consecuencia:
Un recipiente que contiene un cierto líquido, acelera horizontalmente. Debido a la inercia, la superficie libre del líquido se inclina un ángulo θ respecto de la horizontal.

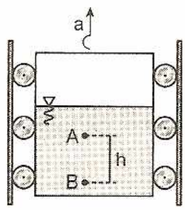


De la fórmula anterior: $a = \left(\dfrac{h}{L}\right)g$

Pero: $\frac{h}{L} = \tan\theta \quad \therefore \; a = g\tan\theta$

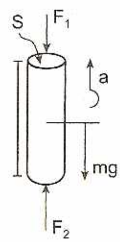
«El ángulo de inclinación θ es directamente proporcional a la magnitud de la aceleración».

94. La figura muestra un ascensor que sube verticalmente con aceleración constante a; en su interior lleva un líquido de densidad ρ en reposo respecto a las paredes del ascensor. Hallar la diferencia de presiones entre los puntos A y B separados una distancia h.



Resolución:

Tomamos como muestra (sistema físico) un tubito imaginario del líquido, de altura h y sección S, entre los puntos A y B.



Segunda ley de Newton:

$(F_2 - F_1 - mg) = ma$

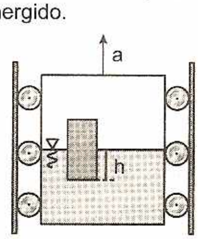
$\Rightarrow (F_2 - F_1) = m(a + g)$

$P_B(S) - P_A(S) = \rho_{liq.}(Sh)(a + g)$

$P_B - P_A = \rho_{Liq}(g + a)h$

Consecuencia

En la figura mostrada, un bloque se encuentra parcialmente sumergido.



I. La presión hidrostática a la profundidad h será: $P = \rho_{liq}(g + a)h$

II. La fuerza resultante (empuje) que ejerce el líquido, sobre el cuerpo sumergido parcialmente, será:

$E = PA \Rightarrow E = \rho_{liq}(g + a)h(A)$

A : área de la base del cuerpo

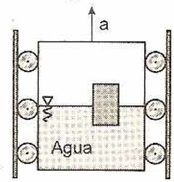
A – h: volumen sumergido (V_s)

$E = \rho_{liq}(g + a)V_s$

«La magnitud del empuje es proporcional al módulo de la gravedad efectiva».

Este resultado es compatible con el principio de equivalencia, base de la teoría de la relatividad.

95. En la figura mostrada el ascensor está inicialmente en reposo, en su interior contiene agua, sobre el cual flota un bloque de madera. Cuando el ascensor sube con aceleración a, ¿aumentará el volumen sumergido en agua?



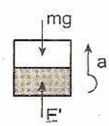
Resolución:

Cuando el ascensor está en reposo, el peso del cuerpo es igual al empuje. Consideremos el volumen sumergido V_1:

V: volumen total del cuerpo.

$E = W \Rightarrow \rho_{Liq}\,gV_1 = \rho_C gV \Rightarrow V_1 = \frac{D_C}{D_{liq}}V \qquad ...(1)$

Realizamos el DCL del bloque, cuando el ascensor sube con aceleración. Consideremos el volumen sumergido V_2:



$E' = \rho_{liq}(g + a)V_2$

Segunda ley de Newton:

$(E' - mg) = ma \Rightarrow E' = m(g + a)$

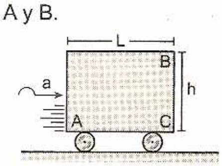
ρel problema anterior, sabemos que:

$\rho_{liq}(g + a)V_2 = \rho_C V(g + a) \Rightarrow V_2 = \frac{\rho_C}{\rho_{liq}}V \qquad ...(2)$

De las ec. (1) y (2): $V_1 = V_2$

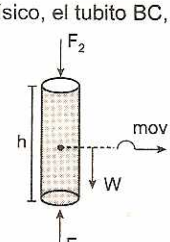
«El volumen sumergido permanece constante, independiente de la aceleración del sistema».

96. Un cisterna de largo L y una altura h está llena hasta el máximo de un líquido de densidad ρ y se mueve con una aceleración a en la dirección horizontal. Determinar la diferencia de presiones entre los puntos A y B.



Resolución:

Consideremos nuestro sistema físico, el tubito BC, de sección S:



Si: $F = PS$

Luego:

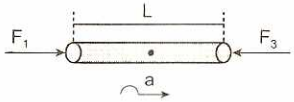
$F_2 = P_B S$ y $F_3 = P_C S$

$\Sigma F_y = 0$: $(F_3 - F_2) = W$

$(P_C - P_B)S = \rho g(Sh)$

$\Rightarrow P_C - P_B = \rho gh \qquad ...(1)$

Consideremos nuestro sistema físico, el tubito AC, de sección S.



Segunda ley de Newton:

$F_R = ma \Rightarrow (F_1 - F_3) = \rho Va$

$(P_A - P_C)S = \rho(SL)a$

$\Rightarrow P_A - P_C = \rho La \qquad ...(2)$

Sumando las ecuaciones (1) y (2):

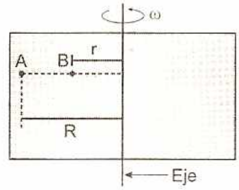
$P_A - P_B = \rho(gh + aL)$

La diferencia de presiones entre A y B se incrementa debido a la inercia.

Si, a = 0, el móvil está en reposo o se mueve con velocidad constante, entonces:

$P_A - P_B = \rho gh$

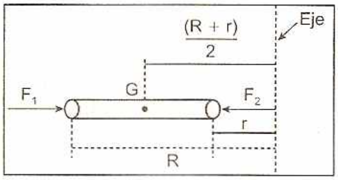
97. Un cilindro sellado que está completamente lleno de un líquido de densidad ρ, gira alrededor de un eje con una velocidad angular ω. Hallar la diferencia de presiones entre los puntos A y B, sabiendo que la recta que contiene a estos puntos es una recta radial y horizontal (considerar al líquido en reposo con respecto al cilindro).



Resolución:

Elegimos como nuestro sistema físico, al tubito de líquido AB, de sección S.

Dinámica circunferencial.



$F_C = ma_C \Rightarrow (F_1 - F_2) = m\omega^2 R_G$

R_G: radio del centro de gravedad

Pero: $F_1 = P_A(S)$ y $F_2 = P_B(S)$

Reemplazando: $(P_A - P_B)S = DV\omega^2 R_G$

$(P_A - P_B)S = D(R - r)S\omega^2 \dfrac{(R + r)}{2}$

Luego: $P_A - P_B = \dfrac{D\dfrac{\omega^2}{2}}{2}(R^2 - r^2)$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un cilindro hueco de altura 4l, flota en el agua como se muestra en la figura 1. La figura 2 muestra el mismo cilindro después de habérsele añadido un lastre que pesa la quinta parte del peso del cilindro. Entonces la altura x de la porción del cilindro que sobresale de la superficie del agua es igual a:

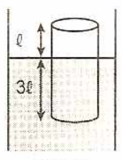


Fig. 1

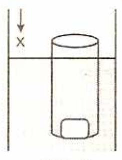
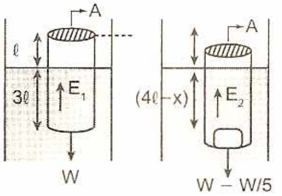


Fig. 2

A) $\frac{l}{5}$ B) $\frac{2l}{5}$ C) $\frac{l}{2}$ D) $\frac{3l}{5}$ E) $\frac{3l}{4}$

Resolución:

Graficamos ambas situaciones que experimenta el cilindro



Por condición de equilibrio en ambos casos:

$W = E_1 \qquad ...(1)$

$W + \dfrac{W}{5} = E(2) \qquad ...(2)$

$\dfrac{6W}{5} = E(2) \qquad ...(2)$

De ambas ecuaciones:

$\dfrac{6}{5}E_{(1)} = E_{(2)}$

$\dfrac{6}{5}(3\rho_L glA) = \rho_L g(4l - x)A$

$\therefore\ x = 2l/5$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

En el agua de mar un flotador completamente sumergido soporta a una persona de 75,0 kg con el 20% del volumen de la persona fuera del agua. Si el volumen del flotador es de 0,040 m^3, ¿Cuál es la densidad media del flotador en kg/m^3?

Datos:

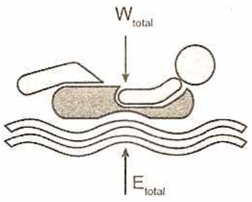
Densidad del agua de mar: $1{,}03 \times 10^3$ kg/m^3

Densidad media del cuerpo humano: $9{,}8 \times 10^2$ kg/m^3

A) $6{,}56 \times 10^2$ B) $6{,}79 \times 10^2$ C) $6{,}94 \times 10^2$
D) $7{,}06 \times 10^2$ E) $7{,}31 \times 10^2$

Resolución:

Por condición de equilibrio, la fuerza de gravedad y el empuje total que experimenta el hombre y el flotador deben anularse.



$W_{total} = E_{total}$

$W_{hombre} + W_{flotador} = E_{hombre} + E_{flotador}$

$m_Hg + m_Fg = \rho_L V'g + \rho_L V_F g$

V' = volumen del hombre sumergido

$V' = 80\%V_H = 0{,}8V_H = 0{,}8\dfrac{m_H}{\rho_H}$

$m_H + \rho_F V_F = \rho_L\left(0{,}8\dfrac{m_H}{\rho_H}\right) + \rho_L V_F$

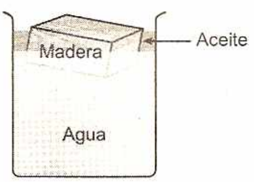
$\rho_F = \dfrac{1}{V_F}\left(\dfrac{\rho_L}{\rho_H}(0{,}8m_H) + \rho_L V_F = m_H\right)$

Reemplazando: $\rho_F = 7{,}31 \times 10^2$ Kg/m^3

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Calcule la presión manométrica en Pa, directamente debajo de un bloque cúbico de madera de 10 cm de arista y densidad 0,5 g/cm^3 que flota con 2/3 de su volumen sumergido tal como se muestra en la figura.
($g = 9{,}8$ m/s^2)



A) 130 B) 230 C) 340
D) 410 E) 490

Resolución:

La presión manométrica, es igual a la presión generada por el peso del bloque.

$P = \dfrac{mg}{A} = \dfrac{\rho Vg}{A} = \dfrac{\rho A l g}{A}$

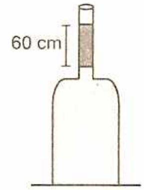
$P = 500(\dfrac{10}{100})(9{,}8) \quad \therefore\ P = 490$ Pa

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

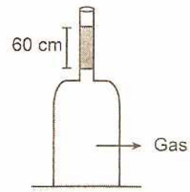
El recipiente mostrado contiene cierto gas atrapado por una columna de 60 cm de mercurio, como se muestra la figura. Calcule aproximadamente la presión que produce el gas sobre las paredes del recipiente (en kPa). Considere $P_{atm} = 100$ kPa,
$\rho_{Hg} = 13{,}6 \times 10^3$ kg/m^3, $g = 9{,}81$ m/s^2

A) 80
B) 100
C) 180
D) 200
E) 240



Resolución:

Del gráfico:



$P_{TOTAL\,(A)} = P_{atm} + P_{hidrostática}$

$= 100(10)^3 + 13{,}6(10)^3(9{,}81)\dfrac{60}{100}$

$P_{TOTAL\,(A)} \cong 180 \times 10^3$ Pa $= 180$ KPa

En el gas se considera que la presión es la misma para cualquier punto contenido en el gas.

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

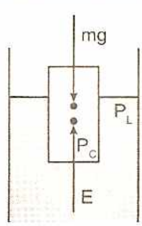
Un cubo de madera homogéneo se encuentra flotando con el 16% de su volumen emergiendo de la superficie libre de un recipiente de agua. Si el mismo recipiente con el cubo de madera se lleva a la Luna, donde la aceleración de la gravedad es 1/6 de la gravedad terrestre, la fracción del volumen del cubo que emerge, en porcentaje es:

A) 16 B) 48 C) 56
D) 72 E) 84

Resolución:

Bajo condiciones de equilibrio se cumple:

I. El volumen del líquido desalojado no depende de la aceleración de la gravedad por lo tanto el volumen emergente no cambia si cambia la aceleración de la gravedad.
II. De otra forma podemos plantear la ecuación aplicando la primera condición de equilibrio.



$\Sigma\overline{F} = \overline{O}$

$mg = E$

$\rho_{cuerpo} V_{cuerpo}\, g = \rho_L g V_{sumergida}$

$$V_s = V_c\frac{\rho_c}{\rho_L} \Rightarrow V_{emergente} = V_c - V_s$$

$$V_{emergente} = V_c\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_L}\right)$$

Por lo tanto, no depende de la aceleración de la gravedad. La densidad y el volumen no cambian.

Clave: A

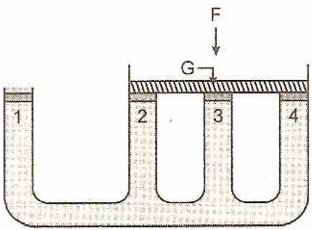
PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

Se aplica una fuerza de 1000 N sobre el émbolo 1. ¿Cuál sería la fuerza total, en N, que se debe ejercer sobre el embolo G, de masa insignificante, para mantener el equilibrio?

Nota:

Área 1 = 10 cm^2; Área 2 = 10 cm^2

Área 3 = 20 cm^2; Área 4 = 30 cm^2

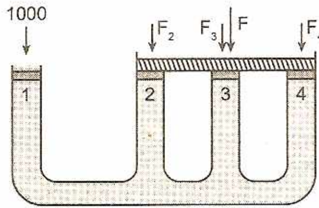


A) 1000 B) 2000 C) 3000

D) 4000 E) 6000

Resolución:

Por el principio de Pascal:



Se observa que:

$F = F_2 + F_3 + F_4$ ...(α)

- $\dfrac{1000}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} \Rightarrow \dfrac{1000}{10} = \dfrac{F_2}{10}$

  $\Rightarrow F_2 = 1000$ N

- $\dfrac{1000}{A_1} = \dfrac{F_3}{A_3} \Rightarrow \dfrac{1000}{10} = \dfrac{F_3}{20}$

  $\Rightarrow F_3 = 2000$ N

- $\dfrac{1000}{A_1} = \dfrac{F_4}{A_4} \Rightarrow \dfrac{1000}{10} = \dfrac{F_4}{30}$

  $\Rightarrow F_4 = 3000$ N

Reemplazando en α

$\therefore F = 6000$ N

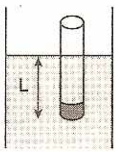
Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una esfera de madera cuya densidad relativa es 0,8 se deja caer desde una altura de 10 m, en un recipiente de gran profundidad que contiene agua. La profundidad máxima a la que penetrará en el agua será de:

A) 20 m B) 35 m C) 30 m
D) 40 m E) 25 m

2. Un leño cilíndrico lleva una carga de plomo en un extremo de modo que flote en posición erecta en el agua, como en la figura. La longitud de la parte sumergida es L = 2,45 m. El leño es puesto a oscilar verticalmente. Si se desprecia la fricción con el agua, ¿Cuál es el periodo de oscilación, en segundos?

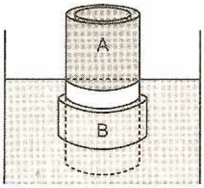


A) π B) $0{,}75\pi$ C) $0{,}5\pi$ D) $0{,}45\pi$ E) 2π

3. Un bloque cúbico de madera se encuentra sumergido con una de sus caras al ras del agua cuando encima de él se coloca una pesa de 0,2 kg. Cuando dicha pesa es retirada el bloque emerge del agua 2 cm. Determinar la longitud del lado del cubo y la densidad de la madera que lo forma.

A) 0,2 m; 600 kg/m^3 B) 0,1 m; 800 kg/m^3
C) 0,15 m; 750 kg/m^3 D) 0,4 m; 900 kg/m^3
E) 0,4 m; 850 kg/m^3

4. Un cilindro A de 2 m^3 de volumen y cuya densidad es 0,4 g/cm^3 lleva acoplado, a manera de cinturón un anillo cilíndrico B de 0,5 m^3 y 2 g/cm^3 de densidad. Si el conjunto flota en agua con el anillo completamente sumergido, el volumen del cilindro A que sobresale del agua, en m^3, es:



A) 0,70 B) 0,20 C) 0,50 D) 0,15 E) 0,30

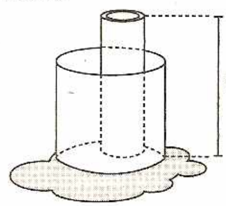
5. Un bloque metálico de 0,25 kg cuelga de uno de los brazos de una balanza de brazos iguales. Cuando se sumerge completamente el bloque en agua, la balanza se equilibra con 0,16 kg. ¿Cuál es la masa, en kg, de cada m^3 del metal que forma el bloque?

A) 1570 B) 1850 C) 3260
D) 2150 E) 2780

6. Un cubo de madera de 10 cm de arista flota en la superficie de separación de aceite y agua, con su cara inferior horizontal a 4 cm por debajo de la superficie de separación. La densidad relativa del aceite es 0,6. ¿Cuál es la masa del bloque si se encuentra completamente cubierto?

A) 0,76 kg B) 0,68 kg C) 0,88 kg
D) 0,48 kg E) 0,52 kg

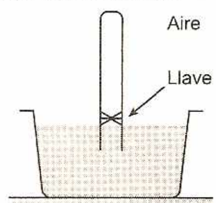
7. Un cilindro hueco de madera de altura h y densidad ρ, está en un recipiente de forma cilíndrica. Los radios interno y externo del cilindro y del recipiente son R, 2R y 3R, respectivamente. Encontrar la altura mínima del recipiente, para que al verter agua (densidad ρ_1) en él, el cilindro hueco pueda flotar libremente en este.



A) h B) $\dfrac{h\rho_1}{\rho_1+\rho}$ C) $\dfrac{h\rho}{\rho_1-\rho}$

D) $\dfrac{h\rho}{\rho_1}$ E) $\dfrac{h(\rho_1+\rho)}{\rho_1}$

8. Un tubo de 1 m de longitud, cerrado por un extremo, posee en el otro extremo una llave. Si se hace el vacío en el tubo y luego el extremo con la llave se introduce en un líquido, abriéndose posteriormente la llave, podemos afirmar:



I. Si el líquido es mercurio, alcanza una altura (dentro del tubo) menor que 1 m.
II. Si el líquido es agua, el tubo se llena completamente.
III. El tubo siempre se llena de líquido independientemente de la presión atmosférica existente.

A) I y II son correctas B) I y III son correctas
C) II y III son correctas D) Todas son correctas
E) Todas son falsas

9. Una piedra, en forma de paralelepípedo, está sumergida en el agua de un río, con la parte inferior apoyada en la arena de modo que no hay agua entre la piedra y la arena. Indicar verdadero (V) o falso (F):

I. La resultante de las fuerzas ejercidas por el agua es vertical y está dirigida hacia abajo.

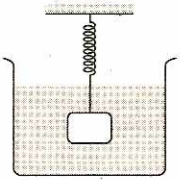
II. Para extraer la piedra de la arena, se requiere ejercer una fuerza de mayor valor que el peso de la piedra.

III. Para sostener la piedra dentro del agua, después de sacarla de la arena, se requiere una fuerza de menor valor que el peso de la piedra.

A) FFF B) FVF C) FVV D) VVV E) VFV

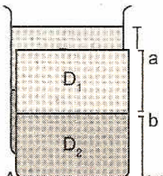
10. Una pesa de 20 kg se cuelga de un resorte observándose que lo estira 4 cm. Al introducir la pesa en agua se observa que el alargamiento del resorte se reduce a 1 cm. ¿Cuál es el volumen de la pesa? (Respuesta en m^3)

A) 0,0015
B) 0,025
C) 0,022
D) 0,15
E) 0,033



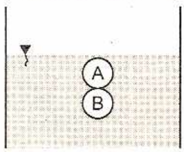
11. ¿Cuál es la presión en el fondo del cilindro mostrado, que tiene 2 líquidos no miscibles de densidades ρ_1 y ρ_2 con $2\rho_1 = \rho_2 = 1200$ kg/m^3 y $1{,}2b = a = 0{,}6$m.

A) 8648 Pa
B) 5908 Pa
C) 7608 Pa
D) 9408 Pa
E) 6704 Pa



12. Las esferas homogéneas A y B, que tienen el mismo volumen están unidas por un pegamento, se mantienen en equilibrio inmersas en agua. Cuando las esferas se despegan, la esfera A sube y flota con la mitad de su volumen fuera del agua, y la esfera B se hunde hasta el fondo del recipiente. Calcular las densidades relativas de las esferas A y B.

A) 0,5 y 1,5
B) 0,5 y 1
C) 0,05 y 1,5
D) 0,8 y 2
E) 1,5 y 0,5



13. Un bote de 800 kg, navega río abajo hasta llegar al mar. Considerando $g = 10$ m/s^2 para todo punto del recorrido, indicar verdadero (V) o falso (F):

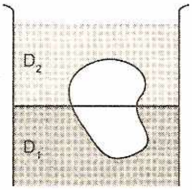
I. El empuje experimentado en el río fue de 8000 N.

II. La parte sumergida del bote disminuye cuando el bote pasa del río al mar.

III. En el mar el bote experimenta un mayor empuje

A) VVV B) FVF C) VFF D) FFF E) VVF

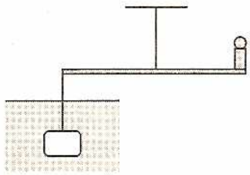
14. Sobre un líquido de densidad ρ_1 se vierte otro de densidad ρ_2 que no se mezcla con el primero. Es evidente que un cuerpo cuya densidad sea ρ, $\rho_1 > \rho > \rho_2$, flotara en el límite de separación entre dichos líquidos. ¿Qué parte del volumen del cuerpo estará sumergida en el líquido más denso?



A) $\dfrac{\rho-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}$ B) $\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho-\rho_2}$ C) $\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_1-\rho_2}$

D) $\dfrac{\rho_2}{\rho_1-\rho_2}$ E) $\dfrac{\rho}{\rho_1-\rho_2}$

15. El cubo solido de 10 cm de arista de la figura se equilibra en la balanza de brazos iguales con una pesa de 3 kg cuando se sumerge en agua. ¿Cuál es la densidad del material del cubo?



A) 3500 kg/m^3 B) 3700 kg/m^3
C) 4000 kg/m^3 D) 28000 kg/m^3
E) 4500 kg/m^3

16. Un tapón de vidrio suspendido en un diámetro da una indicación de 2,5 g en el aire; 1,5 g en agua y 0,7 g en ácido sulfúrico. ¿Cuál es la densidad del ácido sulfúrico, en kg/m^3?

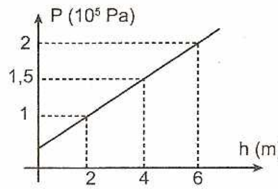
A) 1800 B) 1500 C) 1600 D) 1200 E) 1400

17. La figura muestra la gráfica presión (P) – profundidad (h), para un líquido contenido en un recipiente abierto en contacto con la atmósfera. Considerando $g = 10$ m/s^2, indicar verdadero (V) o falso (F).

I. La presión atmosférica en el lugar donde se encuentra el depósito vale 50 kPa.

II. La pendiente de la gráfica tiene un valor de 25 kPa/m.

III. La densidad relativa de líquido es igual a 2,5.

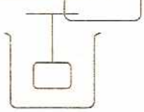


A) VVV B) VFV C) VFF D) FFF E) VVF

18. Considere un bloque homogéneo sumergido en un líquido como se indica en la figura, donde "d" es la densidad del líquido y T es el valor de la tensión en la cuerda. La tabla muestra los datos obtenidos para dos líquidos diferentes. Calcular el volumen del cuerpo en cm^3($g= 10\ m/s^2$)

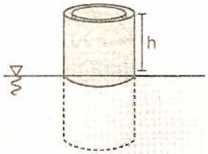
A) 200
B) 300
C) 400
D) 500
E) Faltan datos

d (g/cm^3)	T(N)
1,6	2
1,2	4

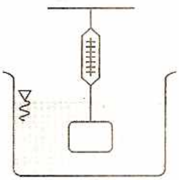


19. Un tubo hueco, abierto por ambos extremos, flota verticalmente con una altura $h = 5$ cm sobresaliendo del agua. Se vierte aceite de densidad relativa 0,9 dentro del tubo. ¿Qué longitud debe tener el tubo para que quede completamente llene de aceite?

A) 60 cm
B) 70 cm
C) 50 cm
D) 55 cm
E) 40 cm



20. Un objeto suspendido de un dinamómetro está completamente sumergido en un líquido. Podemos afirmar:



A) La indicación del dinamómetro es la misma con el cuerpo dentro o fuera del líquido.
B) La masa del cuerpo sumergido es igual a la masa del líquido desalojado.
C) La lectura del dinamómetro es numéricamente igual al empuje experimentado por el cuerpo.
D) El empuje es igual al peso del cuerpo
E) La lectura del dinamómetro es menor que el peso del cuerpo.

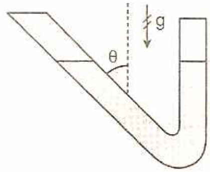
21. Un recipiente de 4 kg y 2 L de capacidad contiene 1,5 L de agua y se encuentra sobre una balanza. Si se logra introducir lentamente un bloque cubico de 10 cm de arista y 8 kg; determine ahora la lectura de la balanza ($g = 10\ m/s^2$).

A) 135 N B) 130 N C) 120 N D) 60 N E) 55 N

22. En el tubo mostrado se tiene 200 g de mercurio que desarrolla pequeñas oscilaciones. Despreciando todo rozamiento, determine el periodo de dichas oscilaciones.

$A_{\substack{\text{sección}\\ \text{del tubo}}} = 0{,}5\ cm^2$, $g = 10\ m/s^2$

$\rho_{Hg} = 13{,}6\ g/cm^3$, $\theta = 37°$



A) 0,2 s B) 0,4 s C) 0,6 s D) 0,8 s E) 1 s

23. La densidad de una solución de sal varia con la profundidad h según $r = \left[1 + \frac{h}{50}\right]\frac{g}{cm^3}$, h se expresa en cm. En esta solución se introduce 2 bolitas, unidas entre si por un hilo, cuyos volúmenes y masas son $0{,}1\ cm^3$, $0{,}2\ cm^3$ 0,13 g y 0,34 g respectivamente. Hasta alcanzar el equilibrio la primera bolita se hundió 20 cm, determine la longitud del hilo ($g= 10\ m/s^2$).

A) 6 cm B) 7,5 cm C) 8 cm
D) 12,5 cm E) 15 cm

24. El sólido mostrado presenta dos bases de radios r y R, donde $r < R$. Si en las situaciones de la figura 1 y 2 las presiones que le ejercen a la mesa están en la relación de 1 a 4, respectivamente, determine la relación r/R.

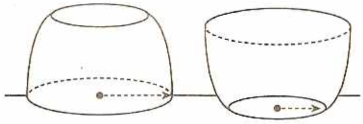
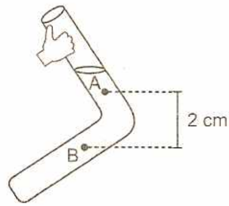


figura 1 figura 2

A) 1/3 B) 3 C) 1/2 D) 2 E) 1/4

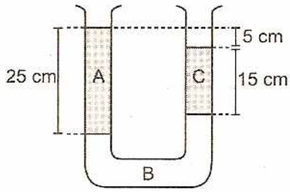
25. Se muestra un recipiente que contiene un líquido de densidad ρ. Si entre los puntos B y A la diferencia de presiones es 160 Pa, determine ρ.
Considere que $g= 10\ m/s^2$



A) 200 kg/m^3 B) 400 kg/m^3
C) 600 kg/m^3 D) 800 kg/m^3
E) 1000 kg/m^3

26. En un tubo en forma de U se vierten tres líquidos A, B y C. Si las densidades de A y C son 500 kg/m^3 y 300 kg/m^3, respectivamente, determine la densidad del líquido B.

A) 800 kg/m^3
B) 900 kg/m^3
C) 1200 kg/m^3
D) 1600 kg/m^3
E) 1800 kg/m^3



27. En la figura (1), el dispositivo mostrado contiene un gas. Si colocamos un bloque de 10 kg sobre uno de los émbolos del dispositivo, de manera que estos permanecen en reposo (véase la figura 2), ¿en cuánto varia la lectura del dinamómetro P, luego de colocar el bloque? (g= 10 m/s^2).

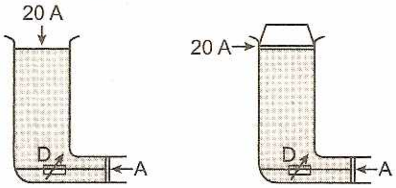
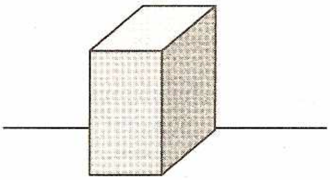


figura (1) figura (2)

A) 1 N B) 3 N C) 5 N D) 6 N E) 8 N

28. Las dimensiones de un bloque son 8 cm x 10 cm x 20 cm. Si al permanecer apoyado sobre una balanza esta registra 20 N, determine la presión del bloque sobre el piso, cuando es colocado como se muestra en la figura.

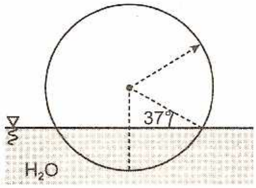


A) 1200 Pa B) 1800 Pa C) 2000 Pa
D) 2400 Pa E) 2500 Pa

29. El techo de una casa presenta un área de 200 m^2. Si la presión atmosférica en la región donde se ubica la casa es 10^5 Pa, determine el módulo de la fuerza que la atmósfera ejerce sobre dicho techo.

A) 2×10^5 N B) 2×10^7 N C) 4×10^5 N
D) 4×10^7 N E) 8×10^7 N

30. Una pelota está sumergida parcialmente en un recipiente con agua. Si la presión hidrostática en la parte más baja de la pelota es 1,2 kPa, determine su radio (g= 10 m/s^2).



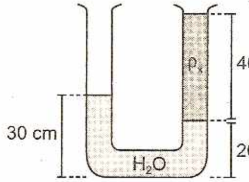
A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm
D) 40 cm E) 50 cm

31. Si una ventana horizontal de un submarino se encuentra a una profundidad de 140 m, ¿qué fuerza, debido al agua, soporta dicha ventana circular de 30 cm de radio?

Considere que $\rho_{H_2Omar} = 1{,}03$ g/cm^3
$g = 10$ m/s^2 y $\pi = 3{,}14$

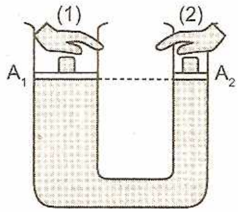
A) 400 200,5 N B) 407 509,2 N
C) 442 813,4 N D) 554 241,3 N
E) 558 417,6 N

32. Determine la densidad del líquido desconocido (ρ_x), de acuerdo a la información mostrada en el gráfico.($\rho_{H2O} = 1$ g/cm^3)



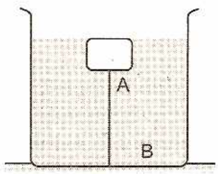
A) 0,1 g/cm^3 B) 0,15 g/cm^3 C) 0,20 g/cm^3
D) 0,25 g/cm^3 E) 0,45 g/cm^3

33. Dos pistones de áreas A_1 y A_2; al ser empujados hacia abajo, ejercen al fluido, fuerzas de módulos F_1 y F_2, respectivamente. Si los pistones permanecen en reposo y las presiones de los pistones 1 y 2 sobre el fluido son P_1 y P_2, respectivamente, señale la alternativa correcta.



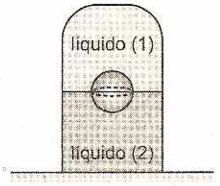
A) $F_1 = F_2$ B) $F_1A_1 = F_2A_2$
C) $P_1A_1 = P_2A_2$ D) $F_1A_2 = F_2A_1$
E) $P_1A_2 = P_2A_1$

34. El bloque de volumen 2×10^{-3} m^3 se encuentra sumergido totalmente en agua. Si el bloque es de 700 g, determine el módulo de la tensión en la cuerda AB. (g= 10 m/s^2).



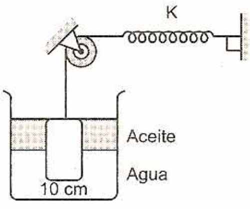
A) 13 N B) 14 N C) 15 N D) 16 N E) 20 N

35. En el sistema mostrado, la esfera flota en un líquido de densidad 4,1 g/cm^3 y con la décima parte de su volumen sumergido en dicho líquido. Determine la densidad de la esfera si el líquido de la parte superior presenta una densidad de 0,1 g/cm^3



A) 0,1 g/cm^3 B) 0,2 g/cm^3 C) 0,3 g/cm^3
D) 0,4 g/cm^3 E) 0,5 g/cm^3

36. El sistema que se muestra se encuentra en equilibrio. El cubo de aluminio ($\rho_{aluminio}$ = 2,7 g/cm^3) se encuentra sumergido la mitad en aceite (ρ_{aceite} = 0,8/cm^3) y el resto en agua. Determine la deformación que experimenta el resorte.
(K = 900 N/m; g = 10 m/s^2).

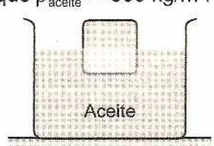


A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

37. Desde el fondo de un depósito de 5 m de profundidad, se suelta una esfera cuya densidad es la cuarta parte de la densidad del líquido. Determine hasta que altura asciende respecto del nivel libre.

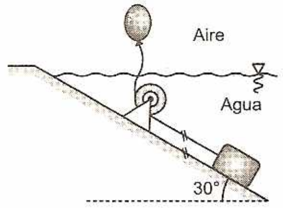
A) 3 m B) 5 m C) 10 m
D) 15 m E) 18 m

38. En el gráfico, un bloque de 2 kg está parcialmente sumergido en aceite. Si permanece en reposo, determine el volumen sumergido del bloque.
Considere que ρ_{aceite} = 800 kg/m^3.



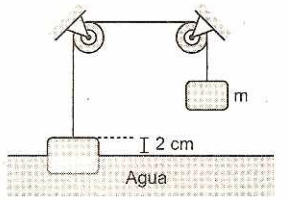
A) 2×10^{-3} m^3 B) $2,5 \times 10^{-3}$ m^3
C) 3×10^{-3} m^3 D) 4×10^{-3} m^3
E) $4,5 \times 10^{-3}$ m^3

39. Si el sistema está en equilibrio, determine la masa del globo inflado con helio (ρ_{helio} = 0,1 kg/m^3). Considere que el volumen del helio es de 1 m^3 y del cubo liso es 0,006 m^3 (ρ_{cubo} = 1,1 g/cm^3), además, ρ_{aire} = 1,2 kg/m^3 y g= 10 m/s^2).



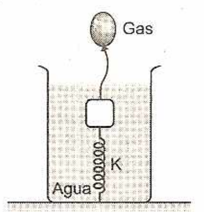
A) 0,2 kg
B) 0,4 kg
C) 0,6 kg
D) 0,8 kg
E) 1,0 kg

40. Determine la masa m que mantiene al sistema en equilibrio, tal como se muestra, si el cubo tiene 10 cm de arista y una densidad de 2,8 g/cm^3



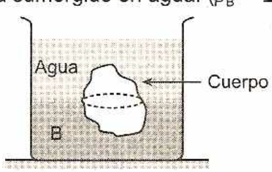
A) 1 kg B) 2 kg C) 3 kg D) 4 kg E) 5 kg

41. Un bloque de 4 kg sumergido en el agua está unido a un resorte ideal, el cual esta estirado 10 cm y, a su vez, está unido mediante una cuerda ideal a un globo cuya masa, incluyendo el gas, es 0,9 kg. ¿Qué volumen presenta el globo?
Considere lo siguientes:
ρ_{bloque} = 2000 kg/m^3; ρ_{H_2O} = 1000 kg/m^3
ρ_{aire} = 1,3 kg/m^3; K= 100 N/m



A) 1 m^3 B) 2 m^3 C) 3 m^3 D) 4 m^3 E) 5 m^3

42. En el sistema mostrado, el cuerpo está en equilibrio. Determine su densidad si el 20% de su volumen está sumergido en agua. (ρ_B = 2 g/cm^3)



A) 1,5 g/m^3 B) 1,8 g/m^3 C) 2,0 g/m^3
D) 0,9 g/m^3 E) 0,6 g/m^3

43. Un pequeño globo aerostático se encuentra en reposo a cierta altura. Si su peso es 1200 N, ¿qué cantidad de lastre debería soltar, para ascender con 2 m/s^2? (g = 10 m/s^2).

A) 20 kg B) 22 kg C) 24 kg D) 25 kg E) 27 kg

44. Una esfera de 75 g y 525 cm^3 de volumen emerge a la superficie partiendo del reposo desde el fondo de una piscina de agua de 1,4 m de profundidad. Calcule el módulo de la aceleración de la esfera. ($g = 10\ m/s^2$).

A) 5 m/s^2 B) 10 m/s^2 C) 15 m/s^2
D) 30 m/s^2 E) 60 m/s^2

45. Una esfera cuya densidad es 500 kg/m^3 se deja en libertad desde el fondo de un lago de 20 m de profundidad. Determine el tiempo que empleará en llegar a la superficie. ($g= 10\ m/s^2$).

A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 4 s E) 5 s

46. Un recipiente de capacidad calorífica despreciable contiene 112 g de agua a 10° C. Si en el recipiente se colocan 500 g de plata que se encuentra a 90 °C, ¿a qué temperatura se encuentra el agua cuando la plata se encuentre a 50 °C? ($C_{eplata} = 0,056$ cal/g °C).

A) 10°C B) 20°C C) 30°C
D) 35°C E) 40°C

47. Un calorímetro de aluminio de 200 g contiene 56 g de agua. Si se introduce en el calorímetro un metal ($C_e = 0,1$ cal/g °C) se observa que una vez dado el equilibrio térmico el metal que se encontraba inicialmente a mayor temperatura experimenta el doble del cambio de temperatura que el agua. ¿Cuál es la masa del metal que se introduce en el recipiente? ($C_{eAl} = 0,22$ cal/g °C).

A) 100 g B) 200 g C) 300 g
D) 400 g E) 500 g

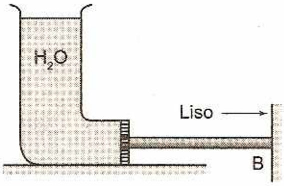
48. Un recipiente de capacidad calorífica 4 cal/ °C contiene 20 g de agua a 20 °C. Si se introducen 50 g de un mineral desconocido cuya temperatura es de 140 °C, se observa que el equilibrio térmico se da a 60 °C. ¿Cuál es el calor específico del mineral?

A) 0,22 cal/g°C B) 0,24 cal/g°C C) 0,26 cal/g°C
D) 0,28 cal/g°C E) 0,33 cal/g°C

49. Un calorímetro, cuyo equivalente en agua es 48 g, contiene 120 g de agua a 20 °C. Si se introduce una barra de plata de 300 g ($C_e = 0,056$ cal/g °C) a 130 °C, determine la cantidad de calor que gana el agua hasta el equilibrio térmico.

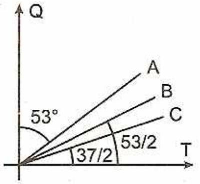
A) 1,2 kcal B) 2,4 kcal C) 3,6 kcal
D) 4,8 kcal E) 6,4 kcal

50. Determine el incremento de la fuerza de reacción en B cuando el nivel libre del agua se incrementa en 20 cm. (Considere $g = 10\ m/s^2$ y que el área del embolo es $10^{-2} m^2$)



A) 5 N B) 10 N C) 15 N D) 20 N E) 25 N

51. El siguiente grafico nos muestra el comportamiento de la temperatura de tres sustancias, conforme estas absorben calor. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



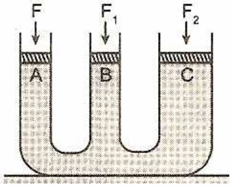
I. $C_A = C_B = C_C$

II. Si $m_A = m_B = m_C$, entonces $C_{eA} > C_{eB} > C_{eC}$

III. Si $m_C > m_B > m_A$, entonces $C_{eC} > C_{eB} > C_{eA}$

A) VFF B) FFV C) FVF D) VVF E) VVV

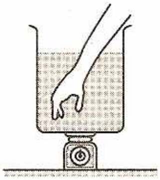
52. Los émbolos A, B y C de masas despreciables tienen áreas de 5 cm^2, 60 cm^2 y 70 cm^2, respectivamente, además, F = 50 N. Determine el módulo de ($F_1 + F_2$) si el sistema se encuentra en equilibrio.



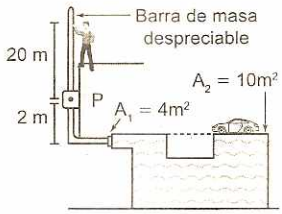
A) 1000 N B) 1300 N C) 2000 N
D) 1500 N E) 2200 N

53. La balanza indica 96 N cuando la persona sumerge 900 cm^3 de su brazo en el agua. Determine cuando indica la balanza, luego de que la persona retira su brazo del recipiente ($g = 10\ m/s^2$).

A) 102 N
B) 96 N
C) 105 N
D) 80 N
E) 87 N



54. El sistema mostrado está en equilibrio. Si se coloca en el émbolo (2) un auto de 450 kg, determine el módulo de la fuerza horizontal que adicionalmente debe ejercer el joven para mantener vertical la barra articulada en P ($g = 10\ m/s^2$).



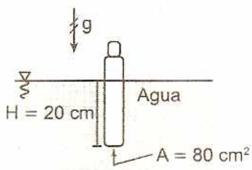
A) 20 N B) 40 N C) 18 N
D) 180 N E) 200 N

55. El peso aparente de un objeto sumergido en agua es 20 N. Determine la masa del objeto. (ρ_{objeto}= 1200 kg/m^3; g = 10 m/s^2)

A) 2 kg B) 6 kg C) 10 kg D) 12 kg E) 20 kg

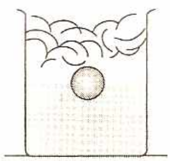
56. Sobre un tronco de madera se coloca un pequeño bloque de 0,6 kg, manteniéndose en equilibrio tal como se muestra. Si lentamente se va quitando el bloque, hasta que el tronco queda en equilibrio, determine qué valor tendrá la nueva longitud del tronco que queda sumergido en el agua (g = 10 m/s^2).

A) 10,5 cm
B) 20 cm
C) 12,5 cm
D) 13,0 cm
E) 16,5 cm



57. Una esfera flota sobre un líquido de densidad 3,2 g/cm^3 con la quinta parte de su volumen sumergido en este tal como se muestra. ¿Qué densidad tiene la esfera si la densidad del gas es 200 kg/m^3?

A) 2680 kg/m^3
B) 1280 kg/m^3
C) 1245 kg/m^3
D) 800 kg/m^3
E) 1340 kg/m^3



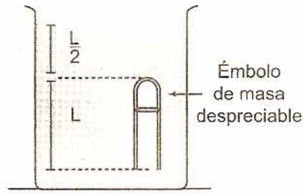
58. Desde el fondo de un tanque lleno de agua se suelta un pedazo de corcho (ρ = 0,4 g/cm^3), el cual demoró 2 s para llegar a la superficie libre del agua (ρ = 1 g/cm^3). Despreciando el rozamiento, determine la profundidad del tanque (g = 10 m/s^2).

A) 30 m B) 40 m C) 50 m D) 70 m E) 60 m

59. Un buzo se encuentra a una profundidad de 30 m, a esta profundidad pierde los reflejos y su organismo experimenta cambios. ¿Cuánto debe elevarse, como mínimo, si se sabe que la presión máxima que puede soportar sin que su organismo sea afectado es 2 atm? Considere que la densidad del agua es 103 kg/m^3 (g = 10 m/s^2).

A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

60. Se sumerge una probeta de longitud L en un líquido de densidad ρ, de tal manera que el líquido se eleva en la probeta hasta la altura de $\frac{3}{4}$L, tal como se muestra. Determine la presión del aire encerrado en la probeta. Considere que la presión atmosférica es P_0.

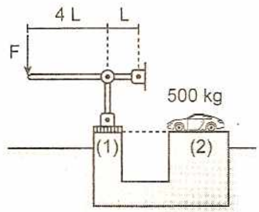


A) $2P_0 + \rho gL$ B) $P_0 + \frac{\rho gL}{2}$

C) $P_0 + \frac{\rho gL}{3}$ D) $P_0 + \frac{\rho gL}{4}$

E) $P_0 + \frac{3}{4}\rho gL$

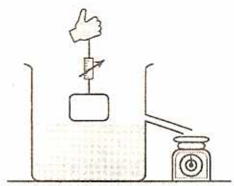
61. Determine el valor de F que mantiene al sistema en equilibrio. Considere émbolos y barras de masa despreciable. ($A_2 = 50A_1$)



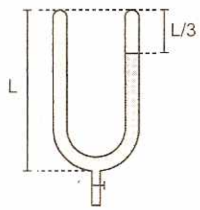
A) 5 N B) 10 N C) 15 N
D) 20 N E) 25 N

62. Al introducir lentamente el bloque hasta sumergirlo lentamente sin tocar el fondo, se observa que la balanza indica 30 N y el dinamómetro 35 N. Determine la masa del bloque (g =10 m/s^2).

A) 1,5 kg
B) 6,5 kg
C) 3 kg
D) 3,5 kg
E) 5,5 kg



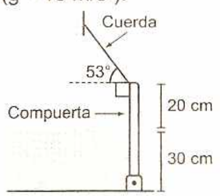
63. En un tubo en forma de U, tapado por uno de sus extremos, se echa un líquido de manera que en su rama tapada queda aire y el nivel del líquido con su rama abierta coincide con el borde del tubo. ¿Qué longitud del líquido en la rama abierta debe descender, abriendo el grifo que se encuentra en la parte inferior del tubo, de tal manera que los niveles del líquido en ambas ramas se igualen? Considere la densidad del líquido ρ y la presión atmosférica P_0. Considere despreciable el cambio de temperatura del aire.



A) $\frac{L}{2}\left(1+\frac{l\rho g}{P_0}\right)$ B) $\frac{L}{3}\left(1+\frac{L\rho g}{3P_0}\right)$ C) $\frac{L}{4}\left(1+\frac{L\rho g}{2P_0}\right)$

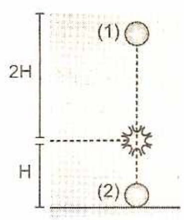
D) $\frac{L}{5}\left(1+\frac{L\rho g}{P_0}\right)$ E) $\frac{\rho g L^2}{9}$

64. La compuerta de dimensiones 50 cm × 20 cm está en equilibrio tal como se muestra. Determine la tensión de la cuerda que sujeta la compuerta para evitar que el agua salga (g =10 m/s²).



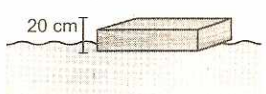
A) 30 N
B) 40 N
C) 60 N
D) 80 N
E) 100 N

65. Las esferas (1) y (2) son de densidades 2ρ y ρ, respectivamente, si se sueltan simultáneamente, determine el tiempo que transcurre hasta que colisionan.



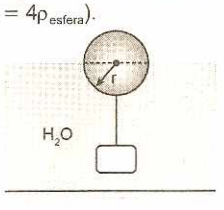
A) $\sqrt{H}$
B) $\frac{1}{2}\sqrt{H}$
C) $\sqrt{10H}$
D) $\frac{4}{5}\sqrt{H}$
E) $\frac{7}{6}\sqrt{H}$

66. El tablón de base cuadrada de 2 m de lado está construido de una madera de densidad 0,5 g/cm³. ¿Cuántas personas de 80 kg pueden subirse en el tablón sin que este se sumerja por completo? Considere que el tablón se encuentra en un lago (g=10 m/s²).



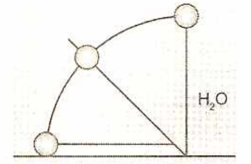
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

67. A continuación se muestra una esfera unida, mediante una cuerda, a un bloque. Determine la densidad del bloque si este presenta la mitad del volumen de la esfera ($\rho_{H_2O} = 4\rho_{esfera}$).



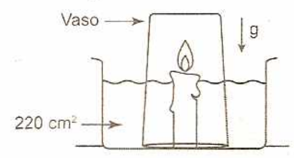
A) 1,25 g/cm³
B) 1,5 g/cm³
C) 1,75 g/cm³
D) 2,9 g/cm³
E) 2,5 g/cm³

68. Una esfera de 100 cm³ y densidad 0,5 g/cm³ se encuentra en el fondo de un estanque unida a una estaca mediante una cuerda de 1 m de longitud y de masa despreciable. Determine la tensión máxima que experimenta la cuerda luego de que la esfera se suelta.



A) 0,5 N
B) 1 N
C) 1,5 N
D) 2 N
E) 2,5 N

69. En el siguiente experimento después de cubrir la vela con un vaso, cuya sección transversal es 20 cm², la vela se apaga y el agua en su interior asciende 10 cm. ¿Cuál es la presión (en bar) del gas contenido en el vaso?
(P_{atm} = 1 bar; g = 10 m/s²).

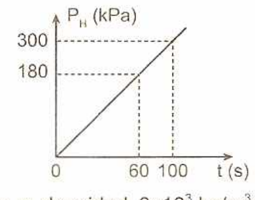


A) 0,900
B) 0,800
C) 0,854
D) 0,989
E) 0,960

70. Un densímetro se compone de una ampolla esférica y de una varilla cilíndrica de sección transversal 0,4 cm² el volumen total de la ampolla y de la varilla es 13,2 cm³. Cuando se sumerge en el agua el densímetro flota con 8 cm de la varilla fuera de la superficie libre del agua. En alcohol queda 1 cm de la varilla fuera del líquido. Calcule la densidad del alcohol.

A) 0,625 g/cm³ B) 0,81 g/cm³ C) 0,78 g/cm³
D) 0,75 g/cm³ E) 0,94 g/cm³

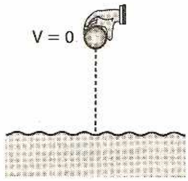
71. La grafica nos indica la lectura de un instrumento (que mide la presión hidrostática) colocada en un submarino que se sumerge rectilíneamente formando un ángulo de 37° respecto a la horizontal. Determine la rapidez del submarino.
Considere ρ_{H_2O} = 1000 kg/m³; g = 10 m/s²



A) 0,1 m/s
B) 0,3 m/s
C) 0,4 m/s
D) 0,5 m/s
E) 0,6 m/s

72. Una esfera de 3 kg y densidad 3x10³ kg/m³, es soltada sobre un lago. Si consideramos que la densidad del agua varía de acuerdo a la ecuación $\rho = (10^3 + 2h)$ kg/m³, (h: profundidad), determine la cantidad de trabajo desarrollado por la fuerza de empuje, hasta que la esfera alcanza su máxima rapidez. El lago es de gran profundidad. Desprecie efecto viscoso. (g = 10 m/s²).

A) 5 kJ
B)10 kJ
C) 15 kJ
D) 20 kJ
E)25 kJ



73. Un recipiente sin base y de paredes cilíndricas cuya fuerza de gravedad es P, se encuentra sobre una mesa. Los bordes del recipiente están bien ajustados a la superficie de la mesa. En el recipiente se vierte un líquido y una vez que el nivel de este alcanza una altura h el recipiente prácticamente pierde el contacto con el piso; determine la densidad del líquido.

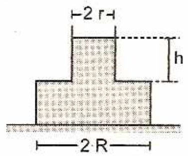
A) $\frac{P}{2gh\pi(R^2-r^2)}$

B) $\frac{2P}{gh\pi(R^2-r^2)}$

C) $\frac{P}{gh\pi(R^2)}$

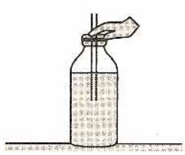
D) $\frac{P}{gh\pi(r^2)}$

E) $\frac{P}{gh\pi(R^2-r^2)}$



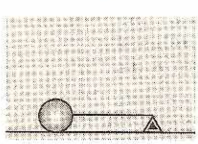
74. La tapa atravesada por un tubo se enrosca totalmente en el recipiente tal que la presión del aire encerrado es 1,05 bar. ¿Cuánto desciende el nivel del agua en el recipiente? La sección transversal del tubo es la décima parte que la del recipiente P_{atm} = bar, g = 10 m/s^2.

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 5 cm
D) 7 cm
E) 9 cm



75. La esfera de 1 N es soltada en la posición mostrada. Determine la tensión en el hilo de masa despreciable cuando este se ubique verticalmente. Desprecie la viscosidad del agua ($\rho_{agua} = 4\rho_{esfera}$, g = 10 m/s^2)

A) 8 N
B) 1 N
C) 4 N
D) 9 N
E) 3 N



76. Un cubo homogéneo de 1 m de arista flota en un líquido cuya densidad es 10 veces mayor. Si con una fuerza externa presionamos ligeramente la tapa superior del cubo (se le hunde) y luego lo abandona, calcule el periodo de oscilación del cubo (g = 10 m/s^2).

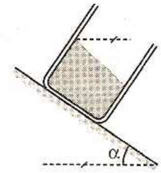
A) 0.25 s B) 0,46 s C) 0,62 s
D) 0,78 s E) 0,96 s

77. ¿Qué ángulo haría con la horizontal la superficie libre de un líquido contenido en un deposito que se desliza en una pendiente lisa?

A) α B) 2α

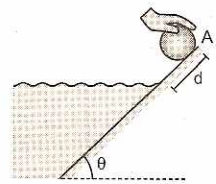
C) $\frac{\alpha}{2}$ D) $\frac{3}{2}\alpha$

E) $\frac{3}{4}\alpha$



78. En la figura mostrada la esfera pequeña es soltada en A y resbala sin fricción. Hasta que profundidad máxima respecto a la superficie libre se sumerge en el líquido, cuya densidad es el doble de la densidad de la esfera.

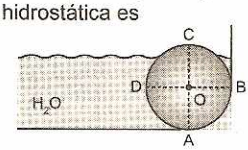
A) $d\cos^2\theta$
B) $d\text{sen}^2\theta$
C) $d\tan\theta$
D) $d\cos\theta$
E) $d\text{sen}\theta$



79. Una esfera de corcho se encuentra sumergido en el interior de un recipiente que contiene agua y atada por una cuerda al fondo del mismo. Si la tensión de la cuerda cuando el recipiente esta en reposo es 10 N; calcule la variación de la tensión cuando al recipiente se deja en caída libre.

A) 10 N B) −10 N C) 20 N D) −20 N E) cero

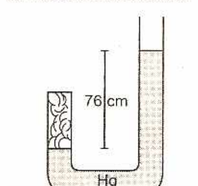
80. El cilindro de radio R y generatriz L cubre el agujero AB, impidiendo que salga el agua. Es erróneo que la fuerza hidrostática es



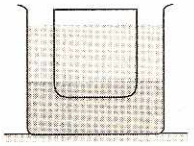
A) $2P_{H_2O}gR^2L$, en dirección horizontal.
B) $0{,}5P_{H_2O}gR^2L$, en dirección vertical sobre la superficie BC.
C) $P_{H_2O}gR^2L$, en dirección vertical sobre el volumen ADC.
D) $0{,}5P_{H_2O}gR^2L$, en la dirección vertical hacia arriba.
E)$2P_{H_2O}gR^2L$, horizontal sobre BC

81. La rama corta y cerrada de un tubo contiene 18 cm de una columna de aire. ¿Qué longitud de mercurio adicional debemos hacer ingresar en la rama larga, si se desea reducir en $\frac{1}{3}$ el volumen de aire?

A) 100 cm
B) 88 cm
C) 76 cm
D) 60 cm
E) 48 cm



82. Un cilindro flota parcialmente sumergido en agua y en aceite, tal como se muestra. Si se agrega más aceite al recipiente.



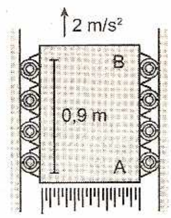
A) El volumen sumergido en el agua aumenta.
B) El volumen sumergido en el agua no cambia.
C) El volumen sumergido en el agua disminuye.
D) El volumen sumergido en el agua disminuye y luego aumenta.
E) No se sabe que sucede.

83. Dos esferas homogéneas A y B que tienen el mismo volumen y están pegadas por medio de un pegamento se mantienen en equilibrio, inmersas en el agua. Cuando las esferas se despegan, la esfera A sube y flota con la mitad de su volumen fuera del agua, y la esfera B se hunde hasta el fondo del recipiente. Determine la densidad en g/cm^3 de las esferas A y B respectivamente.

A) 0,50; 1,50 B) 1,50; 0,50 C) 0,50; 1,00
D) 0,05; 1,50 E) 0,05; 15,0

84. Se tiene un recipiente que contiene agua, el cual acelera verticalmente hacia arriba. Determine en cuanto se diferencian las presiones en A y B ($g = 10\ m/s^2$).

A) 10 000 Pa
B) 10 800 Pa
C) 10 700 Pa
D) 12 000 Pa
E) 15 000 Pa

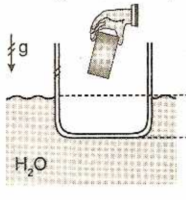


85. Un cilindro recto de 0,5 m de altura y 100 cm^2 de área de la base, contiene 1 dm^3 de agua (1 dm = 10 cm). En el cilindro se introduce una barra de igual tamaño que el cilindro pero de sección recta igual 80 cm^2. ¿Cuál es la menor masa que debe tener la barra para que pueda llegar al fondo del cilindro?

A) 1,6 kg B) 2,4 kg C) 3,2 kg D) 4 kg E) 4,8 kg

86. Una caja cúbica de 0,5 kg flota en equilibrio tal como se muestra. Si se introduce un pedazo de ladrillo de 1,5 kg, ¿cuánto más desciende dicha caja hasta alcanzar el equilibrio? ($g = 10\ m/s^2$).

A) 4 cm
B) 5 cm
C) 7 cm
D) 9 cm
E) 10 cm



87. Un cono recto se coloca en forma invertida sobre el agua y de su vértice se sujeta un trozo de cadena de tal forma que el cono flota con la mitad de su altura sumergida. Halle la longitud de la cadena para tal efecto si

$\rho_{cadena} = 1600\ kg/m^3$, $V_{cadena} = 5 \times 10^{-6}\ m^3$
(por cada cm de largo) $V_{cono} = 12 \times 10^{-5}\ m^3$
$\rho_{cono} = 100\ kg/m^3$

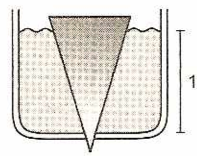
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

88. Un globo se llena de cierto gas a presión atmosférica. La masa de la tela del globo es de 3 kg y el volumen, cuando está lleno de dicho gas, es de 150 m^3. Bajo esas condiciones, ¿cuál es la carga que puede levantar el globo?
($\rho_{aire} = 0,13\ kg/m^3$; $\rho_{gas} = 0,03\ kg/m^3$)

A) 100 N B)120 N C) 135 N
D) 150 N E)175 N

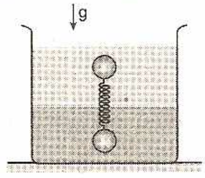
89. Un orificio de 400 cm^2 de área está situado en el fondo de un depósito que contiene agua, se cierra mediante un cono colocado con el vértice hacia abajo tal como indica la figura. Si la altura del cono es de 60 cm y el área de su base es de 1600 cm^3, ¿qué fuerza hidrostática resultante actúa sobre el cono?

A) 15 N
B) 25 N
C) 35 N
D) 45 N
E) 60 N



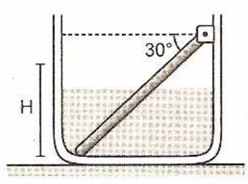
90. Dos esferas de 1,2 kg y 4,2 se encuentran en equilibrio sumergidas en aceite y agua según se indica. Halle el estiramiento del resorte si las esferas tienen igual volumen. ($g = 10\ m/s^2$, $K = 500\ N/m$).

A) 1,8 cm
B) 2,4 cm
C) 3,0 cm
D) 7,2 cm
E) 80 cm



91. La barra homogénea de 10 m de longitud y 960 kg/m^3 de densidad se encuentra parcialmente sumergida en agua, encontrándose su extremo libre apoyado en el fondo del recipiente. Calcule la altura necesaria de agua para que la barra pierda contacto con el fondo del recipiente.

A) 1 m
B) 2 m
C) 4 m
D) 5 m
E) 6 m



92. En la superficie de separación de dos líquidos con densidad ρ_1 y ρ_2 flota una arandela de densidad $\rho(\rho_1 < \rho < \rho_2)$. La altura de la arandela es h. Determine que profundidad se sumergirá ésta en el segundo líquido.

A) $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}h$ B) $\dfrac{\rho-\rho_1}{2\rho_1-\rho_2}h$ C) $\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}h$

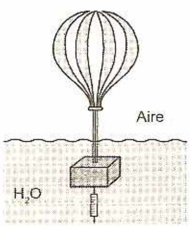
D) $\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho-\rho_1}h$ E) $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho}h$

93. Un cubo de estaño (ρ_{sn} = 7,3 g/cm^3) de 10 cm de arista, flota en mercurio. Si sobre el mercurio se vierte agua, ¿qué mínimo espesor debe tener la capa de agua para que cubra la cara superior del cubo? ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3.

A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm D) 6 cm E) 5 cm

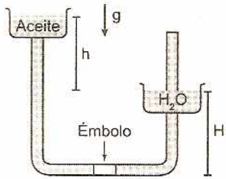
94. Un globo de 5 m^3 y 10 N flota en el aire y sujeta a un bloque de madera de 0,02 m^3, cuya densidad es 0,5 g/cm^3 por medio de una barra delgada de masa despreciable. Calcule cuánto indica el dinamómetro (ρ_{aire} = 1,2 kg/m^3)

A) 40 N
B) 150 N
C) 160 N
D) 170 N
E) 45 N



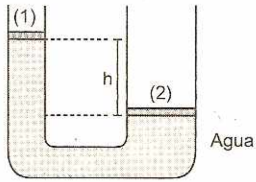
95. Dos recipientes, conectados por un tubo de sección uniforme, contienen agua y aceite tal como se muestra. Si el émbolo liso está en equilibrio; determine $\dfrac{H}{h}$ (ρ_{aceite} = 800 kg/m^3)

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 4,5



96. El sistema mostrado permanece en equilibrio, determine h sabiendo que si se ubica un bloque de 1 kg sobre el émbolo izquierdo dicho émbolo se ubica 12 cm debajo del otro, pero, si se ubicara el bloque sobre el émbolo derecho origina que este émbolo se ubique 12 cm debajo del otro. (m_1= 2 kg, m_2 = 3kg)

A) 1 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 4 cm
E) 5 cm



97. Una burbuja de aire se desprende desde el fondo de un lago logrando triplicar su volumen cuando llega a la superficie. Calcule la profundidad del lago.

A) 5 m B) 10 m C) 15 m D) 20 m E) 25 m

CLAVES

1. D	14. A	27. C	40. B	53. E	66. B	79. B	92. C
2. A	15. A	28. E	41. C	54. D	67. B	80. E	93. E
3. B	16. A	29. B	42. B	55. D	68. C	81. B	94. B
4. A	17. A	30. C	43. C	56. C	69. D	82. C	95. D
5. E	18. D	31. B	44. E	57. D	70. C	83. A	96. B
6. A	19. C	32. D	45. B	58. A	71. D	84. B	97. D
7. D	20. E	33. D	46. B	59. D	72. D	85. D	
8. A	21. B	34. A	47. E	60. E	73. E	86. D	
9. D	22. E	35. E	48. B	61. D	74. C	87. A	
10. A	23. D	36. B	49. A	62. B	75. D	88. B	
11. D	24. C	37. D	50. D	63. B	76. C	89. C	
12. A	25. D	38. B	51. B	64. A	77. A	90. B	
13. E	26. D	39. D	52. B	65. A	78. E	91. C	

Movimiento armónico simple (MAS)

11 capítulo

Heinrich Rudolf Hertz (Hamburgo, 22 de febrero de 1857-Bonn, 1 de enero de 1894) fue un físico alemán descubridor del efecto fotoeléctrico y de la propagación de las ondas electromagnéticas, así como de formas de producirlas y detectarlas. Ya en su infancia demostró tener capacidades fuera de lo común, pues se sabe que leía a los clásicos en versión original (Platón y tragedias griegas). También leía árabe y su madre presumía que siempre era el primero de la clase.

Su pasión, reconocida por él mismo, era la física, de tal forma que se desplazó hasta Berlín para estudiarla con Gustav Kirchhoff y otros. Con una tesis sobre la rotación de esferas en un campo magnético, Heinrich obtuvo su doctorado en 1880, con tan solo 23 años y en 1883 fue nombrado profesor de Física teórica en la Universidad de Kiel. Luego, en 1885, se trasladó a la Universidad de Karlsruhe, donde descubrió la forma de producir y detectar ondas electromagnéticas, las que veinte años antes habían sido predichas por James Clerk Maxwell, cuyas ecuaciones fueron reformuladas por el alemán. Probó experimentalmente que las ondas electromagnéticas pueden viajar a través del aire libre y del vacío, como había sido predicho por Maxwell y Faraday. La unidad de medida de la frecuencia, el hercio (*hertz* en la mayoría de los idiomas) lleva ese nombre en su honor.

MOVIMIENTO OSCILATORIO

Un móvil está animado de movimiento oscilatorio o vibratorio cuando se desplaza a uno y otro lado de una posición fija siguiendo una ley cualquiera.

Fig. 11.1.a

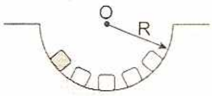


Fig. 11.1.b

La figura (11.1.a) muestra un alambre de acero que vibra respecto del eje vertical. La figura (11.1.b) muestra un pequeño cubo que oscila sobre una superficie esférica perfectamente lisa. Entre los numerosos tipos de movimiento vibratorio u oscilatorio que existen en la naturaleza el más importante es el movimiento armónico simple.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

El MAS es el movimiento oscilatorio de la proyección sobre el diámetro cualquiera de un punto que se mueve con movimiento circunferencial uniforme.

Así, por ejemplo, en la figura 11.2 el móvil Q recorre la circunferencia con MCU (movimiento circunferencial uniforme) ocupando sucesivamente las posiciones 1; 2; 3; ... mientras que la proyección P recorre el diámetro horizontal con MAS, pasando por las posiciones A; B; C; D; E; F; G.

El móvil Q tiene velocidad angular constante ω en radianes por cada segundo.

ELEMENTOS DE UN MAS

Oscilación sencilla. Es el desplazamiento de un extremo al otro de la trayectoria. En la figura 11.2 el móvil va desde la posición A hasta la posición G o desde G hasta A.

Oscilación completa. Es el desplazamiento de un extremo al otro de la trayectoria y regreso hasta el punto de partida, es decir, experimenta un desplazamiento nulo. En la figura 11.2, el móvil se desplaza de A hasta G y luego de G hasta A.

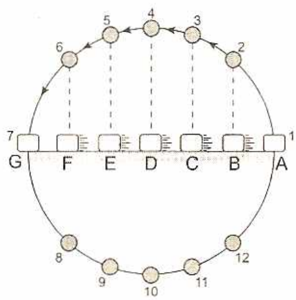
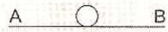
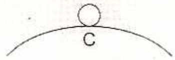


Fig. 11.2

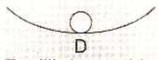
Tipos de equilibrio:

1. 

Equilibrio neutral o indiferente

2. 

Equilibrio inestable

3. 

Equilibrio estable

Período (T). Es el tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa.

Frecuencia (f). Es el número de oscilaciones completas descritas en la unidad de tiempo.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \qquad \text{...(11.1)}$$

Elongación. Es la distancia que separa al móvil de su posición de equilibrio.

Período: El período de oscilación de una partícula unida a un resorte, depende únicamente de la masa de la partícula.

PE: posición de equilibrio

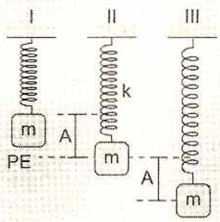
A: amplitud del movimiento respecto de la PE

k: constante elástica

m: masa de la partícula

T: período de oscilación completa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



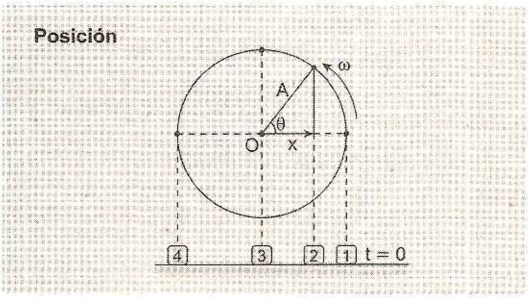
RELACIÓN ENTRE EL MAS Y EL MCU

Si una partícula se desplaza con un movimiento circunferencial uniforme (MCU), sus proyecciones sobre su diámetro cumplen con los requisitos del MAS. El radio de la circunferencia, trayectoria, es igual a la amplitud A del MAS.

Elongación ($\vec{x}$). Es la proyección del radio A sobre el eje horizontal. El ángulo θ es el desplazamiento angular que experimenta la partícula en el MCU, $\theta = \omega t$.

$x(t) = A\cos\theta$

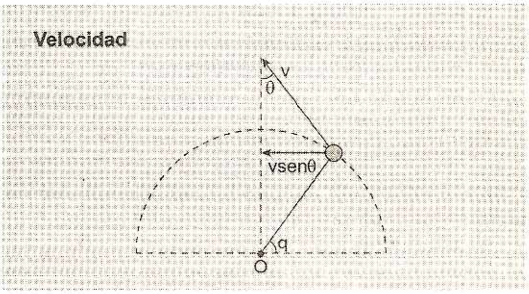
$x(t) = A\cos(\omega t)$



Velocidad instantánea. Es la proyección de la velocidad tangencial sobre el eje horizontal. La velocidad "v" en el MCU es $v = \omega A$

$v(t) = v\text{sen}\theta$

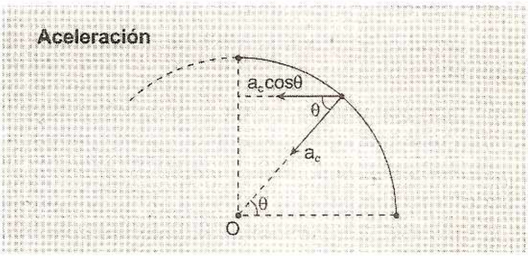
$v(t) = \omega[A\text{sen}(\omega t)]$



Aceleración instantánea. Es la proyección de la aceleración centrípeta sobre el eje horizontal. La aceleración centrípeta en el MCU es $a_c = \omega^2 A$

$a(t) = a_c\cos\theta = \omega^2 A\cos(\omega t)$

$a(t) = \omega^2 x$



Período (T). Analizando el MAS de la partícula de masa "m" desde el punto de vista dinámico. La fuerza resultante que actúa sobre la partícula es $F = kx$.

De la segunda ley de Newton: $F_R = ma$

$$kx = m(\omega^2 x) \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sabemos que: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Mas de un sistema (masa + resorte)

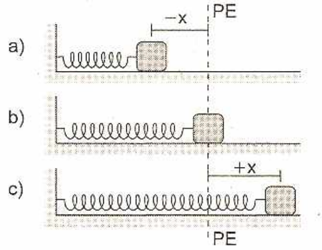


Fig. 11.3

PE: posición de equilibrio (x = 0)

Elongación ($\vec{x}$). Es aquella magnitud vectorial que indica la posición de la partícula en cada instante "t" respecto de la posición de equilibrio.

Amplitud (A). Es la máxima elongación alcanzada por la partícula durante el movimiento. La partícula inicia su movimiento (t = 0) cuando x = A, mediante la ley:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t)} \quad ...(11.2)$$

Velocidad instantánea ($\vec{v}$). Es la proyección de la velocidad tangencial del móvil Q sobre el eje horizontal.

$$\boxed{v(t) = \omega[A\text{sen}(\omega t)]} \quad ...(11.3)$$

Aceleración instantánea ($\vec{a}$). Es la proyección de la aceleración del móvil Q sobre el eje horizontal.

$$\boxed{a(t) = \omega^2 x} \quad ...(11.4)$$

Período (T). El período del sistema (masa + resorte) es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa "m" e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante de elasticidad "k".

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad ...(11.5)$$

Energía del sistema: La energía del sistema es igual a la suma de la energía cinética, más, la energía potencial elástica.

$$E_{sistema} = E_C + E_P$$

$$\boxed{\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2} \quad ...(11.6)$$

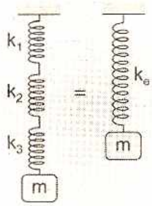
Donde "v" es la velocidad de la partícula "m" en el instante que se encuentra a la distancia "x" de la posición de equilibrio.

Asociación de resortes

1. **En serie:** el conjunto de resortes es factible de ser sustituido por un solo resorte equivalente, cuya constante de rigidez se denomina constante equivalente k_e.

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

Si consideramos:
$k_1 = 200$ N/m; $k_2 = 300$ N/m; $k_3 = 600$ N/m

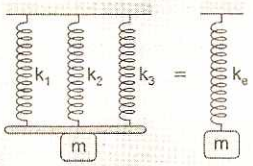


La constante elástica equivalente es:
$k_e = 100$ N/m

2. **En paralelo.** El conjunto de resortes es factible de ser sustituido por un solo resorte equivalente, cuya constante de rigidez se denomina constante equivalente k_e.

$$k_e = k_1 + k_2 + k_3$$

Si consideramos:
$k_1 = 200$ N/m; $k_2 = 300$ N/m; $k_3 = 600$ N/m



La constante elástica equivalente es:
$k_e = 1100$ N/m

Gráfica fuerza versus posición

En toda gráfica F-x, la energía total del sistema (masa + resorte), es igual al área bajo la recta, figura 11.4.

$\boxed{E_P = \frac{1}{2}kx^2}$ E_P: energía potencial elástica

$\boxed{E_C = mv^2}$ E_C: energía cinética

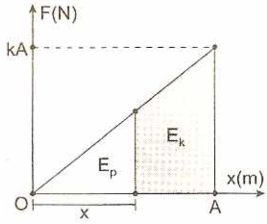


Fig. 11.4

Movimiento periódico

Cuando el movimiento se repite a intervalos de tiempo T se le llama periódico,y a intervalos iguales de tiempo, todas las variables del movimiento (velocidad, aceleración, etc.), toman el mismo valor.

El movimiento periódico más simple es el armónico; frecuentemente se representa el movimiento armónico como la proyección sobre una línea recta, de un punto que se mueve en una circunferencia a velocidad constante: ω = velocidad angular o la frecuencia circular, T y "f" son el periodo y la frecuencia del movimiento armónico usualmente medidos en segundos y ciclos por segundo, respectivamente.

ω_m: frecuencia natural.

Energía de un MAS

En el MAS la energía se transforma continuamente de potencial en cinética y viceversa. En los extremos solo hay energía potencial puesto que la velocidad es cero y en el punto de equilibrio solo hay energía cinética. En cualquier otro punto, la energía correspondiente a la partícula que realiza el MAS es la suma de su energía potencial más su energía cinética.

Toda partícula sometida a un movimiento armónico simple posee una energía mecánica que podemos descomponer en: energía cinética (debido a que la partícula está en movimiento) y energía potencial (debido a que el movimiento armónico es producido por una fuerza conservativa).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular la velocidad lineal máxima de un MAS, si la frecuencia es 2 Hz y la amplitud 0,5 m.

Resolución:

La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 4\pi$ rad/s

La velocidad lineal máxima es:

$v_{máx} = A\omega \Rightarrow v_{máx} = (0,5)(4\pi) \quad \therefore\ v_{máx} = 2\pi$ m/s

2. Calcular el período de un MAS que tiene una amplitud de 10 cm y pasa por el punto de equilibrio con velocidad de 0,4 m/s.

Resolución:

La velocidad lineal máxima es:

$v_{máx} = A\omega \Rightarrow 0,4 = (0,1)\omega \Rightarrow \omega = 4$ rad/s

Pero: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} \quad \therefore\ T = \frac{\pi}{2}$ s

3. Un cuerpo de 3 kg de masa atado a un resorte oscila con amplitud de 4 cm y período de π s. Hallar el valor de la energía total del sistema.

Resolución:

La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ rad/s

La máxima velocidad lineal es:

$v = A\omega = (0,04)(2) = 0,08$ m/s

La energía del sistema es:

$E_{sistema} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(3)(0,08)^2 = 0,0096$ J

$\therefore\ E_{sistema} = 9,6$ mJ

4. Un objeto de 10 kg de masa está ligado a un resorte de constante k = 40 N/m. Durante su movimiento pasa por su posición de equilibrio con velocidad v = 0,5 m/s. Hallar la amplitud de su movimiento.

Resolución:

La frecuencia angular es:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2$ rad/s

La velocidad máxima es: $v = A\omega$

$\Rightarrow$ (0,5 m/s) = A(2 rad/s) $\quad \therefore\ A = 0,25$ m

5. Un móvil con MAS tiene frecuencia de 2 Hz y amplitud de 0,5 m. Calcular la máxima velocidad que adquiere la partícula durante su movimiento.

Resolución:

El móvil adquiere su máxima velocidad cuando pasa por su posición de equilibrio, es decir, cuando x = 0, entonces $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$.

Luego, sen(ωt) = 1

Velocidad: $v = \omega[A\text{sen}(\omega t)]$

Velocidad máxima: $v_{máx} = \omega A$

Pero: $\omega = 2\pi f \Rightarrow v_{máx} = 2\pi fA$

$v_{máx} = 2\pi(2)(0,5) = 2\pi \Rightarrow v_{máx} = 6,28$ m/s

6. Un móvil con MAS tiene período de 0,8 s y amplitud de 0,16 m. Calcular la máxima aceleración que adquiere la partícula durante su movimiento.

Resolución:

El móvil adquiere su máxima aceleración cuando se encuentra instantáneamente en los extremos, es decir, cuando x = A o x = −A, la fuerza elástica es máxima: F = kA.

Aceleración: $a = \omega^2 x$

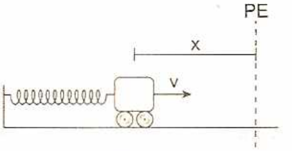
Aceleración máxima: $a_{máx} = \omega^2 A$

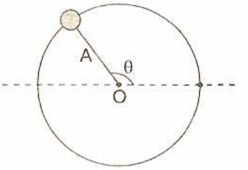
Pero: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,8} = \frac{5}{2}\pi$ rad/s

$a_{máx} = \left(\frac{5}{2}\pi\right)^2(0,16) = \pi^2 \Rightarrow a_{máx} = 9,87$ m/s^2

7. Un móvil con MAS tiene una amplitud de 60 cm y velocidad angular de 5 rad/s, ¿en qué posición x a partir de la posición de equilibrio el móvil tendrá una velocidad de 180 cm/s?

Resolución:





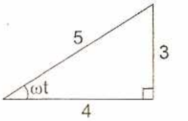
Datos: A = 60 cm; ω = 5 rad/s; v = 180 cm/s

Velocidad:

$v = \omega[A\text{sen}(\omega t)] \Rightarrow 180 = 5(60)[\text{sen}(\omega t)]$

$\text{sen}(\omega t) = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos(\omega t) = \pm\frac{4}{5}$

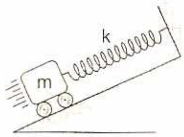
Posición:



$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow x = 60\left(\pm\frac{4}{5}\right) \Rightarrow x = \pm 48$ cm

Existen dos posiciones en el cual la velocidad de la partícula es, en módulo 180 cm/s.

8. Un oscilador mecánico compuesto de un resorte de constante elástica k = 200 N/m y un coche de masa m = 2 kg, oscila en un plano inclinado liso. Determinar la ecuación que define al movimiento, sabiendo que la amplitud es 5 cm.



Resolución:

Sea x el eje sobre el plano inclinado. El coche oscila alrededor de su posición de equilibrio (PE).

La frecuencia de oscilación depende únicamente de "m" y "k":

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s}$$

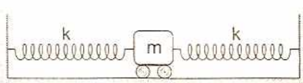
La ecuación del movimiento es:
$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow x = 0{,}05[\cos(10t)]$

El móvil inicia su movimiento en uno de sus extremos:
$\therefore\ x = [0{,}05(\cos 10t)]$ m

9. Un bloque de masa 2 kg, oscila en un plano horizontal libre de rozamiento, asociado a dos resortes iguales de constante elástica k = 980 N/m cada uno. Halla la constante de rigidez equivalente y el período de oscilación.

Resolución:

Para un pequeño desplazamiento lateral los resortes experimentan deformaciones iguales, entonces los resortes están acoplados en paralelo.



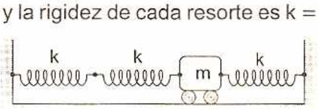
La constante de rigidez equivalente es:
$k_e = k + k = 2k \Rightarrow k_e = 1960$ N/m

El período de oscilación está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{1960}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{980}}$$

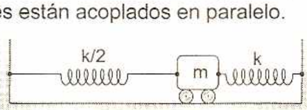
Aproximando: $9{,}8 = \pi^2$ $\quad\therefore\ T = 0{,}2$ s

10. Hallar el período del MAS, si la masa del bloque es 0,3 kg y la rigidez de cada resorte es k = 2000 N/m.



Resolución:

Reduciendo el sistema tenemos: k/2 y k. Para un desplazamiento lateral pequeño los resortes experimentan deformaciones iguales, entonces los resortes están acoplados en paralelo.



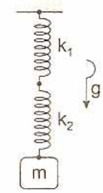
La constante de rigidez equivalente es:

$$k_e = \frac{k}{2} + k = \frac{3}{2}k \Rightarrow k_e = 3000 \text{ N/m}$$

El período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}3}{3000}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{50} \text{ s}$$

11. Dos resortes ideales de constantes elásticas $k_1 = 600$ N/m y $k_2 = 300$ N/m se han acoplado en serie, de modo que al extremo libre del resorte (1), se sujeta al techo, y en el extremo del resorte (2), se instala una carga de masa m = 18 kg. Determinar el período de las oscilaciones libres.



Resolución:

Cálculo de la constante elástica equivalente al sistema mostrado, conectados en serie:

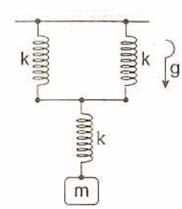
$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_e = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\Rightarrow k_e = \frac{(600)(300)}{900} \Rightarrow k_e = 200 \text{ N/m}$$

Cálculo del período de oscilaciones libres:

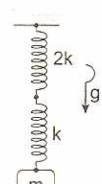
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{18}{200}} = 2\pi\left(\frac{3}{10}\right)\text{s} \quad \therefore\ T = \frac{3}{5}\pi \text{ s}$$

12. Hallar el período del MAS, si la masa del bloque es 0,2 kg y la rigidez de cada resorte es k = 3000 N/m.



Resolución:

Reduciendo el sistema tenemos: 2k y "k".
Puede apreciarse en el gráfico adjunto que la tensión que soportan los resortes son iguales, por consiguiente los resortes están conectados en serie.

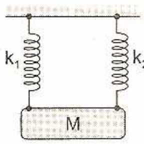


$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_e = \frac{2}{3}k = 2000 \text{ N/m}$$

El período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{2000}} \quad \therefore\ T = \frac{\pi}{50} \text{ s}$$

13. La gráfica muestra un bloque de masa M = 10 kg que está sometido por dos resortes de rigidez $k_1 = 1800$ N/m y $k_2 = 2200$ N/m. Si al bloque se le da un impulso el cual le da movimiento a todo el sistema, halle el período de oscilación.



Resolución:

Cálculo de la rigidez equivalente (en paralelo):

$k_e = k_1 + k_2 = 4000$ N/m

Cálculo del período de oscilación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{4000}} \qquad \therefore\ T = \frac{\pi}{10}\text{ s}$$

14. Hallar el período de un MAS, si se sabe que la relación entre la máxima aceleración y su máxima velocidad es 4π.

Resolución:

La máxima aceleración es: $a_{máx} = \omega^2 A$

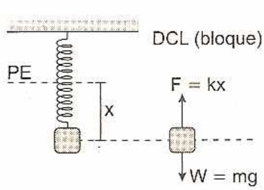
La velocidad máxima es:

$$v_{máx} = \omega A \Rightarrow \frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \omega = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 4\pi$$

$\therefore\ T = 0{,}5$ s

15. Al colgar un cuerpo de un resorte éste se alarga 25 cm. ¿Cuál es el período de vibración del cuerpo? Considere: $\pi^2 = 9{,}8$.

Resolución:



De la primera condición de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0:\ kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x} \qquad ...(1)$$

$$\text{Período: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ...(2)$$

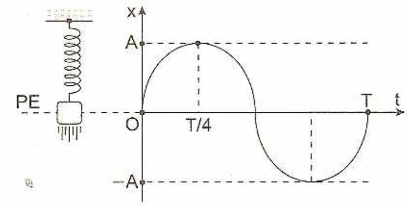
$$\text{Reemplazando (1) en (2): } T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} \qquad ...(3)$$

Considerando: $g = \pi^2$ m/s^2 $\wedge$ $x = 1/4$ m, en (3):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1/4}{\pi^2}} \Rightarrow T = 1\text{ s}$$

16. Un cuerpo suspendido de un resorte oscila con MAS de período T. ¿Cuánto tiempo transcurre para que el cuerpo se encuentre, a partir de su posición de equilibrio, a una distancia igual a la mitad de su amplitud?

Resolución:



El bloque oscila en un plano vertical. El tiempo se mide a partir de la posición de equilibrio (PE) entonces la ecuación de la elongación es: $x = A\text{sen}(\omega t)$, pero: $x = \frac{A}{2}$

$$\frac{A}{2} = A\text{sen}(\omega t) \Rightarrow \text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\omega t) = \frac{\pi}{6} \qquad ...(1)$$

$$\text{La frecuencia angular es: } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad ...(2)$$

$$\text{Reemplazando (2) en (1): } \frac{2\pi}{T}(t) = \frac{\pi}{6} \qquad \therefore\ t = \frac{T}{12}$$

17. La energía total de un cuerpo que realiza un MAS es igual a 30 μJ y la fuerza máxima que actúa sobre él es igual a 1,5 mN. Hallar la ecuación del movimiento, sabiendo que el período de oscilación es 2 s y la fase inicial 45°.

Resolución:

La energía del sistema es:

$$\frac{1}{2}kA^2 = 30 \times 10^{-6}\text{ J} \Rightarrow kA^2 = 6 \times 10^{-5}\text{ J} \qquad ...(1)$$

La fuerza máxima es:

$$kA = 1{,}5 \times 10^{-3}\text{ N} \qquad ...(2)$$

Dividiendo (1) y (2), tenemos: $A = 0{,}04$ m

La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s

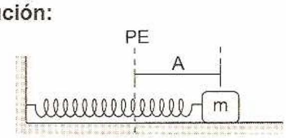
La ecuación del movimiento es:

$$x = A\text{sen}(\omega t + \phi) = 0{,}04\left[\text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\therefore\ x = 0{,}04\left[\text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]\text{ m}$$

18. Una partícula de masa 100 g, oscila con un MAS de amplitud 10 cm. Su aceleración en el extremo derecho es de 8000 m/s^2. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que actúa sobre la partícula cuando la elongación es 4 cm?

Resolución:



La aceleración máxima de la partícula es:

$a_{máx} = \omega^2 A \Rightarrow 8000 = \omega^2(0{,}1)$

$\Rightarrow \omega^2 = 8 \times 10^4$ rad^2/s^2

Cálculo de la aceleración cuando $x = 0{,}04$ m:

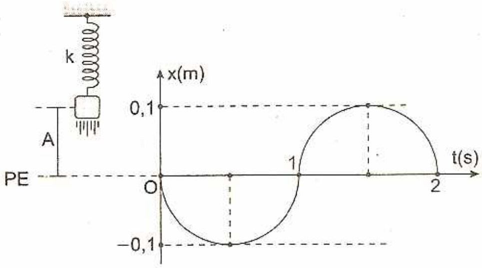
$a = \omega^2 x \Rightarrow a = (8 \times 10^4)(0{,}04) \Rightarrow a = 3200$ m/s^2

Aplicando la segunda ley de Newton en la posición $x = 0{,}04$ m $\Rightarrow F = ma \Rightarrow F = (0{,}1)(3200)$

$\therefore F = 320$ N

19. A un resorte de constante $k = 20$ N/m se le cuelga un peso de 50 N y se le comprime 10 cm a partir de su posición de equilibrio, soltándolo a continuación. Si empezamos a medir el tiempo cuando el bloque pasa por su posición de equilibrio, hallar la expresión que describe la posición x (en metros) respecto a la posición de equilibrio. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:



Cálculo del período de oscilación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{20}} = \pi \text{ s}$$

Cálculo de la frecuencia angular:

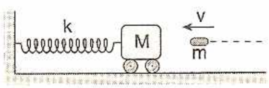
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cálculo de la posición x de la partícula en cada instante de tiempo:

$x = -A\text{sen}(\omega t) = -(0{,}1)\text{sen}(2t)$

$\therefore x(t) = -(0{,}1)\text{sen}(2t)$

20. Una bala de masa "m" es disparada horizontalmente con una velocidad "v" en dirección del bloque de masa M inicialmente en reposo sobre un plano liso. El bloque se encuentra sujeto a la pared mediante un resorte de rigidez "k". Después del choque, la bala se adhiere al bloque. Hallar la amplitud de oscilación del sistema luego de la colisión.



Resolución:

Por principio de conservación de la cantidad de movimiento: $\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}}$

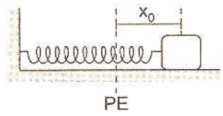
$$mv = (m + M)U \Rightarrow U = \frac{mv}{(m + M)} \qquad ...(1)$$

Por principio de conservación de la energía mecánica, después del choque: $E_{\text{sistema}} = E_{\text{cinética}}$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m + M)U^2 \Rightarrow A = U\sqrt{\frac{(m + M)}{k}} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2): $A = \dfrac{mv}{\sqrt{k(m + M)}}$

21. Si el sistema formado por un bloque de masa 3 kg y un resorte de constante elástica $k = 300$ N/m, se deja en libertad de movimiento siendo $x_0 = 2$ m, determinar la máxima velocidad que adquiere el bloque. No hay rozamiento.



Resolución:

La amplitud de movimiento del bloque es: $A = 2$ m

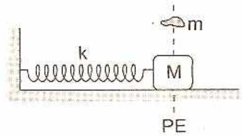
Por principio de conservación de la energía mecánica: $E_{\text{sistema}} = E_C + E_P$

Si la velocidad es máxima, entonces, $x = 0$, por consiguiente, la energía potencial elástica es nula, $E_P = 0$.

$$E_{\text{sistema}} = E_C \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Reemplazando los datos tenemos: $v_{\text{máx}} = 20$ m/s

22. El bloque mostrado de masa $M = 1$ kg, oscila tal que su amplitud es $A = 0{,}3$ m. En el instante en que M pasa por su posición de equilibrio es impactada verticalmente por una masa de barro $m = 3$ kg, el cual se adhiere a M. Calcular la amplitud del nuevo sistema (m + M).



Resolución:

Sea "v" la velocidad máxima del bloque antes del choque.

Sea U la velocidad máxima del sistema después del choque.

Por principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}}$$

$$mv = (m + M)U \Rightarrow U = \frac{mv}{(m + M)} \qquad ...(1)$$

Por principio de conservación de la energía mecánica:

Antes del choque: $\dfrac{1}{2}kA_1^2 = \dfrac{1}{2}mv^2$ ...(2)

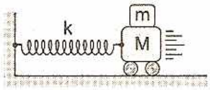
Después del choque: $\dfrac{1}{2}k(A_2^2) = \dfrac{1}{2}(m + M)U^2$ ...(3)

Dividiendo (2) y (3): $\dfrac{A_1^2}{A_2^2} = \dfrac{mv^2}{(m + M)U^2}$ ...(4)

Reemplazando (1) en (4): $A_2 = A_1\sqrt{\dfrac{m}{m + M}}$

Reemplazando los datos tenemos: $A_2 = 0{,}15$ m

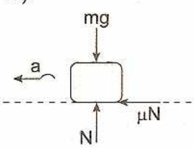
23. En el oscilador horizontal sin fricción de la figura se pide encontrar la máxima amplitud que pueden tener las oscilaciones, de modo que el bloque superior de masa "m" no resbale. El coeficiente de fricción entre "m" y M es μ.



Resolución:

La aceleración máxima que experimenta el bloque es cuando la velocidad es mínima ($v = 0$), es decir, en los extremos.

DCL (bloque m):



Aplicando la segunda ley de Newton al bloque de masa m: $F = ma \Rightarrow \mu N = ma$, pero: $N = mg$

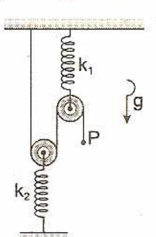
$\Rightarrow \mu(mg) = ma \Rightarrow a = \mu g$

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema $(m + M)$ en el punto extremo cuando: $x = A$ (amplitud)

$F = (m + M)a$, pero: $F = kA$ (ley de Hooke)

$$\Rightarrow kA = (m + M)\mu g \qquad \therefore A = \frac{(m + M)\mu g}{k}$$

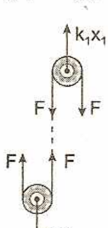
24. Si el punto P de la cuerda inextensible que se muestra en la figura, se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia $d = 12$ cm, hallar las elongaciones de cada uno de los resortes, sabiendo que: $k_1 = 2k_2$. La masa de las poleas móviles son despreciables y no hay rozamiento.



Resolución:

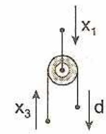
Analizando el DCL de cada polea móvil: $\Sigma F_y = 0$:

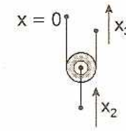
$k_1x_1 = k_2x_2 \Rightarrow (2k_2)x_1 = k_2x_2 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \qquad ...(1)$



Analizando cinemáticamente a cada polea móvil:

Desplazamiento ① Desplazamiento ②





$$① \; x_1 = \frac{d - x_3}{2} \; ...(2) \qquad ② \; x_2 = \frac{0 + x_3}{2} \; ...(3)$$

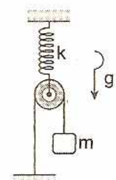
Resolviendo (2) y (3): $x_1 + x_2 = \dfrac{d}{2}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 6$ cm

Reemplazando (1) en (2): $x_1 = 2$ cm y $x_2 = 4$ cm

25. En la figura mostrada, la polea móvil tiene masa despreciable y no hay rozamiento. Hallar:

a) La rigidez equivalente del sistema.
b) El período de oscilación del sistema.



Resolución:

Analizando cinemáticamente si la polea móvil desciende una distancia x (deformación del resorte), entonces un punto A de la cuerda desciende 2x:

En el DCL la tensión en el resorte es: $F = kx$

La tensión en la cuerda es equivalente a: $T = k_e x_e$

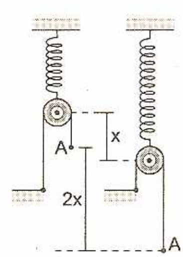
k_e: rigidez equivalente

x_e: deformación equivalente

Pero: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T = F \Rightarrow 2k_e x_e = kx$

Sabemos que: $x_e = 2x$

$\Rightarrow 2k_e(2x) = kx \Rightarrow k_e = \dfrac{k}{4}$



DCL (polea)

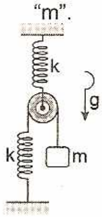
El período de oscilación de la masa "m" es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k/4}} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

26. En la figura mostrada, la polea móvil tiene masa despreciable y no hay rozamiento. Hallar:

a) La rigidez equivalente del sistema.
b) El período de oscilación del bloque de masa

"m".

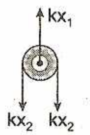


Resolución:

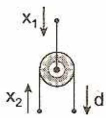
Analizando el DCL de la polea móvil:

$\Sigma F_y = 0$: $kx_1 = 2kx_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$ ...(1)

DCL (polea)



DCL (polea)



Analizando cinemáticamente a la polea móvil:

$x_1 = \dfrac{d - x_2}{2} \Rightarrow 2x_1 = d - x_2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $d = 5x_2$

La tensión en la cuerda que sostiene al bloque es equivalente a: $T = k_e x_e$

k_e: rigidez equivalente

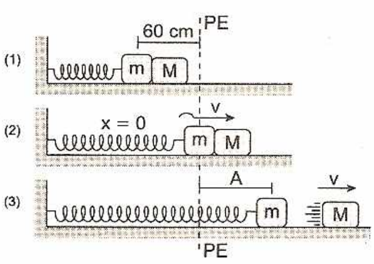
x_e: deformación equivalente ($x_e = d$)

$\Rightarrow kx_2 = k_e d \Rightarrow kx_2 = k_e(5x_2) \Rightarrow k_e = \dfrac{k}{5}$

El período de oscilación de la masa "m" es:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k/5}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5\,m}{k}}$

27. Las masas de la figura se deslizan sobre una mesa que no ofrece rozamiento. El resorte está unido al bloque de masa "m". Si ahora los bloques "m" y M son empujados hacia la izquierda de manera que el resorte se deforma 60 cm por compresión, ¿cuál será la amplitud de oscilación de "m", después que las masas se liberan? Donde: $\dfrac{m}{M} = \dfrac{4}{5}$



Resolución:

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(1)} = E_{M(2)}$$

$\dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}(m + M)v^2 \Rightarrow kx^2 = (m + M)v^2$ ...(1)

Principio de conservación de la energía mecánica:

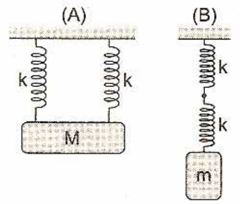
$$E_{M(2)} = E_{M(3)}$$

$\dfrac{1}{2}(m + M)v^2 = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow kA^2 = mv^2$ ...(2)

Dividiendo (1) entre (2):

$\dfrac{x^2}{A^2} = \dfrac{m + M}{m} \Rightarrow A = (x)\sqrt{\dfrac{m}{m + M}} \Rightarrow A = 40\text{ cm}$

28. En los sistemas armónicos (A) y (B) mostrados determinar la razón de los períodos: $\dfrac{T_A}{T_B}$



Resolución:

Período de oscilación del sistema: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_e}}$

Cálculo de la constante de rigidez equivalente:

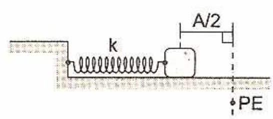
Asociación en paralelo: $k_A = 2k$ ...(1)

Asociación en serie: $k_B = \dfrac{k}{2}$ ...(2)

Relación entre períodos: $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{\sqrt{k_B}}{\sqrt{k_A}}$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{1}{2}$

29. Un sistema masa-resorte oscila libremente en un plano horizontal sin fricción. Si la energía del sistema es 40 joules, calcular la energía cinética del bloque de masa "m" cuando la elongación es la mitad de la amplitud A.



Resolución:

La energía total del sistema se expresa como:

$\dfrac{1}{2}kA^2 = E_P + E_C = 40\text{ J}$ ...(1)

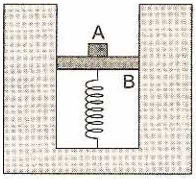
$\dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}kx^2 + E_C$ ...(2)

Para nuestro caso: $x = A/2$

Reemplazando en (2): $E_C = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2}kA^2\right)$ ...(3)

Reemplazando (1) en (3): $E_C = 30\text{ J}$

30. El período de vibración del sistema mostrado es 0,9 s; si se saca el bloque A el nuevo período es 0,6 s. Sabiendo que la masa del bloque A es 22,5 kg, determine la masa del bloque B. No hay rozamiento.



Resolución:

El período de oscilación depende únicamente de la masa del sistema. La constante de rigidez depende del material y de la forma del resorte.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.^{er} caso: $T_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{m_A + m_B}{k}\right)$ ...(1)

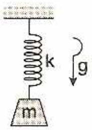
2.° caso: $T_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{m_B}{k}\right)$ ...(2)

Dividiendo (1) entre (2): $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(m_A + m_B)}{m_B} = \frac{81}{36}$

Reemplazando valores: $m_B = 18$ kg

31. Un cuerpo cuelga del extremo de un resorte y oscila verticalmente con el período de 2 s. Al aumentar la masa del cuerpo en 1 kg, el nuevo período es de 3 s. ¿Cuál es el valor de la masa inicial?

Resolución:



El período de oscilación es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

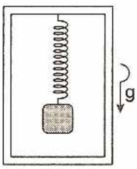
1.^{er} caso: $T_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{m}{k}\right)$ ...(1)

2.° caso: $T_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{m + 0,5}{k}\right)$ ...(2)

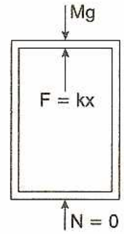
Dividiendo (1) entre (2): $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m}{m + 0,5} = \frac{4}{9}$

Resolviendo: $m = 0,4$ kg

32. Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. De la caja, por medio de un resorte de rigidez "k", está suspendido un bloque de masa "m". ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del bloque, la caja empezará a saltar sobre la mesa?



Resolución:

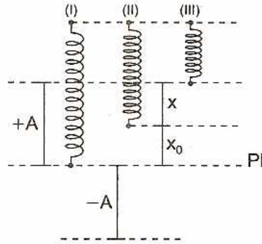


Deformación del resorte, cuando el bloque está en la posición de equilibrio:

$kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = mg/k$ ...(1)

Analizando a la caja determinamos la deformación del resorte cuando la reacción normal es igual a cero ($N = 0$).

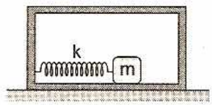
$\Sigma F_y = 0$: $kx = Mg \Rightarrow x = Mg/k$ ...(2)



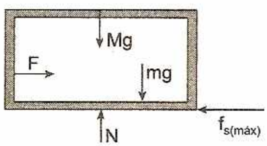
En el resorte, la amplitud es: $A = x + x_0$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $A = \frac{(M + m)g}{k}$

33. Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la caja y la mesa es igual a μ. Dentro de la caja descansa un cuerpo de masa "m" que puede moverse sin rozamiento sobre el fondo de la caja. Este cuerpo está sujeto a la pared por medio de un resorte cuya rigidez es "k". ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del cuerpo comenzará la caja a moverse sobre la mesa?



Resolución:



DCL (caja)

Cuando el resorte está pronto a moverse:

$\Sigma F_x = 0$: $F = f_{s(máxima)}$

Donde: $F = kA$; $f_{s(máxima)} = \mu N$; $N = (m + M)g$

$\Rightarrow kA = \mu(M + m)g \Rightarrow A = \frac{\mu(M + m)g}{k}$

34. Un móvil se mueve sobre el eje x con la siguiente ley:

$$x = 1 + \cos^2(2\pi t) - \text{sen}^2(2\pi t)$$

Donde x (metros) y t (segundos). Determinar el máximo valor que toma la aceleración del móvil.

Resolución:

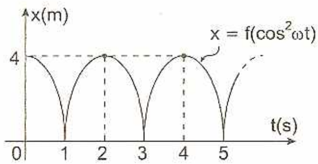
Simplificando: $x = 1 + \cos(4\pi t)$

Esta ley de movimiento corresponde a un MAS alrededor del punto $x = 1$ con una frecuencia angular $\omega = 4\pi$ rad/s y con una amplitud $A = 1$ m.

Sabemos: $a_{\text{máx}} = \omega^2 A$

Entonces: $a_{\text{máx}} = (4\pi)^2(1) \Rightarrow a_{\text{máx}} = 16\pi^2$ m/s^2

35. Una partícula se mueve sobre el eje x, y su ley de movimiento se representa en la gráfica x-t mostrada en la figura. Determinar la velocidad de la partícula cuando pasa por el punto x = 2.



Resolución:

Tabulando se demuestra que la ley de movimiento es: $x = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

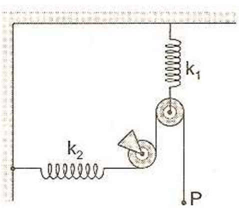
Utilizando relaciones trigonométricas se transforma en: $x = 2 + 2\cos(\pi t)$

Que es la ley de movimiento de un MAS alrededor del punto $x = 2$ con una amplitud $A = 2$ m y un período $T = 2$ s.

Cuando $x = 2$, la velocidad es máxima:

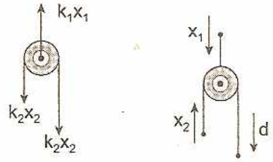
$\Rightarrow v_{\text{máx}} = \omega A \quad \therefore\ v_{\text{máx}} = 2\pi$ m/s

36. Si el punto P de la cuerda inextensible que se muestra en la figura, se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia de 8 cm. Hallar las elongaciones de cada uno de los resortes, sabiendo que: $k_1 = 4k_2$. La masa de la polea móvil es despreciable.



Resolución:

Diagrama del cuerpo libre de la polea móvil:



De la condición de equilibrio:

$k_1x_1 = 2k_2x_2$ ...(1)

De la condición: $k_1 = 4k_2$, reemplazando en (1):

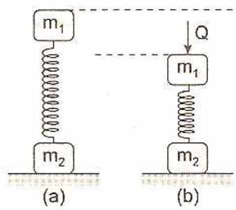
$x_2 = 2x_1$ ...(2)

Analizando cinemáticamente a la polea móvil:

$x_1 = \dfrac{d - x_2}{2} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = d = 8$ cm ...(3)

Reemplazando (2) en (3): $x_1 = 2$cm $\wedge$ $x_2 = 4$ cm

37. ¿Con qué fuerza es necesario presionar sobre la carga superior m_1 para que al cesar de ejercer dicha fuerza la carga m_2 se separe del suelo?

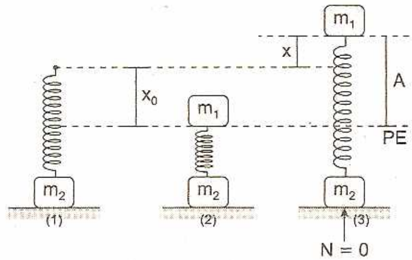


Resolución:

En la posición de equilibrio (PE) hallaremos la deformación inicial de resorte:

$\Sigma F_y = 0$: $F_0 = mg$

$\Rightarrow kx_0 = m_1g \Rightarrow x_0 = \dfrac{m_1g}{k}$ ...(I)



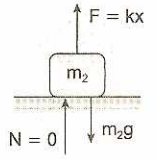
De la posición (3) de máxima deformación (x) el bloque inferior se encuentra en equilibrio y a punto de levantarse por causa de la fuerza F del resorte estirado.

$\Sigma F_y = 0$: $F = m_2g \Rightarrow kx = m_2g \Rightarrow x = \dfrac{m_2g}{k}$ ...(II)

En la posición (3) observamos que la amplitud del MAS es: $A = x_0 + x$ ...(III)

Reemplazando (I) y (II) en (III):

$A = \dfrac{m_1g}{k} + \dfrac{m_2g}{k} \Rightarrow A = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{k}$ ...(IV)



DCL (m_2) en la posición (3)

Para el problema, la fuerza Q produce una deformación A en el resorte del estado inicial hasta un estado final. Entonces, de la ley de Hooke:

$Q = kA$ ...(V)

Reemplazando (IV) en (V): $Q = (m_1 + m_2)g$

PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple, una masa "m" suspendida por un filamento (hilo) delgado de un punto fijo, es quizá el ejemplo más conocido y más antiguo de MAS. Un relojero fue el primero en despertar el interés de Galileo por la mecánica y lo distrajo del estudio de la medicina, a la que su padre quería que se dedicara. Dos características fascinaron a Galileo (que el período parecía independiente de la amplitud de la oscilación, y que también parecía independiente de la masa de la lenteja).

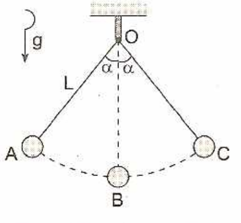


Fig. 11.5

Elementos del péndulo:

La elongación en el péndulo simple se mide por el ángulo que forma el hilo del péndulo con la vertical en un momento cualquiera.

La amplitud del péndulo es el mayor ángulo que se aleja respecto de la vertical.

El movimiento del péndulo es un MAS solamente cuando su amplitud α es pequeña, es decir, inferior a 5° sexagesimales.

Por medio de mediciones cuidadosas Galileo encontró que el período dependía de la longitud de la cuerda L. Esta dependencia se ha utilizado durante siglos para ajustar los relojes de péndulo.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \qquad ...(11.7)$$

T: período de oscilación completa (ABC + CBA)
L: longitud de la cuerda
g: aceleración de la gravedad

El período del péndulo es:

1. Directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.
2. Inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.
3. Independiente de la masa del péndulo.
4. Independiente de la amplitud α mientras sea pequeña.

Período del péndulo simple en un sistema acelerado

Un péndulo simple de longitud L oscila en el interior de un ascensor que se mueve verticalmente con aceleración "a".

El período T es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad efectiva (g_{ef}):

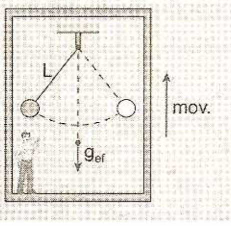
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}}$$

Si el ascensor sube con aceleración constante "a", la gravedad efectiva es: $g + a$.

Si el ascensor baja con aceleración constante "a", la gravedad efectiva es: $g - a$.

Campo y gravedad efectiva: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g \pm a}}$

+ : si el ascensor sube con "a"
− : si el ascensor baja con "a"



1. Un reloj de péndulo es llevado a un planeta en donde la aceleración de la gravedad es un 20% mayor que la de la Tierra; si la longitud del péndulo es de 50 cm, ¿cuál debe ser la nueva longitud del péndulo para que en ese planeta funcione correctamente?

Resolución:

Período en la Tierra: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g_1}}$ ...(1)

Período en el otro planeta: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_2}{g_2}}$ ...(2)

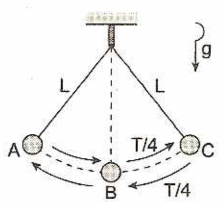
Para que el reloj de péndulo siga funcionando correctamente, el período no debe variar:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{L_1}{g_1} = \frac{L_2}{g_2} \Rightarrow \frac{50\text{ cm}}{g} = \frac{L_2}{1,2\text{ g}}$$

$\therefore$ L = 60 cm

2. En un movimiento pendular se observa que cada 0,5 s la masa pasa por el punto de equilibrio. Calcular la longitud del péndulo. $g = \pi^2$ m/s^2.

Resolución:



Período de oscilación completa: T = 1 s

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ ...(1)

Reemplazando valores en (1): $1 = 2\sqrt{L}$

$\therefore$ L = 0,25 m

3. El período de un péndulo es 4 s. Hallar el nuevo período, si la longitud del péndulo se incrementa en 21%.

Resolución:

Si la longitud inicial es L, la longitud final será 1,21 L. La relación entre los períodos es:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \Rightarrow \frac{4}{T_2} = \sqrt{\frac{L}{1,21L}} = \frac{1}{1,1} \qquad \therefore T_2 = 4,4\text{ s}$$

4. Un péndulo oscila con un período de 10 s. ¿Cuál será su período, si su longitud disminuye en 84%?

Resolución:

Si la longitud inicial es L, la longitud final será 0,16 L. La relación entre períodos es:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \Rightarrow \frac{10}{T_2} = \sqrt{\frac{L}{0,16\,L}} = \frac{1}{0,4} \qquad \therefore T_2 = 4\text{ s}$$

5. Determinar la longitud del hilo de un péndulo simple, de tal manera que si éste se aumenta en 3 m su período se duplicaría.

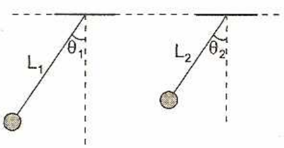
Resolución:

Si longitud es L entonces el período es T, pero si la longitud es L + 3 el período es 2T.

La relación entre los períodos es:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{T^2}{(2T)^2} = \frac{L}{L+3} = \frac{1}{4} \qquad \therefore L = 1\text{ m}$$

6. En la figura se tienen dos péndulos que oscilan en planos paralelos, sus longitudes son L_1 = 6,25 m y L_2 = 2,25 m, e inician sus movimientos desde el mismo lado. ¿Cuál es el mínimo tiempo que debe transcurrir para que los péndulos vuelvan a estar como en su fase inicial? ($g = \pi^2$ m/s^2)



Resolución:

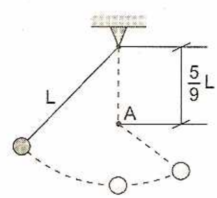
El período del péndulo es: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 2\sqrt{L}$

Para: L_1 = 6,25 m $\Rightarrow T_1 = 2\sqrt{6,25} = 5$ s

Para: L_2 = 2,25 m $\Rightarrow T_2 = 2\sqrt{2,25} = 3$ s

El tiempo mínimo se consigue hallando el MCM de los períodos T_1 y T_2: t_{min} = 15 s

7. Hallar el período de oscilación completa del sistema, sabiendo que en A se encuentra un clavo horizontalmente.



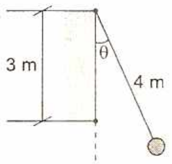
Resolución:

El período del sistema es igual a la suma de dos semiperíodos de los péndulos de longitud L y $\dfrac{4}{9}$L, respectivamente.

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{4L/9}{g}}$$

$$\therefore T = \frac{5}{3}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

8. Si la masa pendular se deja en libertad en la posición mostrada ($\theta = 4°$), indique después de qué tiempo la masa regresa a su posición original. No hay rozamiento. ($g = \pi^2$ m/s^2).



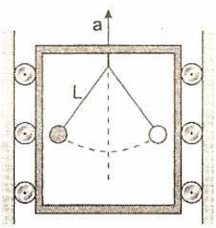
Resolución:

El tiempo pedido es igual a la suma de dos semiperíodos de los péndulos de longitud $L_1 = 4$ m y $L_2 = 1$ m, respectivamente: $t = t_1 + t_2$

$$t = \pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} + \pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} = 2 + 1$$

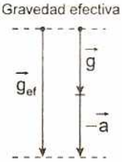
$\therefore\ t = 3$ s

9. Un péndulo de longitud $L = 3$ m que oscila en un plano vertical, se encuentra suspendido en el techo de un ascensor. Si la aceleración vertical hacia arriba del ascensor es $a = 2{,}2$ m/s^2, determinar el período de oscilación.



Resolución:

Gravedad efectiva



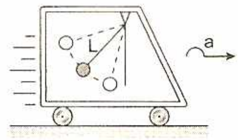
El período de oscilación es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad efectiva (g_{ef}).

$g_{ef} = g + a \Rightarrow g_{ef} = 9{,}8 + 2{,}2 = 12$ m/s^2

Cálculo del período de oscilación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{12}} \quad \therefore\ T = \pi \text{ s}$$

10. Encontrar la frecuencia de oscilación de un péndulo de longitud $L = 0{,}5$ m que se encuentra en el techo de un vagón que acelera horizontalmente con $a = 7{,}5$ m/s^2; $g = 10$ m/s^2.

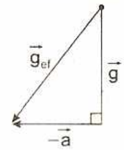


Resolución:

La frecuencia de oscilación "f" es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad efectiva (g_{ef}) e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud L.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g_{ef}}{L}} \qquad ...(1)$$

Gravedad efectiva



Cálculo de la gravedad efectiva:

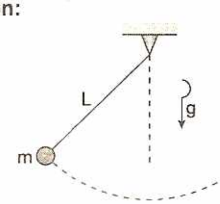
$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} = 12{,}5$ m/s^2

Reemplazando datos en (1):

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12{,}5}{0{,}5}} \quad \therefore\ f = \frac{5}{2}\pi\ \frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}}$$

11. Un péndulo oscila en un plano vertical con el período de 2 s. Al aumentar la longitud de la cuerda en 25 cm, el nuevo período es 3 s. ¿Cuál es la longitud inicial de la cuerda?

Resolución:



Relación entre los períodos: $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{L_1}{L_2}$ ...(1)

Reemplazando en (1): $\dfrac{4}{9} = \dfrac{L}{L + 25} \Rightarrow L = 20$ cm

12. Un reloj péndulo es llevado a un planeta en donde la aceleración de la gravedad es un 10% menor que la de la Tierra, si la longitud del péndulo es de 20 cm, ¿cuál debe ser la nueva longitud del péndulo para que en ese planeta funcione correctamente?

Resolución:

Período en la Tierra (T_1): $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g}}$

Período en el planeta (T_2): la nueva aceleración de la gravedad es 0,9g (dato)

Luego: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_2}{0{,}9g}}$

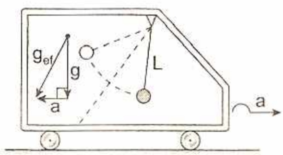
Para que el reloj de péndulo siga funcionando correctamente, el período no debe variar: $T_1 = T_2$

$$2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{0,9g}} \Rightarrow 0,9L_1 = L_2 \qquad ...(1)$$

Reemplazando en (1): $0,9(20) = L_2 \Rightarrow L_2 = 18$ cm

13. Un péndulo de longitud 5 m que oscila en un plano vertical, se encuentra suspendido en el techo de un carro. Si el móvil acelera horizontalmente con $a = 10\sqrt{3}$ m/s^2, determinar el período de oscilación. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución:



El período de oscilación es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad efectiva.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}} \qquad ...(1)$$

Cálculo de la gravedad efectiva:

$$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2} \Rightarrow g_{ef} = 20 \text{ m/s}^2$$

Reemplazando datos en (1): $T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{20}}$

$\therefore T = \pi$ s

14. La ecuación de una partícula que realiza un MAS es:

$$x = 10\text{sen}(\pi t/3 + \pi/6) \text{ cm}$$

Determine el periodo de oscilación de la partícula.

Resolución:

ω: velocidad angular (rad/s); T: periodo (s)

t: tiempo transcurrido (s)

Ley de movimiento: $x = 10\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \qquad ...(1)$

Sabemos: $x = A\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad ...(2)$

Comparando las ecuaciones (1) y (2):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow T = 6 \text{ s}$$

15. La ecuación de la posición: $x = 18\text{sen}(\pi t/6 - \pi/3)$ cm pertenece a una partícula que describe un MAS, determinar la ecuación de la velocidad.

Resolución:

Posición de la partícula o ley de movimiento:

$$x = 18\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$$

La velocidad se obtiene derivando la posición respecto del tiempo. La velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(18 \times \frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$v = 3\pi\cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$$

16. La ecuación de la velocidad de una partícula que realiza un MAS es: $v = 18\text{sen}(2t + 5)$ m/s

Determinar la amplitud y la frecuencia de oscilación.

Resolución:

La velocidad de la partícula es:

$v = A\omega\text{sen}(\omega t + \alpha) \Rightarrow v = 18\text{sen}(2t + 5)$

La velocidad angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ rad/s

El periodo es: $T = \pi$ s

Cálculo de la amplitud (A) y la frecuencia (f):

$x = A\cos(\omega t + \alpha)$; $v = A\omega\text{sen}(\omega t + \alpha)$

De: $v = A\omega$ (velocidad máxima)

$18 = A\omega \Rightarrow 18 = A(2) \Rightarrow A = 9$ m (amplitud)

$\omega = 2\pi f \Rightarrow 2 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{\pi} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}$ Hz

17. La ecuación de la aceleración de un MAS está dado por: $a = -18\text{sen}(3t - 1)$ m/s

Determinar la amplitud y la frecuencia de oscilación.

Resolución:

Posición, velocidad y aceleración:

$\vec{x} = A\text{sen}(\omega t + \alpha)$; $\vec{v} = -A\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$\vec{a} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t + \alpha) \Rightarrow \vec{a} = -18\text{sen}(3t - 1)$

$\Rightarrow \alpha = 1$ rad; $\omega = 3$ rad/s

La aceleración máxima es:

$-A\omega^2 = -18 \Rightarrow A(3)^2 = 18 \Rightarrow A = 2$ m

Cálculo de la frecuencia:

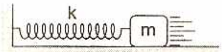
$\omega = 2\pi f \Rightarrow 3 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{3}{2}\pi^{-1}$

18. Un bloque de masa "m", atada a un resorte de constante elástica "k", es estirado una amplitud A a partir de su posición de equilibrio. Determinar la posición de la masa cuando la energía cinética sea igual que la energía potencial.

Resolución:

La energía total del sistema bloque-resorte es:

$$E_{total} = \frac{1}{2}kA^2 = E_C + E_P$$



De la ecuación: $E_P = E_C = \frac{1}{2}kx^2$

$$E_C + E_P = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

19. La máxima energía cinética de un oscilador es 400 J y la energía potencial del oscilador es de la forma kx^2, donde $k = 64$ J/m^2 y x su posición.

Determinar la posición del oscilador cuando su energía potencial es máxima.

Resolución:

La energía total es: $E_C + E_P = E_{total}$

Donde: $E_C = 400$ J; $E_P = 64x^2 = \frac{1}{2}(128x^2)$

La máxima elongación es igual a la amplitud: $x = A$

$\frac{1}{2}kA^2 = 400 \Rightarrow \frac{1}{2}(128A^2) = 400$

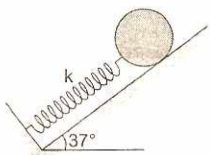
$A^2 = \frac{400}{64} = \frac{100}{16} \Rightarrow A = \frac{10}{4} = 2,5$ m

Si la energía cinética es máxima, entonces la energía potencial elástica es nula: $E_{total} = E_C = 400$ J

Si la energía potencial es máxima entonces la energía cinética es nula: $E_{total} = E_P = 400$ J

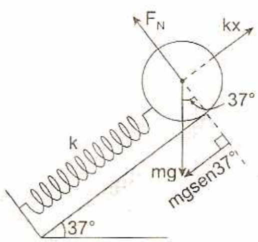
En general: $E_C + E_P = 400$ J

20. La esfera en reposo comprime 15 cm al resorte y al ser impulsado hacia la base del plano inclinado se le transmite una rapidez de $0,6\sqrt{10}$ m/s, hallar la frecuencia angular de oscilación en rad/s. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera:



ΣF // plano = 0: $mgsen37° = kx$

$\Rightarrow mg\left(\frac{3}{5}\right) = k(0,15) \Rightarrow k = 4$ mg

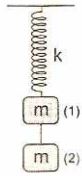
Cálculo de la velocidad angular:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4mg}{m}} = \sqrt{4g} = \sqrt{40} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{10}$ rad/s

Cálculo de la frecuencia angular:

$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\sqrt{10}}{2\pi} = \frac{\sqrt{10} \text{ oscilaciones}}{\pi \text{ segundo}}$

21. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Determinar la rapidez que adquiere el bloque (1) en el instante $T = \pi/60$ s, luego de ser cortada la cuerda que une los bloques, el resorte ideal es de rigidez $k = 100$ N/m, $m = 1$ kg ($g = 10$ m/s^2).

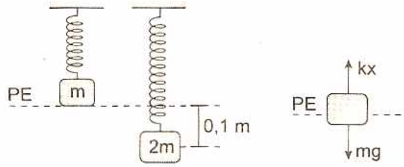


Resolución:

Cálculo de la velocidad angular:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \Rightarrow \omega = 10$ rad/s

Realizamos el diagrama de los desplazamientos:



Cálculo de la amplitud (A)

$\Sigma F_y = 0$: $kx = mg \Rightarrow 100x = (1)(10) \Rightarrow x = 0,1$ m

Si la carga es 2mg, el desplazamiento es 0,2 m.

La amplitud del MAS es: $A = 0,1$ m.

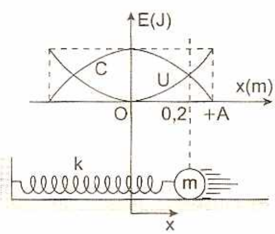
La ecuación del movimiento es: $y = A\cos(\omega T)$

La velocidad es:

$v_y = A\omega sen(\omega T) \Rightarrow v_y = 0,1\left[10sen\left(10\frac{\pi}{60}\right)\right]$

$\Rightarrow v_y = 1[sen(\pi/6)] = 1(sen30°) \Rightarrow v_y = 0,5$ m/s

22. En la presente gráfica se describe como varía la energía cinética (C) y la energía potencial elástica (U) de un oscilador armónico. Determinar la energía mecánica del sistema, sabiendo que el periodo del MAS es $\pi/3$ s. ($m = 3$ kg)



Resolución:

En la posición $x = 0,2$ m la energía cinética es igual a la energía potencial.

$E_C = E_P \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$

$E_C + E_P = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A^2 = 2x^2$

$A = \sqrt{2}x \Rightarrow A = \sqrt{2}(0,2) = 0,2\sqrt{2}$ m

La velocidad angular es: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \dfrac{k}{m} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$

$$k = \frac{m}{T^2}(4\pi^2) \Rightarrow k = 4\pi^2\left(\frac{3}{\frac{\pi^2}{9}}\right) = 4\times 27\ \frac{N}{m}$$

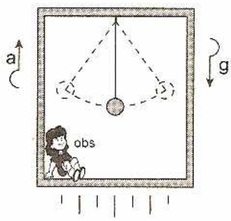
La energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(4\times 27)\left(\frac{4}{100}\right) = \frac{8\times 27}{100} \Rightarrow E_C = 2{,}16\ J$$

$$E_{sistema} = E_C + E_P = 2E_C \Rightarrow E_{sistema} = 4{,}32\ J$$

23. Un péndulo se encuentra oscilando dentro de un ascensor en reposo; pero si el ascensor acelera hacia arriba, el periodo del péndulo se reduce a la mitad. ¿Cuánto es la aceleración del ascensor?

Resolución:



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g+a_1}};\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g+a_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{g+a_2}{g+a_1}$$

Donde: $T_1 = T$; $T_2 = \dfrac{T}{2}$; $a_1 = 0$

$$\frac{T}{\frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{g+a_2}{g+0}} \Rightarrow 4 = \frac{g+a_2}{g} \Rightarrow a_2 = 3g$$

ONDAS MECÁNICAS

Concepto de onda mecánica

Designamos con este nombre a toda perturbación que experimenta un medio sólido, líquido o gaseoso, y que se transmite por vibraciones de las moléculas, transportando energía sin el movimiento mismo del medio. Entre ellos tenemos: las ondas en el agua, en una cuerda tensa, las ondas sonoras, etc.

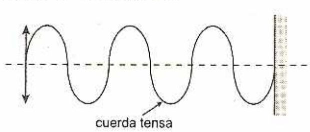


Fig. 11.6

Medios de propagación

Las ondas en general necesitan de un medio para propagarse, salvo las ondas electromagnéticas como la luz, que se pueden propagar en el vacío; sin embargo, las ondas mecánicas ya se han mencionado, necesitan de un medio sólido, líquido o gaseoso, quienes a su vez deben tener las siguientes propiedades: deben ser homogéneos, isotrópicos y elásticos.

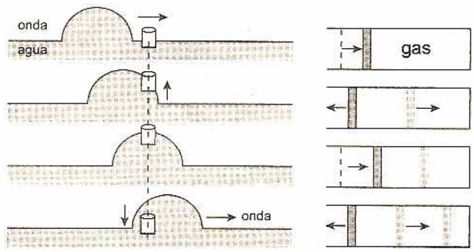
Nota

Un medio será isotrópico, si sus propiedades físicas son las mismas en todo el espacio ocupado por él, cualquiera que sea la dirección elegida para recorrerla.

Tipos de ondas

Ondas transversales. Estas ondas se caracterizan porque las moléculas del medio oscilan con respecto a su posición de equilibrio, de modo perpendicular a la dirección en que se propaga la onda. En el ejemplo de la Fig. 11.7.a, las moléculas oscilan como la boya, suben y luego bajan hasta su posición de equilibrio cuando la onda termina de pasar por dicha zona.

Ondas longitudinales. Son aquellas en donde las partículas del medio oscilan en la misma dirección en la que se propagan las ondas. En el ejemplo de la Fig. 11.7.b, las moléculas del gas oscilan hacia la izquierda y luego hacia la derecha, por el paso de las ondas que viajan siempre hacia la derecha, debido a las oscilaciones del émbolo.



(a) (b)

Fig. 11.7

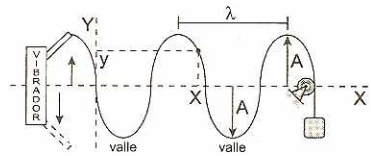
Ondas mécanicas senoidales. Son aquellas producidas por un foco emisor, que produce pulsos armónicos, tales que las partículas del medio oscilan con un movimiento armónico simple. La ecuación general de una onda senoidal viene dada por: $y = A\text{sen}(kx \pm \omega t)$

Donde:

y: ordenada; x: abscisa; A: amplitud de oscilación;

t: tiempo; k: número de onda; ω: frecuencia angular.

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; λ: longitud de onda

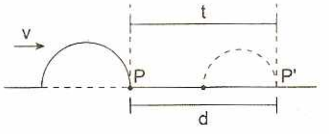


Velocidad de onda

Se le llama también velocidad de fase, y viene a ser la velocidad con que una onda (o su silueta) se traslada a través del medio. Su valor se determina a partir de:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\left(\frac{\text{longitud de onda}}{\text{periodo}}\right);\ v = \frac{\omega}{k}$$

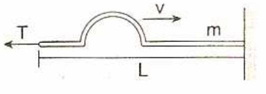
$d = vt$ (ondas senoidales)



Velocidad de onda en una cuerda tensa

Cuando se producen ondas en una cuerda tensa, éstas se propagan con una velocidad cuyo valor es directamente proporcional con la raíz cuadrada de su tensión (T), pero inversamente proporcional con la raíz cuadrada de su densidad lineal de masa (μ).

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\ \mu = \frac{m}{L}\left(\frac{\text{masa de la cuerda}}{\text{longitud}}\right)$$



Demostración de la velocidad de una onda en una cuerda. Cada vez que se ejerce una fuerza tensora sobre una cuerda, se propaga a través de la cuerda una onda, producto de la perturbación que se ha generado en el medio elástico.

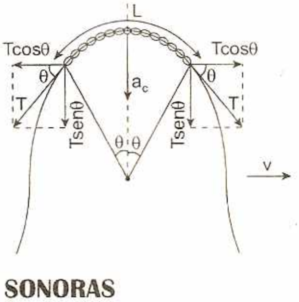
Segunda ley de Newton: $F_c = ma_c$

$2T\text{sen}\theta = m\left(\frac{v^2}{R}\right)$, para θ pequeño: $\theta = \text{sen}\theta$

$T(2\theta R) = mv^2 \Rightarrow T(L) = mv^2$

Densidad lineal de masa: $\mu = \frac{m}{L}$

$\Rightarrow \mu v^2 = T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$



ONDAS SONORAS

Se llaman ondas sonoras o acústicas a las ondas elásticas de poca intensidad, es decir, a las perturbaciones mecánicas débiles que se propagan en un medio elástico. Las ondas sonoras según su frecuencia, se dividen en tres grupos:

Sonidos audibles: son aquellas ondas sonoras cuya frecuencia está comprendida entre 16 a 20 000 Hz.

Ultrasonido: son las ondas sonoras cuya frecuencia es mayor que 10^9 Hz.

Infrasonido: son las ondas sonoras cuya frecuencia es menor que 16 Hz.

Velocidad de propagación (v)

Es la rapidez con la que se propaga la perturbación, así, la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 340 m/s.

Velocidad para otros tipos de ondas

1. La velocidad de propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda larga y tensa es: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu S}}$
   F: fuerza de tensión de la cuerda
   S: sección transversal de la cuerda
   μ: densidad de masa de la cuerda
2. La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en una varilla larga y delgada es: $v = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$
   E: módulo de Young de la varilla
   μ: densidad de masa de la varilla
3. La velocidad de propagación del sonido en un gas está dada por: $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$
   P: presión del gas
   ρ: densidad del gas
   γ: cantidad característica del gas para gases diatómicos. $\gamma = 1,4$
4. La velocidad de propagación en el vacío de las ondas electromagnéticas es dada por:
   $$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\times10^8 \text{ m/s}$$

Características del sonido

1. **Intensidad.** Para una fuente de sonido de potencia P, ubicada a una distancia "d" del receptor, la intensidad viene dada por: $I = \frac{P}{4\pi d^2}$
   - El oído humano puede percibir intensidades sonoras de 10^{-16} hasta 10^{-4} W/cm^2.
   - También, se acostumbra utilizar una expresión logarítmica para el cálculo de la intensidad, ella es:
   $$\beta = 10\log10\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
   β: nivel de referencia de la intensidad (I_0), cuyo valor es 10^{-12} W/m^2.
2. **Tono.** Se utiliza para diferenciar si un sonido es fuerte o débil, así, a un sonido de baja frecuencia le corresponde un tono bajo.
3. **Timbre.** Es la diferencia de sonidos producidos por dos fuentes diferentes de una misma intensidad de tono.

MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio se mide por la frecuencia, es decir, por el número de ciclos u oscilaciones que tiene

por segundo. La unidad de frecuencia es el *hertz* (Hz), que equivale a un ciclo por segundo.

Una onda es una perturbación que avanza o que se propaga en un medio material o incluso en el vacío. A pesar de la naturaleza diversa de las perturbaciones que pueden originarlas, todas las ondas tienen un comportamiento semejante. El sonido es un tipo de onda que se propaga únicamente en presencia de un medio que haga de soporte de la perturbación.

Algunas clases de ondas precisan para propagarse de la existencia de un medio material que haga el papel de soporte de la perturbación, se denominan genéricamente ondas mecánicas. El sonido, las ondas que forman en la superficie del agua, las ondas en cuerdas, son algunos ejemplos de ondas mecánicas y corresponden a compresiones, deformaciones y en general, a perturbaciones del medio que se propagan a través suyo. Sin embargo, existen ondas que pueden propagarse aun en ausencia del medio material, es decir, en el vacío. Son las ondas electromagnéticas o campos electromagnéticos viajeros, a esta segunda categoría pertenecen las ondas luminosas.

Independientemente de esta diferenciación, existe ciertas características que son comunes a todas las ondas cualquiera que sea su naturaleza, que en conjuntos definen el llamado comportamiento ondulatorio.

El tipo de movimiento característico de las ondas se denomina movimiento ondulatorio. Su propiedad esencial es que no implica un transporte de materia de un punto a otro. las partículas constituyentes del medio se desplazan relativamente poco respecto de su posición de equilibrio. Lo que avanza y progresa no son ellas, sino la perturbación que transmiten unas a otras. El movimiento ondulatorio supone únicamente un trasporte de energía y de cantidad de movimiento.

Junto a una primera clasificación de las ondas en mecánicas y electromagnéticas, es posible distinguir diferentes tipos de ondas atendiendo a criterios distintos. En relación con su ámbito de propagación las ondas pueden clasificarse en:

- **Monodimensionales.** Son aquellas que, como las ondas en los muelles o en las cuerdas, se propagan a los largo de una sola dirección del espacio.
- **Bidimensionales.** Se propagan en cualquiera de las direcciones de un plano de una superficie. Se denominan también ondas superficiales y a este grupo pertenecen las ondas que se producen en la superficie de un lago cuando se deja caer una piedra sobre él. Atendiendo a la periodicidad en la perturbación local que las origina, las ondas se clasifican en:
- **Periódicas.** Corresponden a la propagación de perturbaciones de características periódicas, como vibraciones y oscilaciones que suponen variaciones repetitivas de alguna propiedad. Así, en una cuerda unida por uno de sus extremos a un vibrador se propagará una onda periódica.
- **No periódicas.** La perturbación que las origina se da aisladamente y en el caso de que se repita, las perturbaciones sucesivas tienen características diferentes. Las ondas aisladas, como en el caso de las fichas de dominó, se denominan también pulsos, Según que la dirección de propagación coincida o no con las dirección en la que se produce la perturbación, las ondas pueden ser:
- **Longitudinales.** El movimiento local del medio alcanzado por la perturbación se efectúa en la dirección de avance de la onda: Un muelle que se comprime da lugar a una onda longitudinal.
- **Transversales.** La perturbación del medio se lleva a cabo en dirección perpendicular a la de abajo y viceversa, mientras que el movimiento ondulatorio progresa en el plano perpendicular. Lo mismo sucede en el caso de una cuerda; cada punto vibra en vertical, pero la perturbación avanza según la dirección de la línea horizontal. Ambas son ondas transversales.

FUNCIÓN DE UNA ONDA MECÁNICA

La función de onda que describe cualquier movimiento ondulatorio armónico (el pulso no es armónico) que se propaga con velocidad "v" y sin distorsión, a lo largo del eje de abscisas es: $v(xt) = A\text{sen}k(x - vt)$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una emisora de radio situada a 90 km de nuestra casa, genera una señal de radio de frecuencia 0,7 MHz. ¿Cuántas crestas de onda hay aproximadamente entre la estación y nuestra casa? ($v_{onda} = 3 \times 10^8$ m/s)

Resolución:

Sabemos: $\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \times 10^8}{0,7 \times 10^6} = \frac{30}{7} \times 10^2 \text{ m}$

$$\text{N.° de crestas} = \frac{L}{\lambda} = \frac{90 \times 10^3 \text{ m}}{\frac{30}{7} \times 10^2 \text{ m}} = 210$$

2. Determinar la velocidad de propagación de una onda mecánica, en una cuerda tensa, sabiendo que depende de la fuerza de tensión F a la cual está sometida y de su densidad lineal de masa μ (masa/longitud). La constante numérica de proporcionalidad es la unidad.

Resolución:

La velocidad de propagación "v" puede expresarse de la siguiente manera: $v = kF^x\mu^y$

Siendo "k" la constante numérica de proporcionalidad. Por principio de homogeneidad dimensional:

$[v] = [F]^x[\mu]^y \Rightarrow LT^{-1} = (LMT^{-2})^x(ML^{-1})^y$

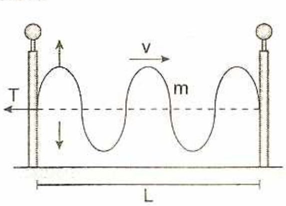
$\Rightarrow L^1M^0T^{-1} = L^{x-y}M^{x+y}T^{-2x}$

Comparando L: $1 = x - y$; M: $0 = x + y$; T: $-1 = -2x$

Resolviendo: $x = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = -\frac{1}{2} \quad \therefore \ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

3. Se mantiene tensa una cuerda flexible de 30 m de longitud y 10 kg de masa entre dos postes con una tensión de 2700 N. Si se golpea transversalmente la cuerda de uno de sus extremos, hallar el tiempo en segundos que tardará la onda transversal producida en alcanzar el otro extremo.

Resolución:



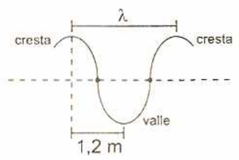
Cálculo del tiempo:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{T}{m/L}}} = \sqrt{\frac{Lm}{T}} = \sqrt{\frac{30 \times 10}{2700}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \text{ segundo}$$

4. Hay una distancia de 1,2 m entre la cresta y el valle adyacente de las olas en la superficie de un lago. En 30 s pasan 35 crestas por la posición donde se encuentra una boya anclada en el lago. ¿Cuál será la velocidad de las olas?

Resolución:



De la figura: $\lambda = 2,4$ m (longitud de onda)

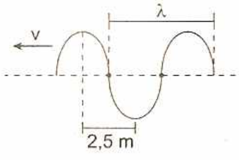
Frecuencia: $f = \frac{35}{30} \Rightarrow f = \frac{7}{6}$ Hz

Para toda la onda:

$v = \lambda f \Rightarrow v = 2,4 \times \frac{7}{6} \Rightarrow v = 2,8$ m/s

5. Un observador determinó que había 2,5 m de separación entre un valle y una cresta adyacente de las olas superficiales de un lago y contó 33 crestas que pasaban en 35 s. ¿Cuánto vale la magnitud de la velocidad de las olas superficiales?

Resolución:



De los datos se deduce que: $\lambda = 5$ m

$$v = \frac{e_{total}}{T_{total}} = \frac{n\lambda}{T_{total}} \Rightarrow v = \frac{33 \times 5}{35} \Rightarrow v = 4,7 \text{ m/s}$$

6. Se emite en el aire un sonido con frecuencia de 800 Hz y rapidez 340 m/s que luego penetra en el agua con rapidez de 1450 m/s, hallar la relación:

$$\frac{\text{Longitud de onda en el agua}}{\text{Longitud de onda en el aire}}$$

Resolución:

Cuando una onda pasa de un medio a otro no se altera la frecuencia, porque cada pulso incidente origina un pulso refractado.

Para el problema: $f_{agua} = f_{aire}$

$$\frac{v_{agua}}{\lambda_{agua}} = \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} \Rightarrow \frac{\lambda_{agua}}{\lambda_{aire}} = \frac{v_{agua}}{v_{aire}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{agua}}{\lambda_{aire}} = \frac{1450}{340} \Rightarrow \frac{\lambda_{agua}}{\lambda_{aire}} = 4,26$$

7. La longitud de onda y frecuencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el mismo medio son x_1 y f_1 para una onda y x_2 y f_2 para la otra. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?

A) Si: $x_2/x_1 = 2 \Rightarrow f_1/f_2 = 1/2$
B) Si: $x_2/x_1 = 1/3 \Rightarrow f_1/f_2 = 3$
C) Si: $x_1/x_2 = 3/2 \Rightarrow f_1/f_2 = 2/3$
D) Si: $f_1/f_2 = 1/6 \Rightarrow x_2/x_1 = 6$
E) Si: $f_1/f_2 = 4 \Rightarrow x_1/x_2 = 4$

Resolución:

Para ondas electromagnéticas propagándose en el mismo medio sus velocidades son iguales:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow x_1f_1 = x_2f_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}$$

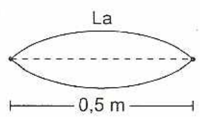
Cuando: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{2}{3}$

Luego, la respuesta es la C.

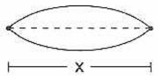
8. Cierta cuerda de violín tiene 50 cm de largo entre sus extremos fijos y su masa es de 2 g. La cuerda genera la nota la (440 Hz) cuando se toca sin pulsarla con los dedos. ¿En dónde debe ponerse el dedo para tocar una nota do (528 Hz)?

Resolución:

La velocidad de propagación de la onda depende de la tensión en la cuerda y de la densidad lineal de masa, por consiguiente, en ambos casos la velocidad es la misma.



$$V_1 = V_2 \Rightarrow \lambda_1f_1 = \lambda_2f_2 \Rightarrow (1)(440) = (2x)(528)$$
$$\Rightarrow x = 0{,}417 \text{ m} = 41{,}7 \text{ cm}$$



Luego, el dedo se debe poner a 8,3 cm del extremo.

9. Una cuerda de piano de acero de 80 cm de longitud y una masa de 10 g, se tensa mediante una fuerza de 500 N.

a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda?
b) Para reducir la velocidad de la onda en un factor 2, sin modificar la tensión, ¿qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

Resolución:

a) La densidad lineal de masa es:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}01}{0{,}8} = 0{,}0125 \text{ kg/m}$$

La velocidad es: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{0{,}0125}} = 200 \text{ m/s}$

b) La nueva velocidad reducida es: $v_1 = 100$ m/s
La tensión permanece constante: T = 500 N
La nueva densidad lineal de masa es: μ_1

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \Rightarrow 100 = \sqrt{\frac{500}{\mu_1}} \Rightarrow \mu_1 = 0{,}05 \text{ kg/m}$$

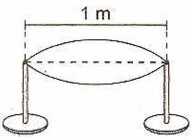
Pero: $\mu_1 = \frac{m + x}{L}$, donde x es la masa de cobre.

$$0{,}05 = \frac{0{,}01 + x}{0{,}8} \Rightarrow x = 0{,}03$$

Luego, la masa del alambre de cobre es: 0,03 kg

10. Hallar la longitud de onda y la frecuencia del modo fundamental de la onda transversal que puede establecerse en un alambre de acero de 5 g y 1 m de largo, sometido a una tensión de 968 N.

Resolución:



La figura muestra el modo fundamental de una onda transversal, de donde se deduce que la longitud de onda es: $\lambda = 2$ m.
La densidad lineal de masa es:

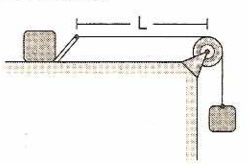
$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}005}{1} = 0{,}005 \text{ kg/m}$$

La velocidad de la onda transversal es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{968}{0{,}005}} = 440 \text{ m/s}$$

La frecuencia es: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{440}{2} \quad \therefore f = 220 \text{ Hz}$

11. Una cuerda de densidad lineal de masa $\mu = 0{,}2$ g/cm es tensada con un peso de 98 N como se muestra en la figura. Sabiendo que la diferencia en longitudes de onda del 1.° armónico y 7.° armónico es de 24 m. Hallar la longitud de onda cuando la cuerda vibra en su 5.° armónico y su frecuencia de oscilación.



Resolución:

La densidad lineal de masa es:
$\mu = 0{,}2$ g/cm $= 0{,}02$ kg/m

La velocidad de propagación:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{98}{0{,}02}} = 70 \text{ m/s}$$

Longitud de onda 1.^{er} armónico: $\lambda_1 = 2L$

Longitud de onda 7.° armónico: $\lambda_7 = \frac{2L}{7}$

Pero: $\lambda_1 - \lambda_7 = 24 \text{ m} \Rightarrow \frac{6}{7}(2L) = 24 \text{ m} \Rightarrow L = 14 \text{ m}$

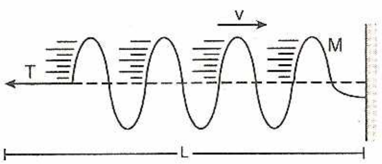
Longitud de onda 5.° armónico: $\lambda_5 = \frac{2L}{5} = 5{,}6 \text{ m}$

La frecuencia es: $f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = \frac{70}{5{,}6} = 12{,}5 \text{ Hz}$

12. ¿Cuál es la rapidez de las ondas transversales de una cuerda de 2 m de largo y 100 g de masa, sometido a una tensión de módulo 80 N?

Resolución:

Cuando se producen ondas en una cuerda tensa, estas se propagan con una velocidad cuyo valor viene dado por la siguiente relación:



T: tensión de la cuerda (100 N)
M: Masa de la cuerda (0,1 kg)
L: Longitud de la cuerda (2 m)

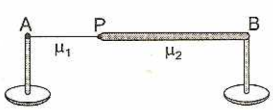
Densidad lineal de masa: $\mu = \frac{M}{L}$

$\Rightarrow \mu = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 \text{ kg/m}$

v: rapidez de propagación (m/s) $= \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$v = \sqrt{\frac{80}{0{,}05}} = 40 \text{ m/s}$

13. Dos cuerdas de densidad lineal μ_1 y μ_2 ($\mu_2 = 4\mu_1$) se encuentran unidas en el punto P. En A se genera una onda armónica de frecuencia 20 Hz. Si la velocidad en dicha cuerda es de 5 m/s, determinar la longitud de onda en la cuerda PB.



Resolución:

La tensión en AP y PB son iguales; entonces se puede obtener una relación entre las velocidades v_1 y v_2, respectivamente: $v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ y $v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$

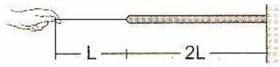
$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2$

Como: $v_1 = 5 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 2{,}5 \text{ m/s}$

Cuando una onda pasa de un medio a otro no se altera la frecuencia "f" porque cada pulso incidente origina un pulso refractado.

$f = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow 20 = \frac{2{,}5}{\lambda_2} \quad \therefore \lambda_2 = 0{,}125 \text{ m}$

14. La figura muestra una cuerda estirada, constituida por una parte delgada de longitud L y otra parte gruesa de longitud 2L. Al hacer oscilar el extremo de la cuerda delgada con frecuencia f = 20 Hz se propaga una onda. Si en la parte delgada la longitud de onda es $\lambda_1 = L/8$ y en la parte gruesa $\lambda_2 = L/16$, hallar el tiempo aproximado que demora un pulso en recorrer toda la cuerda.



Resolución:

Cuando una onda pasa de un medio a otro no se altera la frecuencia "f" porque cada pulso incidente origina un pulso refractado:

Cuerda delgada: $v_1 = \lambda_1 f = \frac{L}{8}(20) = \frac{5}{2}L$

Cuerda gruesa: $v_2 = \lambda_2 f = \frac{L}{16}(20) = \frac{5}{4}L$

Cálculo del tiempo de propagación en cada cuerda:

$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{L}{\frac{5}{2}L} = \frac{2}{5} \text{ s}; \quad t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{2L}{\frac{5}{4}L} = \frac{8}{5} \text{ s}$

Luego, el tiempo total es: $t = t_1 + t_2 \quad \therefore t = 2 \text{ s}$

15. La elongación de una onda en función de la posición y el tiempo está dada por: y = 8sen(3x − 1020t), donde "x" e "y" están en metros y "t" en segundos. ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas?

Resolución:

Así, un punto cualquiera del medio de coordenadas (x; y) debido al movimiento ondulatorio oscilará de modo que:

$$y = A\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Donde, y: ordenada, x: abscisa,
A: amplitud
λ: longitud de onda.
T: periodo
t: instante de tiempo.

Cambiamos de forma a la ecuación inicial:

$y = 8\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\frac{2\pi}{3}} - \frac{t}{\frac{2\pi}{1020}}\right)\right]$

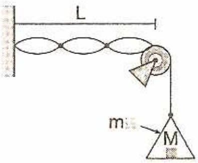
Comparando las ecuaciones tenemos que:

$\lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ m} \quad \wedge \quad T = \frac{2\pi}{1020} \text{ s}$

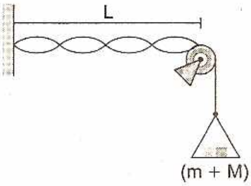
Cálculo de la velocidad de propagación:

$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{1020}} = 340 \text{ m/s}$

16. Una cuerda de longitud L vibra con la frecuencia de su tercer armónico, cuando el platillo contiene M = 1 kg. Si se recubre la cuerda con un material de tal manera que se duplica su densidad lineal de masa, ¿qué masa "m" hay que agregar en el platillo para que su frecuencia de oscilación en el 4.° armónico sea igual a su frecuencia de oscilación anterior?



Resolución:



Para el tercer armónico:
La densidad lineal de masa es: μ

La longitud de onda es: $\lambda_1 = \frac{2}{3}L$

La velocidad de la onda es: $v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$

Para el cuarto armónico:
La densidad lineal de masa es: 2μ.

La longitud de onda es: $\lambda_2 = \frac{L}{2}$

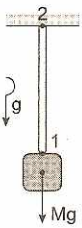
La velocidad de la onda es: $v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{2\mu}} = \sqrt{\frac{(M+m)g}{2\mu}}$

Ambas ondas tienen igual frecuencia:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{Mg/\mu}}{\frac{2}{3}L} = \frac{\sqrt{(M+m)g/(2\mu)}}{\frac{L}{2}}$$

$$\frac{9M}{4} = \frac{4(M+m)}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{8}M \quad \therefore\ m = 125 \text{ g}$$

17. Una cuerda de 20 m de longitud y masa m = 5 kg está suspendida del techo, y en su extremo inferior se coloca una masa de M = 8 kg. Si en el extremo inferior se producen ondas con una frecuencia de 20 Hz, ¿cuál es aproximadamente la longitud de onda?



Resolución:

La densidad lineal de masa es:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ kg/m}$$

La tensión media en la cuerda es:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{Mg + (m+M)g}{2} = \frac{(m+2M)g}{2}$$

$$T = \frac{(21)(9{,}8)}{2} = 102{,}9 \text{ N}$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{102{,}9}{0{,}25}} = 20{,}28 \text{ m/s}$$

La frecuencia es:

$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{20{,}28}{20} \quad \therefore\ \lambda = 1{,}014 \text{ m}$$

18. La elongación de una onda en función de la posición y tiempo está dada por: y = 8sen(3x − 1020t), con "x" e "y" en metros y "t" en segundos. Hallar la velocidad de propagación de la onda.

Resolución:

Haciendo la comparación con la ecuación general, encontramos los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω):

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) = 8\text{sen}(3x - 1020t)$$

Donde: $A = 8$ m; $k = 3\ \text{m}^{-1}$; $\omega = 1020$ rad/s

Velocidad de propagación de la onda:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1020}{3} \Rightarrow v = 340 \text{ m/s}$$

19. La ecuación de una onda transversal está dada por y = 10sen2π(x/8 − 5t), donde "x" e "y" están en centímetros, "t" en segundos; la cual se propaga en un hilo de longitud L = 1 m y masa m = 4 kg. Determinar: el número de onda y frecuencia angular, la longitud de onda y el período de oscilaciones, la velocidad de propagación de las ondas, la tensión del hilo.

Resolución:

Haciendo la comparación con la ecuación general, encontramos los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω):

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) = 10\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x - 10\pi t\right)$$

Donde: $A = 10$ cm; $k = \frac{\pi}{4}\ \text{cm}^{-1}$; $\omega = 10\pi$ rad/s

Velocidad de propagación: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi/4} = 40$ cm/s

Período de oscilaciones: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2$ s

Longitud de onda: $\lambda = vT = (40)(0{,}2) = 8$ cm

Densidad lineal de masa: $\mu = \frac{m}{L} = 4$ kg/m

Tensión en el hilo: $F = \mu v^2 = (4)(0,4)^2 = 0,64$ N

20. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda está dada por $y = 2sen(\pi x + 200\pi t + \pi/2)$, en la que "x" e "y" están en centímetros y "t" en segundos. Determinar la amplitud, la frecuencia, la velocidad de propagación y el ángulo de fase.

Resolución:

Haciendo la comparación con la ecuación general, encontramos los parámetros físicos, número de onda (k) y frecuencia angular (ω).

$$y = Asen(kx \pm \omega t + \phi)$$

El signo (+) o (−) se empleará si la onda se mueve, respectivamente, hacia la izquierda o hacia la derecha del eje x.

Donde: $A = 2$ cm; $k = \pi$ cm^{-1}; $\omega = 200\pi$ rad/s

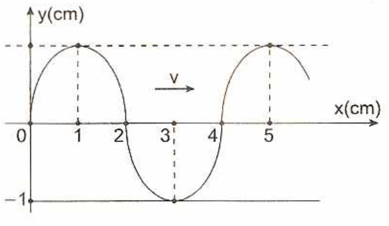
Ángulo de fase: $\phi = \frac{\pi}{2}$

Cálculo de la velocidad de propagación de la onda:

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{200\pi}{\pi} = 200$ cm/s

$\therefore$ $v = 2$ m/s

21. La onda sinusoidal mostrada en la figura se mueve hacia la derecha con velocidad $v = 10$ cm/s. Si "y" en centímetros y "t" en segundos, halle la función que describe su comportamiento.



Resolución:

Para una onda que se propaga en la dirección positiva de x: $y = Asen2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$

De la figura: $A = 1$ cm; $\lambda = 4$ cm

Velocidad de propagación: $v = 10$ cm/s

Periodo: $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{4}{10} = 0,4$ s

Reemplazando en la ecuación de la onda:

$y = (1)sen2\pi\left(\frac{x}{4} - \frac{t}{0,4}\right)$

$\therefore$ $y = sen\frac{\pi}{2}(x - 10t)$

22. ¿Cuántas personas deben gritar a razón de 60 dB cada una para producir un nivel de intensidad sonora de 80 dB?

Resolución:

De la teoría, cuando grita una persona se tiene:

$60 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ...(1)

De otra parte, cuando gritan N personas se tiene:

$80 = 10\log_{10}\left(\frac{NI}{I_0}\right)$ ...(2)

Restando (2) − (1):

$20 = 10\log_{10}(N) \Rightarrow \log_{10}(N) = 2 \Rightarrow N = 10^2$

$\therefore$ $N = 100$ personas

23. Un violín produce un nivel de intensidad de 40 dB, ¿qué nivel de intensidad producirán diez violines?

Resolución:

Para un violín se tiene: $40 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ...(1)

Para diez violines se tiene: $\beta = 10\log_{10}\left(\frac{10I}{I_0}\right)$ ...(2)

Restando (2) − (1):

$\beta - 40 = 10\log(10) \Rightarrow \beta = 40 + 10(1)$

$\therefore$ $\beta = 50$ dB

24. Se define la ganancia β, en decibeles, de un amplificador de potencia por la relación: $\beta = 20\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$ siendo P la potencia de salida y P_0 la potencia de entrada. ¿Cuál será la ganancia de un amplificador, si la potencia de entrada es 2 W y la de salida es 20 W?

Resolución:

La ganancia según la fórmula dada será:

$\beta = 20\log_{10}\left(\frac{20}{2}\right) \Rightarrow \beta = (20)(\log_{10}10)$

$\therefore$ $\beta = 20$ dB

25. Una persona situada a un metro de distancia de una fuente sonora recibe un nivel de intensidad de 40 dB. ¿A qué distancia mínima de la fuente no oirá?

Resolución:

Cuando la persona se ubica a 1 m, la intensidad del sonido es: $I = \frac{P}{4\pi(1)^2}$ ...(1)

Y el nivel de intensidad que recibe es:

$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Donde: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 $\Rightarrow 40 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

$\Rightarrow I = (10^4)(10^{-12}) = 10^{-8}$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $P = 4\pi(10^{-8})$

Por dato, la intensidad mínima que escucha el oído es de 10^{-12} W/m^2, de modo que: $10^{-12} = \frac{P}{4\pi d^2}$

$$\Rightarrow 10^{-12} = \frac{4\pi 10^{-8}}{4\pi d^2} \Rightarrow d^2 = 10^4 \quad \therefore d = 100 \text{ m}$$

26. Cierta nota musical tiene aproximadamente una frecuencia de 440 Hz. Determinar la longitud de onda generada en una cuerda de densidad lineal 0,01 kg/m sometida a una tensión de 121 N.

Resolución:

Velocidad de una onda a través de una cuerda tensa:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{121}{0{,}01}} = \frac{11}{0{,}1} \Rightarrow v = 110 \text{ m/s}$$

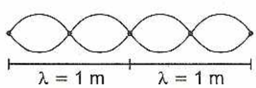
Longitud de onda: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{110}{440} \quad \therefore \lambda = \frac{1}{4}\text{ m}$

27. Una cuerda de 2 m de longitud y 2 g de masa es sometida a una tensión de 40 N y se observa que en la cuerda se produce 4 antinodos. Determine la frecuencia de vibración de la cuerda.

Resolución:

La densidad lineal de masa es:

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{2\times 10^{-3}}{2} = 10^{-3} \text{ kg/m}$$



La longitud de onda es: $\lambda = 1$ m

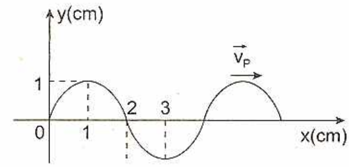
Velocidad de propagación de una onda a través de una cuerda tensa:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{40}{10^{-3}}} \Rightarrow v = 200 \text{ m/s}$$

Cálculo de la frecuencia de oscilación:

$$v = \lambda f \Rightarrow 200 = 1(f) \quad \therefore f = 200 \text{ Hz}$$

28. La onda armónica mostrada se nueve hacia la derecha con una rapidez de 10 m/s. Determinar el periodo de las oscilaciones producidas en milisegundos (ms).



Resolución:

Ecuación de una onda en el plano cartesiano:

$$y = A\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

Donde: $A = 1$ m; $v = 10$ m/s

$$\frac{\lambda}{T} = v \Rightarrow T = \frac{\lambda}{10} = \frac{\left(\frac{4}{100}\right)}{10}$$

$$T = \frac{4}{10^3} = 4\times 10^{-3}\text{ s} \Rightarrow T = 4\text{ ms}$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un resorte de constante elástica $k = 300$ N/m pende de un soporte sin tener colgada carga alguna (figura a). Se le une un objeto de 1,5 kg (figura b) y se suelta el objeto partiendo del reposo. La distancia en cm, que descenderá el objeto antes de detenerse y empezar a subir, y la frecuencia en s^{-1}, con que oscilará, respectivamente son: ($g = 9{,}81$ m/s^2)

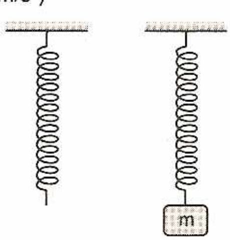
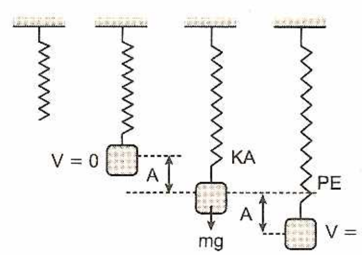


Fig. a Fig. b

A) 9,8; 2,20 B) 9,8; 2,25 C) 4,9; 2,20
D) 4,9; 2,25 E) 13,7; 2,20

Resolución:

Dibujando el acontecimiento adecuadamente



En la posición de equilibrio (PE)

$kA = mg \Rightarrow 300A = 1{,}5(9{,}81)$

$A = 4{,}9$ cm

Entonces el recorrido es: $2A = 9{,}8$ cm

Ahora, para determinar la frecuencia empleamos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\times 3{,}14}\left(\sqrt{\frac{300}{1{,}5}}\right)$$

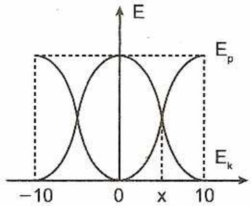
$\Rightarrow f = 2{,}25\ s^{-1}$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Un sistema de masa resorte realiza un movimiento armónico simple, cuyas energías están dadas según la

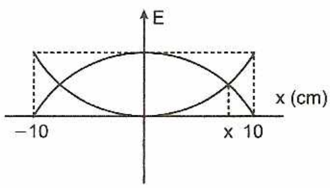
gráfica, con m = 1 kg. Amplitud máxima de 10 cm y frecuencia angular de 3 rad/s. Calcule su energía potencial E_P (en mJ) en la posición x mostrada.



A) 11,25 B) 22,50 C) 31,80
D) 33,75 E) 45,00

Resolución:

Del gráfico:



Como la energía mecánica en el MAS se conserva, entonces:

$E_{Pmax} = E_k + E_P \qquad ...(1)$

Se observa que en "x" la $E_k = E_P$

En (1) $\frac{1}{2}KA^2 = 2E_P \Rightarrow \frac{1}{2}w^2mA^2 = 2E_P$

Reemplazando: $\frac{1}{2}(3^2)(1)\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 2E_P$

$\therefore\ E_P = 22,50$ mJ

Clave: B

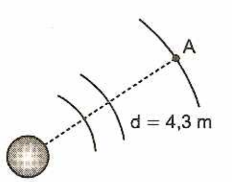
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Desde una fuente puntual se emiten ondas sonoras, tal que la intensidad es de 0,026 W/m^2 a una distancia de 4,3 m de la fuente. ¿Cuánta energía sonora en 10^4 J, emite la fuente en una hora, si su potencia se mantiene constante?

A) 2,17 B) 2,27 C) 2,37
D) 2,47 E) 2,57

Resolución:

Del gráfico:



Fuente sonora

La intensidad del sonido en el punto A es:

$I_A = \frac{P}{4\pi d^2} \qquad ...\frac{w}{m^2}$

Dónde: P = Potencia (w)

Para obtener la energía emitida en un tiempo "t"

$$E = Pt = I(4\pi d^2)t$$

Reemplazando los datos:

$E = (0,026)(4\pi)(4,3)^2(3600)$

$E = 2,17 \times 10^4$ J

Clave: A

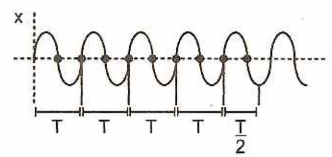
PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Un péndulo simple se traslada a un planeta y se observa que la masa del péndulo pasa diez veces por su posición de equilibrio cada segundo. Si la longitud del péndulo es 0,4 m, calcule aproximadamente la gravedad del planeta, en m/s^2.

A) 150 B) 260 C) 320
D) 460 E) 500

Resolución:

Representando el fenómeno:



$\frac{9T}{2} = 1 \Rightarrow T = \frac{2}{9}$ s

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_x}} \Rightarrow g_x = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

$g_x = \frac{(4\pi^2)(0,4)}{(2/9)^2} \Rightarrow g_x \cong 320$ m/s^2

Clave: C

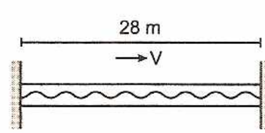
PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

Una cuerda de 0,65 kg de masa esta estirada entre dos soportes 28 m. Si la tensión en la cuerda es de 150 N, calcule aproximadamente el tiempo en segundos, que tomara un pulso sobre la cuerda en viajar de un soporte a otro.

A) 0,24 B) 0,34 C) 0,44
D) 0,54 E) 0,64

Resolución:

Del gráfico:



Siendo "t" el tiempo que tarda la onda en propagarse de un extremo a otro.

Para una onda:

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\ v = \frac{d}{t} \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{d}{t} \Rightarrow t = d\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Reemplazando: $t = 28\sqrt{\dfrac{\frac{0,65}{28}}{150}}$

$\Rightarrow$ t = 0,34 s

Clave: B

PROBLEMA 6 UNI 2012 - II

Una partícula tiene un movimiento armónico simple. Si su rapidez máxima es de 10 cm/s y su aceleración máxima es de 25 cm/s^2, calcule aproximadamente el producto de su amplitud por el periodo del movimiento en (cm)

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:

Del MAS:

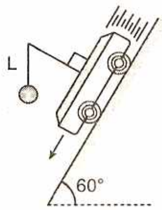
$$\begin{array}{lcl} WA = 10 & & W = 2,5 \text{ rad/s} \\ W^2A = 25 & \Rightarrow & A = 4 \text{ cm} \end{array}$$

Nos piden: $AT = 4\left(\dfrac{2\pi}{2,5}\right)$

$AT \approx$ 10 cms

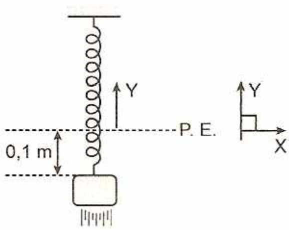
Clave: E

1. Una carretilla desciende sobre un plano inclinado liso. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del péndulo de 1,25 m de longitud instalado en la carretilla. ($g = 10\ m/s^2$).



A) $0{,}5\pi$ s B) π s C) $\frac{\pi}{3}$ s
D) 2 s E) 0,5 s

2. A partir del instante mostrado se comienza a analizar el movimiento del bloque de 2 kg que se encuentra unido a un resorte constante de rigidez $k = 200$ N/m. Halle la ecuación de su movimiento. Considere que para dicho instante la rapidez del bloque es $\sqrt{3}$ m/s y desprecie el rozamiento ($g = 10\ m/s^2$).



A) $\vec{y} = 0{,}2\text{sen}\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$ m

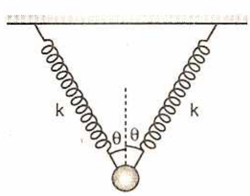
B) $\vec{y} = 0{,}2\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ m

C) $\vec{y} = -0{,}2\text{sen}\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$ m

D) $\vec{y} = 0{,}2\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$ m

E) $\vec{y} = -0{,}2\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ m

3. La figura muestra a una pequeña esfera sujeta a 2 resortes idénticos. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del sistema; desprecie los efectos gravitatorios.

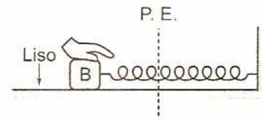


A) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ B) $\frac{2\pi}{\cos\theta}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

C) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k\,\text{sen}\theta}}$ D) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k\cos\theta}}$

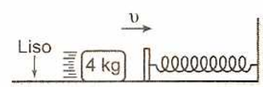
E) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k\tan\theta}}$

4. En el instante mostrado se suelta el bloque de 4 kg y, en este momento, el resorte le ejerce una fuerza de módulo 20 N. Determine la ecuación del movimiento ($k = 100$ N/m).



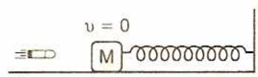
A) $\vec{x} = 0{,}1\text{sen}(10t + \pi/2)$ m
B) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}(5t + \pi/2)$ m
C) $\vec{x} = 0{,}4\text{sen}(5t + 3\pi/2)$ m
D) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}(5t + 3\pi/2)$ m
E) $\vec{x} = 0{,}3\text{sen}(4t + 3\pi/2)$ m

5. Se lanza el bloque contra el resorte. Determine el modulo del impulso sobre el bloque hasta que el resorte este nuevamente sin deformar, si la amplitud de las oscilaciones es 1,2 m ($k = 100$ N/m).



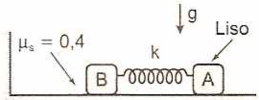
A) 12 Ns B) 84 Ns C) 42 Ns
D) 48 Ns E) 24 Ns

6. Una bala de masa "m" es disparada con una rapidez de 400 m/s contra un bloque de masa M = 200 m en reposo, de manera que luego de atravesarlo, su rapidez se reduce a la mitad. Si el bloque oscila con un periodo de $\pi/2$ s, determine la amplitud de sus oscilaciones. Desprecie el rozamiento.



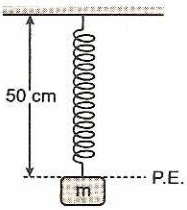
A) 5 cm B) 10 cm C) 15 cm
D) 20 cm E) 25 cm

7. Calcule la máxima amplitud con que puede oscilar el bloque A, si se quiere que el bloque B de 2 kg se mantenga siempre en reposo.
($k = 32$ N/m; $g = 10\ m/s^2$).



A) 0,5 m B) 0,25 m C) 0,4 m
D) 0,15 m E) 0,8 m

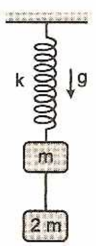
8. El resorte que se muestra es de 40 cm de longitud natural. Si el bloque se eleva verticalmente 20 cm y se suelta, determine la ecuación de su velocidad ($g = 10\ m/s^2$).



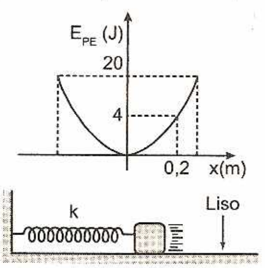
A) $\vec{\upsilon} = 2\cos(10t)$ m/s
B) $\vec{\upsilon} = 5\text{sen}(10t + 3\pi/2)$ m/s
C) $\vec{\upsilon} = 2\cos(10t + \pi/2)$ m/s
D) $\vec{\upsilon} = 5\cos(10t + \pi)$ m/s
E) $\vec{\upsilon} = 2\cos(5t + \pi/2)$ m/s

9. En el grafico se muestra un sistema en reposo. Si cortamos el hilo que une los dos bloques, determine la máxima altura que logrará ascender "m" respecto de su posición inicial.

A) $\dfrac{2mg}{k}$
B) $\dfrac{4mk}{g}$
C) $\dfrac{3mg}{k}$
D) $\dfrac{4mg}{k}$
E) $\dfrac{mg}{5k}$



10. El bloque de 2 kg realiza un MAS y su E_{PE} varía con la posición de acuerdo al gráfico adjunto. Determine su rapidez en la posición $x = 0,2$ m.



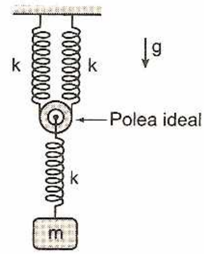
A) 2 m/s B) 4 m/s C) 6 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

11. La ecuación que define la velocidad de un oscilador que realiza un MAS horizontal está dada por $\vec{\upsilon}(t) = 3\sqrt{3}\cos(6t + \pi/3)$ m/s. Determine el módulo de la aceleración de la partícula cuando su energía cinética sea el doble de su energía potencial elástica.

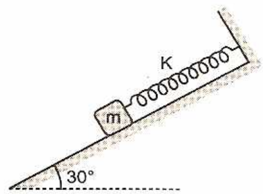
A) $3\ m/s^2$ B) $6\ m/s^2$ C) $18\ m/s^2$
D) $9\ m/s^2$ E) $12\ m/s^2$

12. Si al bloque en equilibrio se le desvía ligeramente hacia abajo, determine el periodo de sus oscilaciones.

A) $2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{4k}}$
B) $2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$
C) $2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$
D) $2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{2k}}$
E) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

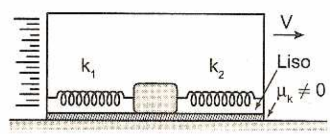


13. El bloque de masa "m" es soltado sobre el plano inclinado liso estando el resorte sin deformar. Determine cuanto recorre el bloque hasta el instante $t = \dfrac{2\pi}{15}$ s ($m = 5$ kg; $k = 500$ N/m; $g = 10\ m/s^2$)



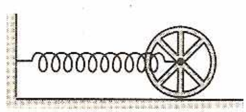
A) 25 cm B) 12,5 cm C) 30 cm
D) 50 cm E) 20 cm

14. El sistema en el instante mostrado presenta una rapidez de 3 m/s; si transcurrido 0,5 s se detiene, el bloque de 2 kg a partir de dicho instante oscila con amplitud de:
($k_1 = 10$ N/m y $k_2 = 30$ N/m)



A) 50 cm B) 30 cm C) $30\sqrt{6}$ cm
D) 20 cm E) $30\sqrt{2}$ cm

15. Un resorte de constante de rigidez $k = 32$ N/m se encuentra unido al eje de una rueda de 1 kg que puede rodar sin deslizar. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones que experimenta el eje de la rueda (la masa de la rueda se encuentra distribuida homogéneamente en la llanta).



A) $2{,}5\pi$ s B) 4π s C) $0{,}5\pi$ s
D) 2π s E) $0{,}8\pi$ s

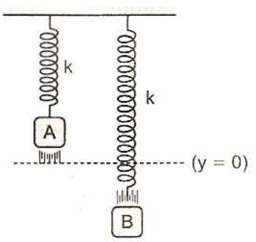
16. Una partícula oscilante de 0,1 kg en un instante dado tiene la posición: $\vec{x} = 0{,}5\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$ m
Entonces es correcto afirmar que:

A) Su máxima aceleración es 16 m/s^2.
B) Su velocidad máxima es 3 m/s.
C) Su máxima energía cinética es 0,4 J.
D) Su energía potencial máxima es 0,2 J.
E) Su periodo de oscilación es $\pi/4$.

17. Considere un resorte horizontal (k = 0,1 N/cm) con un extremo fijo y en el otro extremo un bloque de 0,4 kg apoyado en un piso horizontal liso. Si el bloque es desplazado 10 cm hacia la derecha y soltado, ¿Qué ecuación tiene su posición durante el movimiento de dicho bloque?

A) $0{,}1\text{sen}\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ m B) $0{,}1\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ m
C) $0{,}1\text{sen}(5t)$ m D) $0{,}1\cos(5t)$ m
E) $0{,}1\text{sen}(10t)$ m

18. Dos bloques A y B de masas iguales oscilan con igual amplitud A. Después de transcurrido un tiempo "t", cuando A esta en $\vec{y} = \frac{A}{2}$ (subiendo), la posición de B es $\vec{y} = -\frac{\sqrt{3}A}{2}$ (bajando). El ángulo de fase de B con respecto a A, es entonces:



A) $7\pi/6$ B) $5\pi/6$ C) $\pi/3$
D) $\pi/6$ E) $\pi/4$

19. Un péndulo simple se ubica dentro de un ascensor, el ascensor estaba en reposo y acelera hacia arriba con una aceleración "a" (a < g) luego en un segundo tramo mantiene su velocidad constante, en un tercer tramo desacelera y luego se detiene. En este último tramo su aceleración es "a" (a < g). ¿Qué afirmación es verdadera y que afirmación es falsa?

- En el primer tramo el periodo de oscilación es menor.
- En el último tramo el periodo de oscilación es mayor.
- En la primera parte el péndulo realiza mayor número de oscilaciones por cada segundo.
- En el segundo tramo el periodo de oscilación es mayor que en el primer tramo.

A) VFVV B) VVFV C) VVVV
D) VFVF E) VFFV

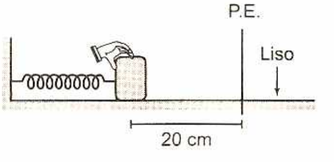
20. Un péndulo oscila dentro de un ascensor que sube con velocidad constante. Si el ascensor comienza a frenar con una aceleración a = g/4, ¿en cuánto se debe acortar la longitud del péndulo para que el periodo no se altere? De la respuesta en porcentaje.

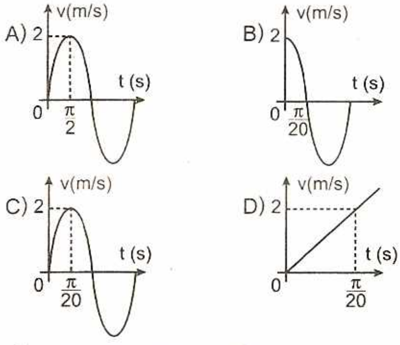
A) 75% B) 25% C) 30% D) 50% E) 10%

21. Un péndulo en la superficie terrestre tiene un periodo de 3 s. Lo llevamos a un planeta cuya masa es 9 veces la masa de la Tierra y cuyo radio es 2 veces el radio terrestre. ¿Cuántas oscilaciones completas realiza en ese planeta en el mismo tiempo en que en la Tierra realiza 2 oscilaciones completas?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 6 E) 5

22. Si el bloque de 2 kg es desplazado 20 cm respecto de su posición de equilibrio tal como se indica y se abandona; indique la gráfica que corresponde a la velocidad del bloque en función al tiempo k = 200 N/m.

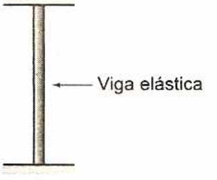




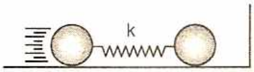
E) Falta mayor información

23. La amplitud de oscilaciones de una carga de 5 kg situada en la parte media de una viga elástica de rigidez k = 20 N/cm es de 3 cm. Determine la rapidez inicial de la carga, si en el instante t = 0, la carga estaba en la posición de equilibrio.

A) 0,2 m/s
B) 0,3 m/s
C) 0,4 m/s
D) 0,6 m/s
E) 1,2 m/s

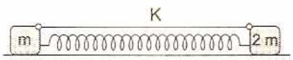


24. Dos bolas de masa "m" unidas por un resorte de rigidez "k" y sin deformación, se mueven horizontalmente hacia la pared vertical. Después del choque elástico, determine el periodo de oscilación que adquiere el sistema y cuantas veces impacta en total sobre la pared.



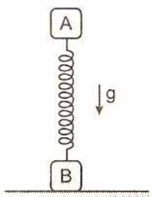
A) $\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$; 1 B) $2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$; 1 C) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$; 1
D) $\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$; 2 E) $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$; 2

25. Al quemar el hilo que une los bloques sujetos al resorte de rigidez "k" que reposan sobre una superficie lisa, se puede afirmar que es erróneo que:



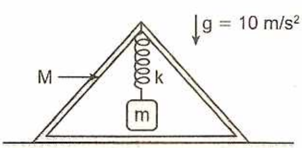
A) El sistema no oscila.
B) "m" y 2m oscilan con igual periodo.
C) El centro de masa del sistema no cambia de posición.
D) "m" oscila con un periodo $2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$
E) 2m oscila con un periodo $2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

26. Los cuerpos A y B son de 1 kg y 4 kg respectivamente y están unidos por un resorte ideal. Si A efectúa oscilaciones libres con amplitud 1,6 cm y frecuencia angular 25 rad/s, calcule la máxima y mínima fuerza sobre el plano de apoyo ($g = 10\ m/s^2$).



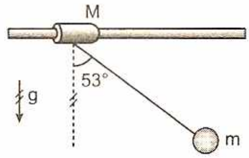
A) 60 y 40 N
B) 80 y 60 N
C) 100 y 60 N
D) 120 y 80 N
E) 100 y 80 N

27. Una caja triangular, de lados iguales y de masa igual a 5 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal. Un bloque de 1 kg está suspendido de él tal como indica la figura. ¿Con qué amplitud de las oscilaciones verticales del bloque, la caja empezará a saltar sobre la superficie? k = 10 N/cm.



A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm
D) 5 cm E) 6 cm

28. Se tiene un sistema formado por un collarín liso de 2 kg y una pequeña esfera de 0,5 kg, ambos unidos por un cable ideal de 1 m de longitud. Si el sistema se abandona en la posición mostrada, determine la amplitud de las oscilaciones del collarín y el módulo de la tensión máxima que soporta el cable ($g = 10\ m/s^2$).

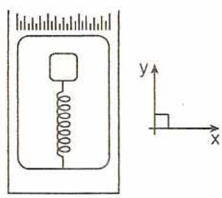


A) 15 cm y 12 N B) 16 cm y 5 N
C) 12 cm y 3 N D) 20 cm y 5 N
E) 16 cm y 9 N

29. Una partícula realiza un MAS y pasa por dos puntos separados 20 cm con la misma velocidad, empleando como mínimo 1 s para ir de un punto a otro; luego emplea 2 s más para pasar por el segundo punto en dirección opuesta. Calcule la amplitud de la partícula oscilante.

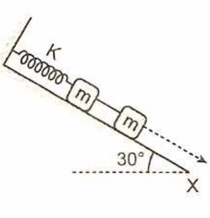
A) 10 cm B) 15 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 30 cm

30. El recipiente de madera contiene un bloque conectado a un resorte, el cual esta comprimido 40 cm. El conjunto desciende con una rapidez constante de 1,5 m/s y de pronto se incrusta en el clavo mostrado. ¿Cuál será la ecuación del movimiento del bloque después del impacto? ($g = 10\ m/s^2$)



A) $\vec{y} = 0{,}3\text{sen}t(m)$
B) $\vec{y} = 0{,}6\text{sen}(t + \pi)(m)$
C) $\vec{y} = 0{,}3\text{sen}(5t + \pi)(m)$
D) $\vec{y} = 0{,}4\text{sen}(25t - \pi)(m)$
E) $\vec{y} = 0{,}3\text{sen}(t + \pi)(m)$

31. El sistema mostrado reposa sobre el plano inclinado liso, donde m = 1 kg y k = 25 N/m. En cierto instante cortamos el cable que une a ambos bloques, determine la ecuación de movimiento del bloque oscilante.



A) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ m

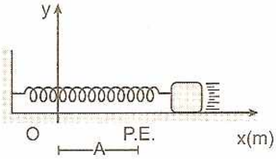
B) $\vec{x} = 0{,}5\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ m

C) $\vec{x} = 0{,}4\text{sen}\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ m

D) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ m

E) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}(5t)$ m

32. Un oscilador armónico se desplaza sobre una superficie lisa con amplitud A. ¿En qué posición su energía cinética será tres veces su energía potencial elástica?



A) $\frac{A}{4}$ B) $\frac{3}{4}A$ C) $\frac{5}{4}A$

D) $\frac{3}{2}A$ E) $\frac{5}{2}A$

33. Un oscilador armónico con una masa de 2 kg oscila en un plano horizontal. El oscilador tiene una energía total de 20 J. Halle su ecuación del movimiento si en el instante t = 0, su posición es $\vec{x}_0 = +10$ cm y esta moviéndose hacia la derecha. La constante de rigidez del resorte es k = 1000 N/m.

A) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$

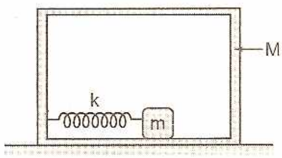
B) $\vec{x} = 0{,}1\text{sen}\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{6}\right)$

C) $\vec{x} = 0{,}2\text{sen}\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{6}\right)$

D) $\vec{x} = 0{,}1\text{sen}\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$

E) $\vec{x} = 0{,}2\cos\left(10\sqrt{5}t + \frac{3\pi}{4}\right)$

34. Una caja de masa M esta sobre una mesa horizontal. Determine la amplitud de las oscilaciones de "m", para que la caja empiece a moverse por la mesa. El coeficiente de rozamiento entre la caja y la mesa es μ. El bloque de masa "m" es liso.



A) $A \geq \mu\frac{Mg}{k}$ B) $A \geq \mu\frac{Mg}{2k}$

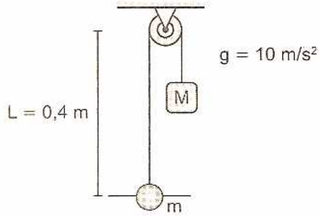
C) $A \geq \mu\frac{(M+m)g}{2k}$ D) $A \geq \mu\frac{(M+m)g}{k}$

E) $A \geq \mu\frac{mg}{k}$

35. Respecto a un péndulo simple que oscila en un plano vertical, podemos afirmar que:

A) En el punto más alto de su trayectoria su aceleración tangencia es nula
B) En el punto más bajo de su trayectoria su aceleración centrípeta es cero
C) Su periodo de oscilación es independiente de la aceleración del sistema.
D) Se mueve más rápido si aumentamos su longitud.
E) Oscilara más rápido si lo colocamos en un ascensor que sube aceleradamente con $a < g$.

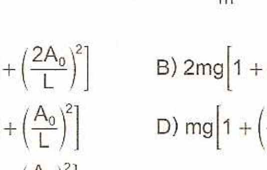
36. Una pequeña esfera hueca de masa m esta insertada en una aguja horizontal lisa y una carga de masa M está unida a la esfera mediante una cuerda. Si desviamos ligeramente a la esfera, ¿Cuál será su periodo de oscilación? (M = 4m).



A) 0,1 s B) 0,2 πs C) 0,5 πs

D) 0,1 πs E) $\frac{1}{10\pi}$ s

37. El péndulo que se muestra, realiza oscilaciones armónicas. Si la amplitud de sus oscilaciones es A_0, determine el máximo valor de la fuerza de tensión en el hilo de longitud L.



A) $mg\left[2 + \left(\frac{2A_0}{L}\right)^2\right]$ B) $2mg\left[1 + \left(\frac{A_0}{L}\right)^2\right]$

C) $mg\left[2 + \left(\frac{A_0}{L}\right)^2\right]$ D) $mg\left[1 + \left(\frac{A_0}{L}\right)^2\right]$

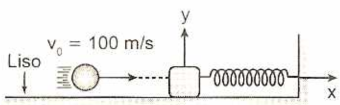
E) $mg\left[1 + \left(\frac{A_0}{2L}\right)^2\right]$

38. Un resorte está unido por un extremo a una pared vertical y por el otro a un bloque de masa "m" apoyado en el piso, lo estiramos y los soltamos llegando a comprimir al resorte completamente en 2 s, en ese instante le adherimos una masa de 3m sobre "m". Determine el tiempo que demora en regresar

a su posición inicial, desde el que fue soltado sobre la superficie horizontal lisa.

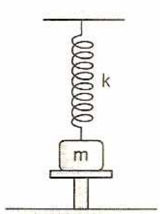
A) 4 s B) 8 s C) 2 s
D) 1 s E) 6 s

39. Un cuerpo pequeño de 50 g impacta horizontalmente con una rapidez de 100 m/s sobre un bloque de 950 g al cual se adhiere. ¿Determine la ecuación que describe el movimiento oscilatorio? k = 100 N/m



A) $\vec{x} = 0{,}3\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ m
B) $\vec{x} = 0{,}5\text{sen}\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ m
C) $\vec{x} = 0{,}4\cos(10t)$ m
D) $\vec{x} = 0{,}5\text{sen}(10t)$ m
E) $\vec{x} = 0{,}5\text{sen}(5t)$ m

40. Cierta carga de masa "m", sujeta al resorte de rigidez k, se encuentra sobre un soporte, por lo que el resorte resulta no deformado. El soporte se retira muy rápido; Calcule la deformación máxima que experimenta el resorte y la rapidez máxima de la carga.



A) $x_{máx} = \frac{mg}{k}$; $v_{máx} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$
B) $x_{máx} = \frac{2mg}{k}$; $v_{máx} = \sqrt{\frac{m}{k}}$
C) $x_{máx} = \frac{2mg}{k}$; $v_{máx} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$
D) $x_{máx} = \frac{mg}{2k}$; $v_{máx} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$
E) $x_{máx} = \frac{4mg}{k}$; $v_{máx} = 2g\sqrt{\frac{k}{m}}$

41. Una partícula describe un MAS cuya velocidad está determinada por la expresión: $v = 8\cos\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)$

Colocar verdadero (V) o falso (F) en los siguientes enunciados:

( ) En t = 0, la partícula está en la posición de equilibrio.
( ) La amplitud del MAS es de 2 m.
( ) El mínimo tiempo entre los instante en que la magnitud de la aceleración es máxima y luego mínima en $\pi/4$ segundos.

A) FFF B) FVV C) FVF
D) VVV E) VFV

42. La ecuación del movimiento de un punto tiene la forma: $x = 2\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$m

Hallar:
I. El periodo de vibración.
II. La velocidad máxima del punto.
III. La aceleración máxima.
Si "t" está en segundos.

A) 2 s; $\pm 2\pi$ m/s; $-\pi/2$ m/s^2
B) 8 s; $-\pi$ m/s; $-\pi^2/3$ m/s^2
C) 4 s; $\pm\pi$ m/s; $-\pi^2/2$ m/s^2
D) 6 s; $+2\pi$ m/s; $-\pi^2/3$ m/s^2
E) 1 s; $\pm 2\pi$ m/s; $-\pi^4$ m/s^2

43. Una particular describe un MAS cuya velocidad está determinada por la expresión: $x = 6\cos\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)$

Indicar verdadero (V) o falso (F) en los siguientes enunciados:

( ) En t = 0, la partícula está en posición de equilibrio.
( ) La amplitud del MAS es de 6 m.
( ) El mínimo tiempo entre los instantes en que la magnitud de la velocidad es máxima y luego mínima es $\pi/8$ segundos.

A) FFF B) FVV C) FVF
D) VVV E) VFV

44. Cuando se duplica la amplitud de un oscilador armónico simple se puede decir que:

A) Su periodo aumenta y su velocidad máxima no varía.
B Su periodo disminuye y su velocidad máxima aumenta.
C) Su periodo no cambia y su velocidad máxima se duplica.
D) Su periodo no cambia y su velocidad se cuadruplica
E) Su periodo aumenta y su velocidad máxima se duplica.

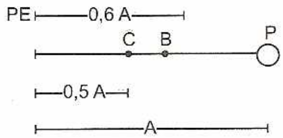
45. Un cuerpo realiza un movimiento armónico simple en torno a un punto, de modo que a 2 cm de ese punto su velocidad y aceleración son de 5 cm/s y 10 cm/s^2. Calcular la amplitud del MAS.

A) 1,5 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

46. ¿Cuánto tiempo transcurrirá desde el comienzo del movimiento vibratorio (MAS) hasta que el punto vibrante tenga una elongación igual a la mitad de la amplitud? El periodo de las vibraciones es igual a 48 s y la partícula parte del punto de equilibrio.

A) 1 s B) 2 s C) 3 s D) 4 s E) 5 s

47. La particula mostrada posee un MAS y realiza 7 oscilaciones completas en un tiempo de 3 s. Si parte de P, ¿Qué tiempo demora en ir de B a C?
PE: punto de equilibrio; A: amplitud.



A) 1/360 s B) 1/180 s C) 1 s
D) 1/20 s E) 2/15 s

48. A, O y B son tres puntos sobre una recta, tal que: AO = 2,4 cm y OB = 2 cm. Una partícula es lanzada de A hacia O con una velocidad v = 7 cm/s y efectúa un MAS, donde O es la posición de equilibrio. La velocidad de la partícula en B es de 15 cm/s. Calcular la amplitud de oscilación y la velocidad máxima del móvil.

A) 3,5 cm; 30 cm/s B) 2,5 cm; 38 cm/s
C) 4,5 cm; 25 cm/s D) 2,5 cm; 25 cm/s
E) 10 cm; 24 cm/s

49. Cuando un cuerpo de 20 kg se suspende de un resorte, este se deforma en 20 cm hasta su PE. Calcular la masa unida a este resorte que produce oscilaciones de 2 Hz de frecuencia. Considere $\sqrt{g} = \pi$.

A) 2,25 kg B) 6,25 kg C) 3,5 kg
D) 4,75 kg E) 1 kg

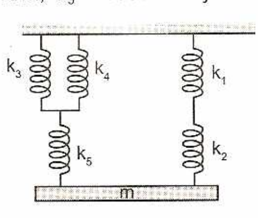
50. ¿A que es igual la relación entre la energía cinética de un punto que vibra con MAS y su energía potencial, en el momento que la elongación es x = A/2, siendo A la amplitud?

A) 3 B) 9 C) 12 D) 15 E) 3/4

51. Un bloque de 20 kg efectúa un MAS de 12 m de amplitud y 24 s de periodo. ¿Qué energía cinética tendrá después de los tres primeros segundos? ($g = \pi^2 = 9{,}8\ m/s^2$) El MAS se inicia en el PE.

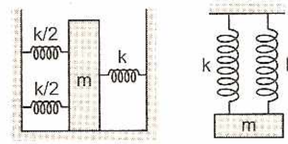
A) 19 J B) 29 J C) 39 J D) 49 J E) 59 J

52. Calcular el periodo del sistema mostrado, sabiendo que:
$k_1 = 200$ N/m; $k_2 = 50$ N/m; $k_3 = 700$ N/m;
$k_4 = 200$ N/m; $k_5 = 1800$ N/m y m = 10 kg.



A) π s B) $\pi/3$ s C) $\pi/4$ s
D) $\pi/2$ s E) 2π s

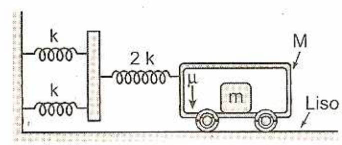
53. Para los sistemas mostrados, ¿qué podemos afirmar respecto a los periodos?



(1) (2)

A) $T_2 > T_1$ B) $T_1 > T_2$ C) $T_1 = T_2$
D) $T_1 = 2T_2$ E) $T_1 = 3T_2$

54. Determinar la máxima amplitud de las oscilaciones del sistema mostrado, si se sabe que el piso horizontal es liso, de tal manera que el bloque de masa "m" no llegue a resbalar. La masa del carrito es M.



A) $\dfrac{\mu g(M+m)}{k}$ B) $\dfrac{2\mu g(M+m)}{k}$

C) $\dfrac{2\mu gk}{M+m}$ D) $\dfrac{3\mu g(M+m)}{2k}$

E) $\dfrac{2\mu g(M+m)}{3k}$

55. Un péndulo simple de 1 m de longitud realiza 90 oscilaciones en 3 minutos. De los siguientes valores, en m/s^2, indicar el que más se aproxima al valor de la aceleración de la gravedad en el lugar del experimento.

A) 9,86 B) 9,83 C) 9,81
D) 9,80 E) 9,78

56. Calcular la longitud del hilo de un péndulo simple de tal manera que si dicha longitud aumentase en 3 m su periodo se duplica.

A) 3 m B) 1 m C) 6 m
D) 2 m E) 9 m

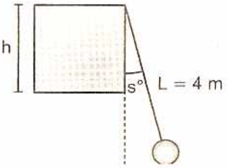
57. El periodo de oscilación de un péndulo simple es de $\sqrt{10}$ s. Si su longitud disminuye en un 10%, determinar su nuevo periodo.

A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 4 s E) 5 s

58. Si el periodo de un péndulo es de 3 s, ¿Cuál será su periodo si su longitud disminuye en un 75%?

A) 2 s B) 1 s C) 1,5 s
D) 2,5 s E) 0,5 s

59. Se suelta una esferita unida a un hilo inelástico de longitud 4 m. Sabiendo que el tiempo que emplea en ir y volver a un extremo es de 3,5 segundos, calcular "h" (altura del obstáculo)



A) 1 m B) 1,5 m C) 1,75 m
D) 2,5 m E) 3 m

60. Un reloj de péndulo hecho en la Tierra es llevado a un planeta X donde la aceleración de la gravedad es cuatro veces mayor que de la Tierra. Después de 1 hora en la Tierra, ¿Cuánto marcará el reloj en el planeta X?

A) 40 min B) 30 min C) 20 min
D) 60 min E) 120 min

61. Un bloque de 200 gramos oscila sobre una superficie horizontal lisa con un MAS, cuando pasa por su posición de equilibrio impacta sobre el bloque verticalmente un trozo de barro de 200 gramos y queda adherido sobre el bloque. Halle el nuevo periodo, si el periodo inicial fue de 3 segundos.

A) 1,41 s B) 2,82 s C) 2,42 s
D) 2,00 s E) 4,24 s

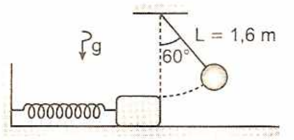
62. Halle el periodo de un péndulo simple, cuya longitud es de 0,6125 m, en segundos.

A) $\pi/2$ B) $\pi/3$ C) π D) 2π E) 3π

63. Halle el periodo de un péndulo simple en la superficie de un planeta, conociendo que la aceleración de la gravedad en dicho planeta es el cuádruple de la gravedad de la Tierra. En la Tierra y al nivel del mar el periodo del péndulo es 0,8 s.

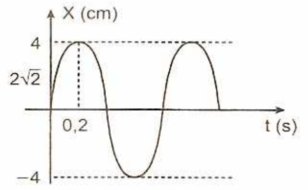
A) 0,1 s B) 0,2 s C) 0,4 s
D) 1 s E) 1,2 s

64. La pequeña esfera se suelta en la posición mostrada e impacta elásticamente con el bloque liso. Determine la ecuación del movimiento del sistema, en unidades del SI, luego del impacto, si se sabe que en cada oscilación completa recorre 80 cm. Considere que luego del primer impacto la esfera es retirada.



A) $x = 0{,}4\text{sen}(20t + \pi)$ B) $x = 0{,}2\text{sen}(20t)$
C) $x = 0{,}2\text{sen}(20t + \pi)$ D) $x = 0{,}2\text{sen}(10t + \pi)$
E) $x = 0{,}4\text{sen}(10t + \pi)$

65. Un oscilador armónico oscila a lo largo del eje X. Si en la gráfica se representa la ecuación de su movimiento, halle dicha ecuación en unidades del SI.



A) $0{,}04\cos\left(\frac{5\pi t}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B) $0{,}04\text{sen}\left(\frac{5\pi t}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $0{,}04\text{sen}\left(\frac{5\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ D) $0{,}02\text{sen}\left(\frac{5\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

E) $0{,}04\text{sen}\left(\frac{5\pi t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

66. Hallar la longitud de un péndulo que bate segundos.

A) 1 m B) 2 m C) 10 m
D) 20 m E) 5 m

67. Si la longitud de un péndulo aumenta en 2 m, su periodo aumenta 2 s. Halle la longitud inicial de péndulo en metros ($g = \pi^2$ m/s^2)

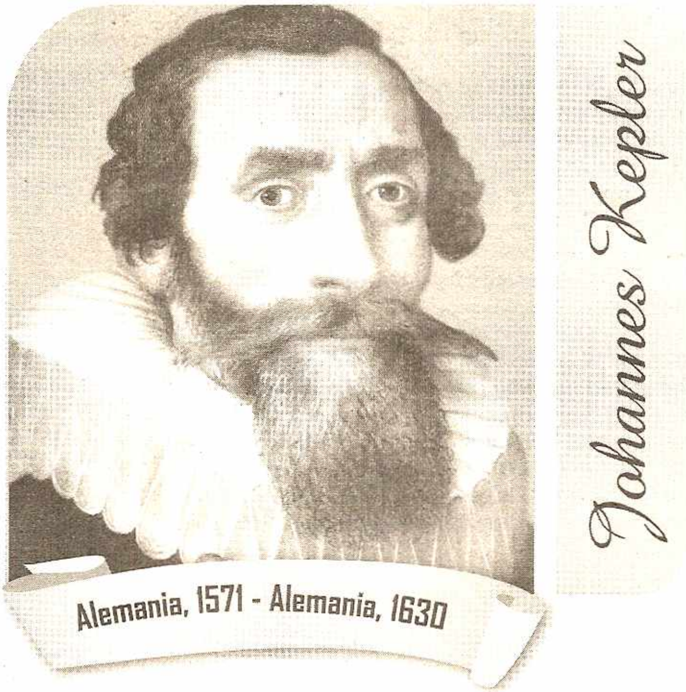
A) 0,25 B) 0,40 C) 0,50 D) 0,60 E) 0,80

CLAVES

1. B	10. B	19. C	28. E	37. D	46. C	55. A	64. C
2. C	11. C	20. B	29. C	38. B	47. D	56. B	65. C
3. B	12. D	21. A	30. C	39. D	48. D	57. C	66. A
4. D	13. B	22. C	31. D	40. C	49. B	58. C	67. A
5. D	14. B	23. E	32. D	41. C	50. E	59. C	
6. E	15. C	24. E	33. C	42. C	51. D	60. E	
7. B	16. D	25. E	34. D	43. D	52. C	61. E	
8. C	17. D	26. A	35. E	44. C	53. C	62. A	
9. D	18. A	27. E	36. B	45. C	54. A	63. C	

Gravitación universal

12 capítulo



Johannes Kepler (Weil der Stadt, Alemania, 27 de diciembre de 1571-Regensburg, Alemania, 15 de noviembre de 1630), figura clave en la revolución científica, fue un astrónomo y matemático conocido fundamentalmente por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol. Fue colaborador de Tycho Brahe, a quien sustituyó como matemático imperial de Rodolfo II. Sus padres le despertaron el interés por la astronomía, sobre todo cuando su padre le mostró a la edad de nueve años el eclipse de luna del 31 de enero de 1580.

En 1596 Kepler escribió un libro en el que exponía sus ideas: *Mysterium Cosmographicum* (El misterio cósmico). Kepler escribió sus famosas tres leyes (publicadas en 1609 en su obra *Astronomia nova*) que describen el movimiento de los planetas; estas leyes asombraron al mundo y le revelaron como el mejor astrónomo de su época, aunque él no dejó de vivir como un cierto fracaso de su primigenia intuición de simplicidad («¿por qué elipses, habiendo círculos?»). En 1627 publicó las *Tabulae Rudolphine*, a las que dedicó un enorme esfuerzo, y que durante más de un siglo se usaron en todo el mundo para calcular las posiciones de los planetas y las estrellas. En su honor, una cadena montañosa del satélite marciano Fobos fue bautizada con el nombre de «Kepler Dorsum».

Fuente: Wikipedia

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Las fuerzas entre el Sol y los planetas o entre la Tierra y los cuerpos próximos a su superficie son simplemente manifestaciones de una propiedad general de la materia, descubierta en 1696, por Isaac Newton con el objeto precisamente de explicar el movimiento planetario y llamada: Ley de la Gravitación Universal, cuyo enunciado es el siguiente:

Dos partículas materiales cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

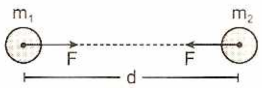


Fig. 12.1

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}} \qquad ...(12.1)$$

m_1 y m_2: masa de los cuerpos (kg)
F: fuerza de atracción (N)
d: distancia entre los cuerpos (m)
G: constante, la misma para todos los cuerpos.

$$\boxed{G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2} \qquad ...(12.2)$$

Debido al pequeño valor de G, la fuerza de gravitación solo es apreciable cuando se trata de masas muy grandes.

La figura 12.2 presenta un planeta en su órbita (supuestamente circunferencial) alrededor del Sol. La fuerza F representa la fuerza centrípeta que debe actuar sobre el planeta para mantenerlo en su trayectoria. Newton atribuyó esta fuerza a la existencia de una atracción del Sol sobre el planeta. En resumen, concluyó que:

La fuerza centrípeta que mantiene un planeta en su órbita, se debe a la atracción que el Sol ejerce sobre él.

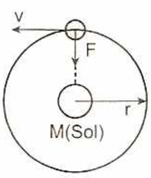


Fig. 12.2

$$\boxed{F_C = m\frac{v^2}{r}} \qquad ...(12.3)$$

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r} = v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \qquad ...(12.4)$$

La velocidad v del planeta es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de órbita r, por consiguiente, a menor distancia de separación más rápido se mueve el planeta.

INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO ($\vec{g}$)

Consideremos un cuerpo, de masa m, situado a una distancia d del centro de la Tierra (figura 12.3). El peso de este cuerpo, por la segunda ley de Newton, está dado por:

$$\boxed{P = mg} \qquad ...(12.5)$$

Donde g es el valor de la aceleración de la gravedad en el punto donde se encuentra el cuerpo. Pero este peso P es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Por la ley de gravitación universal podemos, escribir:

$$\boxed{P = G\frac{Mm}{d^2}} \qquad ...(12.6)$$

Donde M es la masa de la Tierra, supuestamente concentrada en su centro. Si igualamos las expresiones (12.5) y (12.6), tendremos: $mg = G\frac{Mm}{d^2}$, de donde:

$$\boxed{g = G\frac{M}{d^2}} \qquad ...(12.7)$$

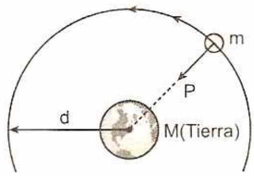
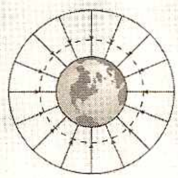


Fig. 12.3



Campo gravitatorio. Es aquella región del espacio que rodea a una masa M creadora del campo, lugar en el cual deja sentir su efecto (atracción) sobre otras partículas. El campo gravitatorio se comporta como un agente transmisor de fuerzas gravitatorias. El campo gravitatorio se puede representar mediante líneas de fuerzas (líneas geométricas) ingresando a la masa M creadora del campo.

COMENTARIOS DE LA ECUACIÓN:

1. Obsérvese que el valor de la masa m del cuerpo no aparece en la ecuación, o sea, el valor de g no depende de la masa m. Este resultado que aparece inmediatamente de la ley de gravitación universal, ya había sido observado en forma experimental por Galileo, algunos años antes de Newton, al comprobar que todos los cuerpos en caída libre descienden con la misma aceleración.

2. El valor de g es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, cuanto más nos alejamos de la superficie de la Tierra, tanto menor es el valor de la aceleración de la gravedad. El valor máximo de g se consigue en la superficie de la Tierra.
3. Vamos a analizar ahora el valor de g en la superficie terrestre. En este caso, siendo R el radio de nuestro planeta, tendremos d = R y por consiguiente:

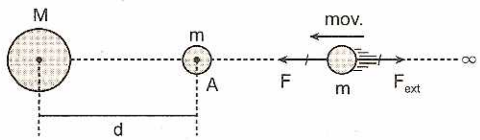
$$\boxed{g = G\frac{M}{R^2}} \qquad \ldots(12.8)$$

Como la Tierra no es perfectamente esférica y el valor de R en el ecuador es mayor que en los polos, podemos concluir que la aceleración de la gravedad en el ecuador es, por tanto, menor que en los polos geográficos Norte y Sur.

CASOS ESPECIALES

Energía potencial de interacción gravitatoria

La energía potencial de interacción gravitatoria (E_{Pg}) entre dos partículas o cuerpos de masas M y m se define como el trabajo realizado por un agente externo para trasladar uno de los cuerpos desde el infinito, lentamente, sistema casi estático, hasta un punto del campo gravitatorio generado por el otro cuerpo.



$$E_{Pg} = W_{\infty \to A} \Rightarrow E_{Pg} = -\frac{GMm}{d}$$

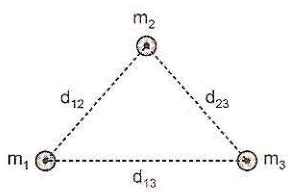
En el movimiento casi estático (equilibrio) del cuerpo m, la fuerza externa (igual en módulo a la fuerza gravitatoria) realiza un trabajo negativo (opuesto al movimiento), por esta razón la energía potencial de interacción gravitatoria tiene signo negativo siempre.

Sistema de varios cuerpos

Energía potencial de interacción gravitatoria para un sistema de tres cuerpos.

$$E_{pg}^{sistema} = -\frac{Gm_1m_2}{d_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{d_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{d_{23}}$$

Es importante señalar que los términos del segundo miembro se consigue mediante la combinación de tres elementos agrupados de dos en dos.



MOVIMIENTO PLANETARIO

La Astronomía es la más antigua de las ciencias. La necesidad de establecer las épocas de siembra y de cosecha, y su relación con las posiciones del Sol, de la Luna y de las estrellas, llevó a los astrónomos de la antigüedad a recabar un gran número de datos relacionados con los movimientos de los astros.

Teoría geocéntrica

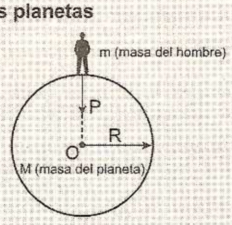
Los primeros intentos para explicar el movimiento de los cuerpos celestes se deben a los griegos del siglo IV a. C. Consideraban a la Tierra como el centro del universo, y los planetas, así como el Sol, la Luna y las estrellas, se hallaban incrustados en esferas que giraban alrededor de la Tierra. De los sistemas ideados para la simplificación del antiguo modelo griego, el que obtuvo mayor éxito fue la teoría geocéntrica del gran astrónomo Tolomeo, quien vivió en Alejandría en el siglo II d. C. y era de origen griego.

Tolomeo suponía que los planetas se movían en órbitas circulares alrededor de la Tierra. Su teoría se adaptaba muy bien a las creencias religiosas de la Edad Media, sus ideas perduraron durante 13 siglos.

Teoría heliocéntrica

El astrónomo polaco Nicolás Copérnico presentó en el siglo XVI, un modelo más sencillo para sustituir el sistema de Tolomeo. Siendo un hombre con una profunda fe religiosa, Copérnico creía que el universo debería ser más sencillo, pues Dios no haría un mundo tan complicado como el de Tolomeo. En el modelo de Copérnico, el Sol está en reposo, y los planetas, incluyendo la Tierra, giran alrededor de él en órbitas circulares.

Peso en otros planetas



$$\boxed{P = G\frac{mM}{R^2}}$$

El peso de un hombre en la superficie de cierto planeta, es igual a la fuerza de atracción que ejerce la masa M del planeta sobre la masa m del hombre.

LEYES DE KEPLER

1.° Ley de órbitas

La corrección del sistema de Copérnico, buscada por Kepler, se expresa a través de su primera ley. Sus estudios lo llevaron a concluir que, en realidad, los planetas se mueven alrededor del Sol, pero sus órbitas

son elípticas y no circulares, como suponía Copérnico. Además, Kepler comprobó que el Sol se encuentra situado en uno de los focos de cada elipse (figura 12.4). De manera que:
"Todo planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica, en la cual el Sol ocupa uno de los focos".

2.° Ley de áreas

Preocupado por conocer la velocidad de los planetas, Kepler pudo comprobar que se mueven con más rapidez cuando están más cercanos al Sol, y con más lentitud cuando están más alejadas de este astro. En la figura 12.5, por ejemplo, el planeta desarrolla mayor velocidad entre A y B que entre C y D.
Kepler comprobó que si el tiempo que tarda en ir desde A hasta B fuera igual al tiempo necesario para ir de C hasta D, entonces las áreas S_1 y S_2 serían iguales. Con base en esto formuló la segunda ley:
"El radio focal que une a un planeta con el Sol describe áreas iguales en tiempos iguales".

3.° Ley de períodos

Kepler logró relacionar el período de revolución con el radio de su órbita. Consideremos dos planetas que giran en órbitas circunferenciales alrededor del Sol con períodos T_1 y T_2, y radios medios R_1 y R_2 respectivamente.

Podemos, entonces, enunciar la tercera ley de Kepler de la siguiente manera:
"Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios de sus órbitas".

$$\boxed{\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}} \qquad \ldots(12.9)$$

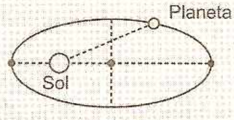


Fig. 12.4

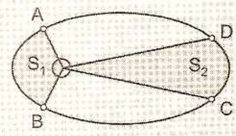


Fig. 12.5

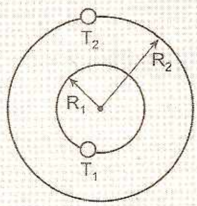
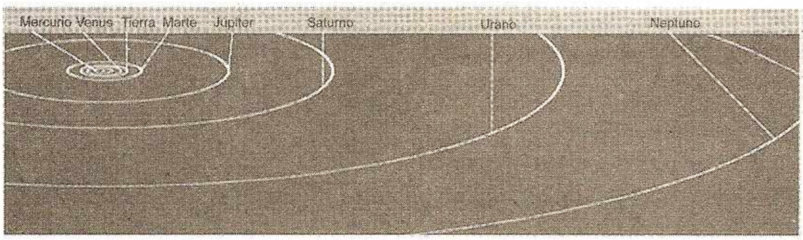


Fig. 12.6

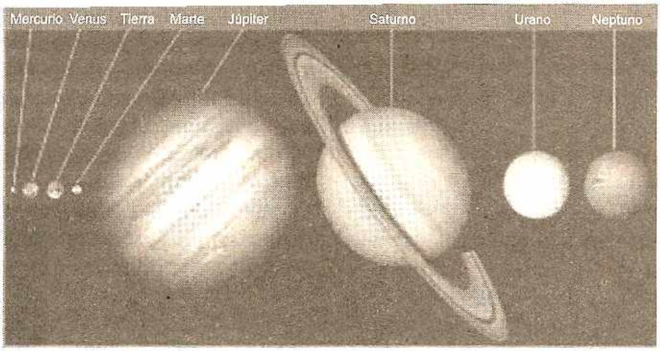
ESTRUCTURA DEL SISTEMA SOLAR

Los planetas giran alrededor del Sol. No tienen luz propia, sino que reflejan la luz solar.
Los planetas tienen diversos movimientos. Los más importantes son dos: el de rotación y el de translación. Por el de rotación, giran sobre sí mismos alrededor del eje. Esto determina la duración del día del planeta. Por el de translación, los planetas describen órbitas alrededor del Sol. Cada órbita es el año del planeta. Cada planeta tarda un tiempo diferente para completarla. Cuanto más lejos, más tiempo. Giran casi en el mismo plano.



FORMA Y TAMAÑO DE LOS PLANETAS

Los planetas tienen forma casi esférica, como una pelota un poco aplanada por los polos
Los materiales compactos están en el núcleo. Los gases, si hay, forman una atmósfera sobre la superficie. Mercurio, Venus, la Tierra y Marte son planetas pequeños y rocosos, con densidad alta. Tienen un movimiento de rotación lento, pocas lunas (o ninguna) y forma bastante redonda. Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, los gigantes gaseosos, son enormes y ligeros, hechos de gas y hielo. Estos planetas giran deprisa y tienen muchos satélites, más abultamiento ecuatorial y anillos.

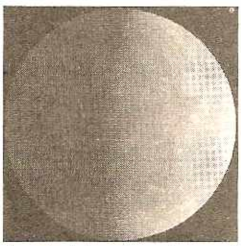


FORMACIÓN DE LOS PLANETAS

Los planetas se formaron hace unos 4500 millones de años, al mismo tiempo que el Sol.

En general, los materiales ligeros que no se quedaron en el Sol se alejaron más que los pesados. En la nube de gas y polvo original, que giraba en espirales, había zonas más densas, proyectos de planetas. La gravedad y las colisiones llevaron más materia a estas zonas y el movimiento rotatorio las redondeó. Después, los materiales y las fuerzas de cada planeta se fueron reajustando, y todavía lo hacen. Los planetas y todo el Sistema Solar continúan cambiando de aspecto. Sin prisa, pero sin pausa.

MERCURIO



Es el planeta más cercano al Sol y el segundo más pequeño del Sistema Solar. Mercurio es menor que la Tierra, pero más grande que la Luna.

Si nos situásemos sobre Mercurio, el Sol nos parecería dos veces y media más grande. El cielo, sin embargo, lo veríamos siempre negro, porque no tiene atmósfera que pueda dispersar la luz.

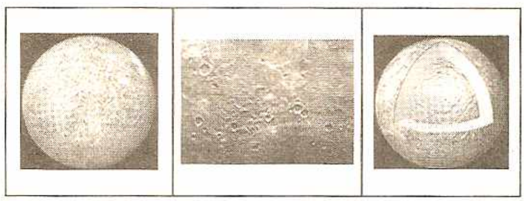
Los romanos le pusieron el nombre del mensajero de los dioses porque se movía más rápido que los demás planetas. Da la vuelta al Sol en menos de tres meses.

En cambio, Mercurio gira lentamente sobre su eje, una vez cada 58 días y medio. Antes lo hacía más rápido, pero la influencia del Sol le ha ido frenando.

Cuando un lado de Mercurio está de cara al Sol, llega a temperaturas superiores a los 425 °C. Las zonas en sombra bajan hasta los 170 bajo cero. Los polos se mantienen siempre muy fríos. Esto lleva a pensar que puede haber agua (congelada, claro).

La superficie de Mercurio es semejante a la de la Luna. El paisaje está lleno de cráteres y grietas, en medio de marcas ocasionadas por los impactos de los meteoritos. La presencia de campo magnético indica que Mercurio tiene un núcleo metálico, parcialmente líquido. Su alta densidad, la misma que la de la Tierra, indica que este núcleo ocupa casi la mitad del volumen del planeta.

Datos	Mercurio	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	2440 km	6378 km
Distancia media al Sol	57 910 000 km	149 600 000 km
Día: periodo de rotación sobre el eje	1404 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	87,97 días	365,256 días
Temperatura media superficial	179 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	2,78 m/s^2	9,78 m/s^2



VENUS

Es el segundo planeta del Sistema Solar y el más semejante a la Tierra por su tamaño, masa, densidad y volumen. Los dos se formaron en la misma época, a partir de la misma nebulosa. Sin embargo, es diferente de la Tierra. No tiene océanos y su densa atmósfera provoca un efecto invernadero que eleva la temperatura hasta los 480 °C. Es abrasador.

Los primeros astrónomos pensaban que Venus eran dos cuerpos diferentes porque, unas veces se ve un

poco antes de salir el Sol y, otras, justo después de la puesta.

Venus gira sobre su eje muy lentamente y en sentido contrario al de los otros planetas. El Sol sale por el Oeste y se pone por el este, al revés de lo que ocurre en la Tierra. Además, el día en Venus dura más que el año.

La superficie de Venus es relativamente joven, entre 300 y 500 millones de años. Tiene amplísimas llanuras, atravesadas por enormes ríos de lava, y algunas montañas.

Venus tiene muchos volcanes. El 85% del planeta está cubierto por roca volcánica. La lava ha creado surcos, algunos muy largos. Hay uno de 7000 km.

En Venus también hay cráteres de los impactos de los meteoritos. Solo de los grandes, porque los pequeños se deshacen en la espesa atmósfera.

Las fotos muestran el terreno brillante, como si estuviera mojado. Pero Venus no puede tener agua líquida, a causa de la elevada temperatura. El brillo lo provocan compuestos metálicos.

Datos	Venus	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	6052 km	6378 km
Distancia media al Sol	108 200 000 km	149 600 000 km
Día: periodo de rotación sobre el eje	243 días	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	224,7 días	365,256 días
Temperatura media superficial	482 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	8,87 m/s^2	9,78 m/s^2

LA TIERRA

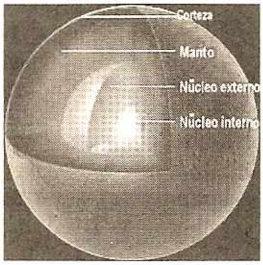
Es nuestro planeta y el único habitado. Está en la ecosfera, un espacio que rodea al Sol y que tiene las condiciones necesarias para que exista vida.

La Tierra es el mayor de los planetas rocosos. Eso hace que pueda retener una capa de gases, la atmósfera, que dispersa la luz y absorbe calor. De día evita que la Tierra se caliente demasiado y, de noche, que se enfríe.

Siete de cada diez partes de su superficie están cubiertas de agua. Los mares y océanos también ayudan a regular la temperatura. El agua que se evapora forma nubes y cae en forma de lluvia o nieve, formando ríos y lagos.

En los polos, que reciben poca energía solar, el agua se hiela y forma los casquetes polares. El del sur es más grande y concentra la mayor reserva de agua dulce.

La corteza del planeta Tierra está formada por placas que flotan sobre el manto, una capa de materiales calientes y pastosos que, a veces, salen por una grieta formando volcanes.



La densidad y la presión aumentan hacia el centro de la Tierra. En el núcleo están los materiales más pesados, los metales. El calor los mantiene en estado líquido, con fuertes movimientos. El núcleo interno es sólido.

Las fuerzas internas de la Tierra se notan en el exterior. Los movimientos rápidos originan terremotos. Los lentos forman plegamientos, como los que crearon las montañas.

El rápido movimiento rotatorio y el núcleo metálico generan un campo magnético que, junto a la atmósfera, nos protege de las radiaciones nocivas del Sol y de las otras estrellas.

Datos sobre la Tierra	Orden
Tamaño: radio ecuatorial 6378 km	5.°
Distancia media al Sol 149 600 000 km	3.°
Día: periodo de rotación sobre el eje 23,93 horas	5.°
Año: órbita alrededor del Sol 365,256 días	3.°
Temperatura media superficial 15 °C	7.°
Gravedad superficial en el ecuador 9,78 m/s^2	5.°

Las estaciones del año

La órbita de la Tierra es elíptica: hay momentos en que se encuentra más cerca del Sol y otros en que está más lejos. Además, el eje de rotación del planeta está un poco inclinado respecto al plano de la órbita.

Al cabo del año parece que el Sol sube y baja. El camino aparente del Sol se llama eclíptica, y pasa sobre el ecuador de la Tierra a principios de la primavera y del otoño. Estos puntos son los equinoccios. En ellos el día y la noche duran igual.

Los puntos de la eclíptica más alejados del ecuador se llaman solsticios, y señalan el principio del invierno y del verano.

Cerca de los solsticios, los rayos solares caen más verticales sobre uno de los dos hemisferios y lo calientan

más. Es el verano. Mientras, el otro hemisferio de la Tierra recibe los rayos más inclinados, han de atravesar más trozo de atmósfera y se enfrían antes de llegar a tierra. Es el invierno.

Contaminación atmosférica

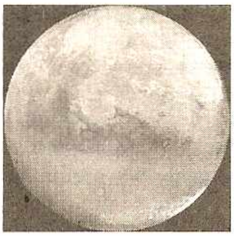
Los astronautas vuelven de sus viajes con una nueva mentalidad que les hace sentir más respeto por la Tierra y entender mejor la necesidad de cuidarla.

Desde el espacio no se ven las fronteras y, mucho menos, los intereses económicos, pero sí algunos de sus devastadores efectos, como la contaminación de la atmósfera.

El 85% del aire está cerca de la Tierra, en la tropósfera, una finísima capa de solo 15 km. Las capas más elevadas de la atmósfera tienen poco aire, pero nos protegen de los rayos ultravioletas (capa de ozono) y de los meteoritos (ionosfera).

Los gases que hemos vertido a la atmósfera han dejado la Tierra en un estado lamentable. Las fotos que hicieron los primeros astronautas son mucho más claras que las actuales, a pesar de que ahora tenemos aparatos más sofisticados. Los humanos somos capaces de destruir en poco tiempo lo que a la naturaleza le ha costado miles de años crear.

MARTE



Es el cuarto planeta del Sistema Solar. Conocido como el planeta rojo por sus tonos rosados, los romanos lo identificaban con la sangre y le pusieron el nombre de su dios de la guerra.

El planeta Marte tiene una atmósfera muy fina, formada principalmente por dióxido de carbono, que se congela alternativamente en cada uno de los polos. Contiene solo un 0,03% de agua, mil veces menos que la Tierra.

Los estudios demuestran que Marte tuvo una atmósfera más compacta, con nubes y precipitaciones que formaban ríos. Sobre la superficie se adivinan surcos, islas y costas.

Las grandes diferencias de temperatura provocan vientos fuertes. La erosión del suelo ayuda a formar tempestades de polvo y arena que degradan todavía más la superficie.

Antes de la exploración espacial, se pensaba que podía haber vida en Marte. Las observaciones demuestran que no tiene, aunque podría haberla tenido en el pasado.

En las condiciones actuales, Marte es estéril, no puede tener vida. Su suelo es seco y oxidante, y recibe del Sol demasiados rayos ultravioletas.

Marte tiene dos satélites, Fobos y Deimos. Son pequeños y giran rápido cerca del planeta. Esto dificultó su descubrimiento a través del telescopio.

Fobos tiene poco más de 13 km por el lado más largo. Gira a 9380 km del centro, es decir, a menos de 6000 km de la superficie de Marte, cada 7 horas y media. Deimos es la mitad de Fobos y gira a 23 460 km del centro en poco más de 30 horas.

Imágenes de Fobos y Deimos, los pequeños satélites de Marte

Datos	Marte	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	3397 km	6378 km
Distancia media al Sol	227 940 000 km	149 600 000 km
Día: periodo de rotación sobre el eje	24,62 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	686,98 días	365,256 días
Temperatura media superficial	−63 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	3,72 m/s^2	9,78 m/s^2

JÚPITER

Es el planeta más grande del Sistema Solar, tiene más materia que todos los otros planetas juntos y su volumen es mil veces el de la Tierra.

Júpiter tiene un tenue sistema de anillos, invisible desde la Tierra. También tiene 16 satélites. Cuatro de ellos fueron descubiertos por Galileo en 1610. Era la primera vez que alguien observaba el cielo con un telescopio.

Júpiter tiene una composición semejante a la del Sol, formada por hidrógeno, helio y pequeñas cantidades de amoníaco, metano, vapor de agua y otros compuestos.

La rotación de Júpiter es la más rápida entre todos los planetas y tiene una atmósfera compleja, con nubes y tempestades. Por ello muestra franjas de diversos colores y algunas manchas.

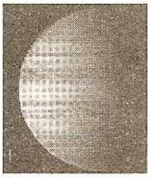
La Gran Mancha Roja de Júpiter es una tormenta mayor que el diámetro de la Tierra. Dura desde hace 300 años y provoca vientos de 400 km/h.

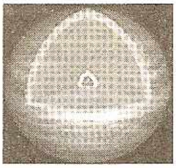
Los anillos de Júpiter son más simples que los de Saturno. Están formados por partículas de polvo lanzadas al espacio cuando los meteoritos chocan con las lunas interiores de Júpiter.

Tanto los anillos como las lunas de Júpiter se mueven dentro de un enorme globo de radiación atrapado en la magnetósfera, el campo magnético del planeta.

Este enorme campo magnético, que solo alcanza entre los 3 y 7 millones de km en dirección al Sol, se proyecta en dirección contraria más de 750 millones de km, hasta llegar a la órbita de Saturno.

Datos	Júpiter	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	71 492 km	6378 km
Distancia media al Sol	778 330 000 km	149 600 000 km
Día: período de rotación sobre el eje	9,84 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	11,86 años	1 año
Temperatura media superficial	–120 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	22,88 m/s^2	9,78 m/s^2

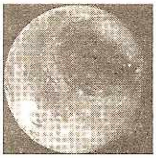




Las lunas de Júpiter

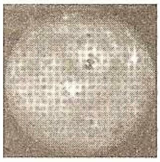
Hace 400 años, Galileo dirigió su telescopio rudimentario hacia Júpiter y vio que lo acompañaban tres puntos. Continuó mirando y, cuatro días más tarde, descubrió otro. No podían ser estrellas, porque había observado que giraban alrededor del planeta. Eran satélites y, hasta entonces, no se conocía ningún otro planeta que los tuviera (salvo el nuestro, claro).

Después se han descubierto 12 lunas más, todas pequeñas, hasta completar el total de 16. Las naves Voyager estudiaron y fotografiaron el sistema de Júpiter en 1979. Después, en 1996 se puso en marcha un nuevo proyecto que permitiría observar Júpiter y sus lunas una buena temporada. Al proyecto, naturalmente, se le llamó Galileo.



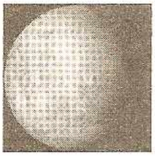
Ganímedes. Es el satélite más grande de Júpiter y también del Sistema Solar, con 5262 km de diámetro, mayor que Mercurio. Gira a unos 1 070 000 km del planeta en poco más de siete días. Parece que tiene un núcleo rocoso, un manto de agua helada y una corteza de roca y hielo, con montañas, valles, cráteres y ríos de lava.

Calisto. Tiene un diámetro de 4800 kilómetros, casi igual que Mercurio, y gira a 1 883 000 km de Júpiter, cada 17 días. Es el satélite con más cráteres del Sistema Solar. Está formado, a partes iguales, por roca y agua helada. El océano helado disimula los cráteres. Es el que tiene la densidad más baja de los cuatro satélites de Galileo.



Io. Io tiene 3630 km de diámetro y gira a 421 000 km de Júpiter en poco más de un día y medio. Su órbita se ve afectada por el campo magnético de Júpiter y por la proximidad de Europa y Ganímedes. Es rocoso, con mucha actividad volcánica. Su temperatura global es de -143 °C, pero hay una zona, un lago de lava, con 17 °C.

Europa



Tiene 3138 km de diámetro. Su órbita se sitúa entre Io y Ganímedes, a 671 000 km de Júpiter. Da una vuelta cada tres días y medio. El aspecto de Europa es el de una bola helada con líneas marcadas sobre la superficie del satélite. Probablemente son fracturas de la corteza que se han vuelto a llenar de agua y se han helado.

SATURNO

Saturno es el segundo planeta más grande del Sistema Solar y el único con anillos visibles desde la Tierra. Se ve claramente achatado por los polos a causa de la rápida rotación.

La atmósfera es de hidrógeno, con un poco de helio y metano. Es el único planeta que tiene una densidad menor que el agua. Si encontrásemos un océano suficientemente grande, Saturno flotaría.

El color amarillento de las nubes tiene bandas de otros colores, como Júpiter, pero no tan marcadas. Cerca del ecuador de Saturno el viento sopla a 500 km/h.

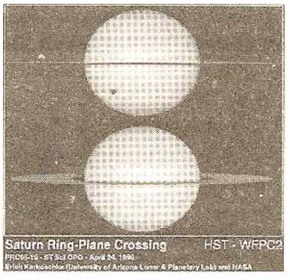
Los anillos le dan un aspecto muy bonito. Tiene dos brillantes, A y B, y uno más suave, el C. Entre ellos hay aberturas. La mayor es la División de Cassini.

Cada anillo principal está formado por muchos anillos estrechos. Su composición es dudosa, pero sabe-

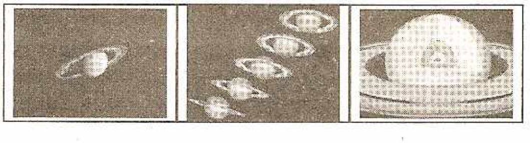
mos que contienen agua. Podrían ser icebergs o bolas de nieve, mezcladas con polvo.

En 1850, el astrónomo Édouard Roche estudiaba el efecto de la gravedad de los planetas sobre sus satélites, y calculó que, cualquier materia situada a menos de 2,44 veces el radio del planeta, no se podría aglutinar para formar un cuerpo, y, si ya era un cuerpo, se rompería.

El anillo interior de Saturno, C, está a 1,28 veces el radio, y el exterior, el A, a 2,27. Los dos están dentro del límite de Roche, pero su origen todavía no se ha determinado. Con la materia que contienen se podría formar una esfera de un tamaño parecido al de la Luna.



Datos	Saturno	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	60 268 km	6378 km
Distancia media al Sol	1 429 400 000 km	149 600 000 km
Día: periodo de rotación sobre el eje	10,23 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	29,46 años	1 año
Temperatura media superficial	−125 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	9,05 m/s^2	9,78 m/s^2



Los anillos de Saturno

El origen de los anillos de Saturno no se conoce con exactitud. Podrían haberse formado a partir de satélites que sufrieron impactos de cometas y meteoroides. Cuatrocientos años después de su descubrimiento, los impresionantes anillos de Saturno siguen siendo un misterio.

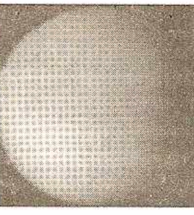
La elaborada estructura de los anillos se debe a la fuerza de gravedad de los satélites cercanos, en combinación con la fuerza centrífuga que genera la propia rotación de Saturno.

Las partículas que forman los anillos de Saturno tienen tamaños que van desde la medida microscópica hasta trozos como una casa. Con el tiempo, van recogiendo restos de cometas y asteroides. Si fuesen muy viejos, estarían oscuros por la acumulación de polvo. El hecho que sean brillantes indica que son jóvenes.

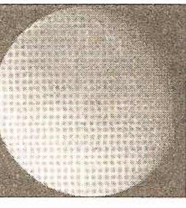
Los satélites de Saturno

Saturno tiene, oficialmente, 18 satélites. Es el planeta que tiene más. Las recientes observaciones a través del Telescopio Espacial Hubble (HST) y las fotos enviadas por el Voyager han mostrado cuatro o cinco cuerpos cerca de Saturno que podrían ser nuevas lunas, pero todavía no se ha confirmado.

La densidad de los satélites de Saturno es muy baja y, además, reflejan mucha luz. Esto hace pensar que la materia más abundante es el agua congelada, casi un 70%, y el resto son rocas.



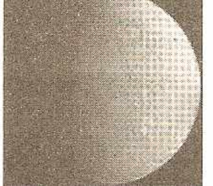
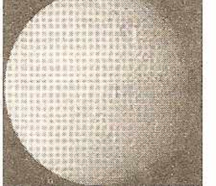
Titán. Es el mayor de los satélites de Saturno y el segundo del Sistema Solar, con un diámetro de 5150 km. Tiene una atmósfera más densa que la de la Tierra, formada por nitrógeno e hidrocarburos que le dan un color naranja. Gira alrededor de Saturno a 1 222 000 km, en poco menos de 16 días.



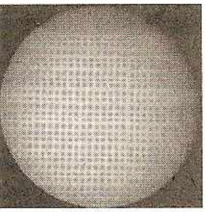
Rea. Tiene 1530 km de diámetro y gira a 527 000 km de Saturno cada cuatro días y medio. Tiene un pequeño núcleo rocoso. El resto es un océano de agua helada, con temperaturas que van de los 174 a los 220 °C bajo cero. Los cráteres provocados por los meteoritos duran poco, porque el agua se vuelve a helar y los borra.

Japeto. Es uno de los satélites más extraños. Tiene una densidad semejante a la de Rea, pero su aspecto es muy diferente, porque tiene una cara oscura y otra clara. La cara oscura es, probablemente, material de un antiguo meteorito. Su diámetro es de 1435 km y gira muy lejos, a 3 561 000 km de Saturno en 79 días y un tercio.

Dione y Tetis. Dos grandes satélites de Saturno que tienen órbitas cercanas y tamaños similares. Dione, a la izquierda, tiene 1120 km de diámetro, mientras que Tetis a la derecha, tiene 1048. La primera gira a 377 000 km y la segunda a 295 000 km.

URANO



Es el séptimo planeta desde el Sol y el tercero más grande del Sistema Solar. Urano es también el primero que se descubrió gracias al telescopio.

La atmósfera de Urano está formada por hidrógeno, metano y otros hidrocarburos. El metano absorbe la luz roja, por eso refleja los tonos azules y verdes.

Urano está inclinado de manera que el ecuador hace casi ángulo recto, 98°, con la trayectoria de la órbita. Esto hace que en algunos momentos la parte más caliente, encarada al Sol, sea uno de los polos.

Su distancia al Sol es el doble que la de Saturno. Está tan lejos que, desde Urano, el Sol parece una estrella más. Aunque, mucho más brillante que las otras.

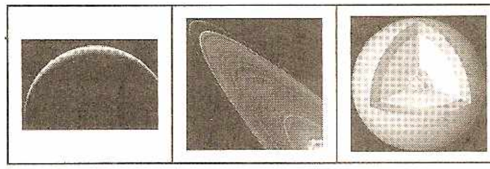
Urano, descubierto por William Herschel en 1781, es visible sin telescopio. Seguro que alguien lo había visto antes, pero la enorme distancia hace que brille poco y se mueva lentamente. Además, hay más de 5000 estrellas más brillantes que él.

La inclinación sorprendente de Urano provoca un efecto curioso: su campo magnético se inclina 60° en relación al eje y la cola tiene forma de tirabuzón, a causa de la rotación del planeta.

En 1977 se descubrieron los 9 primeros anillos de Urano. En 1986, la visita de la nave Voyager permitió medir y fotografiar los anillos, y descubrir dos nuevos.

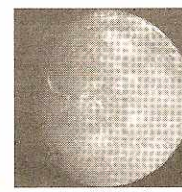
Los anillos de Urano son distintos de los de Júpiter y Saturno. El exterior, Épsilon está formado por grandes rocas de hielo y tiene color gris. Parece que hay otros anillos, o fragmentos, no muy amplios, de unos 50 metros.

Datos	Urano	La Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	25 559 km	6378 km
Distancia media al Sol	2 870 990 000 km	149 600 000 km
Dia: periodo de rotación sobre el eje	17,9 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	84,01 años	1 año
Temperatura media superficial	−210 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	7,77 m/s ^{2}	9,78 m/s^2

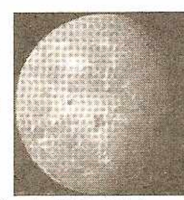


Las lunas de Urano

En el cielo de Urano no hay planetas brillantes. Saturno, el más cercano, parece una estrella pálida (Saturno está tan lejos de Urano como de la Tierra). Pero hay cinco objetos que brillan más que Saturno. Son las cinco lunas grandes. Además, Urano tiene otros 10 satélites con diámetros por debajo de los 170 km, que giran cerca del planeta entre 25 000 y 60 000 km de la superficie.

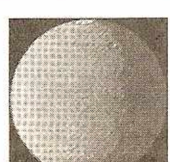


Titania. Es la luna más grande de Urano, con 1580 km de diámetro. Está cubierta por pequeños cráteres y rocas muy rugosas, con fallas que indican que las fuerzas internas han moldeado su superficie. Su órbita pasa a 436 000 km del centro de Urano. Da una vuelta cada 8 días y 17 horas.

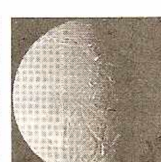


Oberón. Se caracteriza por una superficie helada, cubierta de cráteres, algunos de un tamaño considerable. Tiene reflejos brillantes en algunos lugares, igual que Calisto, la luna de Júpiter. Su diámetro es de 1523 km y gira alrededor de Urano a una distancia media de 582 600 km en 13 días y 11 horas.

Otros satélites de Urano



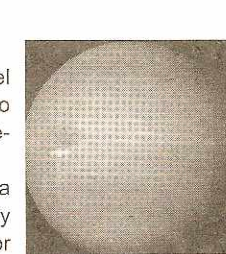
Umbriel
Diámetro: 1170 km
Distancia: 266 000 km



Ariel
Diámetro: 1156 km
Distancia: 191 000 km

Miranda
Diámetro: 480 km
Distancia: 130 000 km

NEPTUNO



Es el planeta más exterior de los gigantes gaseosos y el primero que fue descubierto gracias a predicciones matemáticas.

El interior de Neptuno es roca fundida con agua, metano y amoníaco líquidos. El exterior

es hidrógeno, helio, vapor de agua y metano, que le da el color azul.

Neptuno es un planeta dinámico, con manchas que recuerdan las tempestades de Júpiter. La más grande, la Gran Mancha Oscura, tenía un tamaño similar al de la Tierra, pero en 1994 desapareció y se ha formado otra.

Los vientos más fuertes de cualquier planeta del Sistema Solar son los de Neptuno. Muchos de ellos soplan en sentido contrario al de rotación. Cerca de la Gran Mancha Oscura se han medido vientos de 2000 km/h.

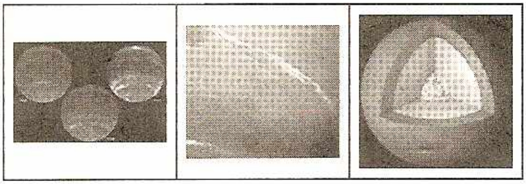
La nave Voyager II se acercó a Neptuno el año 1989 y lo fotografió. Descubrió seis de las ocho lunas que tiene y confirmó la existencia de anillos.

Neptuno tiene un sistema de cuatro anillos estrechos, delgados y muy tenues, difíciles de distinguir con los telescopios terrestres. Se han formado a partir de partículas de polvo, arrancadas de las lunas interiores por los impactos de meteoritos pequeños.

En la atmósfera de Neptuno se llega a temperaturas cercanas a los 260 °C bajo cero. Las nubes, de metano congelado, cambian con rapidez. La foto de la derecha muestra los cambios que detectó el Voyager II en un período de solo 18 horas.

La distancia que nos separa de Neptuno se puede entender mejor con dos datos: una nave ha de hacer un viaje de doce años para llegar y, desde allí, sus mensajes tardan más de cuatro horas para volver a la Tierra.

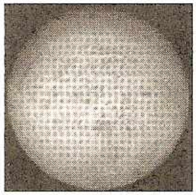
Datos	**Neptuno**	**La Tierra**
Tamaño: radio ecuatorial	24 746 km	6378 km
Distancia media al Sol	4 504 300 000 km	149 600 000 km
Día: período de rotación sobre el eje	16,11 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	164,8 años	1 año
Temperatura media superficial	−200 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	11 m/s^2	9,78 m/s^2



Las lunas de Neptuno

Desde Neptuno, el Sol está muy lejos, 30 veces más que la Tierra, y solo aparece un puntito muy brillante. Todos los demás planetas están entre él y el Sol, a distancias enormes, de manera que no se ven.

Pero Neptuno guardaba una sorpresa. El 10 de octubre de 1846, menos de tres semanas después del descubrimiento de Neptuno, el astrónomo William Lassell descubrió que tenía un satélite, y brillaba más que los dos satélites de Urano conocidos hasta entonces.



Tritón. Tiene un diámetro de 2700 km y gira a 355 000 km de Neptuno en poco menos de 6 días. Dos características lo hacen especial: es el único satélite grande que gira en dirección contraria a la rotación de su planeta y es el objeto del Sistema Solar donde se ha medido la temperatura media más fría, 235 °C bajo cero.

Planetas	**Radio ecuatorial**	**Distancia al Sol (km)**	**Lunas**	**Período de Rotación**	**Órbita**	**Inclinación del eje**	**Inclinación orbital**
Mercurio	2440 km	57 910 000	0	58,6 días	87,97 días	0,00°	7,00°
Venus	6052 km	108 200 000	0	243 días	224,7 días	177,36°	3,39°
La Tierra	6378 km	149 600 000	1	23,93 horas	365,256 días	23,45°	0,00°
Marte	3397 km	227 940 000	2	24,62 horas	686,98 días	25,19°	1,85°
Júpiter	71 492 km	778 330 000	16	9,84 horas	11,86 años	3,13°	1,31°
Saturno	60 268 km	1 429 400 000	18 *	10,23 horas	29,46 años	25,33°	2,49°
Urano	25 559 km	2 870 990 000	15	17,9 horas	84,01 años	97,86°	0,77°
Neptuno	24 746 km	4 504 300 000	8	16,11 horas	164,8 años	28,31°	1,77°

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos cuerpos se atraen con una fuerza de 32 kN. ¿Con qué fuerza se atraerán si la distancia de separación se cuadruplica?

Resolución:

De la ley de Gravitación Universal:

$$F_1 = G\frac{mM}{d^2} = 32 \text{ kN} \qquad ...(1)$$

$$F_2 = G\frac{mM}{(4d)^2} = \left(\frac{1}{16}\right)G\frac{mM}{d^2} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$F_2 = \frac{1}{16}F_1 = \frac{1}{16}(32) \qquad \therefore\ F_2 = 2 \text{ kN}$$

2. Dos cuerpos se atraen con una fuerza de 36 kN. ¿Con qué fuerza se atraerán si la distancia se triplica y las masas se duplican?

Resolución:

De la ley de Gravitación Universal:

$$F_1 = G\frac{mM}{d^2} = 36 \text{ kN} \qquad ...(1)$$

$$F_2 = G\frac{(2m)(2M)}{(3d)^2} = \left(\frac{4}{9}\right)\frac{GmM}{d^2} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$F_2 = \frac{4}{9}F_1 = \frac{4}{9}(36) \qquad \therefore\ F_2 = 16 \text{ kN}$$

3. La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es 6 m/s^2. ¿Cuánto pesa una persona en dicho planeta si su peso en la Tierra es 600 N? La gravedad en la superficie de la Tierra es 10 m/s^2.

Resolución:

La masa m permanece constante, el peso varía debido a la gravedad:

$$m = \frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P_1}{6} = \frac{600}{10}$$

$\therefore\ P_1 = 360$ N

4. Un niño pesa 300 N en la superficie de la Tierra. ¿Cuál sería su peso y masa a una altura igual al radio terrestre? g = 10 m/s^2.

Resolución:

Cálculo de la intensidad del campo gravitatorio a una altura: h = R

$$g_1 = g\left[\frac{R}{R+h}\right]^2 = g\left[\frac{R}{2R}\right]^2 = \frac{g}{4}$$

La masa del niño no varía con la altura, pero el peso si varía debido a la gravedad:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{P_1}{g_1} = \text{cte.} \Rightarrow m = \frac{300 \text{ N}}{g} = \frac{P_1}{\frac{g}{4}}$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{300 \text{ N}}{4}$$

$\therefore\ P_1 = 75$ N y m = 30 kg

5. En la superficie de un planeta una persona pesa 720 N. ¿Qué peso tendrá dicha persona si la masa del planeta se duplica y el radio se hace el triple?

Resolución:

Primer caso: planeta de masa M y radio R:

$$g_1 = G\frac{M}{R^2}$$

Segundo caso: planeta de masa 2M y radio 3R:

$$g_2 = G\frac{(2M)}{(3R)^2} = \left(\frac{2}{9}\right)\frac{GM}{R^2} = \frac{2}{9}g_1$$

La relación de los pesos es: $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{mg_1}{mg_2} = \dfrac{g_1}{g_2} = \dfrac{9}{2}$

Reemplazando tenemos: $\dfrac{720}{P_2} = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ P_2 = 160$ N

6. ¿A qué altura medida sobre la superficie terrestre el peso de un cuerpo es 1/16 de su peso en la superficie terrestre? Radio de la Tierra = 6400 km.

Resolución:

La aceleración de la gravedad en el punto A que se encuentra a una altura h es:

$g_A = g\left[\dfrac{R}{R+h}\right]^2$, R: radio del planeta.

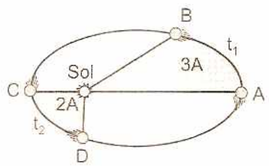
El peso del cuerpo varía debido a la variación de la gravedad, por consiguiente en el punto A la gravedad es 1/16 de la gravedad en la superficie terrestre:

$$\frac{g}{16} = g\left[\frac{R}{R+h}\right]^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{R}{R+h}$$

$\Rightarrow h = 3R \qquad \therefore\ h = 19\ 200$ km

7. En la figura, el planeta demora en ir desde A hasta B 60 días, ¿cuánto demorará en ir desde C hasta D?

Resolución:



La trayectoria que sigue el planeta en torno al Sol es una elipse. El tiempo transcurrido entre dos puntos de su trayectoria es directamente proporcional al tiempo transcurrido.

Ley de áreas:

$$\frac{t_1}{A_1} = \frac{t_2}{A_2} \Rightarrow \frac{60 \text{ días}}{3A} = \frac{t_2}{2A} \Rightarrow t_2 = 40 \text{ días}$$

Por lo tanto, el planeta demora en ir de C hasta D: 40 días.

8. Hallar el período de oscilación de un péndulo simple, el cuál se encuentra a una altura sobre la superficie terrestre igual a la mitad del radio de la Tierra. Longitud del péndulo igual a 1 m. ($g = \pi^2$ m/s^2).

Resolución:

El período es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad local en el punto A. La gravedad en el punto A es:

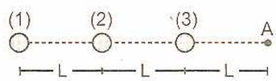
$$g_A = g\left[\frac{R}{R+h}\right]^2 = \pi^2\left[\frac{R}{R+0{,}5R}\right]^2 = \frac{4}{9}\pi^2\ \text{m/s}^2$$

El período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_A}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{4\pi^2}{9}}} = 2\pi\left(\frac{3}{2\pi}\right)$$

$\therefore\ T = 3$ s

9. En la configuración mostrada, determinar la intensidad del campo gravitatorio en el punto A. Los tres cuerpos puntuales tienen masa m cada uno.



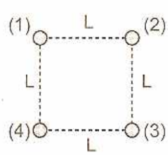
Resolución:

Del principio de superposición del campo gravitatorio, se cumple que: $g_A = g_1 + g_2 + g_3$

$$g_A = \frac{Gm}{(3L)^2} + \frac{Gm}{(2L)^2} + \frac{Gm}{L^2}$$

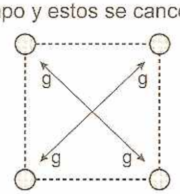
$$\therefore\ g_A = \frac{49}{36}\left(\frac{Gm}{L^2}\right)$$

10. En la configuración mostrada determinar la intensidad del campo gravitatorio en el centro del cuadrado de lado L. Los cuatro cuerpos puntuales tienen masa m cada uno.



Resolución:

El centro del cuadrado equidista de los vértices, por consiguiente los cuerpos generan igual intensidad de campo y estos se cancelan dos a dos.



$$\vec{g}_{\text{centro}} = 0$$

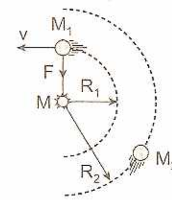
11. Dos planetas de masas M_1 y M_2 giran alrededor de una estrella E, en órbitas circunferenciales de radios R_1 y R_2 respectivamente. Si, $R_2 = 4R_1$ y el período del planeta M_1 es de $T_1 = 200$ días, hallar el periodo del planeta M_2.

Resolución:

Analizando el planeta M_1: $F_C = ma_C$

$$\frac{GMM_1}{R_1^2} = M_1\omega^2R_1 \Rightarrow GM = \omega^2R_1^3 \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T_1^2}R_1^3$$

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{cte.}$$



Analizando el planeta M_2:

$$\frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\ \text{cte.}$$

La ley de períodos: $\dfrac{T_1^2}{R_1^3} = \dfrac{T_2^2}{R_2^3}$;

pero: $R_1 = a$ y $R_2 = 4a$

Reemplazando: $\dfrac{(200)^2}{a^3} = \dfrac{T_2^2}{R_2^3}$

$\therefore\ T_2 = 1600$ días

12. ¿Cuántos días tendrá el año de un planeta doblemente alejado del Sol con respecto a la Tierra? Considere el año terrestre igual a 365 días.

Resolución:

Tercera ley de Kepler: ley de períodos

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{(2R)^3} = \frac{1^2}{R^3}$$

$T_1^2 = 8 \Rightarrow T_1 = 2\sqrt{2}$ años terrestres

$\therefore\ T_1 = 730\sqrt{2}$ días

13. Si los períodos de dos planetas son 27 años y 8 años respectivamente, la razón entre sus distancias medias al Sol es:

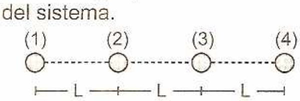
Resolución:

Tercera ley de Kepler: ley de períodos

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \Rightarrow \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{(27)^2}{(8)^2} = \frac{3^6}{2^6}$$

$$\therefore\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{9}{4}$$

14. La figura muestra cuatro esferas de masa m cada una. Hallar la energía potencial de interacción gravitatoria del sistema.



Resolución:

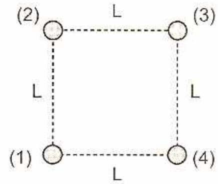
$$E_{P(sist)} = E_{P(1\text{-}2)} + E_{P(1\text{-}3)} + E_{P(1\text{-}4)} + E_{P(2\text{-}3)} + E_{P(2\text{-}4)} + E_{P(3\text{-}4)}$$

$$E_{P(sist)} = -\frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{2L} - \frac{Gmm}{3L} - \frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{2L} - \frac{Gmm}{L}$$

$$\therefore\ E_{P(sistema)} = -\left(\frac{13}{3}\right)\frac{Gm^2}{L}$$

15. La figura muestra cuatro esferas de masa m cada una, en los vértices de un cuadrado de lado L. Hallar la energía potencial gravitatoria del sistema.

Resolución:

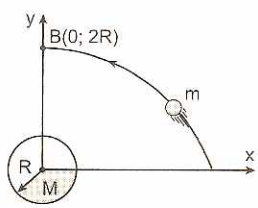


$$E_{P(sist)} = E_{P(1\text{-}2)} + E_{P(1\text{-}3)} + E_{P(1\text{-}4)} + E_{P(2\text{-}3)} + E_{P(2\text{-}4)} + E_{P(3\text{-}4)}$$

$$E_{P(sist)} = -\frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{L\sqrt{2}} - \frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{L\sqrt{2}} - \frac{Gmm}{L}$$

$$\therefore\ E_{P(sistema)} = -(4+\sqrt{2})\frac{Gm^2}{L}$$

16. La figura muestra un planeta de masa M y radio de curvatura R = 6400 km. Un cuerpo de masa m = 1 kg se traslada desde la posición A(4R; 0) hasta B(0; 2R) a velocidad constante. Calcular el trabajo realizado en este proceso. Considere la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta $g = 10\ m/s^2$.



Resolución:

Cálculo de la energía potencial gravitatoria en la configuración inicial y final:

$$E_{P(A)} = -\frac{GmM}{4R} \quad y \quad E_{P(B)} = -\frac{GmM}{2R}$$

El trabajo realizado por un agente externo es igual al cambio de la energía potencial de interacción gravitatoria que experimenta el sistema:

$$W = E_{P(B)} - E_{P(A)} = -\frac{GmM}{2R} + \frac{GmM}{4R}$$

$$\Rightarrow W = -\frac{GmM}{4R} = -m\left(\frac{GM}{R^2}\right)R\left(\frac{1}{4}\right)$$

Pero: $g = \dfrac{GM}{R^2} \Rightarrow W = -\dfrac{1}{4}mgR$

Reemplazando datos:

$W = -1/4(1)(10)(64 \times 10^5)$

$\therefore\ W = -16\ MJ$

17. ¿Cuál es la intensidad del campo gravitatorio en la superficie esférica de una estrella, cuyo radio equivale a 100 radios terrestres y cuya densidad es 1/4 de la densidad terrestre? ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

Cálculo de la intensidad del campo gravitatorio en la Tierra en función del radio R_T y la densidad D_T:

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2},\ \text{pero:}\quad M_T = D_T V_T;$$

y el volumen V_T de la esfera es:

$$V_T = \frac{4\pi}{3}R_T^3 \Rightarrow g_T = \frac{4\pi}{3}GD_TR_T \qquad ...(1)$$

Análogamente, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella:

$$g_E = \frac{4\pi}{3}GD_ER_E \qquad ...(2)$$

dividiendo las relaciones (1) y (2):

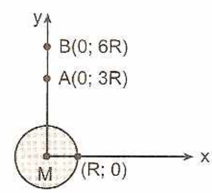
$$\frac{g_T}{g_E} = \frac{D_TR_T}{D_ER_E} \qquad ...(3)$$

Reemplazando los datos en (3):

$$\frac{10}{g_E} = \frac{DR}{(D/4)(100R)} \qquad \therefore\ g_E = 250\ m/s^2$$

18. La figura muestra un planeta de masa M y radio de curvatura R. Un cuerpo de masa m se traslada desde la posición A(0; 3R) hasta B(0; 6R) a velocidad constante. Calcular el trabajo realizado por un agente externo sobre el cuerpo m en este proceso.

Resolución:



«El trabajo realizado por el agente externo es igual al cambio de la energía potencial de interacción gravitatoria que experimenta el sistema».

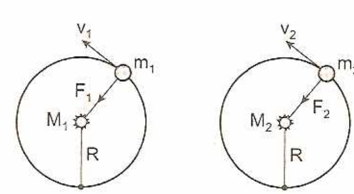
$$E_{P(A)} = -\frac{GmM}{3R};\quad E_{P(B)} = -\frac{GmM}{6R}$$

$$W = E_{P(B)} - E_{P(A)} \Rightarrow W = -\frac{GmM}{6R} + \frac{GmM}{3R}$$

$$\therefore\ W = \frac{1}{6}\left(\frac{GMm}{R}\right)$$

19. Dos estrellas de masas M_1 y M_2, tiene cada una satélites de masas m_1 y m_2, que giran alrededor de ellas con el mismo radio orbital R. El período de m_1 es el doble del satélite m_2. ¿Cuál es la relación entre las masas de las estrellas?

Resolución:



Dinámica circunferencial, para «m_1»:

$$F_C = m_1a_C \Rightarrow G\frac{M_1m_1}{R^2} = m_1\omega_1^2R$$

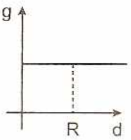
$$\frac{GM_1}{R^3} = \omega_1^2 \Rightarrow \frac{GM_1}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

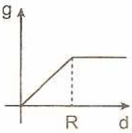
gravedad artificial que actúa sobre cada parte de la nave es la mitad del valor de la fuerza de gravedad en la Tierra.

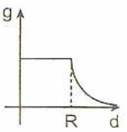
A) $2\pi g$ B) $\frac{4\pi}{\sqrt{3g}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{g}}$

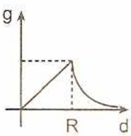
D) $2\pi\sqrt{g}$ E) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{g}$

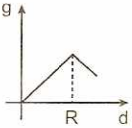
72. ¿Cuál de las siguientes graficas representa mejor la variación de la aceleración de la gravedad de un planeta de densidad uniforme? (R: radio del planeta)

A)


B)


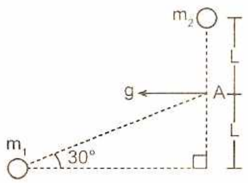
C)


D)


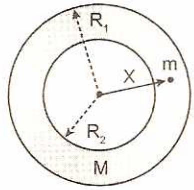
E)


73. En la configuración mostrada, determinar la relación m_1/m_2, para que loa intensidad del campo gravitatorio (g) en el punto A sea horizontal.

A) 1/8
B) 3/2
C) 3/4
D) 8
E) 1/2



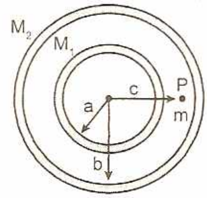
74. En el dibujo se muestra un cascarón esférico homogéneo de masa M, dentro del cual se halla inmersa una esferita homogénea de masa m. La magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria entre ambos cuerpos es: $F = \frac{GMm}{x^2}(k)$



Hallar k, sabiendo que: $x = \frac{R_1 + R_2}{2} \wedge R_1 = 2R_2$

A) 1 B) 1/2 C) 11/56
D) 19/56 E) 11/19

75. Se tiene dos cascarones esféricos homogéneos de masas M_1 y M_2, respectivamente. Hallar la fuerza gravitatoria de magnitud F debido a estos cascarones sobre una partícula de masa "m" ubicada en P (G: constante de gravitación universal).



A) $F = 0$
B) $F = GM_1m/c^2$
C) $F = G(M_1 + M_2)m/a^2$
D) $F = GM_1m/(c - a)^2$
E) $F = G[M_1m/c^2 + M_2m/(b - c)^2]$

CLAVES

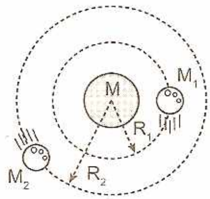
1. B	11. C	21. D	31. A	41. A	51. A	61. A	71. B
2. C	12. B	22. C	32. A	42. D	52. B	62. C	72. D
3. D	13. D	23. E	33. B	43. E	53. E	63. A	73. D
4. C	14. E	24. B	34. A	44. E	54. C	64. C	74. D
5. D	15. B	25. B	35. D	45. C	55. C	65. D	75. B
6. C	16. C	26. A	36. E	46. D	56. C	66. C	
7. C	17. A	27. C	37. E	47. B	57. D	67. E	
8. E	18. A	28. E	38. E	48. C	58. E	68. C	
9. D	19. B	29. D	39. B	49. E	59. B	69. E	
10. A	20. A	30. C	40. E	50. D	60. C	70. E	

43. Suponiendo un planeta Tierra esférico macizo y homogéneo y un túnel que lo atraviese según un diámetro. Si dejamos caer una partícula en este túnel, podemos afirmar:

I. La fuerza gravitatoria que actúa sobre la partícular es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra.
II. La fuerza gravitatoria es constante en modulo.
III. La fuerza gravitatoria es central y directamente proporcional a su distancia al centro de la Tierra.

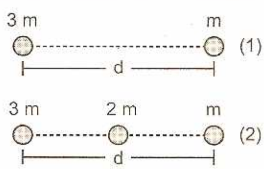
A) Solo II B) II y III C) I y II
D) Solo I E) Solo III

44. Alrededor de un planeta M giran 2 satélites de masas, M_1 y M_2 con radios R_1 y R_2; tal que $R_2 = 4R_1$. Calcule el periodo de M_2 siendo el de M_1, 30 días (en días)



A) 30 B) 60 C) 90
D) 120 E) 240

45. Si entre las masas m y 3 m de la figura (1) la fuerza de atracción gravitatoria tiene modulo F; entonces, entre la masa m y 3m de la figura (2) la fuerza de atracción gravitatoria tiene modulo igual a:



A) 2F B) F/2 C) F
D) 1,5F E) 1,2F

46. Las masas de 2 planetas están en la relación de 1 a 64 y la distancia entre sus centros de 1 a 64 y la distancia entre sus centro es de 90 000 km. ¿A qué distancia del planeta de mayor masa se debe colocar un cuerpo para que se equilibren. Las atracciones que ejercen los 2 planetas (en km)?

A) 10 000 B) 9600 C) 6670
D) 80 000 E) 66 700

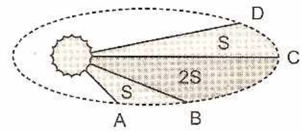
47. Respecto al movimiento planetario, indique cual(es) de las proposiciones es (son) correcta(as):

I. Describen trayectorias elípticas, donde en uno de los focos se encuentra el Sol.
II. El vector posición de un planeta, respecto al Sol; barre áreas iguales en intervalos de tiempos iguales.
III. El periodo de traslación de un planeta, alrededor del Sol, es proporcional al cubo de su radio vector medio.

A) Solo I B) I y II C) Solo II
D) I y III E) I; II y III

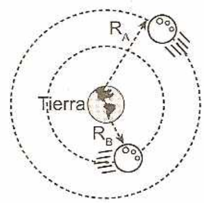
48. La figura muestra la órbita de un planeta alrededor del Sol. Si para ir desde A hacia B demora 4 meses, ¿Qué tiempo emplea para el recorrido $\overset{\frown}{BC}$?

A) 4 meses
B) 2 meses
C) 8 meses
D) 6 meses
E) 12 meses



49. Dos satélites A y B, de igual masa, se encuentran a diferentes distancias R_A y R_B respecto al centro de la Tierra. Si el satélite A demora el doble del tiempo que demora B en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra, la relación R_A/R_B es:

A) 1
B) 2
C) 4
D) $\sqrt[3]{2}$
E) $\sqrt[3]{4}$

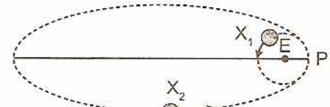


50. La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y la distancia que separa los centros de ambos cuerpos es $3{,}84 \times 10^8$ m. ¿A qué distancia (en km) del centro de la Tierra se ubica el centro de masa del sistema Tierra-Luna?

A) 0 B) $4{,}68 \times 10^6$ C) $4{,}74 \times 10^6$
D) $4{,}68 \times 10^3$ E) $4{,}47 \times 10^3$

51. Dos planetas X_1 y X_2 de igual masa están en órbita alrededor de una estrella E (ver figura). El planeta X_1 recorre una órbita circular de radio 10^8 km, mientras que X_2 recorre una órbita elíptica donde el semieje mayor de la elipse vale 3×10^8 km. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

( ) En el punto P, la velocidad de X_2, es mayor que la de X_1.
( ) El periodo de X_1 es menor que el de X_2.
( ) La energía total de X_2 es mayor que la de X_1.



A) VVV B) FVV C) VFV D)FFV E) VVF

52. Se muestra la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol. Si en el recorrido ABC demora 22 meses y en CDA demora 6 meses, halle que parte

32. Tres cuerpos idénticos, de masa M están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lado L; todos los cuerpos se mueven por acción única de sus fuerzas gravitatorias, en una órbita circular que circunscribe al triángulo equilátero. Halle la velocidad lineal con que se mueven los cuerpos.

A) $\sqrt{\frac{GM}{L}}$ B) $\sqrt{\frac{GM}{2L}}$ C) $\sqrt{\frac{2GM}{L}}$
D) $\sqrt{GML}$ E) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{GM}{L}}$

33. Un planeta gira en torno al Sol en órbita elíptica, su semieje mayor es 9/4 veces el semieje mayor de la Tierra. Determine el tiempo que demora en ir desde el afelio hasta el perihelio. Exprese la respuesta en años terrestres.

A) 27/16 B) 27/8 C) 36/25
D) 9/4 E) 216/25

34. Determinar el periodo de revolución de un satélite artificial de la Tierra, el cual se encuentra a una altura igual al doble del radio terrestre R (g: aceleración de la gravedad en la superficie terrestre).

A) $6\pi\sqrt{\frac{3R}{g}}$ B) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ C) $4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$
D) $9\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ E) $\sqrt{\frac{R}{g}}$

35. Dos satélites S_1 y S_2, orbitan alrededor del mismo planeta teniendo por trayectoria circunferencias de radios R_1 y R_2. Si el radio vector del primero barre en 1620 horas las (3/4) partes del área total de su órbita y el segundo la mitad del área total de su órbita en 40 horas, la relación R_1/R_2 es:

A) 2 B) 5 C) 3
D) 9 E) 16

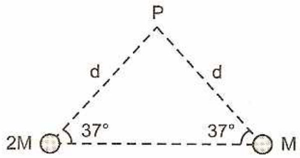
36. ¿Por qué la Luna no cae sobre la Tierra?
A) Porque no tiene peso.
B) Porque está muy lejos.
C) Porque la Tierra no cae sobre la Luna.
D) Porque la fuerza centrípeta se anula con la fuerza gravitatoria sobre la Luna.
E) Porque la fuerza gravitatoria sobre la Luna no tiene la misma dirección que su velocidad lineal.

37. Un satélite que gira en torno a un planeta en una órbita circular de radio 10^8 m con una velocidad lineal de 10^3 m/s tiene una masa igual a 800 kg. Determinar la masa del planeta.
($G = 6{,}6 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$)

A) $4{,}5 \times 10^{18}$ kg B) $2{,}5 \times 10^{22}$ kg
C) $3{,}5 \times 10^{20}$ kg D) $5{,}5 \times 10^{16}$ kg
E) $1{,}5 \times 10^{24}$ kg

38. La aceleración de la gravedad en P debido a la masa M es g, considerando las distancias d desde el centro de las masas. La aceleración de la gravedad en P debido al conjunto de masas M y 2M, es:

A) Faltan datos
B) 2,41 g
C) 0,73 g
D) 0,80 g
E) 1,97 g



39. Sean M_p y R_p la masa y el radio de cierto planeta y sean M_T y R_T la masa y el radio de la Tierra, respectivamente. Si se sabe que la aceleración de la gravedad en la superficie de ese planeta tiene magnitud de 6,4 m/s^2, diga cuál de las siguientes afirmación podría explicar este hecho ($g = 10\ m/s^2$)

A) $M_p = M_T$; $R_T = 0{,}64R_p$
B) $M_p = M_T$; $R_T = 0{,}8R_p$
C) $M_p = M_T$; $R_T = 1{,}6R_p$
D) $M_p = 0{,}8M_T$; $R_p = R_T$
E) $M_p = 1{,}6M_T$; $R_p = 0{,}64R_T$

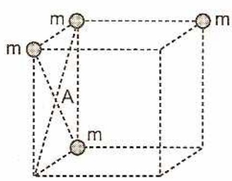
40. Calcular la velocidad en km/h, de un satélite artificial suponiendo que se mueve al ras de la superficie de la Tierra en el plano ecuatorial. Considere que el radio de la Tierra es 6437 km y que la aceleración de la gravedad, en la superficie terrestre, es 9,8 m/s^2

A) 15 325 B) 18 605 C) 43 723
D) 35 228 E) 28 593

41. Un satélite del sistema de posicionamiento global (GPS) usa un satélite geoestacionario (GE) para determinar su radio orbital. Si el GPS pasa R km sobre el GE, determine su radio orbital, M es la masa de la Tierra y T su periodo de rotación alrededor de su eje (dar la respuesta en km).

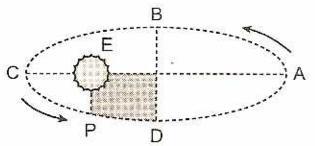
A) $R + [10^{-9}T^2MG/4\pi^2]^{1/3}$
B) $R + [T^2MG/4\pi^2]^{1/2}$
C) $[T^2MG/4\pi^2]^{1/3}$
D) $[T^3MG/4\pi^2]^{1/2}$
E) 2R

42. Determinar el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en el punto A, si el lado del cubo mide L. No contar la gravedad terrestre, considere $\sqrt{10 + 2\sqrt{3}} = 3{,}6$ y G es la constante de gravitación universal.



A) $4Gm/5L^2$ B) $6Gm/5L^2$ C) $3Gm/5L^2$
D) $12Gm/5L^2$ E) $Gm/5L^2$

de C hasta P, calcular qué fracción de la superficie elíptica es la región sombreada.



A) 1/6 B) 2/3 C) 4/5 D) 3/2 E) 5/7

21. Un satélite gira en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura donde la magnitud de la aceleración de la gravedad es la cuarta parte de la magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Hallar el periodo de revolución del satélite (considere R el radio de la Tierra y g la magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre).

A) $4\pi\sqrt{R/g}$ B) $2\pi\sqrt{R/g}$ C) $4\pi\sqrt{g/2R}$
D) $4\pi\sqrt{2R/g}$ E) $4\pi\sqrt{R/2g}$

22. Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie del Sol, considerando el radio del Sol cien veces el radio terrestre y su masa 250 000 veces la masa de la Tierra.

A) 98 m/s^2 B) 196 m/s^2 C) 245 m/s^2
D) 490 m/s^2 E) 980 m/s^2

23. Dos planetas tienen periodos de traslación alrededor del Sol T_1 y T_2, tal que: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{27}{8}$. Si el radio orbital medio es $R_2 = 1600$ km, (Cuanto mide R_1?

A) 1600 km B) 900 km C) 1800 km
D) 2700 km E) 3600 km

24. Dos estrellas, una de masa 2m y otra de masa m, están separadas por una distancia d y rotan alrededor de su centro de masa. Calcular el periodo de rotación de las estrellas.
G: constante de gravitación universal.

A) $2\pi\sqrt{\frac{d}{3Gm}}$ B) $2\pi d\sqrt{\frac{d}{3Gm}}$ C) $2\pi\sqrt{\frac{d^3}{Gm}}$
D) $3\pi\sqrt{\frac{Gd}{m}}$ E) $3\pi\sqrt{\frac{2d}{Gm}}$

25. Una masa cae desde una altura de 585 m con una aceleración de 4,9 m/s^2 sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,2 del terrestre. ¿Cuál es la relación de la masa de la Tierra?

A) 0,05 B) 0,02 C) 0,04
D) 0,08 E) 0,06

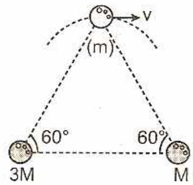
26. Un planeta gira en torno al Sol en órbita elíptica y recorre el 80% del área total de la elipse en 2 años terrestres. ¿Cuántos años terrestres equivale a un año de dicho planeta?

A) 2,5 B) 5 C) 2,25 D) 3 E) 2

27. La tercera ley de Kepler establece que:
$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$ donde T es el periodo del movimiento circular uniforme de radio r de un planeta alrededor del Sol de masa M, y G es la constante de gravitación universal. La relación que vincula al periodo de un planeta con su velocidad v es:

A) $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}v^3$ B) $T^2 = \frac{4\pi^2 GM}{v^4}$
C) $T^2 = \frac{4\pi^2 G^2 M^2}{v^6}$ D) $T^2 = \frac{4\pi^2}{G^2M^2}v^3$
E) $T^2 = \frac{4\pi^2 GM}{v^3}$

28. Sea F la fuerza gravitacional entre los planetas mostrados M y 3M. Halle la fuerza gravitación neta sobre el cometa m en la posición mostrada.



A) $\frac{\sqrt{3}Fm}{M}$ B) $\frac{\sqrt{13}Fm}{M}$ C) $\frac{\sqrt{13}FM}{m}$
D) $\frac{Fm}{3M}$ E) $\frac{\sqrt{13}Fm}{3M}$

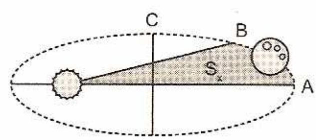
29. Un cuerpo pesa, al nivel del mar, 75 N. ¿A qué altura debe elevarse para que su nuevo peso sea 3 N?
R: radio terrestre.

A) R B) 2R C) 3R
D) 4R E) 5R

30. Considerando que la Tierra solo rota uniformemente; además, sabiendo que la Luna siempre muestra la misma cara a la Tierra. Calcule en qué relación está el periodo de rotación en torno a su eje y período en torno a la Tierra en su órbita circular (período orbital)

A) 1/2 B) 2 C) 1
D) 28/1 E) 36/50

31. La trayectoria elíptica de un planeta encierra una región de área S. Determine S_x sabiendo que desde A hasta B emplea 30 días, de B hacia C demora 60 días, y que un año en dicho planeta dura 280 días.



A) (3/28)S B) (1/7)S C) (5/28)S
D) (7/49)S E) (5/27)S

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Respecto al movimiento planetario, indique cual(es) de las proposiciones (es) son correcta(as):
   I. Describe trayectorias elípticas, donde en uno de los focos se encuentra el Sol.
   II. El vector posición de un planeta, respecto al Sol, barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
   III. El periodo de traslación de un planeta, alrededor del Sol, es proporcional al cubo de su radio vector medio.

   A) Solo I B) I y II C) Solo II
   D) I y III E) I; II y III

2. Indicar la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones siguientes respecto a las fuerzas de gravitación universal:
   ( ) La fuerza de atracción entre dos partículas en el universo son tales que sobre la de mayor masa actúa también mayor fuerza.
   ( ) La fuerza gravitatoria sobre un satélite geoestacionario es de magnitud constante.
   ( ) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa y radio sean, respectivamente, el doble que el de la Tierra, es mayor que en la superficie de la Tierra.

   A) VVV B) FFF C) FVF
   D) VFV E) VVF

3. Un cuerpo de 10 N de peso se lleva desde la Tierra a un lugar en donde la aceleración de la gravedad es 2,45 m/s^2. ¿Qué peso tiene el cuerpo en dicho lugar?

   A) 10 N B) 5 N C) 40 N
   D) 2,5 N E) 7,5 N

4. ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe estar una nave espacial en vuelo hacia la Luna para que ahí soporte una fuerza de gravedad nula, si la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es 384 400 km y la masa terrestre es 81 veces la masa de la Luna.

   A) 300 000 km B) 254 400 km C) 345 960 km
   D) 188 000 km E) 200 000 km

5. Tres masas diferentes se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Indicar, en las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F):
   ( ) La fuerza gravitacional que experimenta cada masa debido a las otras es la misma.
   ( ) La aceleración que experimentaría una cuarta masa colocada en el baricentro del triángulo tendría un valor máximo.
   ( ) La partícula que tiene mayor masa experimentará mayor fuerza gravitatoria.

   A) FFF B) FVF C) VVF
   D) VFF E) FVV

6. ¿Aproximadamente a que altura sobre la superficie terrestre los cuerpos pesan 19% menos? (R_T= 6400 km).

   A) 811 km B) 611 km C) 711 km
   D) 511 km E) 411 km

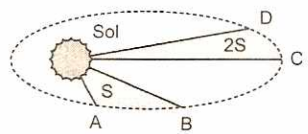
7. La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos en el vacío es de 20 N en modulo. Al sumergirlos en agua, colocados a la misma distancia de separación, dicha fuerza de interacción gravitatoria:

   A) Será menor a 20 N.
   B) Será mayor a 20 N.
   C) Será también de 20 N en modulo.
   D)Dependerá de la constante de permisividad del medio.
   E) Será mayor a 10 N.

8. Ocho partículas de masas iguales a m se encuentran en los vértices de un cubo de lado a. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional en el punto de intersección de las diagonales de una de las caras del cubo. Dé la respuesta en términos de Gm^2/a^2.

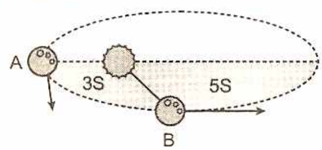
   A) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ C) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$
   D) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$ E) $\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

9. En la figura mostrada, un planeta se demora 3 meses en hacer el recorrido AB. ¿Qué tiempo empleara en el recorrido CD? (S: Área)

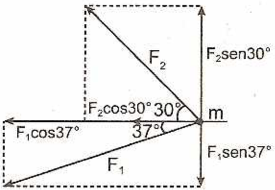


   A) 1,5 meses B) 3 meses C) 4,5 meses
   D) 6 meses E) 7,5 meses

10. Si un planeta que gira alrededor del Sol demora 9 días en trasladarse de A hacia B, determine el periodo de orbita.



   A) 48 días B) 24 días C) 15 días
   D) 18 días E) 20 días



Para que "F" sea horizontal.

$F_1sen37° = F_2sen30°$

$$G\frac{mm_1}{\left(\frac{5}{3}d\right)^2}\left(\frac{3}{5}\right) = G\frac{mm_2}{(4d)^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{125}{864} \approx 0{,}14$$

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

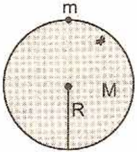
Suponga que la masa de un planeta X es 300 veces la masa de la tierra y que el peso de un objeto en la superficie de la Tierra es la tercera parte de su peso en la superficie del planeta X. Entonces, si d_x es el diámetro del planeta X y d_T es el diámetro de la Tierra, d_X / d_T es igual a:

A) $3\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}$ C) 10
D) $\sqrt{10}/3$ E) $\sqrt{10/3}$

Resolución:

El módulo de la fuerza de gravedad se calcula con:

$$FG = \frac{GMm}{R^2} \text{ (En la superficie del planeta)}$$



Caso n.º 1: (Planeta Tierra)

$$\frac{W}{3} = \frac{GMm}{R_1^2} \quad \dots(1)$$

Caso n.º 2: (Planeta X)

$$W = G\frac{300Mm}{R_2^2} \quad \dots(2)$$

(1) ÷ (2)

$$\frac{1}{3} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\left(\frac{1}{300}\right) \Rightarrow \frac{R_2^2}{R_1^2} = 100 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 10$$

$$\therefore \ \frac{d_X}{d_T} = 10$$

Clave: C

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un péndulo simple tiene un periodo de 1,5 s sobre la superficie de la Tierra. Cuando se le pone a oscilar en la superficie de otro planeta, el periodo resulta ser de 0,75 s. Si la masa de este planeta es 100 veces la masa de la Tierra, el cociente entre el radio del planeta y el radio de la Tierra, (Rp/RT), es:

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución:

En la tierra:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow 1{,}5 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

En el planeta:

$$T_P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_p}} \Rightarrow 0{,}75 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_p}}$$

$$\left.\right\} 4 = \frac{g_p}{g} \quad \ldots(I)$$

Pero: $g = \dfrac{GM}{R^2}$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):

$$4 = \frac{\left(\frac{GM_P}{R_{P^2}}\right)}{\left(\frac{GM}{R^2}\right)} \rightarrow \frac{R^2 \overbrace{M_P}^{100\,M}}{R_P^2 M} = 4 \ \therefore \frac{R_P}{R_T} = 5$$

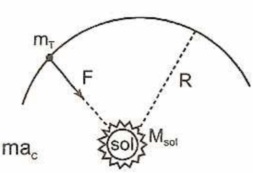
Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Utilizando el periodo de la Tierra (1 año), el radio medio de su órbita ($1{,}5 \times 10^{11}$m) y el valor de $G = 6{,}67 \times 10^{-11}Nm^2/kg^2$, calcule aproximadamente, la masa del Sol en 10^{30} kg.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\dfrac{Nm^2}{kg^2}$

$R = 1{,}5 \times 10^{11}$ m

T = 1 año = 365 días

Aplicamos $\Sigma F_{rad} = F_{centripeta} = ma_c$

$$F = m\omega^2R \Rightarrow \frac{GM_{sol}m_T}{R^2} = m_T\omega^2R$$

$$M_{sol} = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{R^3}{G}\right)$$

$$M_{sol} = \frac{4\pi^2(1{,}5 \times 10^{11})^3}{[365(24)(3600)]^2(6{,}67 \times 10^{-11})}$$

$\therefore M_{sol} = 2 \times 10^{30}$ kg

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Dadas las siguientes proposiciones referentes a las leyes de Kepler sobre los movimientos planetarios:

I. La tierra describe una órbita elíptica con el Sol en el centro de la elipse.
II. El vector que va del Sol a la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.
III. El cubo del periodo de la órbita de la Tierra es proporcional al cuadrado de su semieje mayor.

Son correctas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

Resolución:

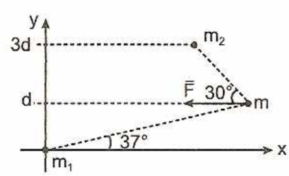
I. Falso: En la primera ley de Kepler se menciona que el Sol se ubica en uno de los focos de la elipse no en el centro.
II. Verdadero: El radio vector que une al Sol con la Tierra barre áreas iguales en tiempo iguales (Segunda ley de Kepler)
III. Falso: El cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio medio.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

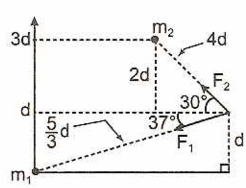
En la figura se muestran dos estrellas de masa m_1 y m_2 y un satélite de masa m. Determine aproximadamente la relación de masas m_1/m_2 si se sabe que la resultante de las fuerzas que ejercen las estrellas sobre el satélite está en la dirección del eje x, como se muestra en la figura.



A) 0,14 B) 0,16 C) 0,21
D) 4,61 E) 6,91

Resolución:

Del gráfico:



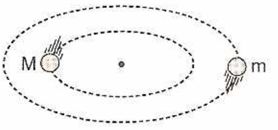
De la condición:

$$-G\frac{m_A m_B}{d}+\frac{1}{2}m_B v_0^2=-G\frac{m_A m_B}{D}+\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2$$

Reemplazando datos y despejando:

$D = 50\,000$ km

51. Una estrella binaria está formada por dos estrellas de masas M y m que se encuentran rotando alrededor de su centro de masas de tal manera que la distancia entre ellas es d. Determinar la energía mecánica total de este sistema estelar.

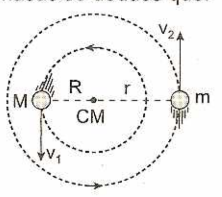


Resolución:

Por criterio de centro de masas se deduce que:

$$R=\left(\frac{m}{M+m}\right)d$$

$$r=\left(\frac{M}{M+m}\right)d$$



Por dinámica circular:

$$\frac{Mv^2}{R}=G\frac{Mm}{d^2}$$

Entonces: $\frac{1}{2}Mv_1^2=\frac{1}{2}G\frac{MmR}{d^2}$ ...(1)

Análogamente: $\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}G\frac{Mmr}{d^2}$ ...(2)

Energía mecánica: $E_M = E_C + E_P$

$$E_M=\frac{1}{2}Mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\left(-G\frac{Mm}{d}\right) \quad ...(3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$E_M=\left(\frac{1}{2}\right)G\frac{MmR}{d^2}+\left(\frac{1}{2}\right)G\frac{Mmr}{d^2}-G\frac{Mm}{d}$$

De donde: $E_M=-\left(\frac{1}{2}\right)G\frac{Mm}{d}$

52. El periodo de un péndulo simple en la Tierra, es 5 s. Hallar el periodo del mismo péndulo en un planeta x, si el radio de tal planeta es 100 veces el radio de la Tierra y además la densidad del planeta es la cuarta parte de la densidad terrestre (la aceleración en la superficie de un planeta esta dada por: $G_1=\frac{GM}{R^2}$; donde G es la constante de gravitación universal)

Resolución:

$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{M_1/R_1^2}{M_2/R_2^2}=\frac{D_1\frac{R_1^3}{R_1^2}}{D_2\frac{R_2^3}{R_2^2}}=\frac{D_1R_1^2}{D_2R_2^2}$$

$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{D_1D_2}{\frac{1}{4}D_1 100R_1}=\frac{4}{100}\ \text{Entonces:}\ \frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{g_2}{g_1}=\frac{100}{4}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{10}{2}=\frac{5}{T_2} \quad \therefore T_2=1\text{ s.}$$

53. Si la densidad de un planeta es el doble de la Tierra y su radio es igual que el de la Tierra. Determinar la aceleración gravitatoria (g_p) de este planeta (en m/s^2). Considerar los planetas de masa homogénea y de la forma esférica. $g_T = 10$ m/s^2, aceleración gravitatoria terrestre.

Resolución:

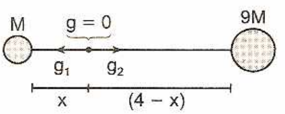
$$g=G\left(\frac{M}{R^2}\right)=G\left[\frac{D\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3}{R^2}\right]$$

$$\frac{g_2}{g_1}=\frac{D_2R_2}{D_1R_2} \Rightarrow \frac{g_2}{10}=\frac{2D_1}{D_1} \quad \therefore g_2=20\text{ m/s}^2$$

54. Dos esferas de masas M y 9M están separadas 4 m. ¿A qué distancia de la esfera de masa M el campo gravitatorio es nulo?

Resolución:

En la zona de ingravidez la fuerza gravitatoria resultante sobre una masa de prueba es nula. Si la fuerza resultante es cero, entonces la intensidad del campo gravitatorio es nulo.



$$g_1=g_2 \Rightarrow G\frac{M}{x^2}=G\frac{(9M)}{(4-x)^2}$$

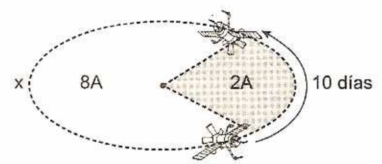
$$\frac{1}{x}=\frac{3}{4-x} \Rightarrow 4-x=3x \quad \therefore x=1\text{m}$$

55. Un satélite artificial terrestre demora en barrer el 20% de su área orbital en 10 días, determinar el periodo del satélite alrededor de la Tierra.

Resolución:

El satélite describe áreas iguales en tiempos iguales.

Sea área total 10A ⇒ 20%(10A) = 2A



Segunda ley de Kepler: $\frac{A_1}{T_1}=\frac{A_2}{T_2}$

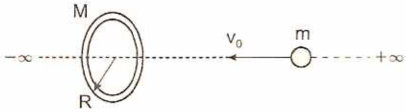
$$\frac{2A}{10}=\frac{8A}{x} \Rightarrow x=40\text{ días}$$

Por lo tanto, el periodo de rotación del satélite: $40 + 10 = 50$ días

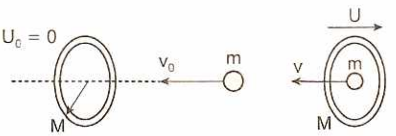
Reemplazando datos:

$$27\times10^{8}=\frac{1{,}8\times10^{8}+R_{máx}}{2}\qquad\therefore\ R_{máx}=5{,}2\times10^{9}\,\text{km}$$

47. Una partícula de masa m se lanza con una velocidad v_0 desde un punto ubicado sobre el eje de un anillo de masa M situado a una distancia muy grande de él. El anillo se encuentra inicialmente en reposo pero puede moverse libremente . Si el radio del anillo es R, determinar la velocidad de la partícula cuando atraviesa el anillo.



Resolución:



Antes Después

Como el sistema M + m es aislado:

$$\vec{p}_{(inicial)}=\vec{p}_{(final)}\ \Rightarrow\ -mv_0=-mv+MU\qquad ...(1)$$

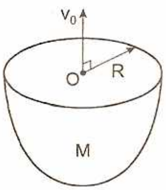
Por principio de conservación de la energía:

$$E_{M(inicial)}=E_{M(final)}\ \Rightarrow\ E_{C(inicial)}=E_{C(final)}+E_{P(final)}\qquad ...(2)$$

Resolviendo (1) y (2), se tiene que:

$$v=\left(\frac{m}{M+m}\right)v_0+\sqrt{\left(\frac{M}{M+m}v_0\right)^2+\left(\frac{2}{R}\right)\frac{GM^2}{(M+m)}}$$

48. La figura muestra un cascarón semiesférico de paredes delgadas de masa M y radio R. Determinar la mínima velocidad v_0 con que debe lanzarse una partícula de su centro geométrico para que escape a la atracción gravitatoria del cascarón.



Resolución:

Dividiendo la superficie semiesférica en pequeñas porciones de superficie se deduce que el potencial gravitatorio en el punto O es:

$$g_0=-G\frac{M}{R}\qquad ...(1)$$

Por otro lado, la velocidad inicial v_0 será mínima cuando en el infinito la velocidad de la partícula sea prácticamente nula.

Principio de conservación de energía mecánica:

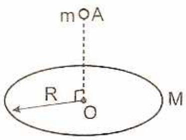
$$E_{M(inicial)}=E_{M(final)}$$

$$E_{P(0)}+E_{C(0)}=E_{P(\infty)}+E_{C(\infty)}\ \Rightarrow\ mg_0+\frac{1}{2}mv_0^2=0+0$$

$$\Rightarrow\ v_0=\sqrt{-2g_0}\qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $v_0=\sqrt{2G\frac{M}{R}}$

49. Un anillo de masa M y radio R genera un campo gravitacional a su alrededor. Si una partícula de masa m << M se deja en libertad de movimiento de un punto ubicado sobre el eje del anillo a una distancia h = 0,75R de su centro, determinar la máxima velocidad que alcanza esta durante su movimiento.



Resolución:

Se deduce, por criterios dinámicos, que la máxima velocidad se alcanzará cuando la partícula pase por el punto O.

Por otro lado, dividiendo el aro en pequeñas porciones se deduce que el potencial gravitacional en el punto A es:

$$g_A=-G\frac{M}{\sqrt{R^2+h^2}}\ \Rightarrow\ g_A=-\left(\frac{4}{5}\right)G\frac{M}{R}\qquad ...(1)$$

En el punto O: $g_0=-G\frac{M}{R}$ ...(2)

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(A)}=E_{M(O)}\ \Rightarrow\ mg_A=mg_0+\frac{1}{2}mv_0^2$$

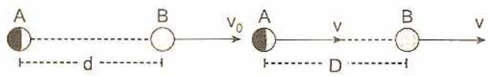
$$\Rightarrow\ v_0=\sqrt{2(g_A-g_0)}\qquad ...(3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) tendremos que:

$$v_0=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)G\frac{M}{R}}$$

50. Con respecto de un sistema de referencia heliocéntrica, cuando un cuerpo celeste A se encontraba en reposo a una distancia de 2000 km de otro B, este último fue lanzado con una velocidad v_0 = 6K km/s alejándose de la anterior. Si las masas de A y B son de $2K\times10^{25}$ y $4K\times10^{25}$ kg respectivamente, determinar la máxima distancia de separación entre estos. Considerar que: $G=K\times10^{11}\ m^3/kg.s^2$.

Resolución:



Antes Después

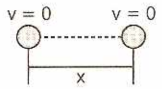
Conservación del momentum lineal:

$$\vec{p}_{inicial}=\vec{p}_{final}\ \Rightarrow\ m_Bv_0=(m_A+m_B)v\ \Rightarrow\ v=\frac{2}{3}v_0$$

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(inicial)}=E_{M(final)}\ \Rightarrow\ E_{P(0)}+E_{C(0)}=E_{P(f)}+E_{C(f)}$$

Del principio de conservación de la energía mecánica:



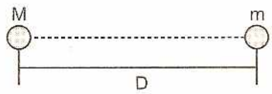
$$E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$$

$$E_{P(0)} + E_{C(0)} = E_{P(f)} + E_{C(f)}$$

$$-\frac{Gmm}{d} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{Gmm}{x} + 0$$

$$v^2 = \frac{Gm}{d} - \frac{Gm}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{d} - \frac{v^2}{Gm} \quad \therefore\ x = \left[\frac{1}{d} - \frac{v^2}{Gm}\right]^{-1}$$

28. Dos cuerpos esféricos de masas M y m (M = 2m) aisladas de otros cuerpos, se abandonan cuando la distancia de separación es D. Debido a la fuerza de atracción gravitatoria los cuerpos se acercan entre sí, entonces halla la velocidad de M cuando la distancia de separación sea la mitad de la inicial.



Resolución:

Las fuerzas de atracción son de acción y reacción, de igual módulo pero sentidos opuestos, la fuerza resultante del sistema es nulo. Del principio de conservación del momentum lineal:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final} \Rightarrow 0 = MU - mv$$

$$v = \frac{MU}{m} \Rightarrow v = 2U \qquad ...(1)$$

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(inicial)} = E_{M(final)} \Rightarrow E_{P(0)} = E_{P(f)} + E_{C(f)}$

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{D} = -\frac{GMm}{D/2} + \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{GMm}{D} = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(2)$$

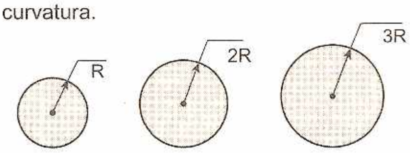
Reemplazando, M = 2m y v = 2U, en (2) tenemos:

$$U = \sqrt{\frac{2Gm}{3D}}$$

29. ¿Cuál de los siguientes planetas tienen mayor aceleración de la gravedad en la superficie?

Resolución:

La aceleración de la gravedad en la superficie, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.



I. masa: M   II. masa: 2M   III. masa: 3M

I. $g_1 = G\frac{M}{R^2}$

II. $g_2 = G\frac{(2M)}{(2R)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{GM}{R^2}$

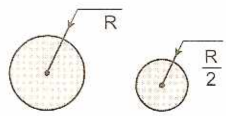
III. $g_3 = G\frac{(3M)}{(3R)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{GM}{R^2}$

Luego, I tiene mayor aceleración de la gravedad en la superficie.

30. ¿En cuánto varía la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, si su radio disminuye a la mitad manteniendo su masa constante? ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

La aceleración de la gravedad en la superficie, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.



I. $g_1 = G\frac{M}{R^2} = 10\ m/s^2$

II. $g_2 = G\frac{M}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 4\frac{GM}{R^2} = 40\ m/s^2$

De I y II se deduce que: $g_2 = 4g_1$

Luego, la aceleración de la gravedad varía en $30\ m/s^2$.

31. ¿En cuánto varía la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, si su radio se duplica y la masa disminuye a la mitad? ($g = 10\ m/s^2$)

Resolución:

I. masa: M   II. masa: $\frac{M}{2}$

La aceleración de la gravedad en la superficie, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.

$$g_1 = G\frac{M}{R^2} = 10\ m/s^2$$

$$g_2 = G\frac{\frac{M}{2}}{(2R)^2} = \left(\frac{1}{8}\right)G\frac{M}{R^2} = 1{,}25\ m/s^2$$

Luego, la aceleración de la gravedad varía en $8{,}75\ m/s^2$.

32. Determinar la aceleración de la gravedad en un punto situado a 6400 km sobre la superficie de la Tierra. Considere: Radio de la Tierra = 6400 km. ($g = 10\ m/s^2$)

La aceleración de la gravedad g en la superficie del planeta en función de la densidad D y el radio de la curvatura R es:

$$g = \frac{4\pi}{3}GDR \qquad ...(1)$$

La fuerza F que ejerce el planeta sobre los cuerpos que se ubican en la zona ecuatorial es: $F = mg$.
De la condición, «que los cuerpos no pesan», significa que la fuerza centrífuga se equilibra con la fuerza F.

$$F = F_{cg} \Rightarrow mg = ma_C \Rightarrow g = a_C \Rightarrow g = \omega^2 R \quad ...(2)$$

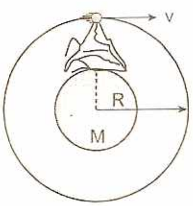
Reemplazando (1) en (2): $\frac{4\pi}{3}GDR = \frac{4\pi^2}{T^2}R$

$$\therefore\ D = \frac{3\pi}{G}T^{-2}$$

24. Hallar la mínima velocidad v con que se debe lanzar un cuerpo de masa m horizontalmente de lo alto de una montaña, tal que el cuerpo no caiga a la tierra. Considere la aceleración de la gravedad en la superficie $g = 10\ m/s^2$ y el radio de la Tierra $R = 6{,}4 \times 10^6\ m$.

Resolución:

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es: $g = \frac{GM}{R^2} = 10\ m/s^2$; aplicando el concepto de dinámica circunferencial al movimiento del cuerpo:



$$F_C = ma_C \Rightarrow \frac{GmM}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} = g$$

$$\Rightarrow v^2 = gR$$

Reemplazando los datos:

$$v^2 = (10)(6{,}4 \times 10^6)$$

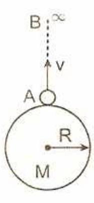
$$\therefore\ v = 8\ km/s$$

Nota

También se le conoce como la PRIMERA VELOCIDAD CÓSMICA.

25. Determinar la mínima velocidad v con que se debe lanzar un cuerpo de masa m verticalmente hacia arriba, desde la superficie de la Tierra tal que el cuerpo no regrese. ($g = 10\ m/s^2$; $R = 6{,}4 \times 10^6\ m$)

Resolución:



La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es: $g = \frac{GM}{R^2} = 10\ m/s^2$

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$

$$E_{P(A)} + E_{C(A)} = E_{P(B)} + E_{C(B)}$$

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 + 0$$

La energía potencial de interacción gravitatoria entre M y m, es igual a cero, cuando la distancia de separación es muy grande (infinito). Si la velocidad de lanzamiento v es mínimo, entonces la velocidad en (B) es igual a cero.

Despejando v:

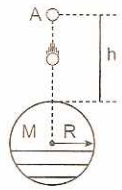
$$v^2 = 2\frac{GM}{R} = 2\frac{GM}{R^2}(R) = 2gR = 2(10)(6{,}4 \times 10^6)$$

$$v = 8000\sqrt{2}\ m/s \qquad \therefore\ v = 11{,}3\ km/s$$

Nota

También se le conoce como la SEGUNDA VELOCIDAD CÓSMICA.

26. Un cuerpo de masa m se abandona en el punto A desde una altura igual al radio, respecto de la superficie del planeta de radio R y masa M. Calcular la velocidad del cuerpo cuando choca con la superficie del planeta.



Resolución:

Del principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$

$$E_{P(1)} + E_{C(1)} = E_{P(2)} + E_{C(2)}$$

$$-\frac{GmM}{(R+h)} + 0 = -\frac{GmM}{R} + \frac{1}{2}mv^2$$

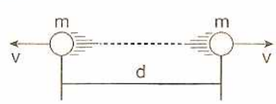
Pero, $h = R$, reemplazando y simplificando tenemos:

$$\frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore\ v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

Nota

La velocidad v es independiente de la masa m.

27. Dos masas puntuales de masa m cada una, aisladas de otros cuerpos, separados inicialmente una distancia d son lanzados en sentidos opuestos con igual velocidad v. Determinar la máxima distancia de separación.



Resolución:

Cuando los cuerpos alcanzan la máxima distancia de alejamiento, tienen velocidades nulas.

$$M_1T_1^2 = \frac{4\pi^2R^3}{G} = \text{constante} \qquad ...(1)$$

Dinámica circunferencial, para m_2. Obtendremos la siguiente relación:

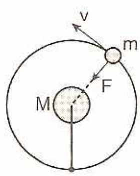
$$M_2T_2^2 = \frac{4\pi^2R^3}{G} = \text{cte.} \qquad ...(2)$$

De las relaciones (1) y (2) tenemos:

$M_1T_1^2 = M_2T_2^2$, pero: $T_1 = 2T$ y $T_2 = T$

$$M_1(2T)^2 = M_2(T)^2 \quad \therefore \ \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{4}$$

20. ¿Qué velocidad tendría la Luna si la distancia entre sus centros de la Tierra y la Luna fuera cien veces el radio de la Tierra. Radio de la Tierra igual a 6400 km. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es: $g = \frac{GM}{R^2} = 10\ m/s^2$

Dinámica circunferencial: $F_c = ma_c$; $d = 100R$

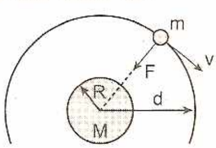
$$\frac{GMm}{d^2} = m\frac{v^2}{d} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{d} = \frac{GM}{100R}\left(\frac{R}{R}\right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \left[\frac{GM}{R^2}\right]\frac{R}{100} = \frac{gR}{100}$$

Reemplazando los datos:

$$v^2 = \frac{(10)(6400)}{100} = 64 \times 10^4\ \frac{m^2}{s^2} \qquad \therefore\ v = 800\ m/s$$

21. Calcular la velocidad que debe tener un satélite para mantener una órbita circunferencial alrededor de la Tierra a una altura igual a tres veces el radio terrestre, desde la superficie de la Tierra. La gravedad en la superficie de la Tierra es $10\ m/s^2$ y el radio de la Tierra es 6400 km.



Resolución:

Sea m la masa del satélite y M la masa de la Tierra. Si R es el radio de la Tierra entonces el radio de órbita es $d = 4R$.

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta es: $g = \frac{GM}{R^2} = 10\ m/s^2$

Aplicando el concepto de fuerza centrípeta al movimiento del satélite:

$$F = G\frac{Mm}{d^2} = G\frac{Mm}{(4R)^2}; \quad F_C = ma_C$$

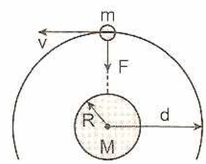
$$G\frac{Mm}{d^2} = m\frac{v^2}{d} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{d}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{4R} = \frac{GM}{R^2}\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{gR}{4}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{gR}}{2} = \sqrt{\frac{(10)(6{,}4 \times 10^6)}{4}} = 4000\ m/s$$

$\therefore\ v = 4\ km/s$

22. Determinar el radio de órbita de un satélite, que gira alrededor de un planeta de radio de curvatura R, con un período T. La intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta es igual a g.



Resolución:

Consideremos como m la masa del satélite, m la masa del planeta y R el radio de curvatura. La intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta es: $g = G\frac{M}{R^2}$

La fuerza de atracción sobre el satélite es: $F = G\frac{Mm}{d^2}$; siendo d el radio de órbita.

Aplicando el concepto de fuerza centrípeta al movimiento del satélite: $F_C = ma_C \Rightarrow F_C = m\omega^2 d$

$$\frac{GMm}{d^2} = m\omega^2 d \Rightarrow \frac{GM}{\omega^2} = d^3$$

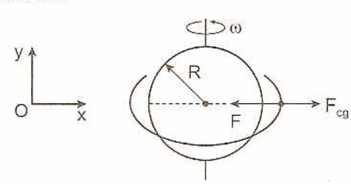
$$\text{Pero: } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{T^2GM}{4\pi^2R^2}R^2 = d^3$$

$$\text{si: } g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{T^2gR^2}{4\pi^2} = d^3$$

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}}$$

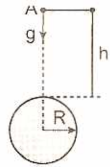
23. Hallar la densidad de un planeta esférico en donde el día tiene T segundos y en el ecuador (zona ecuatorial) de dicho planeta los cuerpos no pesan.

Resolución:



Para un observador que se encuentra fuera del planeta.

La velocidad angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T}$



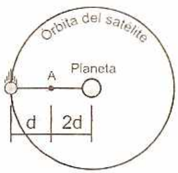
Resolución:

La aceleración de la gravedad en el punto A se obtiene del siguiente modo: $g_A = g_s\left[\dfrac{R}{R+h}\right]^2$

g_s: aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

$$g_A = 10\left[\frac{6400}{12\,800}\right]^2 \quad \therefore\ g_A = 2{,}5\ m/s^2$$

33. En la figura, el planeta tiene masa 4M y el satélite masa M, hallar la intensidad del campo gravitatorio resultante en el punto A.



Resolución:

La intensidad del campo gravitatorio en un punto A es directamente proporcional a la masa del planeta o satélite e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Campo de gravedad generado por el satélite:

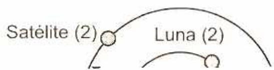
$$g_1 = G\frac{M}{d^2} \qquad \text{...(1)}$$

Campo de gravedad generado por el planeta:

$$g_2 = G\frac{4M}{(2d)^2} = G\frac{M}{d^2} \qquad \text{...(2)}$$

De (1) y (2) se deduce que la intensidad del campo gravitatorio resultante en el punto A es igual a cero.

34. Determinar el período de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita cuyo radio es el doble de la órbita lunar. El período de la Luna es 28 días.

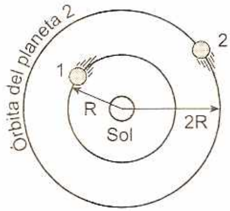


$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$\frac{T_1^2}{(2R)^3} = \frac{(28)^2}{R^3} \qquad \therefore\ T_1 = 79\ \text{dias}$$

35. En la figura, hallar el período del planeta 1, sabiendo que el planeta 2 tiene un período de 400 días alrededor de la estrella llamada Sol.



Resolución:

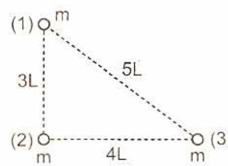
Aplicando la tercera ley de Kepler (Ley de períodos):

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$\frac{T_1^2}{R^3} = \frac{(400)^2}{(2R)^3} \qquad \therefore\ T_1 = 141\ \text{días}$$

36. La figura muestra tres masas iguales a m colocados en los vértices de un triángulo de lados 3L; 4L y 5L. Hallar la energía potencial gravitatoria del sistema de tres cuerpos, aislados de otros cuerpos.



Resolución:

$$E_{P(sist)} = E_{P(1\text{-}2)} + E_{P(1\text{-}3)} + E_{P(2\text{-}3)}$$

$$E_{P(sist)} = -\frac{Gmm}{3L} - \frac{Gmm}{5L} - \frac{Gmm}{4L} \ \therefore\ E_{P(sist)} = -\left(\frac{47}{60}\right)\frac{Gm^2}{L}$$

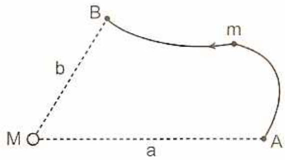
37. La figura muestra tres masas iguales a m colocados en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. Hallar la energía potencial de interacción gravitatoria del sistema de tres cuerpos.

Resolución:

$$E_{P(sist)} = -\frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{L} - \frac{Gmm}{L}$$

$$\therefore\ E_{P(sist)} = -3\frac{Gm^2}{L}$$

38. La figura muestra un planeta de masa M, creadora del campo gravitatorio. Determinar el trabajo realizado por un agente externo, para trasladar una masa m desde la posición A hasta la posición B, siguiendo la trayectoria mostrada.



Resolución:

Cálculo del potencial gravitatorio en los puntos A y B:

$$v_A = -G\frac{M}{a} \Rightarrow v_B = -G\frac{M}{b}$$

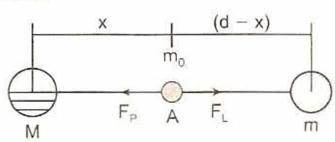
El trabajo realizado por un agente externo, contra el campo gravitatorio creado por M, será:

$$W_{A\to B} = m(v_B - v_A) \Rightarrow W_{A\to B} = m\left[-\frac{GM}{b} + \frac{GM}{a}\right]$$

$$\therefore\ W_{A\to B} = GmM\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

39. Un planeta de masa M tiene una Luna de masa m, que gira alrededor del planeta en órbita circular con radio d medido desde los centros geométricos de los cuerpos esféricos. Determinar a qué distancia del planeta, entre M y m, se encuentra la zona de ingravidez, es decir donde la aceleración de la gravedad es nula.

Resolución:



Si la aceleración de la gravedad en el punto A es nulo, entonces la fuerza resultante sobre cada unidad de masa m_0 es igual a cero.

Si, $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_p = F_L$

$$\frac{GMm_0}{x^2} = \frac{Gmm_0}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{M}{x^2} = \frac{m}{(d-x)^2} \quad \therefore x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}}$$

40. Determinar la intensidad del campo gravitatorio, en un planeta cuya densidad promedio es el doble de la densidad promedio terrestre y cuyo radio es la cuarta parte del radio terrestre.

Resolución:

Cálculo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie.

En la Tierra: $g_T = G\frac{M_T}{R_T^2}$ ... (1)

En el otro planeta: $g_p = G\frac{M_p}{R_p^2}$ ...(2)

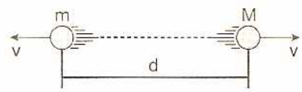
De las ecuaciones (1) y (2): $g_p = \left(\frac{M_pR_T^2}{M_TR_p^2}\right)g_T$ ...(3)

Pero: $M = DV = D\left(\frac{4\pi}{3}\right)R^3$

Reemplazando en (3): $g_p = \left(\frac{D_pR_p}{D_TR_T}\right)g_T$ ...(4)

Reemplazando en (4): $g_p = \frac{1}{2}g_T \quad \therefore\ g_p = 4{,}9\ m/s^2$

41. Dos masas puntuales m y M aisladas de otros cuerpos, separados inicialmente una distancia d son lanzados en sentidos opuestos con igual velocidad en módulo v. Determinar la máxima distancia de separación que alcanzan los cuerpos.



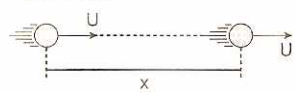
Resolución:

Cuando los cuerpos alcanzan la máxima distancia de alejamiento, tienen velocidades iguales a U (sentidos iguales).

Principio de conservación del momentum lineal:

$$\vec{p}_{(inicial)} = \vec{p}_{(final)}$$

$$Mv - mv = (M + m)U$$



$$U = \frac{(M-m)}{(M+m)}v$$

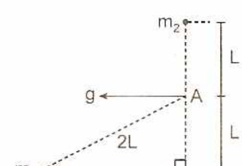
Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(inicial)} = E_{M(final)} \Rightarrow E_{C(0)} + E_{P(0)} = E_{C(f)} + E_{P(f)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{d} = \frac{1}{2}(m+M)U^2 - \frac{GmM}{x}$$

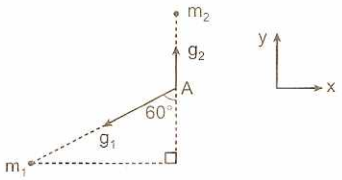
$$\therefore\ x = \left[\frac{1}{d} - \frac{2v^2}{G(m+M)}\right]^{-1}$$

42. En la configuración mostrada, determinar una relación entre las masas puntuales m_1 y m_2, de tal modo que la intensidad del campo gravitatorio en el punto A sea horizontal.



Resolución:

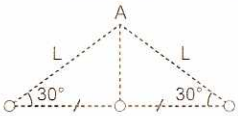
Llevamos una masa de prueba m_0 al punto A para determinar la dirección y sentido de la intensidad de campo generado por cada masa.



De la condición del problema, la intensidad resultante es horizontal: $\Sigma g_y = 0 \Rightarrow g_2 = g_1\cos 60°$

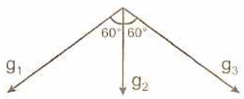
$$\frac{Gm_2}{L^2} = \frac{Gm_1}{4L^2}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore\ m_1 = 8m_2$$

43. En la configuración mostrada, determinar la intensidad del campo gravitatorio en el punto A. Los tres cuerpos puntuales tienen masa m cada uno.



Resolución:

Del principio de superposición del campo gravitatorio, se cumple que:

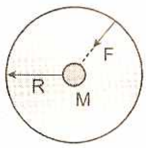


$g_A = g_1\cos 60° + g_2 + g_3\cos 60°$

Donde: $g_1 = g_3 = \dfrac{Gm}{L^2}$ y $g_2 = \dfrac{Gm}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 4\dfrac{Gm}{L^2}$

Reemplazando tenemos que: $g_A = 5\dfrac{Gm}{L^2}$

44. Si la Luna da 13 vueltas alrededor de la Tierra en un año y la distancia de la Tierra al Sol es 390 veces la distancia de la Luna a la Tierra, determinar en qué relación se encuentran las masas del Sol y la Tierra. Suponer que las órbitas de la Tierra y la Luna son circunferenciales.



Resolución:

R: radio de órbita

M: masa creadora del campo de gravedad

m: masa en movimiento circular uniforme

f: frecuencia de revolución

Dinámica circular:

$$F_c = ma_c \Rightarrow \frac{GmM}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow \frac{R^3\omega^2}{M} = G = \text{cte}$$

Pero $\omega = 2\pi f \Rightarrow \dfrac{R^3 f^2}{M} = \text{constante}$ ...(1)

Reemplazando en (1) las condiciones del problema:

$$\frac{R^3_{Tierra}f^2_{Tierra}}{M_{Sol}} = \frac{R^3_{Luna}f^2_{Luna}}{M_{Tierra}} \Rightarrow \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}} = \left(\frac{R_{Tierra}}{R_{Luna}}\right)^3\left(\frac{f_{Tierra}}{f_{Luna}}\right)^2$$

Reemplazando datos tenemos:

$$\frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}} = (390)^3\left(\frac{1}{13}\right)^2 \therefore \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}} = 3{,}51\times 10^5$$

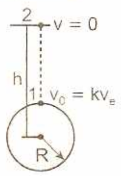
45. Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad de magnitud Kv_e, siendo v_e la velocidad de escape y $K \le 1$.

a) Demuestre que, prescindiéndose de la resistencia del aire, la altura máxima a la cual se elevará, medida desde el centro de la Tierra, $R/(1-K^2)$, siendo R el radio terrestre.

b) ¿Qué sucede si $K > 1$?

Resolución:

Graficando:



Sabemos que velocidad de escape: $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

a) Principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(1)} = E_{M(2)} \Rightarrow E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 + \left(-G\frac{Mm}{h}\right)$$

$$\frac{1}{2}m(kv_e)^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{h}$$

$$\frac{1}{2}mK^2\left(\frac{2GM}{R}\right) - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{h}$$

Simplificando: $\dfrac{k^2}{R} - \dfrac{1}{R} = -\dfrac{1}{h} \qquad \therefore\ h = \dfrac{R}{1-k^2}$

b) Si $K > 1$: la velocidad inicial del proyectil v_0, es mayor que la velocidad de escape v_e ($Kv_e > v_e$). Por lo tanto, el proyectil no regresará a la Tierra, se dirigirá al infinito.

46. Determinar a qué distancia máxima del Sol se aleja el cometa Halley si la distancia mínima es de $1{,}8\times 10^8$ km y su periodo de rotación es de 76 años. El radio medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es de $1{,}5\times 10^8$ km.

Resolución:

Determinemos el radio medio de la órbita del cometa:

$$\frac{T^2_{cometa}}{R^3_{cometa}} = \frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}} \text{ (Ley de periodos)}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{76^2}{R^3_{cometa}} = \frac{1^2}{(1{,}5\times 10^8)^3} \Rightarrow R_{cometa} \approx 27\times 10^8 \text{ km}$$

Pero: $R_{medio} = \dfrac{R_{min} + R_{máx}}{2}$

11. Indicar en las siguientes proposiciones, falso (F) o verdadero (V):

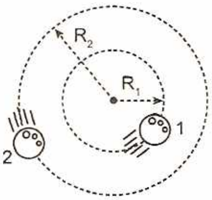
( ) Los planetas que están más alejados del Sol giran en torno a este con mayor rapidez.

( ) La máxima rapidez de giro de un planeta P en torno al Sol ocurre cuando P pasa por la posición más cercana al Sol.

( ) El radio vector esta representado por la semisuma de los ejes mayor y menor de una trayectoria elíptica.

A) FFF B) FVV C) FVF
D)VFV E) FFV

12. El grafico nos muestra dos satélites orbitando en torno a un planeta, describiendo trayectorias circunferenciales. El satélite 1 emplea un tiempo t en el ir de un punto a otro diametralmente opuesto de su trayectoria. ¿Cuánto tarda el satélite 2 en recorrer las 3/4 partes de la longitud de su trayectoria? ($R_2/R_1 = 3$)



A) $3\sqrt{3}t$ B) $\frac{9\sqrt{3}t}{2}$ C) $4\sqrt{3}t$
D) $5\sqrt{3}t$ E) $10\sqrt{3}t$

13. Dos satélites de UFO-3 de igual masa tiene sus periodos de rotación relacionados según $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{8}$. Calcular en qué relación se encuentran sus energías cinéticas.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 8
D) 4 E) $\frac{1}{2}$

14. Un planeta de masa M tiene un radio R. Halle la mínima velocidad de lanzamiento de un cohete desde la superficie del planeta, tal que pueda abandonar el planeta (velocidad de escape).

A) $\sqrt{3gR}$ B) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$ C) $\frac{1}{2}\sqrt{gR}$
D) $2\sqrt{gR}$ E) $\sqrt{2gR}$

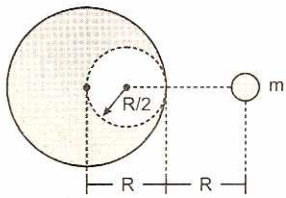
15. ¿Qué velocidad se le debe comunicar a un cohete en la superficie terrestre tal que orbite alrededor de la Tierra con una radio r, siendo M la masa terrestre y R su respectivo radio?

A) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ B) $\sqrt{\frac{GM}{Rr}(2r-R)}$ C) $\sqrt{\frac{GM}{r}R}$
D) $\frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{R}}$ E) $R\sqrt{\frac{GM}{r}}$

16. Un hombre de masa m está parado sobre la superficie terrestre. Halle la velocidad respecto a Tierra con que se debe saltar verticalmente para alcanzar una altura máxima h, siendo M la masa terrestre, R su radio y G la constante de gravitación universal.

A) $\sqrt{\frac{GMm}{R}(\frac{h}{R+h})}$ B) $\sqrt{\frac{G(M+m)}{R}\left(\frac{R+h}{h}\right)}$
C) $\sqrt{\frac{2G(M+m)}{R}(\frac{h}{R+h})}$ D) $\sqrt{\frac{2GM}{R}(\frac{R+h}{h})}$
E) $\sqrt{\frac{GM}{R}(\frac{R}{R+h})}$

17. La esfera maciza y homogénea mostrada atrae a la partícula de masa m hacia su centro con una fuerza gravitatoria F. Halle la magnitud de la fuerza gravitatoria sobre dicha partícula, si a la esfera se le practica una cavidad esférica de radio R/2 en la forma indicada.



A) $\frac{7F}{9}$ B) $\frac{9F}{5}$ C) $\frac{5F}{9}$
D) $\frac{8F}{9}$ E) $\frac{4F}{9}$

18. En torno a un planeta de masa M, un satélite se mueve describiendo una trayectoria circunferencial de radio R. Determine el tiempo que demora en dar una vuelta completa.

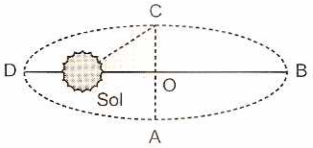
A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{GM}}$
C) $T = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM^5}}$ D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{G}}$
E) $T = \pi\sqrt{\frac{R}{G}}$

19. Sean M_P y R_P la masa y el radio de cierto planeta y sean M_T y R_T la masa y el radio de la Tierra, respectivamente. Si se sabe que la aceleración de la gravedad en la superficie de ese planeta es 6,4 m/s^2, diga cuál de las siguientes afirmaciones podría explicar este hecho (g = 10 m/s^2).

A) $M_P = M_T$; $R_T = 0{,}64R_P$
B) $M_P = M_T$; $R_T = 0{,}8R_P$
C) $M_P = M_T$; $R_T = 1{,}6R_P$
D) $M_P = 0{,}8M_T$; $R_P = R_T$
E) $M_P = 1{,}6M_T$; $R_P = R_T$

20. En la figura se observa el movimiento de un planeta en torno a una estrella E. Si se sabe que desde la posición P, tarda el quíntuple en llegar a A que

del área total de la elipse es la región sombreada (O: centro de la elipse).



A) 1/6 B) 1/7 C) 1/8
D) 1/9 E) 1/10

53. Un cuerpo de masa m es abandonado a una altura $h = 8R_T$ (RT: radio de la Tierra). Determine qué rapidez tendrá al llegar a la superficie terrestre. Desprecie todo tipo de fricción ($m << M_T$; M_T: masa de la Tierra).

A) $\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ C) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$

D) $\frac{8}{3}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ E) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$

54. Para calcular la masa de un planeta, cuya orbita alrededor del Sol es circular, ¿Cuál(es) de las siguientes informaciones es (son) suficientes(s)?

I. La masa del Sol y la constante de gravitación universal.
II. El tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor del Sol.
III. La distancia del planeta al Sol.

A) I y II B) Solo I
C) I, II y III no son suficientes
D) Solo II E) I; II y III

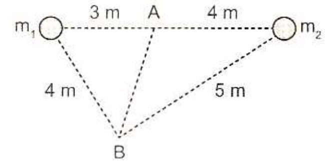
55. Un satélite artificial gira circularmente alrededor de la Tierra a una altura igual al radio terrestre ($R_T = 6400$ km). Hallar su velocidad lineal, en km/s).

A) 4,8 B) 2,8 C) 5,6
D) 7,4 E) 2,3

56. Analice la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones e indique la incorrecta:

A) Un planeta, cuando pasa por el perihelio, tiene su máxima energía cinética.
B) Un planeta, cuando pasa el afelio, tiene su máxima energía potencial.
C) La energía potencial de interacción gravitacional entre el Sol y la Tierra disminuye con la separación entre estos.
D) La aceleración de la gravedad depende de la altura h desde la superficie terrestre según, $g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ donde g_0 es la aceleración de la gravedad en la superficie.
E) Durante el movimiento de un planeta, el cuadrado de su periodo es proporcional al cubo de su radio orbital medio.

57. Calcular el trabajo necesario en joules para llevar una masa de 10 kg desde el punto A hasta el punto B. $m_2 = 80$ kg; $m_1 = 60$ kg.



A) 50 J B) 60 J C) 80 J
D) 90 J E) 40 J

58. Si un atleta de salto alto puede alcanzar con su esfuerzo máximo una altura h = 2 m en la superficie terrestre. Halle qué altura, en metros, puede alcanzar en la superficie de la Luna, si la masa lunar es 1/81 de la masa terrestre y su radio es 1/4 del radio de la Tierra.

A) 8,42 B) 5,06 C) 2,46
D) 4,98 E) 10,12

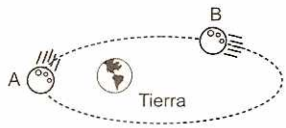
59. Dos masas m_1 y m_2 se mueven una respecto de otra de modo que la distancia entre ellas permanece constante e igual a "a". Halle la energía del sistema.

A) Gm_1m_2/a B) $-Gm_1m_2/2a$ C) $Gm_1m_2/2a$
D) $-2Gm_1m_2/a$ E) $-(3/2)Gm_1m_2/a$

60. Dos satélites S_1 y S_2 orbitan circularmente alrededor de un mismo planeta. El primero barre en 144 horas las 2/3 partes del área total de su órbita. El segundo satélite tiene un periodo igual a 27 horas. Entonces, la razón de los radios de sus orbitas, R_1/R_2 es:

A)2 B)3 C) 4
D)9 E) 14

61. Un satélite de la Tierra se encuentra en una órbita elíptica, tal como se muestra, luego al afirmar:



I. La energía cinética en A es mayor que en B.
II. La energía potencial en A es mayor que en la B.
III. La energía total en A es mayor que en B.
Lo correcto es:

A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) Solo III E) II y III

62. Júpiter tiene un radio R y un satélite recorre una órbita circular alrededor de este planeta con un período T. Sabiendo que el radio de la órbita es 3 veces el radio de Júpiter, calcular la masa de Júpiter. G: constante de gravitación universal

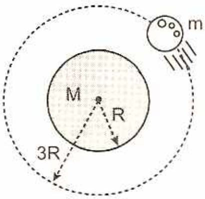
A) $\frac{\pi^2 R^3}{GT^2}$ B) $\frac{108\pi^2 R^3}{GT}$ C) $\frac{108\pi^2 R^3}{GT^2}$

D) $\frac{108\pi R^3}{GT^2}$ E) $\frac{108\pi R^3}{GT}$

63. La segunda velocidad cósmica para la Tierra es de 11,2 km/s. ¿Qué velocidad tendrá el proyectil muy lejos de la Tierra si fue lanzado radialmente de un polo geográfico con 12 km/s?
(R_{Tierra}= 6400 km)

A) 4 km/s B) 5,4 km/s C) 3,3 km/s
D) 12,3 km/s E) 8,3 km/s

64. Determine la expresión para la energía cinética del satélite cuya masa es m.



A) $G\frac{mM}{4R}$ B) $G\frac{mM}{8R}$ C) $G\frac{mM}{6R}$

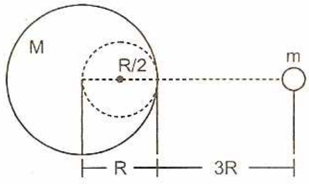
D) $G\frac{mM}{R}$ E) $\frac{3G}{4R}mM$

65. Los centros de dos planetas de masas m_1 y m_2 están distanciados d. ¿A qué distancia del centro del planeta m_1 se anularán las atracciones gravitatorias de los dos planetas?

A) $\frac{d\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}}$ B) $\frac{d\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}}$ C) $d\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$

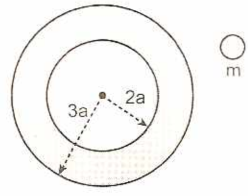
D) $\frac{d\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}$ E) $\frac{d\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}$

66. En la figura mostrada, se observan dos cuerpos que se atraen con una fuerza cuya magnitud es de 49 N. Si a la esfera M se le ha practicado una perforación esférica de radio R/2 como se muestra. ¿En cuánto disminuirá la magnitud de la fuerza de atracción sobre m?



A) 49 N B) 41 N C) 8 N
D) 7 N E) 14 N

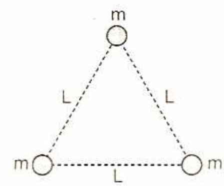
67. Se muestra una cascaron y una masa m, la cual es atraída con una fuerza de magnitud F. ¿Con qué fuerza sería atraída la masa m, si en vez del cascaron existiera una esfera solida de radio 3a?



A) $\frac{F}{27}$ B) $\frac{7}{27}F$ C) $\frac{19}{27}F$

D) $\frac{27}{7}F$ E) $\frac{27}{19}F$

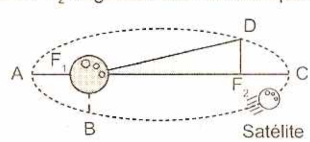
68. La figura muestra las posiciones relativas de tres masas puntuales de valor m, dos de ellas están fijas. Determinar la aceleración de la tercera en ese instante (G: constante de gravitación universal)



A) $\frac{Gm^2\sqrt{3}}{L^2}$ B) $\frac{Gm\sqrt{3}}{L}$ C) $\frac{Gm\sqrt{3}}{L^2}$

D) $\frac{Gm}{L^2}$ E) $\frac{Gm\sqrt[3]{2}}{L^2}$

69. Un satélite gira en torno al planeta P ubicado en el foco F_1; empleando 18 meses. Si el tiempo, para ir de A hacia B, es de 1 mes, y de C hasta D es de 3 meses. ¿Qué parte de toda la elipse es la región sombreada? F_2 segundo foco de la elipse.



A) 1/5 B) 1/4 C) 1/6
D) 1/8 E) 1/9

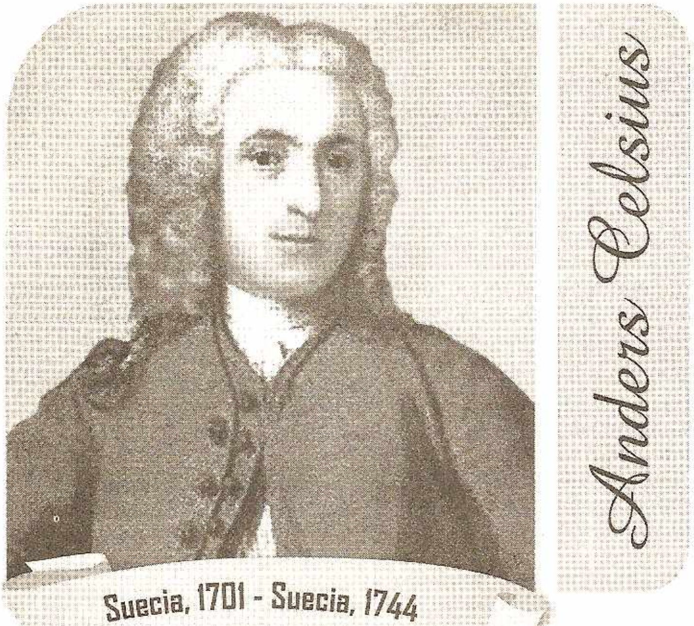
70. En un punto situado a una altura a de la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad tiene magnitud g_1 y a una profundidad a de la superficie terrestre tiene magnitud g_2. Hallar a, si: $8g_2 = 9g_1$.
(R: radio de la Tierra y suponer que la Tierra es esférica, maciza y homogénea).

A) 16R/25 B) R/4 C) R/3
D) 4R/9 E) R/2

71. Para crear una gravedad artificial en el tramo pasivo de vuelo, dos partes de una nave cósmica cuya relación de masas es de 1 a 2, fueron separadas una distancia R la una de la otra y las hicieron girar alrededor del centro de masa. Determine el período de giro de las partes de la nave, si la fuerza de

Calor

13 capítulo



Anders Celsius (Suecia, 27 de noviembre de 1701-Suecia, 1744) fue un físico y astrónomo sueco. Se desempeñó como profesor de Astronomía en la Universidad de Upsala (1730-1744) y supervisó la construcción del Observatorio de Upsala, del que fue nombrado director en 1740. En 1733 publicó una colección de 316 observaciones de auroras boreales y en 1736 participó en una expedición a Laponia para medir un arco de meridiano terrestre, lo cual confirmó la teoría de Isaac Newton de que la Tierra se achataba en los polos. En una memoria que presentó a la Academia de Ciencias de Suecia propuso su escala centígrada de temperaturas, aunque diferente a la conocida posteriormente como escala Celsius.

En 1742, Celsius propuso sustituir la escala del científico alemán Fahrenheit por otra cuyo manejo era más sencillo. Para ello creó la escala centesimal que iba de 0 a 100 grados e inventó el termómetro de mercurio. El punto correspondiente a la temperatura 0 coincidía con el punto de ebullición del agua, mientras que la temperatura a 100 °C equivalía a la temperatura de congelación del agua a nivel del mar. Esta escala centígrada de temperaturas fue propuesta en una memoria que presentó a la Academia de Ciencias sueca. El termómetro de Celsius fue conocido durante años como el «termómetro sueco»por la comunidad científica, y tan solo se popularizó el nombre

TEMPERATURA

Las moléculas de los cuerpos están en continuo estado de agitación lo que hace que posean cierta energía. Esto hace que cada cuerpo o agregado de moléculas posea cierta energía interna que es la suma de las energías cinética y potencial de cada una de las moléculas.

La temperatura de cuerpo es una magnitud proporcional a la energía media de las moléculas que lo constituyen.

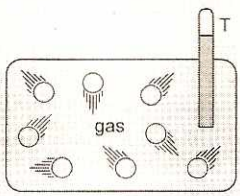
En el caso de un gas ideal (moléculas monoatómicas), la energía cinética promedio de cada molécula es directamente proporcional a la temperatura absoluta.

$$\boxed{E_C = \frac{3}{2}kT} \qquad ...(13.1)$$

$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \dfrac{joule}{Kelvin}$ (constante de Boltzmann)

T: temperatura absoluta (en Kelvin)

Temperatura absoluta:



"La energía cinética de cada molécula es directamente proporcional a la temperatura absoluta del gas".

Ludwing Boltzmann (1844-1906)

Físico austriaco, uno de los fundadores de la teoría cinético-molecular.

Contribuyó mucho al desarrollo y popularización de la teoría de Maxwell sobre el campo electromagnético.

Cero absoluto de temperatura

La temperatura determinada en la fórmula (13.1) es evidente que no puede ser negativa, ya que todas las magnitudes (EC y k) que aparecen son positivas.

Por consiguiente, el valor mínimo posible es T = 0.

Esta es la temperatura más baja de la naturaleza.

Es aquella temperatura, al cual la energía cinética promedio de cada molécula es igual a cero.

ESCALAS TERMOMÉTRICAS

Escala absoluta de temperaturas

El científico inglés Lord Kelvin introdujo esta escala. La temperatura cero corresponde al cero absoluto y cada unidad de esta escala es igual a un grado de la escala centígrada. También se le conoce como escala Kelvin.

El valor de 273 le corresponde a la temperatura de congelación del agua a la presión normal.

$$\boxed{K = C + 273} \qquad ...(13.2)$$

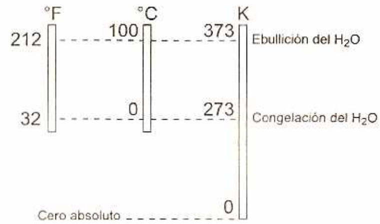
Igual variación de temperatura:

$$\boxed{\Delta K = \Delta C} \qquad ...(13.3)$$

Escala centígrada o Celsius

Se le asigna el valor de cero (0) a la temperatura de fusión del agua a la presión normal y el valor de 100 a la temperatura de ebullición del agua. las temperaturas inferiores a la de fusión del agua resultan negativas en esta escala.

K : Escala absoluta o Kelvin
°C : Escala centígrada o Celsius
°F : Escala Fahrenheit



Fusión y ebullición

Llamamos fusión al proceso mediante el cual un sólido se transforma en líquido, y denominamos ebullición a aquel proceso en donde un líquido se transforma en vapor, a determinada condición de presión y temperatura constante.

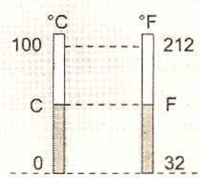
Escala Fahrenheit

Se le da el valor de 32 a la temperatura de fusión del agua y el valor de 212 a la ebullición del agua, a la presión normal.

Designado por C una temperatura medida en grados centígrados y por F la misma temperatura en grados Fahrenheit, entre dichos valores numéricos existe la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}} \qquad ...(13.4)$$

Teorema de Tales



Se cumple la siguiente proporción de segmentos:

$$\frac{C-0}{100-0}=\frac{F-32}{212-32}$$

$$\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180} \Rightarrow \frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$$

Temperaturas notables en diversos fenómenos

1.	Explosión de un alambre metálico por descarga eléctrica	10 000 °C
2.	Fotosfera solar	5700 °C
3.	Arco voltaico	4800 °C
4.	Fusión del wolframio	3400 °C
5.	Filamento de una lámpara eléctrica	2500 °C
6.	Fusión del plomo	327 °C
7.	Ebullición del agua	100 °C
8.	Fusión del agua	0 °C
9.	Condensación del hidrógeno	20 K
10.	Condensación del helio	4 K
11.	Evaporación rápida del helio	0,71 K
12.	Superconductividad de los metales	0,50 K

Color de la luz emitida por un metal calentado a diversas temperaturas:

Temperatura (°C)	Color
500	rojo (muy tenue)
700	rojo (intenso)
900	naranja
1000	amarillo
arriba de 1100	blanco

Variación de la temperatura. La escala Celsius y la escala Kelvin experimentan igual variación de temperatura: $\Delta K = \Delta C$

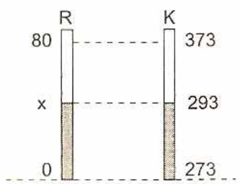
La escala Fahrenheit y la escala Celsius experimentan variaciones que cumplen la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{\Delta C}{5}=\frac{\Delta F}{9}} \qquad ...(13.5)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si en la escala Réaumur la temperatura de ebullición del agua es de 80° y la de fusión del hielo es de 0°, determinar la lectura en esta escala cuando la temperatura en la escala Kelvin es de 293°.

Resolución:



Relación de Tales:

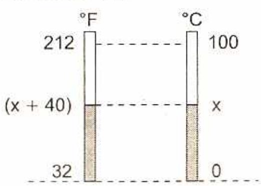
$$\frac{x}{80}=\frac{20}{100}$$

$$\therefore\ x = 16$$

Cuando la escala Kelvin marca 293°, la escala Réaumur estará marcando 16°.

2. Si la lectura de una temperatura en grados Fahrenheit excede en 40° a la lectura en grados Celsius, determinar la temperatura en Kelvin.

Resolución:



Relación de Tales:

$$\frac{(x+40)-32}{180}=\frac{x-0}{100}$$

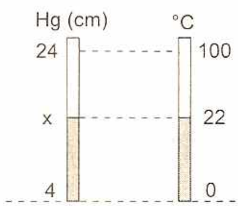
$$\Rightarrow x = 10$$

Luego, la temperatura en la escala Celsius es 10 °C y la lectura en la escala Kelvin será:

$K = 273 + C \qquad \therefore\ K = 283$

3. La longitud de la columna de mercurio de un termómetro es 4 cm cuando el termómetro se sumerge en agua con hielo, y de 24 cm cuando el termómetro se sumerge en vapor de agua hirviendo a condiciones normales. ¿Qué longitud tendrá en una habitación a 22 °C?

Resolución:



Relación de Tales:

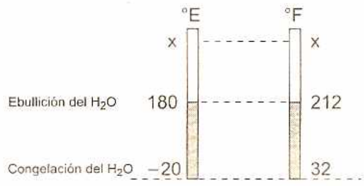
$$\frac{x-4}{20}=\frac{22}{100}$$

$$\therefore\ x = 8{,}4\ \text{cm}$$

La longitud de la columna de mercurio es: 8,4 cm.

4. Un termómetro con escala arbitraria tiene como punto de fusión del hielo −20° como punto de ebullición del agua +180°. ¿A qué temperatura en grados Fahrenheit ambos termómetros indicarán lo mismo?

Resolución:

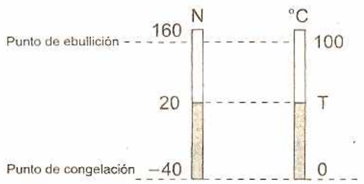


Relación de Tales:

$$\frac{x-180}{200}=\frac{x-212}{180} \qquad \therefore\ x=500$$

Ambos termómetros indican lo mismo cuando la temperatura es 500° F.

5. Un termómetro con escala arbitraria, tiene como punto de fusión del hielo –40° y como punto de ebullición del agua 160°, cuando en este termómetro se lee 20°, ¿cuánto vale la temperatura en la escala centígrada?



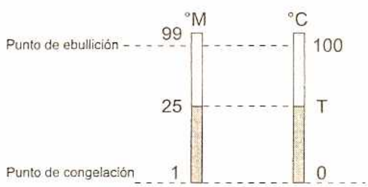
Resolución:

De la relación de Tales:

$$\frac{160+40}{20+40}=\frac{100}{T} \qquad \therefore\ T=30\ °C$$

6. Se tiene un termómetro mal calibrado, señala +1° a la temperatura de congelación del agua y 99° a la temperatura de ebullición del agua. Con el termómetro mal calibrado se mide la temperatura de cierta sustancia dando como lectura 25°, ¿cuál es la verdadera temperatura en grados Celsius de la sustancia?

Resolución:

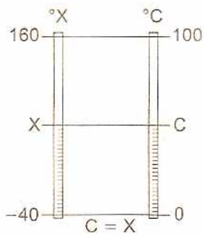


De la relación de Tales:

$$\frac{25-1}{99-1}=\frac{T-0}{100-0} \Rightarrow \frac{24}{98}=\frac{T}{100} \qquad \therefore\ T=24{,}49\ °C$$

7. Un termómetro con escala arbitraria °X tiene como punto de ebullición del agua 160 °X y como punto de fusión del hielo –40 °X. ¿A qué temperatura (en K) ambos termómetros indicarán la misma lectura?

Resolución:



Relación de Tales:

$$\frac{x-(-40)}{160-(-40)}=\frac{C-0}{100}$$

$$\frac{x+40}{200}=\frac{C}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{x+40}{200}=\frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow (x+40)(100)=200x$$

$$\Rightarrow x+40=2x \Rightarrow x=40$$

Se sabe: $K=C+273$

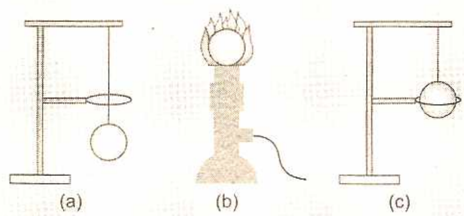
$K=40+273 \qquad \therefore\ K=313$

DILATACIÓN

Un hecho muy conocido es que las dimensiones de los cuerpos aumentan cuando se eleva su temperatura. Salvo algunas excepciones, todos los cuerpos independientemente de que sean sólidos, líquidos o gaseosos, se dilatan cuando aumentan su temperatura.

Experimento

La figura muestra un experimento sencillo que ilustra la dilatación de un sólido: a la temperatura ambiente, la esfera metálica A puede pasar con pequeña holgura por el anillo B. Al calentar únicamente la esfera, se halla que ya no pasa por el anillo. Debido a la elevación de su temperatura, la esfera se dilató. Si se espera a que su temperatura vuelva a su valor original, la esfera se contraerá y volverá a pasar por el anillo.



¿Por qué se dilatan los sólidos?

Si analizamos la estructura interna de un sólido, podremos entender por qué se produce la dilatación. Los átomos que constituyen la sustancia sólida se encuentran distribuidos ordenadamente, lo cual origina una estructura denominada red cristalina del sólido. La unión de tales átomos se logra por medio de fuerzas eléctricas que actúan como si hubiera pequeños resortes que unen un átomo con otro (figura 13.1). Esos átomos están en constante vibración respecto de una posición media de equilibrio.

Cuando aumenta la temperatura del sólido se produce un incremento en la agitación de sus átomos, haciéndolos que vibren y se alejen de la posición de equilibrio.

Por otra parte, la fuerza que se manifiesta entre los átomos actúa como si el resorte fuera más resistente a la compresión que a la tensión. En consecuencia, la distancia media entre los átomos se vuelve mayor (figura 13.1) ocasionando la dilatación del sólido.

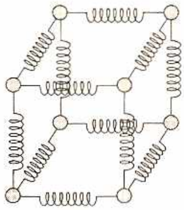
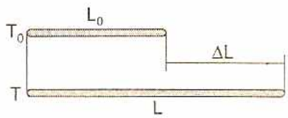


Fig. (13.1)

DILATACIÓN LINEAL

Experimentalmente se demuestra que el incremento de longitud es directamente proporcional a su longitud inicial (L_0) y a la variación de la temperatura (ΔT).



$$\boxed{\Delta L = \alpha\, L_0 \Delta T} \qquad ...(13.6)$$

$$\boxed{L - L_0 = \alpha\, L_0\, \Delta T} \qquad ...(13.7)$$

$$\boxed{L = L_0\,(1 + \alpha \Delta T)} \qquad ...(13.8)$$

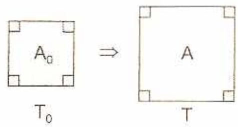
α: coeficiente de dilatación lineal, depende de las propiedades térmicas del material.

Coeficiente de dilatación lineal
Tabla 13.1

Sustancia	α (°C^{-1})
Aluminio	$2{,}3 \times 10^{-5}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-5}$
Vidrio común	$8{,}5 \times 10^{-6}$
Zinc	$2{,}6 \times 10^{-5}$
Vidrio pyrex	$3{,}2 \times 10^{-6}$
Wolframio	$4{,}5 \times 10^{-6}$
Plomo	$2{,}9 \times 10^{-5}$
Acero	$1{,}2 \times 10^{-5}$
Diamante	$0{,}9 \times 10^{-6}$

DILATACIÓN SUPERFICIAL

Experimentalmente se demuestra que el incremento de área es directamente proporcional a su área inicial (A_0) y a la variación de la temperatura (ΔT).



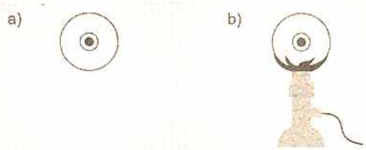
$$\boxed{\Delta A = \beta\, A_0\, \Delta T} \qquad ...(13.9)$$

$$\boxed{A - A_0 = \beta\, A_0\, \Delta T} \qquad ...(13.10)$$

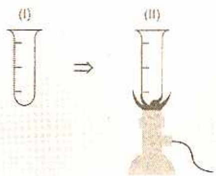
$$\boxed{A = A_0(1 + \beta\, \Delta T)} \qquad ...(13.11)$$

β: Coeficiente de la dilatación superficial, depende de las propiedades térmicas del material.
Para un mismo material se cumple que: $\beta = 2\alpha$

Dilatación del orificio
El orificio de un disco también se dilata cuando se calienta la placa. De la misma manera, el volumen interno de un recipiente aumenta cuando dicho recipiente se dilata.

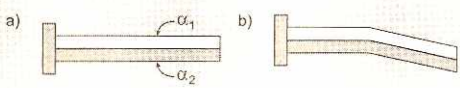


Dilatación del recipiente
Los espacios vacíos se dilatan como si estuvieran llenos del material que los rodea. Lo mismo le sucede al interior de las vasijas cuando las calentamos.



Listones bimetálicos
Una buena cantidad de dispositivos que funcionan automáticamente lo hacen utilizando un listón extendido o enrollado, compuesto por dos metales de diferente coeficiente de dilatación α, de manera que al experimentar un cambio en su temperatura se doble, se enrolle más o se desenrolle. Esto se explica por la diferente dilatación que cada componente realiza. En la figura, presentamos dos listones de igual tamaño en posición horizontal a la temperatura T_0, si aumentamos la temperatura se dobla:

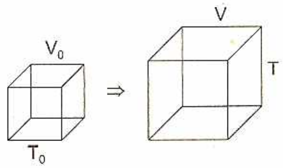
$$\alpha_1 > \alpha_2$$



Si, $\alpha_1 < \alpha_2$, los listones se doblan en sentido opuesto (hacia arriba).

DILATACIÓN VOLUMÉTRICA

Es indudable que al calentar o enfriar un cuerpo, todas sus dimensiones: largo, ancho y altura experimentan cambios. Experimentalmente se demuestra que el incremento en su volumen es directamente proporcional a su volumen inicial (V_0) y al incremento de la temperatura (ΔT).



$$\boxed{\Delta V = \gamma V_0 \Delta T} \quad ...(13.12)$$

$$\boxed{V - V_0 = \gamma V_0 \Delta T} \quad ...(13.13)$$

$$\boxed{V = V_0(1 + \gamma \Delta T)} \quad ...(13.14)$$

γ: coeficiente de dilatación volumétrico, depende de las propiedades térmicas del material.

Para un mismo material se cumple que: $\gamma = 3\alpha$.

VARIACIÓN DE LA DENSIDAD CON LA TEMPERATURA

Un incremento en la temperatura de un cuerpo, experimenta un incremento de su volumen, por consiguiente su densidad disminuye. La masa de la sustancia se mantiene constante.

Sea, D_0, la densidad inicial a la temperatura T_0:

$$\boxed{D_0 = \frac{m}{V_0}} \quad ...(13.15)$$

La densidad final D a la temperatura $T_0 + \Delta T$:

$$\boxed{D = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma\Delta T)}} \quad ....(13.16)$$

$$\boxed{D = \frac{D_0}{(1 + \gamma\Delta T)}} \quad ...(13.17)$$

Por ejemplo, la densidad de cierta sustancia es 3,6 g/cm^3 a 10 °C. ¿Cuál será la densidad de esta a 110 °C, si consideramos el coeficiente de dilatación volumétrica, constante, $\gamma = 5 \times 10^{-4}$ °C^{-1}?

Aplicamos la relación (13.17):

$$D = \frac{3,6}{(1 + 5\times10^{-4}\times 100)^2}, \text{ donde } \Delta T = 100\ °C$$

$$\Rightarrow D = \frac{3,6}{1,05} = 3,43 \text{ g/cm}^3$$

Por consiguiente, cuando la temperatura aumenta en 100 °C, la densidad disminuye en 0,17 g/cm^3.

RELACIÓN DE COEFICIENTE DE DILATACIÓN

Los coeficientes de dilatación lineal, superficial y volumétrico, de una misma sustancia se encuentra en la siguiente relación: $\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3}$

Donde, α , β y γ tienen unidades inversas a la temperatura: °C^{-1} o K^{-1}.

DILATACIÓN DE LOS LÍQUIDOS

Los líquidos se dilatan obedeciendo las mismas leyes que estudiamos para los sólidos. Únicamente debemos recordar que como los líquidos no tienen forma propia, sino que toman la forma del recipiente que los contiene, el estudio de su dilatación lineal y superficial no es importante. Lo que interesa en general, es el conocimiento de su dilatación volumétrica.

Coeficientes de los líquidos

Sustancia	γ **(°C^{-1})**
Aceite	6×10^{-4}
Alcohol	$7,5 \times 10^{-4}$
Agua	$1,5 \times 10^{-4}$
Gasolina	10×10^{-4}
Glicerina	5×10^{-4}
Queroseno	10×10^{-4}
Mercurio	$1,8 \times 10^{-4}$
Petróleo	10×10^{-4}

COMPORTAMIENTO ANÓMALO DEL AGUA

Como vimos, en los sólidos y líquidos, en general, aumenta su volumen cuando elevamos su temperatura. Pero algunas sustancias, en determinados intervalos de temperatura, presentan un comportamiento inverso: es decir, disminuyen de volumen cuando su temperatura se eleva.

El agua, por ejemplo, es una de las sustancias que presentan esta irregularidad en su dilatación. Cuando la temperatura del agua aumenta entre 0 y 4 °C, su volumen disminuye. Al hacer que su temperatura se eleve a más de 4 °C, el agua se dilata normalmente. De otro modo, la densidad del agua es máxima a 4 °C. (figura 13.2). Por este motivo en países donde el invierno es muy riguroso, los lagos y ríos se congelan únicamente en la superficie, mientras que en el fondo queda agua a 4 °C. Este hecho es fundamental para la preservación de la fauna y de la flora de dichos lugares. Si el agua no presentara esta anomalía en su dilatación, los ríos y los lagos se congelarían por completo ocasionando daños irreparables a las plantas y los animales acuáticos.

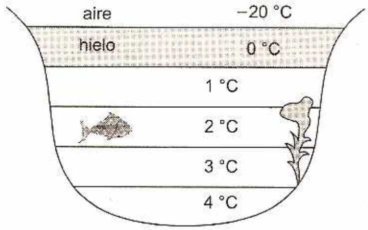
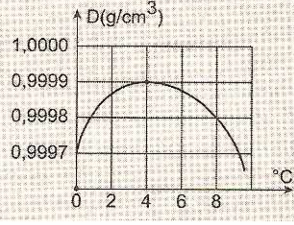


Fig. 13.2

Gráfica densidad versus temperatura

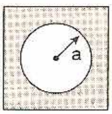
"La densidad del agua tiene su máximo valor a la temperatura de 4 °C".



PROBLEMAS RESUELTOS

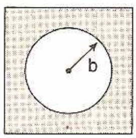
1. Se tiene una lámina metálica de coeficiente de dilatación superficial $2{,}02 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$, al cual se la ha sustraído un círculo de radio 1 cm.
Se pretende hacer pasar por el orificio una esfera de radio 1,02 cm. ¿En cuánto se debe incrementar la temperatura de la lámina metálica, tal que la esfera pueda pasar por el orificio?

Resolución:



T_0

Fig. (1)



T_f

Fig. (2)

Experimentalmente se demuestra que el espacio vacío, el orificio, se dilata como si fuera del mismo material de la lámina metálica:

a : radio del orificio a la temperatura T_0, inicial = 1,0 cm
b : radio del orificio a la temperatura T_f, final = 1,02 cm
β : coeficiente de dilatación superficial del metal
$\beta = 2{,}02 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

La variación superficial del orificio, es directamente proporcional al área inicial y al cambio de temperatura $(T_f - T_0)$:

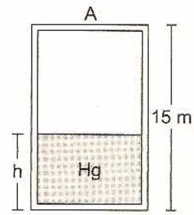
$\Delta \text{Área} = \beta A_0 \Delta T \Rightarrow \pi(b^2 - a^2) = \beta \pi a^2 \Delta T$

$\Rightarrow (b + a)(b - a) = \beta a^2 \Delta T \qquad ...(I)$

Reemplazando datos en (I): T = 200 °C

2. Determine la altura de mercurio que debe ser colocado en un tubo de vidrio de 15 cm de altura para que el volumen dentro del tubo sobre el mercurio sea el mismo a cualquier temperatura. Coeficiente de dilatación cúbica del vidrio $6 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$ y el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio $18 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$.

Resolución:



Sea, A el área de la base del tubo de vidrio. El volumen vacío sobre el mercurio se mantiene constante, si el incremento de volumen del mercurio de altura "h" es igual al incremento de volumen del tubo de vidrio de altura 15 cm.

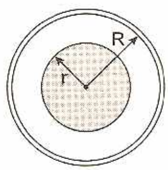
$$\Delta V_{(mercurio)} = \Delta V_{(tubo)} \Rightarrow \gamma_{Hg} A h \Delta T = \gamma_V (15A) \Delta T$$

$$h = \frac{\gamma_V}{\gamma_{Hg}}(15)\ \text{cm} \Rightarrow h = \frac{6}{18} \times 15\ \text{cm} \Rightarrow h = 5\ \text{cm}$$

Luego, la altura de la columna de mercurio es 5 cm.

3. Se tiene una esfera hueca de radio R y en su interior otra esfera concéntrica de radio "r". Hallar la relación entre sus radios para que el volumen de la parte intermedia no varíe al incrementarse la temperatura del sistema. El coeficiente de dilatación lineal de la esfera, es ocho veces el coeficiente de dilatación lineal de la esfera hueca, $\alpha_r = 8\alpha_R$.

Resolución:



El volumen de la parte intermedia se mantiene constante, si el incremento de volumen de la esfera y de la esfera hueca tiene el mismo valor, para el mismo incremento de temperatura.

$$\Delta V_{(esfera)} = \Delta V_{(esfera\ hueca)}$$

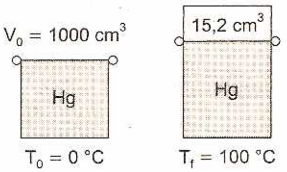
$$3\alpha_r\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)\Delta T = 3\alpha_R\left(\frac{4\pi}{3}\right)R^3\Delta T$$

$$\alpha_r r^3 = \alpha_R R^3 \Rightarrow 8r^3 = R^3 \Rightarrow 2r = R$$

Luego, el radio de la esfera hueca es el doble del radio de la esfera pequeña.

4. Un frasco de vidrio cuyo volumen es exactamente 1000 cm^3 a 0 °C, se llena completamente de mercurio a esta temperatura. Se eleva la temperatura del sistema hasta 100 °C y se observa que se derrama 15,2 cm^3 del fluido. Si el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es $18{,}2 \times 10^{-5}$ $°C^{-1}$, determine el coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

Resolución:



El volumen final del mercurio, es igual al volumen final del recipiente de vidrio, más el volumen derramado.

$$V_{f(Hg)} = V_{derramado} + V_{f(vidrio)}$$

$V_0 \Delta T \gamma_{Hg} = V_{derramado} + V_0 \Delta T(3\alpha_v)$

$(1000)(100)(18{,}2 \times 10^{-5}) = 15{,}2 + (1000)(100)(3\alpha_v)$

$\Rightarrow \alpha_v = 10^{-5}$ $°C^{-1}$

5. Una lámina delgada de latón a 20 °C tiene la misma superficie que una lámina delgada de acero a 10 °C. Determinar la temperatura común a la que tendrán la misma superficie ambas láminas.

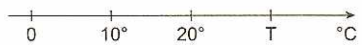
$$\alpha_{latón} = 3\alpha_{acero}$$

Resolución:

$A_{f(latón)} = A_{f(acero)} \Rightarrow \alpha_{latón} A(T - 20) = \alpha_{acero} A(T - 10)$

$\Rightarrow 3\alpha_{acero}(T - 20) = \alpha_{acero}(T - 10)$

$3(T - 20) = T - 10 \Rightarrow T = 25$ °C

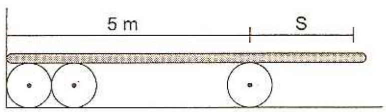


Luego, a la temperatura T = 25 °C, ambas láminas de latón y acero tendrán la misma superficie.

6. Una varilla de cobre de 5 m de longitud fijo por un extremo y apoyada sobre rodillos de 1 cm de diámetro, se calienta la varilla desde 20 a 220 °C lo cual hace girar los rodillos. ¿Cuántos radianes gira el último rodillo contando a partir del extremo fijo?

$\alpha_{Cu} = 17 \times 10^{-6}$ $°C^{-1}$

Resolución:



El desplazamiento lineal que experimenta el último rodillo es igual al incremento de longitud de la varilla al dilatarse.

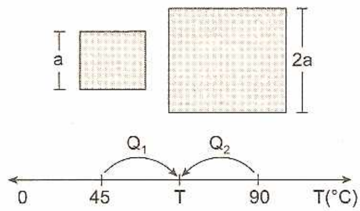
$S = \alpha L_0 \Delta T \Rightarrow \theta R = \alpha L_0 \Delta T$

Reemplazando los datos en el SI:

$\theta(0{,}5 \times 10^{-2}) = (17 \times 10^{-6})(5)(200) \Rightarrow \theta = 3{,}4$ rad

7. Se tienen dos cubos del mismo material y de aristas "a" y 2a, a las temperaturas de 45 y 90 °C respectivamente. Dos de sus caras se ponen en contacto por un cierto tiempo hasta llegar al equilibrio térmico. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio? No hay cambio de fase durante el proceso.

Resolución:



Principio de conservación de la energía: $Q_1 = Q_2$

$m_1 Ce \Delta T_1 = m_2 Ce \Delta T_2$

$D(a^3)Ce\Delta T_1 = D(8a^3)Ce\Delta T_2 \Rightarrow (T - 45) = 8(90 - T)$

$T = 85$ °C

Luego, la temperatura de equilibrio es 85 °C.

8. Una placa metálica de coeficiente de dilatación lineal 10^{-4} $°C^{-1}$ y masa 50 gramos, cuando recibe 200 calorías de energía calorífica, su área aumenta en el 1%. Hallar el calor específico de la placa.

Resolución:

El incremento de área es directamente proporcional al área inicial A_0 y a la variación de la temperatura:

$\Delta A = \beta A_0 \Delta T$

$\dfrac{\Delta A}{A_0} = \beta \Delta T \Rightarrow 0{,}01 = (2 \times 10^{-4})\Delta T \Rightarrow \Delta T = 50$ °C

Cálculo del calor específico:

$Ce = \dfrac{Q}{m\Delta T} \Rightarrow Ce = \dfrac{200}{(50)(50)}$

$\therefore Ce = 0{,}08 \dfrac{cal}{g°C}$

9. Una regla metálica de coeficiente de dilatación lineal 5×10^{-4} $°C^{-1}$, realiza mediciones exactas a 10 °C. Se efectúa una medición a la temperatura de 30 °C, obteniéndose una lectura de 100 centímetros dilatados. Determinar la longitud correcta de la medida realizada.

Resolución:

Sea: 1 cm = 1 centímetro correcto

1 cm' = 1 cm (dilatado) $\Rightarrow L_f = L_0(1 + \alpha\Delta T)$

1 cm' = $(1)[1 + (5)(10^{-4} \times 20)] = 1{,}01$ cm ...(1)

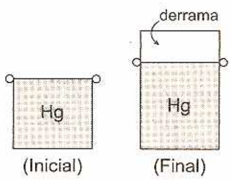
La lectura que se obtiene es: X = 100 cm' ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $X = 101$ cm
La longitud correcta de la medida realizada es 101 cm.

10. Una vasija de vidrio contiene 1000 cm^3 de mercurio lleno hasta el borde, si se aumenta la temperatura en 100 °C y el recipiente alcanza un volumen de 1010 cm^3, ¿cuánto de mercurio se derrama? $\gamma_{Hg} = 1{,}8 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$.

Resolución:

Cálculo del volumen final del mercurio:



$$V_f = V_0(1 + \gamma\Delta T)$$

$$V_f = 10^3[1 + 1{,}8 \times 10^{-4}(10^2)]$$

$$\therefore\ V_f = 1018\ cm^3$$

Entonces, se derrama 8 cm^3 de mercurio.

11. Un recipiente de vidrio de 1000 cm^3 de capacidad completamente lleno de mercurio es calentado desde 0 hasta 100 °C. Determinar el volumen del mercurio que se derramará. Coeficiente de dilatación cúbica del mercurio: $18 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$. Coeficiente de dilatación cúbica del vidrio: $3 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$.

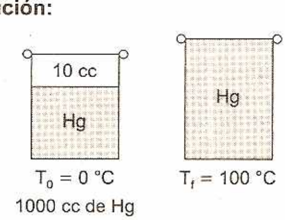
Resolución:

El volumen de mercurio que se derrama, es igual a la diferencia de volúmenes finales del mercurio y del vidrio:

$V_{derrama} = V_{f(Hg)} - V_{f(vidrio)} = V_0\Delta T(\gamma_{Hg} - \gamma_{vidrio})$
$V_{derrama} = (1000 \times 100)(18 - 3)10^{-5} = 15\ cm^3$
Luego, se derrama 15 cm^3 de mercurio.

12. Un frasco de vidrio de capacidad 1010 cm^3, contiene 1000 cm^3 de mercurio (Hg) cuyo coeficiente de dilatación cúbica es $18{,}2 \times 10^{-5}$ °C a la temperatura de 0 °C. Se calienta el sistema hasta alcanzar una temperatura de 100 °C, observándose que el frasco de vidrio se encuentra completamente lleno de mercurio. Calcular el coeficiente de dilatación cúbica del vidrio.

Resolución:



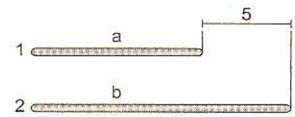
La variación del volumen del mercurio es igual a la variación del volumen del vidrio (frasco), más 10 cm^3:

$\Delta V_{(Hg)} = \Delta V_{(vidrio)} + 10\ cm^3$
$\gamma_{(Hg)}V_{0(Hg)}\Delta T = \gamma_{(v)}V_{0(vidrio)}\Delta T + 10\ cm^3$ ...(1)

Reemplazando datos en (1):
$\gamma_{(vidrio)} = 8{,}11 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

13. Determinar las longitudes de dos varillas a la temperatura del ambiente, de coeficientes de dilatación lineal:
$\alpha_1 = 18 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ y $\alpha_2 = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$
de tal modo que la diferencia de sus longitudes sea igual a 5 cm a cualquier temperatura.

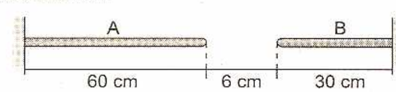
Resolución:



De la condición: $b - a = 5$ cm ...(1)
La variación de la longitud por cada unidad de temperatura, para cada varilla debe tener el mismo valor:
$\Delta L_{(1)} = \Delta L_{(2)}$
$\alpha_1 a\Delta T = \alpha_2 b\Delta T$ ...(2)
Reemplazando datos en (2): $3a = 2b$ ...(3)
Resolviendo las ecuaciones (1) y (3):
$\therefore\ a = 10$ cm $\wedge$ $b = 15$ cm

14. En la figura mostrada, en cuántos grados centígrados se debe incrementar la temperatura de las barras A y B para que sus extremos se junten. Las barras están empotradas a paredes impermeables al calor y además:
$\alpha_A = 15 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$ $\wedge$ $\alpha_B = 1 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Resolución:



De la condición del problema: $\Delta L_{(A)} + \Delta L_{(B)} = 6$ cm
$\alpha_A L_1\Delta T + \alpha_B L_2\Delta T = 6$ cm
$(15 \times 10^{-4})(60)\Delta T + (10^{-3})(30)\Delta T = 6$
$\therefore\ \Delta T = 50$ °C

15. La densidad de cierto material a 0 °C es de 28 g/cm^3. Si su coeficiente de dilatación lineal es de 0,45 $°C^{-1}$, ¿cuál es la densidad de ese material a 20 °C?

Resolución:

Densidad inicial: $D_0 = \dfrac{m}{V_0}$ ...(1)

Densidad final: $D_f = \dfrac{m}{V_f} = \dfrac{m}{V_0(1 + \gamma\Delta T)}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$D_f = \dfrac{D_0}{(1 + \gamma\Delta T)}$ ...(3)

Reemplazando datos en (3): $D_f = 1{,}0\ g/cm^3$

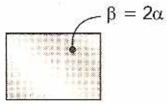
16. A la temperatura de 0 °C, una hoja de zinc tiene las siguientes dimensiones: 120 cm de largo por 70 cm

de ancho. Calcular el aumento de su área (en cm^2) al calentar hasta 100 °C. ($\alpha_{Zn} = 2{,}9 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$)

Resolución:

Sea: $A_i = 120 \times 70\ cm^2$ (zinc); $T_0 = 0\ °C$; $T_f = 100\ °C$

$\alpha_{zinc} = 2{,}9 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$



Los reemplazamos en: $\Delta A = BA_0\Delta T$

$\Delta A = 2(2{,}9 \times 10^{-5})(120 \times 70)(100)$

$\Delta A = 48\,720 \times 10^{-3}\ cm^2 \quad \therefore\ \Delta A = 48{,}72\ cm^2$

17. Se midieron 500 m de alambre de aluminio y la misma longitud de alambre de acero a 0 °C. Calcular la diferencia entre las longitudes de los alambres (en m) a 100 °C.
($\alpha_{Al} = 2{,}3 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$; $\alpha_{acero} = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$)

Resolución:

Sea: $l_0 = 500$ m (acero); $\Delta T = 100\ °C$

$l_0 = 500$ m (Al); $\alpha_{Al} = 2{,}3 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$; $\Delta T = 100\ °C$

Se tendrá:

I. $\Delta L_{Al} = \alpha_{Al}\, l_0 \Delta T$

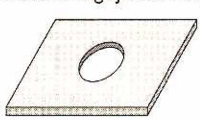
$\Delta L_{Al} = (2{,}3 \times 10^{-5})(500)(100) = 1{,}15$ m

II. $\Delta L_{acero} = \alpha_{acero}\, l_0 \Delta T$

$\Delta L_{acero} = (1{,}2 \times 10^{-5})(500)(100) = 0{,}6$ m

Entonces: $\Delta L = 1{,}15 - 0{,}6 = 0{,}55$ m

18. El área hueca de la figura es 40 cm^2, si la placa se calienta desde 20 °C hasta 120 °C y el coeficiente de dilatación lineal de la placa es $\alpha = 2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$. Hallar la nueva área del agujero de la placa (en cm^2).



Resolución:

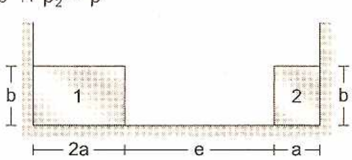
Sea: $A_0 = 40\ cm^2$; $\Delta T = 100\ °C$; $\alpha = 2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

La dilatación superficial será:

$A_f = A_0(1 + \beta\Delta T) \Rightarrow A_f = 40[1 + 2(2 \times 10^{-6})100]$

$A_f = 40(1 + 4 \times 10^{-4}) \quad \therefore\ A_f = 40{,}016\ cm^2$

19. Dos placas del mismo material se ubican tal como se muestran en la figura; inicialmente se encuentra a la temperatura T_B. ¿Cuál debe ser la temperatura final T_f, para que ambas tengan contado, asumiendo que solo se pueden dilatar horizontalmente?
$\beta_1 = 2\beta \wedge \beta_2 = \beta$



Resolución:

Sean: $\beta_1 = \beta \quad \wedge \quad \beta_2 = \dfrac{\beta}{2}$; $\alpha_1 = \dfrac{\beta}{2} \quad \wedge \quad \alpha_2 = \dfrac{\beta}{4}$

Entonces:

$\Delta l_1 = \alpha_1 l_{0(1)}\Delta T = \dfrac{\beta}{2}(2a)(\Delta T)$

$\Delta l_2 = \alpha_2 l_{0(2)}\Delta T = \dfrac{\beta}{4}(a)(\Delta T)$

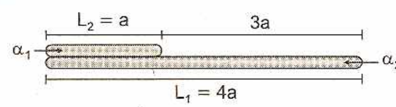
$\Delta l_1 + \Delta l_2 = e \Rightarrow \beta a\Delta T + \dfrac{1}{4}\beta a\Delta T = e$

$\dfrac{5}{4}\beta(a)(\Delta T) = e \Rightarrow \Delta T = \dfrac{4e}{5a\beta}$

$T_f - T_0 = \dfrac{4e}{5a\beta} \Rightarrow T_f = \dfrac{e}{5a\beta} + T_0$

20. Dos barras metálicas yuxtapuestas y soldadas por uno de sus extremos tienen la misma diferencia de longitud a cualquier temperatura.
Se sabe que $\alpha_1 = 1{,}5 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$ y $\dfrac{L_1}{L_2} = 4$.
Hallar α_2.

Resolución:



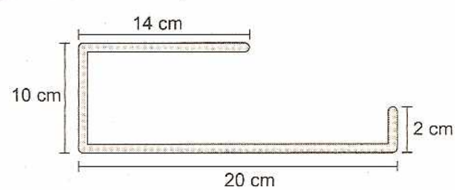
Por dato: $\Delta l_1 = \Delta l_2$ (Igual diferencia de longitud)

$\alpha_1 l_1 \Delta T = \alpha_2 l_2 \Delta T \Rightarrow \alpha_1 4a = \alpha_2 a$

$\alpha_2 = 4\alpha_1 = 4(1{,}5 \times 10^{-5}\ °C^{-1})$

$\therefore\ \alpha_2 = 6 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

21. La figura muestra un alambre doblado. Si aumentamos la temperatura en 100 °C, hallar la nueva separación entre sus extremos (en cm) ($\alpha = 15 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$)



Resolución:

Analizando en los ejes (x; y):

eje X: $L_{0(x)} = 20 - 14 = 6$ cm

eje Y: $L_{0(y)} = 10 - 2 = 8$ cm

$\Rightarrow d = \sqrt{L^2_{0(x)} + L^2_{0(y)}} = 10$ cm

$\Delta T = 100\ °C$

$d_f = d_0(1 + \alpha\Delta T)$

$\Rightarrow d_f = 10(1 + 15 \times 10^{-6} \times 100)$

$d_f = 10(1{,}0015) \quad \therefore\ d_f = 10{,}015$ cm

22. Si la densidad del hierro a 20 °C es $7{,}8 \times 10^3\ kg/m^3$, el coeficiente de dilatación lineal del fierro es $\alpha_{Fe} = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$. Hallar la densidad del fierro (en kg/m^3) a 200 °C

Resolución:

Sea: $D_0 = 7{,}8 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$; $\alpha_{Fe} = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

$\Delta T = 200 - 20 = 180\ °C$; $\gamma = 3\alpha = 3{,}6 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

Reemplazando en: $\rho_f = \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma\Delta T}$

Entonces: $\rho_f = \dfrac{7{,}8 \times 10^{-3}}{1 + 3{,}6 \times 10^{-5} \times 180} = \dfrac{7{,}8 \times 10^3}{1{,}00648}$

$\Rightarrow\ \rho_f = 7{,}74978 \times 10^3 = 7749{,}78\ \text{kgm}^{-3}$

$\therefore\ \rho_f = 7750\ \text{kgm}^{-3}$

23. El mercurio a 0 °C tiene una densidad igual a 13 600 kg/m^3 y un coeficiente de dilatación cúbica de $1{,}82 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$. Calcular la densidad del mercurio (en kg/m^3) a la temperatura de 20 °C.

Resolución:

$T_0 = 0\ °C$; $\rho_0 = 13\,600\ \text{kg/m}^3$; $\gamma_{Hg} = 1{,}82 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$;

$\Delta T = 2\ °C$

$$\rho_{f(Hg)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma\Delta T} = \frac{13\,600}{1 + 1{,}82 \times 10^{-4} \times 20}$$

$$\rho_{f(Hg)} = \frac{13\,600}{1{,}00364} = 13\,550{,}67\ \text{kg/m}^3$$

24. El periodo de un péndulo de un hilo metálico de coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ es de 4 s. Hallar el periodo del péndulo (en s) cuando el hilo del péndulo se calienta a 600 °C.

Resolución:

Datos: $\alpha = 2 \times 10^{-6}$; $T_0 = 0\ °C$; $T_f = 600\ °C$;

$P_1 = 4\ s$; $\Delta T = 600\ °C$

Reemplazando los datos en: $\rho = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Como: $l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta T)$

Entonces:

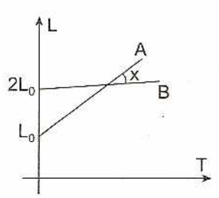
$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{l_1(1 + \alpha\Delta T)}$$

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{1}{1 + \alpha\Delta T} \Rightarrow \frac{16}{x^2} = \frac{1}{1 + 2 \times 10^{-6} \times 600}$$

$x = 4\sqrt{1 + 12 \times 10^{-4}} \Rightarrow x = 4\sqrt{1{,}0012}$

$x = 4 \times 1{,}00059982 \quad \therefore\ x = 4{,}00239$

25. Dos barras A y B cuyas longitudes son L_0 y $2L_0$ y de coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B respectivamente, se dilatan tal como se muestra en el diagrama. Hallar tanx.

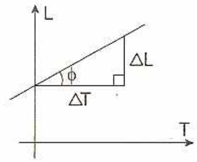


Resolución:

$L_f = L_0(1 + \alpha\Delta T)°$

$L_{f(A)} = L_0(1 + \alpha_A\Delta T) \Rightarrow \Delta L_A = \alpha_A L_0 \Delta T$

$L_{f(B)} = 2L_0(1 + \alpha_B\Delta T) \Rightarrow \Delta L_B = \alpha_B(2L_0)\Delta T$

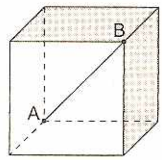


$\tan A = \dfrac{\Delta L_A}{\Delta T} = \alpha_A L_0$

$\tan B = 2\alpha_B L_0$

$$\text{Tanx} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A)(\tan B)} = \frac{L_0(\alpha_A - 2\alpha_B)}{1 + 2\alpha_A\alpha_B L_0^2}T$$

26. Un cubo de acero de $10\sqrt{3}$ cm de arista y coeficiente de dilatación cúbico $\gamma_{acero} = 36 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ incrementa su temperatura en 100 °C. Determinar el incremento de longitud (en cm) de su diagonal AB.



Resolución:

Del cubo tenemos:

Arista $= 10\sqrt{3}$ cm $= a$; $\Delta T = 100\ °C$; $\gamma_{acero} = 36 \times 10^6\ °C^{-1}$

entonces: $\alpha_{acero} = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Diagonal del cubo: $L = a\sqrt{3} = 10(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 30$ cm

Como:

$\Delta L = \alpha L \Delta T \Rightarrow \Delta L = (12 \times 10^{-6})(30)(100)$

$\Delta L = 36 \times 10^{-3}$ cm $\quad \therefore\ \Delta L = 0{,}036$ cm

27. En un día la temperatura llega a 27 °C, se llena un tanque de acero ($a = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$) a 16 °C con petróleo diésel extraído de un almacén subterráneo que está a la misma temperatura de 16 °C. ¿Qué fracción del volumen de petróleo se desborda cuando la temperatura del sistema llega a 27 °C, coeficiente de dilatación lineal del petróleo $\alpha_{petróleo} = 9{,}5 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$?

Resolución:

Datos: $T_f = 27\ °C$; $T_0 = 16\ °C$; $\alpha_{acero} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$;

$\Delta T = 11\ °C$; $\alpha_{petróleo} = 9{,}5 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

$D_{derrama} = \Delta V_{petróleo} - \Delta V_{acero}$

$D = 3\alpha_p V_0\Delta T - 3\alpha_A V_0\Delta T \Rightarrow D = 3V_0\Delta T(\alpha_p - \alpha_A)$

$$\frac{D}{V_0} = 3(\Delta T)(\alpha_p - \alpha_A)$$

$$\Rightarrow \frac{D}{V_0} = (3 \times 11)(9{,}5 - 0{,}12)10^{-5}$$

$$\frac{D}{V_0} = 33(9{,}38)10^{-5} \quad \therefore\ \frac{D}{V_0} = 0{,}003$$

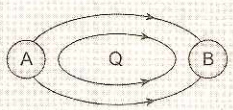
CALORIMETRÍA

Es una rama de la Física molecular que estudia las medidas de la cantidad de calor que intercambian dos o más sustancias que están a diferente temperaturas, y asimismo analiza las transformaciones que experimentan dichas sustancias al recibir o perder energía calorífica.

CALOR

El calor es una forma de energía en tránsito (de frontera a frontera) que intercambian los cuerpos debido exclusivamente a la diferencia de temperaturas entre los cuerpos. El calor es una energía no almacenable, y solo existe mientras exista una diferencia de temperaturas.

Flujo calorífico



A: cuerpo caliente
B: cuerpo frío
"Calor es la energía que se transmite de un cuerpo a otro, en virtud únicamente de una diferencia de temperatura entre ellos".

CANTIDAD DE CALOR (Q)

Es la medida de energía en forma de calor, que ingresa o sale de un cuerpo. El calor es un flujo energético que fluye espontáneamente desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura.

Caloría (cal). Es la cantidad de calor que se debe entregar o sustraer a un gramo de agua para que su temperatura aumente o disminuya en 1 °C.
Equivalencia:
1 kcal = 1000 calorías
1 cal = 4,2 joules

ENERGÍA INTERNA

Actualmente se considera que cuando crece la temperatura de un cuerpo, la energía que posee en su interior, denominada energía interna, también aumenta. Si este cuerpo se pone en contacto con otro de más baja temperatura, habrá una transferencia de energía de primero al segundo, energía que se denomina calor. Por lo tanto, el concepto moderno de calor es el siguiente: calor es la energía que se transmite de un cuerpo a otro, en virtud únicamente de su diferencia de temperatura entre ellos.

La transferencia de calor hacia un cuerpo origina un aumento en la energía de agitación de sus moléculas y átomos, o sea, que ocasiona un aumento de su energía interna del cuerpo, lo cual, generalmente, produce una elevación de su temperatura. En realidad, lo que un sistema material posee es energía interna, y cuanto mayor sea su temperatura, tanto mayor será también dicha energía interna.

Es importante observar, incluso, que la energía interna de un cuerpo puede aumentar sin que el cuerpo reciba calor, siempre que reciba otra forma de energía. Cuando, por ejemplo, agitamos una botella con agua, a pesar de que el agua no haya recibido calor, su temperatura aumenta. El aumento de energía interna en este caso se produjo debido a la energía mecánica transferida al agua cuando se efectúa el trabajo de agitar la botella.

Así, pues, la energía interna de un cuerpo se puede aumentar realizando trabajo sobre él.

Ahora sabemos que además de la energía mecánica, hay otro tipo de energía, la interna. La energía mecánica se transforma en energía interna, donde el intermediario es el calor. Por ejemplo, si soltamos una bola metálica de cierta altura, inmediatamente después del choque medimos la temperatura de la bola, advertimos que se ha calentado.

Energía mecánica → calor → Energía interna

CAPACIDAD CALORÍFICA (C)

Es característica de un cuerpo en particular, se define como la cantidad de calor que se debe entregar o sustraer a un cuerpo, tal que su temperatura varíe en la unidad.

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta T}} \qquad ...(13.18)$$

Unidades: $\frac{cal}{°C}$, $\frac{J}{°C}$

CALOR ESPECÍFICO (Ce)

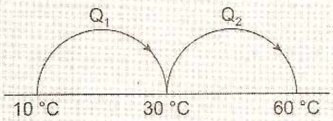
Es característica de una sustancia homogénea, se define como la cantidad de calor que se debe entregar o sustraer a cada unidad de masa de una sustancia, tal que, su temperatura varíe en la unidad.

$$\boxed{Ce = \frac{Q}{m\Delta T}} \qquad ...(13.19)$$

Unidades: $\frac{cal}{g°C}$ $\frac{J}{kg°C}$

Regla práctica

Cuando una sustancia recibe o cede una cierta cantidad de calor, se representa del siguiente modo:



Significa que la temperatura varía de 10 a 30 °C cuando recibe una cantidad Q_1 de energía calorífica y varía de 30 a 60 °C cuando recibe Q_2.

Cuando pierde o cede energía calorífica el sentido de las flechas son opuestas (antihorario).

Calor específico

Sustancia	Ce (cal/g°C)
Agua	1,00
Hielo	0,50
Vapor de agua	0,50
Aluminio	0,22
Vidrio	0,20
Hierro	0,11
Latón	0,094
Cobre	0,093
Plata	0,056
Mercurio	0,033
Plomo	0,031

CANTIDAD DE CALOR SENSIBLE (Q)

Es aquella cantidad de energía interna que transitoriamente cede o recibe un cuerpo o sustancia a través de sus fronteras debido a una diferencia de temperaturas entre él y el cuerpo o medio que la rodea.

El calor sensible, es la cantidad de calor que el cuerpo utiliza íntegramente para aumentar o disminuir su energía interna, esto quiere decir, para aumentar o disminuir su temperatura. No hay cambio de fase.

$$\boxed{Q = m\,C_e\,\Delta T} \qquad \ldots(13.20)$$

Unidades: calorías, *joules*

FORMAS DE PROPAGACIÓN DEL CALOR

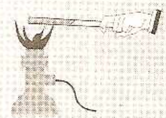
Conducción

Suponga que una persona sostiene uno de los extremos de una barra metálica, y el otro extremo se pone en contacto con una flama.

Los átomos o moléculas del extremo calentado por la flama, adquieren una mayor energía de agitación. El calor se transmite por conducción a lo largo de la barra, debido a la agitación de los átomos y las moléculas del sólido, después de cierto tiempo, la persona que sostiene el otro extremo percibirá una elevación de temperatura en ese lugar.

Por lo tanto, hubo una transmisión de calor a lo largo de la barra, que continuará mientras exista una diferencia de temperaturas entre ambos extremos. Este proceso de transmisión de calor se denomina conducción térmica. Los metales son buenos conductores térmicos, mientras que otras sustancias como corcho, porcelana, madera, aire, hielo, lana, papel, etc., son aislantes térmicos, es decir, malos conductores del calor.

Barra calentada. El calor se transmite por conducción a lo largo del sólido, debido a la agitación de los átomos y las moléculas del sólido.



Aislante térmico. "Un pájaro eriza sus plumas para mantener aire entre ellas con lo cual evita la transferencia de calor de su cuerpo hacia el ambiente".

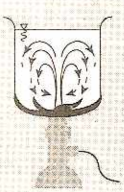
Convección

Cuando un recipiente conteniendo agua es colocado sobre una flama, la capa de agua del fondo recibe calor por conducción. Por consiguiente, el volumen de esta capa aumenta, y por tanto su densidad disminuye, haciendo que se desplace hacia la parte superior del recipiente para ser reemplazada por agua más fría y más densa, proveniente de tal región superior. El proceso continúa, con una circulación continua de masas de agua más caliente hacia arriba, y de masas de agua más fría hacia abajo, movimientos que se denominan corrientes de convección.

Así, el calor que se transmite por conducción a las capas inferiores, se va distribuyendo por convección a toda la masa del líquido, mediante el movimiento de traslación del propio líquido.

La transferencia de calor en los líquidos y gases pueden efectuarse por conducción, pero el proceso de convección es el responsable de la mayor parte del calor que se transmite a través de los fluidos.

Corriente de convección. En el interior del líquido se produce un flujo de moléculas debido a la diferencia de densidades, el agua caliente es menos denso que el agua fría.



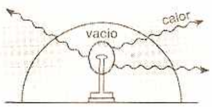
Radiación

Suponga que un cuerpo caliente (una lámpara eléctrica por ejemplo) se coloca en el interior de una campana de vidrio, donde se hace el vacío. Un termómetro, situado en el exterior de la campana, indicará una elevación de temperatura, mostrando que existe transmisión de calor a través del vacío que hay entre el cuerpo caliente y el exterior. Evidentemente, esta transmisión no pudo haberse efectuado por conducción ni por convección. En este caso, la transmisión del calor se llevó a cabo mediante otro proceso, denominado radiación térmica. El calor que nos llega del Sol se debe a este mismo proceso, ya que entre el Sol y la Tierra existe un vacio.

Todos los cuerpos calientes emiten radiaciones térmicas, que cuando son absorbidos por algún otro cuerpo, provocan en él un aumento de temperatura. Estas radiaciones, así, como las ondas de radio, la luz, los rayos X, etc., son ondas electromagnéticas capaces de propagarse en el vacío.

De manera general, el calor que recibe una persona cuando está cerca de un cuerpo caliente, llega hasta ella por los tres procedimientos: conducción, convección y radiación. Cuanto mayor sea la temperatura del cuerpo caliente, tanto mayor será la cantidad de calor transmitida por radiación, como sucede cuando uno se halla cerca de un horno o una fogata.

Propagación en el vacio



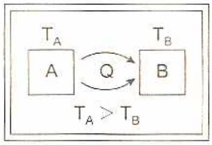
"El calor se propaga en el vacio por radiación".

Del Sol a la Tierra

"El Sol emite calor en forma de radiación térmica, mediante ondas electromagnéticas, llegando a la Tierra a través del vacio".

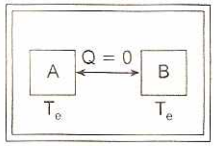
EQUILIBRIO TÉRMICO

Cuando en un recipiente cerrado y aislado térmicamente son introducidos dos cuerpos uno caliente y el otro frío, se establece un flujo de calor entre los cuerpos, de manera que disminuya la temperatura del cuerpo caliente debido a que pierde calor y el otro aumenta su temperatura debido a que gana calor. El flujo de calor entre los cuerpos cesará cuando los cuerpos alcanzan temperaturas iguales, entonces, se dice que han alcanzado el equilibrio térmico, definiéndose el equilibrio térmico como aquel estado en el cual no existe flujo de calor.



Antes

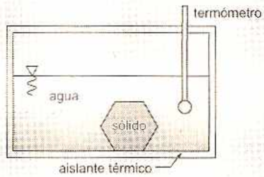
Fig. 13.3 a



Después

Fig. 13.3. b

Calorímetro de mezclas. Es aquel recipiente cerrado y aislado térmicamente que se utiliza para determinar el calor específico de los cuerpos (líquido, sólido, gas).



Teorema fundamental de la calorimetría

"Cuando mezclamos dos o más cuerpos a diferentes temperaturas, ocurre que el calor que ganan los cuerpos fríos lo pierden los cuerpos calientes". Del principio de conservación de la energía se cumple que:

$$\boxed{Q_{ganado} = Q_{perdido}} \qquad ...(13.21)$$

Nota

Se recomienda que, la cantidad de calor sensible tenga módulo positivo, para que esto ocurra la variación de temperatura debe ser positivo.

$$\boxed{\Delta T = T_{mayor} - T_{menor}} \qquad ...(13.22)$$

De otro modo, se reemplaza el valor absoluto del cambio de temperatura , $|\Delta T|$.

Mezclas: casos especiales

1. Dos masas iguales de la misma sustancia. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

2. Dos masas diferentes de la misma sustancia. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}$$

3. Tres masas diferentes de la misma sustancia. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

4. Dos masas diferentes y de sustancias diferentes. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1C_1T_1 + m_2C_2T_2}{m_1C_1 + m_2C_2}$$

5. Tres masas diferentes y de sustancias diferentes. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1C_1T_1 + m_2C_2T_2 + m_3C_3T_3}{m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3}$$

6. Cuatro masas diferentes y de sustancias diferentes. La temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1C_1T_1 + m_2C_2T_2 + m_3C_3T_3 + m_4C_4T_4}{m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3 + m_4C_4}$$

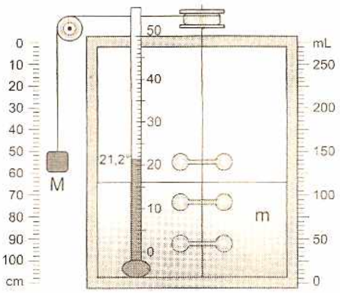
C: calor específico de la sustancia.

EQUIVALENTE MECÁNICO DE CALOR

En el experimento de Joule se determina el equivalente mecánico del calor, es decir, la relación entre la unidad de energía *joule* (julio) y la unidad de calor caloría.

Mediante esta simulación se verá la gran cantidad de energía que es necesario transformar en calor, para elevar la temperatura de un volumen de agua.

Descripción. Un recipiente aislado térmicamente contiene una cierta cantidad de agua, con un termómetro para medir su temperatura, un eje con unas paletas que se ponen en movimiento por la acción de una pesa, tal como se muestra en la figura.



La versión original del experimento, consta de dos pesas iguales que cuelgan simétricamente del eje.

La pesa, que se mueve con velocidad prácticamente constante, pierde energía potencial. Como consecuencia, el agua agitada por las paletas se calienta debido a la fricción.

Si el bloque de masa M desciende una altura "h", la energía potencial disminuye en Mgh, y está es la energía que se utiliza para calentar el agua (se desprecian otras pérdidas).

Joule encontró que la disminución de energía potencial es proporcional al incremento de temperatura del agua. La constante de proporcionalidad (el calor especifico de agua) es igual a 4,186 J/g°C. Por tanto, 4,186 J de energía mecánica aumentan la temperatura de 1 g de agua en 1 °C. Se define la caloría como 4,186 J, sin referencia a la sustancia que se está calentando.

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

En la simulación de la experiencia de Joule, se desprecia el equivalente en agua del calorímetro, recipiente del calorímetro y otras pérdidas debidas al rozamiento en las poleas.

- Sea M la masa del bloque que cuelga y "h" su desplazamiento vertical.
- "m" la masa de agua del calorímetro.
- T_0 la temperatura inicial del agua y T la temperatura final.
- $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ la aceleración de la gravedad.

La conversión de energía mecánica íntegramente en calor se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$Mgh = mCe(T - T_0)$$

Se despeja el calor específico del agua que estará expresado en J/kgK

$$Ce = \frac{Mgh}{m(T - T_0)}$$

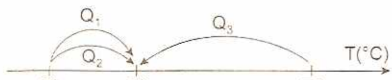
Como el calor especifico del agua es por definición Ce = 1 cal/g°C, obtenemos la equivalencia entre las unidades de calor y energía.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un calorímetro de plomo de 500 g contiene 80 g de agua a 20 °C. Determinar la cantidad de masa de cierta sustancia cuyo valor específico es 0,95 cal/g.°C, que se debe introducir en el calorímetro a 70 °C para lograr una temperatura de equilibrio igual a 30 °C.

$Ce_{(Pb)} = 0,03$ cal/g°C

Resolución:



Q_1: Cantidad de calor que gana el calorímetro de plomo: $Q_1 = mCe\Delta T$

$Q_1 = (500)(0{,}03)(10) = 150$ cal

Q_2 : Cantidad de calor que gana el agua:

$Q_2 = mC_e\Delta T$

$Q_2 = (80)(1)(10) = 800$ cal

Q_3: Cantidad de calor que pierde la sustancia desconocida: $Q_3 = MC_e\Delta T$

$Q_3 = M(0{,}95)(40) = 38M$

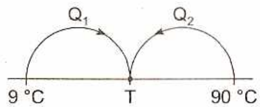
Del principio de conservación de la energía se cumple que: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

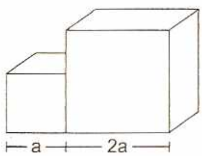
$150 + 800 = 38M \Rightarrow M = 25$ g

Luego, la masa de esta sustancia es 25 gramos.

2. Se tiene dos cubos del mismo material y de aristas "a" y 2a, con temperaturas de 9 y 90 °C respectivamente. Dos de sus caras se ponen en contacto por un cierto tiempo hasta llegar al equilibrio térmico. Si no hay cambio de fase durante el proceso, ¿cuál es la temperatura de equilibrio?

Resolución:





Principio de conservación de la energía: $Q_1 = Q_2$

$m_1Ce\Delta T_1 = m_2Ce\Delta T_2$

La masa de una sustancia es directamente proporcional a su volumen:

$D(a)^3Ce\,\Delta T_1 = D(2a)^3Ce\,\Delta T_2$

$\Delta T_1 = 8(\Delta T_2) \Rightarrow T - 9 = 8(90 - T)$

Resolviendo: $T = 81$ °C

Luego, la temperatura de equilibrio es 81 °C.

3. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se realizan sucesivos experimentos con los líquidos A, B y C de masas iguales y cuyas temperaturas iniciales son 15; 24 y 31 °C respectivamente. Cuando se mezclan los líquidos A y B la temperatura final de equilibrio es 20 °C, pero cuando se mezclan B y C, la temperatura final es 29 °C. Halla la temperatura de equilibrio cuando se mezclan A y C.

Resolución:

Primer caso: se mezclan A y B.

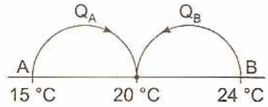
El recipiente no gana ni pierde calor.

Del principio de conservación de la energía: $Q_A = Q_B$

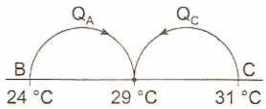
$m_ACe_{(A)}\Delta T_1 = m_BCe_{(B)}\Delta T_2$

$m_A\,Ce_{(A)}(5) = m_B\,Ce_{(B)}(4)$

Pero: $m_A = m_B \Rightarrow Ce_{(A)} = \dfrac{4}{5}Ce_{(B)}$ ...(1)



Segundo caso: se mezclan B y C.



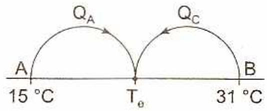
El recipiente no gana ni pierde calor. Del principio de conservación de la energía: $Q_B = Q_C$

$m_B\,Ce_{(B)}\Delta T_1 = m_C\,Ce_{(C)}\Delta T_2$

$m_B\,Ce_{(B)}(5) = m_C\,Ce_{(C)}(2)$

Pero: $m_B = m_C \Rightarrow Ce_{(C)} = \dfrac{5}{2}Ce_{(B)}$ ...(2)

Tercer caso: se mezclan A y C.



El recipiente no gana ni pierde calor. Del principio de conservación de la energía: $Q_A = Q_C$

$m_A\,Ce_{(A)}\Delta T_1 = m_C\,Ce_{(C)}\Delta T_2$

$m_ACe_{(A)}(T_e - 15) = m_C\,Ce_{(C)}(31 - T_e)$ ...(3)

Pero: $m_A = m_C$

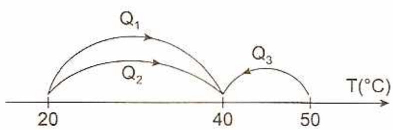
Reemplazando (1) y (2) en (3):

$\dfrac{4}{5}(Ce_{(B)})(T_e - 15) = \dfrac{5}{2}(Ce_{(B)})(31 - T_e)$

Resolviendo: $T_e = 27{,}12$ °C

4. En un calorímetro de equivalente en agua 10 gramos, se encuentran 20 gramos de agua a 20 °C, si se introduce un cuerpo de 40 gramos a 50 °C, la temperatura de equilibrio se logra a 40 °C. Determinar el calor específico del cuerpo.

Resolución:



Q_1: Cantidad de calor que gana el calorímetro:

$Q_1 = m_{cal}\,Ce_{(cal)}\Delta T$

$Q_1 = (E_q - H_2O)\Delta T \Rightarrow Q_1 = (10)(20) = 200$ calorías

Q_2: Cantidad de calor que gana el agua:

$Q_2 = mCe_{(agua)}\Delta T = (20)(1)(20) \Rightarrow Q_2 = 400$ calorías

Q_3: Cantidad de calor que pierde el cuerpo:

$Q_3 = mCe\Delta T = (40)(Ce)(10) \Rightarrow Q_3 = 400Ce$

Del principio de conservación de la energía se cumple que: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

$200 + 400 = 400Ce \quad \therefore\ Ce = 1{,}5$ cal/g°C

5. En un calorímetro de plomo cuya masa es de 200 g se encuentra a una temperatura de 20 °C se colocan 50 g de agua a 40 °C y 60 g de agua a 80 °C. Determinar la temperatura del equilibrio térmico (en °C). Dato: $Ce_{(Pb)} = 0{,}03$ cal/g.°C

Resolución:

Dato: $m_1 = 200$ g; $T_1 = 20$ °C; $Ce_{(Pb)} = 0{,}03$ cal/g°C; $m_2 = 50$ g de H_2O; $T_2 = 40$ °C; $m_3 = 60$ g de H_2O; $T_3 = 80$ °C

$$T_{eq} = \frac{m_1Ce_1T_1 + m_2C_2T_2 + m_3Ce_3T_3}{m_1Ce_1 + m_2Ce_2 + m_3Ce_3}$$

$$\Rightarrow T_{eq} = \frac{200\times 0{,}03\times 20 + 50\times 1\times 40 + 60\times 1\times 80}{200\times 0{,}03 + 50\times 1 + 60\times 1}$$

$$T_{eq} = \frac{6920}{116} = 59{,}655 \qquad \therefore\ T_{eq} = 59{,}6\ °C$$

6. Dos esferas del mismo material pero de masas "m" y 4m son ubicadas en un calorímetro impermeable al calor. Si 4m esta a 60 °C y "m" a 10 °C ¿qué energía interna (en cal) se transfiere de una esfera a la otra al alcanzar el equilibrio térmico? Se sabe que m = 2 g y el calor específico del material de las esferas es de 3 cal/g°C.

Resolución:

Sea: $m_1 = m = 2$ g; $m_2 = 4m = 8$ g; Ce = 3 cal/g°C; $T_1 = 10$ °C; $T_2 = 60$ °C

Determinamos la temperatura de equilibrio:

$$T_{eq} = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1m_2} = \frac{2\times 10 + 8\times 60}{2+8}$$

$$T_{eq} = \frac{20+480}{10} = 50\ °C$$

Entonces: $\Delta T = 50 - 10 = 40$ °C

$Q_1 = m_1 Ce\Delta T \Rightarrow Q_1 = 2\times 3\times 40$

$\therefore\ Q_1 = 240$ cal

7. En un calorímetro de 50 g de masa y 80 cal/g de capacidad calorífica se tienen 20 g de agua a 20 °C al sistema se introduce un bloque de 25 g de cierto mineral desconocido siendo su temperatura inicial de 140 °C. Si al final se observa que la mezcla presenta una temperatura inicial de 60 °C, ¿qué calor específico (en cal/g°C) presenta dicho material?

Resolución:

Calorímetro: $m_1 = 50$ g; Ce = 80 cal/g; $T_1 = 20$ °C; $m_2 = 20$ g (H_2O); $T_2 = 20$ °C; $m_3 = 25$ g; Ce = x; $T_3 = 140$ °C; $T_{eq} = 60$ °C

$$T_{eq} = \frac{m_1Ce_1T_1 + m_2Ce_2T_2 + m_3Ce_3T_3}{m_1Ce_1 + m_2Ce_2 + m_3Ce_3}$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{(50)(80)(20) + (20)(1)(20) + (25)(x)(140)}{(50)(80) + 20 + 25x}$$

241 200 + 1500x = 80 400 + 3500x

2000x = 160 800 $\quad\therefore$ x = 80,1 cal/g°C

8. Tres esferas metálicas del mismo material son puestas en contacto. Los radios de las esferas son: R, 2R y 3R, se encuentran a las temperaturas de 10; 10 y 20 °C respectivamente. Calcular la temperatura de equilibrio del sistema (en °C)

Resolución:

Datos: $m_1 = k(R)^3 = m$; $T_1 = 10$ °C; $m_2 = k(2R)^3 = 8$ m; $T_2 = 10$ °C; $m_3 = k(3R)^3 = 27$ m; $T_3 = 20$ °C

Reemplazamos en: $T_{eq} = \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$T_{eq} = \frac{m(10) + 8m(10) + 27m(20)}{m + 8m + 27m}$$

$$T_{eq} = \frac{630m}{36m} \qquad \therefore\ T_{eq} = 17{,}5\ °C$$

9. Un recipiente de capacidad calorífica despreciable contiene 1000 g de agua a 20 °C si se introduce una esfera metálica de 250 g a 300 °C la temperatura de equilibrio del sistema es 27 °C, determinar el calor específico del material de la esfera (en cal/g°C).

Resolución:

Datos: $m_1 = 1000$ g; $C_1 = 1$ cal/g°C; $T_1 = 20$ °C; $m_2 = 250$ g; $C_e = x$; $T_2 = 300$ °C; $T_{eq} = 27$ °C

Reemplazando en:

$$T_{eq} = \frac{m_1Ce_1T_1 + m_2Ce_2T_2}{m_1Ce_1 + m_2Ce_2}$$

$$27 = \frac{(1000)(1)(20) + (250)(x)(300)}{(1000)(1) + (250)(x)}$$

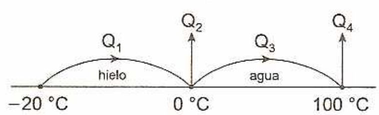
6750x = 20 000 + 75 000x − 27 000

$$\Rightarrow x = \frac{7000}{68\,250} = 0{,}1 \qquad \therefore\ x = 0{,}1\frac{cal}{g°C}$$

10. Hallar la cantidad de calor (en kcal) que se le debe suministrar a 6 kg de hielo que se encuentran a −20 °C para vaporizarlo completamente a 100 °C, si: $L_v = 80$ kcal/kg; $C_{e(Hielo)} = 0{,}5$ kcal/kg°C.

Resolución:

m = 6 kg = 6000 g; T = −20 °C



$Q_1 = m_{Hielo}Ce_{(Hielo)}\Delta T = 6\times 0{,}5\times 20 = 60$ kcal

$Q_2 = m_{Hielo}L_f = 6\times 80 = 480$ kcal

$Q_3 = m_{H_2O}Ce_{(H_2O)}\Delta T_3 = 6\times 1\times 100 = 600$ kcal

$Q_4 = m_{H_2O}L_v = 6\times 540 = 3240$ kcal

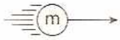
$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 60 + 480 + 600 + 3240$

$\therefore\ Q_{total} = 4380$ kcal

11. Una bala tiene una rapidez de 400 m/s, y se incrusta en una pared y al alojarse en ella, absorbe el 10% de la energía que se disipa en forma de calor. ¿Qué incremento de temperatura (en °C) experimentó la bala ($Ce_{(bala)}$ = 100 J/kg°C)?

Resolución:

La masa "m" en kilogramos



$$Q = 10\%\left(\frac{1}{2}\right)mv^2 = \left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}\right)m(400)^2$$

$Q = 8000m$ J $= 0{,}24(8000m)$ cal

$Q = mCe\Delta T$; donde: $Ce = 100$ J/kg°C

$8000m = m(100)(\Delta T)$ $\quad\therefore\ \Delta T = 80$ °C

FASES DE UNA SUSTANCIA

Es conocido que en la naturaleza las sustancias se presentan en tres fases diferentes, denominadas fase sólida, fase líquida y fase gaseosa. La presión y la temperatura a las que una sustancia es sometida, determinarán la fase en la cual pueda presentarse.

Cuando una sustancia pasa de una fase a otra, decimos que sufre un cambio de fase.

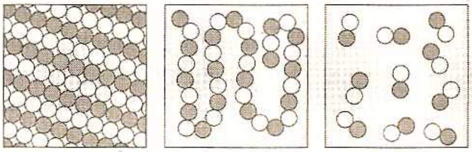
Sólido

En esta fase, los átomos de la sustancia se encuentran muy cerca unos de otros y unidos por fuerzas eléctricas relativamente intensas. Tales corpúsculos no sufren traslación en el sólido, pero que se encuentran en constante movimiento de vibración (agitación térmica) alrededor de una posición media de equilibrio. Debido a la fuerte ligación o unión entre los átomos, los sólidos poseen algunas características, como el hecho de presentar forma propia y de ofrecer cierta resistencia a las deformaciones.

En la naturaleza, casi todos los sólidos se presentan en forma de cristales, es decir, los átomos que los constituyen se encuentran organizados según un modelo regular, en una estructura que se repite ordenadamente en todo el sólido y se denomina red cristalina.

Modelos

a) Sólido b) Líquido c) Gas



Modelos de la estructura interna de un sólido (cristal), de un líquido y de un gas. Observe la organización y la separación de las moléculas en cada caso.

Líquido

Los átomos de una sustancia líquida están más alejados unos de otros, en comparación con los de un sólido, y por consiguiente, las fuerzas de cohesión que existen entre ellos son más débiles. Así, el movimiento de vibración de los átomos se hace con más libertad, permitiendo que experimenten pequeñas traslaciones en el interior del líquido. A ello se debe que los líquidos pueden escurrir o fluir con notable facilidad, no ofrecen resistencia a la penetración, y toman la forma del recipiente que los contiene.

Gas

Los átomos o moléculas de una sustancia en estado gaseoso, están separados una distancia mucho mayor que en los sólidos y en los líquidos, siendo prácticamente nula la fuerza de cohesión entre dichas partículas. Por este motivo se mueven libremente en todas direcciones, haciendo que los gases no presenten una forma definitiva y ocupen siempre el volumen total del recipiente donde se hallan contenidos.

CAMBIOS DE FASE

Cuando entregamos energía calorífica a un cuerpo y se eleva su temperatura, ya sabemos que hay un aumento en la energía de agitación de sus átomos. Este incremento hace que la fuerza de cohesión de los átomos se altere, pudiendo ocasionar modificaciones en su organización y separación. Es decir, la absorción de energía calorífica por parte de un cuerpo, puede provocar en él un cambio de fase.

Durante el cambio de fase la sustancia experimenta un reordenamiento de sus átomos y moléculas, adoptando nuevas propiedades y perdiendo otras. El cambio de fase de una sustancia se realiza a una determinada condición de presión y temperatura constante.

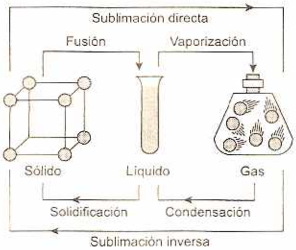


Fig. 13.4

Procesos:

a) Fusión: cambio de sólido a líquido.
b) Solidificación: cambio de líquido a sólido.
c) Vaporización: cambio de líquido a gas.
d) Condensación: cambio de gas a líquido.
e) Sublimación directa: cambio de sólido a gas, sin pasar por la fase líquida.
f) Sublimación inversa: cambio de gas a sólido, sin pasar por la fase líquida.

Puntos de fusión y calor latente de fusión a 1 atm de presión.

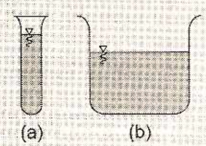
Sustancia	T(°C)	L(cal/g)
Platino	1775	27
Plata	961	21
Plomo	327	5,8
Azufre	119	13
Agua	0	80
Mercurio	−39	2,8
Alcohol etílico	−115	25
Nitrógeno	−210	6,1

VAPORIZACIÓN

El cambio de fase líquido a gaseoso puede producirse de dos maneras:

1. Por evaporación, cuando el cambio se realiza lentamente, a cualquier temperatura. La ropa mojada, por ejemplo, se seca debido a la evaporación del agua en contacto con el aire.
2. Por ebullición, cuando el cambio se realiza rápidamente a una temperatura específica para cada líquido. El agua de una tetera solo comienza a hervir, o sea, únicamente entra en ebullición, cuando su temperatura alcanza un valor igual a 100 °C a la presión de 105 Pa.

Rapidez de evaporación



La rapidez de evaporación de un líquido es mayor cuanto más grande sea el área de su superficie libre.

LEYES DE LA EBULLICIÓN

1. A determinada presión, la temperatura a la cual se produce la ebullición (punto de ebullición) es específica para cada sustancia.
2. Si un líquido se encuentra en su punto de ebullición es necesario suministrarle calor para que el proceso se mantenga. La cantidad de calor que debe proporcionarse, por unidad de masa, se denomina «calor latente de vaporización», el cual es característico de cada sustancia.
3. Durante la ebullición, a pesar de que se suministra calor al líquido, su temperatura permanece constante, y el vapor que se va formando está a la misma temperatura del líquido.

Puntos de ebullición y calor latente de vaporización a 1 atm de presión

Sustancia	T(°C)	L(cal/g)
Mercurio	357	65
Yodo	184	24
Agua	100	540
Alcohol etílico	78	204
Bromo	59	44
Nitrógeno	−196	48
Helio	−269	6

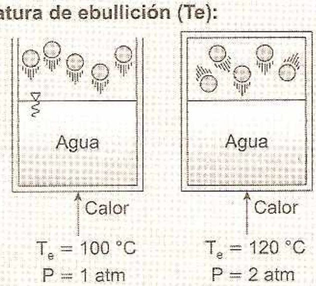
INFLUENCIA DE LA PRESIÓN EN LA TEMPERATURA DE EBULLICIÓN

Cualquier sustancia al vaporizarse aumenta su volumen. Por este motivo, un incremento en la presión ocasiona un aumento en la temperatura de ebullición, pues una presión más elevada tiende a dificultar la vaporización.

Este hecho se emplea en las ollas de presión. En una olla abierta como la presión normal (1 atm = $1{,}01 \times 10^5$ Pa) el agua entra en ebullición a 100 °C y su temperatura no sobrepasa este valor.

En una olla a presión los vapores formados que no pueden escapar, oprimen a la superficie del agua y la presión total puede llegar a casi 2×10^5 Pa. Por ello el agua solo entrará en ebullición alrededor de los 120 °C, haciendo que los alimentos se cuezan más de prisa. Naturalmente, una disminución en la presión (menor de 10^5 Pa) produce un descenso en la temperatura de ebullición.

Temperatura de ebullición (Te):



La temperatura de ebullición depende de la presión sobre el líquido.

DIAGRAMA DE FASES

Una sustancia dada se puede presentar en las fases sólido, líquido o gaseoso, dependiendo de su temperatura y de la presión que se ejerza sobre ella. En un

laboratorio se pueden determinar, para cada sustancia, los valores de P (presión) y T (temperatura) correspondientes a cada una de estas fases. Con ellos podemos construir un gráfico que se conoce como "diagrama de fases", cuyo aspecto es similar al de a figura 13.5. Obsérvese que este diagrama está dividido en tres regiones, indicadas por S (sólido), L (líquido) y V (vapor).

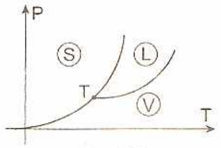
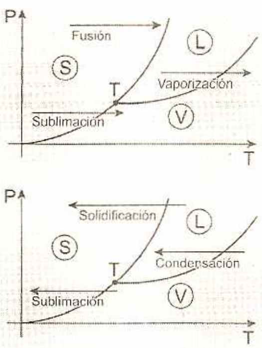


Fig. 13.5

PUNTO TRIPLE (T)

El punto de unión de estas tres líneas, punto T de la figura 13.5 corresponde a los valores de presión y de temperatura a los cuales puede presentarse la sustancia, simultáneamente, en las tres fases. Este punto se denomina punto triple de la sustancia. El agua por ejemplo, a una presión de 611,3 Pa y a una temperatura de 0,01 °C, se puede encontrar, al mismo tiempo, en las fases sólido, líquido y gaseoso, y por lo tanto, estos valores corresponden a su punto triple.

Cambios de fase



Conociendo la presión P y la temperatura T de una sustancia, este diagrama permite determinar la fase en que se encuentra.

CALOR LATENTE (L)

Es la cantidad de calor necesario y suficiente que se debe entregar o sustraer a una unidad de masa de una sustancia saturada, para que ésta pueda cambiar de fase.

$$\boxed{L = \frac{Q}{m}} \qquad ...(13.23)$$

Unidades: $\frac{cal}{g}; \frac{J}{kg}$

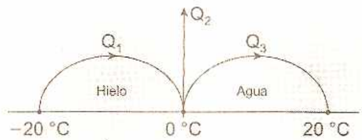
Calor latente para el agua a la presión atmosférica normal (P = 1 atm)

- Fusión–solidificación (T = 0 °C)
  $L = 80\ \frac{cal}{g} = 340\ \frac{kJ}{kg}$
- Vaporización-condensación (T = 100 °C)
  $L = 540\ \frac{cal}{g} = 2300\ \frac{kJ}{kg}$

Condiciones de saturación. Se denomina así a los valores de presión y temperatura que se mantienen constante durante el cambio de fase. Para cada presión de saturación existe un solo valor de su temperatura de saturación:

Por ejemplo, si la presión es $1{,}01 \times 10^5$ Pa (1 atm), el agua no puede hervir a 95 °C ni a 105 °C, le corresponde una temperatura de ebullición de 100 °C. Análogamente, si el agua hierve a 100 °C, la presión no puede ser 10^4 Pa, ni 10^6 Pa, pues le corresponde la presión normal, $1{,}01 \times 10^5$ Pa.

Diferencia entre la cantidad de calor sensible y latente:



Si la sustancia es agua:

Q_2: Cantidad de calor latente para el cambio de fase.

Q_1: Cantidad de calor sensible para el cambio de temperatura en 20 °C, en la fase sólido.

Q_3: Cantidad de calor sensible para el cambio de temperatura en 20 °C en la fase líquido.

CANTIDAD DE CALOR LATENTE (Q)

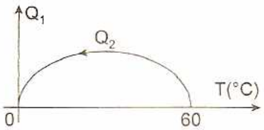
Es la cantidad de calor que el cuerpo o sustancia utiliza íntegramente para modificar su estructura atómica o molecular, esto quiere decir para cambiar de fase. No hay cambio de temperatura.

$$\boxed{Q = mL} \qquad ...(13.24)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se encuentran M gramos de hielo a 0 °C. Se introducen en él 120 gramos de agua a 60 °C, que permiten fundir exactamente todo el hielo. ¿Qué cantidad de hielo había en el recipiente?

Resolución:



Si el hielo se funde exactamente, entonces la temperatura de equilibrio es 0 °C. Del principio de conservación de la energía se cumple que: $Q_1 = Q_2$

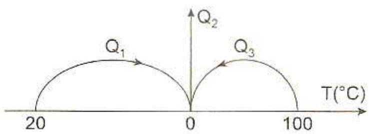
$ML_f = mCe\Delta t$

$M(80) = (120)(1)(60) \Rightarrow M = 90$ g

Luego, inicialmente había 90 gramos de hielo. Finalmente queda en el recipiente 210 gramos de agua fría a 0 °C.

2. Un recipiente de calor específico despreciable, contiene 20 gramos de hielo a −20 °C. ¿Cuántos gramos de agua a 100 °C se debe verter en el recipiente, para obtener finalmente agua líquida a 0 °C?

Resolución:



Del principio de conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

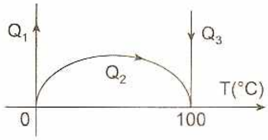
$mCe_{(hielo)}\Delta T_1 + mL_F = MCe_{(agua)}\Delta T_3$

$20(0,5)(20) + 20(80) = M(1)(100) \Rightarrow M = 18$ g

Luego, se debe verter 18 gramos de agua a 100 °C. Finalmente queda en el recipiente 38 gramos de agua a 0 °C.

3. Un recipiente de calor específico despreciable, contiene 30 gramos de hielo a 0 °C. ¿Cuántos gramos de vapor de agua a 100 °C se debe inyectar al recipiente, para obtener finalmente agua líquida a 100 °C?

Resolución:



Principio de conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

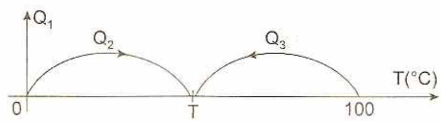
$mL_f + mCe_{(agua)}\Delta T_2 = ML_c$

$30(80) + 30(1)(100) = M(540) \Rightarrow M = 10$ g

Luego, se debe inyectar 10 gramos de vapor de agua a 100 °C. Finalmente queda en el recipiente 40 gramos de agua caliente a 100 °C.

4. Se tiene M gramos de hielo a 0 °C y se sumerge en M gramos de agua a 100 °C. ¿Cuál será la temperatura final de equilibrio del sistema? Despreciar toda ganancia o pérdida de calor con el exterior.

Resolución:



Principio de conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$ML_f + MCe_{(H2O)}\Delta T_2 = MCe_{(H2O)}\Delta T_3$

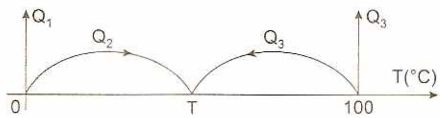
$L_f + Ce_{(H2O)}(T - 0) = Ce_{(H2O)}(100 - T)$

$\Rightarrow 80 + (1)(T) = (1)(100 - T) \Rightarrow T = 10$ °C

Luego, la temperatura de equilibrio es 10 °C.

5. Hallar la temperatura de equilibrio de la mezcla de 992 gramos de hielo a 0 °C y 160 gramos de vapor de agua a 100 °C. El recipiente térmicamente aislado no gana ni pierde calor.

Resolución:



Principio de conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

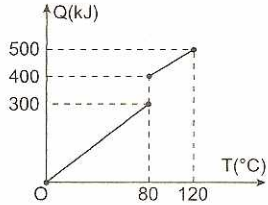
$mL_f + mCe_{(H2O)}\Delta T_2 = ML_v + MCe_{(H2O)}\Delta T_4$

$992(80) + 992(1)T = 160(540) + 160(1)(100 - T)$

$\Rightarrow T = 20$

Luego, la temperatura de equilibrio es 20 °C.

6. Un cuerpo absorbe calor para derretirse según la siguiente gráfica. Si la masa es 25 gramos, hallar el calor latente de fusión de la sustancia.

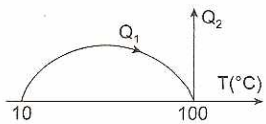


Resolución:

La sustancia cambia de fase a la temperatura constante T = 80 °C, absorbiendo 100 kJ de energía calorífica.

$L_f = \frac{Q}{m} \Rightarrow L_f = \frac{100}{0,025} \Rightarrow L_f = 4000$ kJ/kg

7. En una cacerola se echa agua a 10 °C y se pone a calentar sobre un hornillo eléctrico. Al cabo de 10 minutos el agua empieza a hervir. ¿Cuánto tiempo tardará en vaporizarse totalmente?



Resolución:

Q_1: es la cantidad de calor invertido para calentar el agua desde 10 °C hasta 100 °C.

$Q_1 = mCe_{(agua)}\Delta T \Rightarrow Q_1 = m(1)(90) \Rightarrow Q_1 = 90m$

Q_2: es la cantidad de calor invertido para vaporizar el agua totalmente, a la temperatura constante de 100 °C.

$Q_2 = mL_v \Rightarrow Q_2 = m(540) \Rightarrow Q_2 = 540m$

Por regla de tres simple directa:

$$\begin{matrix} 90m & - & 10\text{ min} \\ 540m & - & x \end{matrix} \Rightarrow x = 60\text{ min}$$

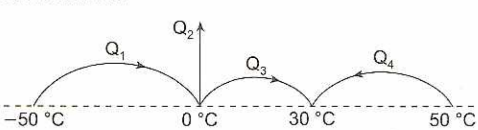
Luego, el agua tardará en vaporizarse totalmente 60 minutos.

8. A 10 kg de un líquido X, cuya temperatura es 50 °C, se le agrega 1 kg de hielo a −50 °C. Si la mezcla líquida que resulta tiene una temperatura de 30 °C, ¿cuál es el calor específico de X?

Calor específico del hielo = 0,5 kcal/kg°C

Calor latente de fusión del hielo = 80 kcal/kg

Resolución:



Cálculo de:

$Q_1 = mCe_{(Hielo)}\Delta T = 25$ kcal

$Q_2 = mC_{L(f)} = 80$ kcal

$Q_3 = mCe_{(H_2O)}\Delta T = 30$ kcal $\Rightarrow Q_4 = MCe_{(x)}\Delta T$

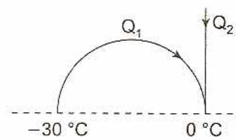
Principio de conservación de la energía:

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$

135 kcal $= 10Ce_{(x)}(20) \Rightarrow Ce_{(x)} = 0,675$ kcal/kg°C

9. Un calorímetro contiene 50 gramos de agua en su fase líquida a 0 °C. Se introduce en el calorímetro 50 gramos de hielo a −30 °C. Determinar la cantidad de agua que se solidifica cuando se alcanza la temperatura de equilibrio, sabiendo que el calorímetro no gana ni pierde calor.

Resolución:



Analizando se deduce que la temperatura final de equilibrio es 0 °C.

Sea, X la cantidad de agua que se solidifica.

Q_1 : calor ganado por el hielo.

Q_2 : calor perdido por el agua, para solidificar X gramos.

Principio de conservación de la energía: $Q_1 = Q_2$

$m_{(H)}Ce_{(H)}\Delta T = XL_s \Rightarrow (50)(0,5)(30) = X(80)$

$\Rightarrow X = 9,375$ gramos

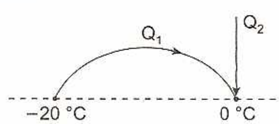
Estado final del equilibrio térmico:

Temperatura = 0 °C

La masa de hielo es 59,375 gramos y la masa de agua es 0,625 gramos

10. Se tiene un calorímetro ideal, que no gana ni pierde calor, en el cual se introduce 800 gramos de hielo a la temperatura de −20 °C y se vierte agua fría (fase líquida) a la temperatura de 0 °C una cantidad de 800 gramos. Hallar la cantidad de hielo que queda en el recipiente cuando se alcanza la temperatura de equilibrio.

Resolución:



Q_1 : calor ganado por el hielo.

Q_2 : calor perdido por X gramos de agua.

Principio de conservación de la energía:

$Q_1 = Q_2 \Rightarrow m_{Hielo}Ce_{(Hielo)}\Delta T = XL_s$

$800 \times 0,5 \times 20 = X(80) \Rightarrow X = 100$ g

X: cantidad de agua que se solidifica.

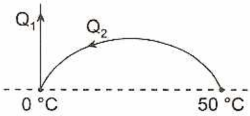
Estado final de equilibrio térmico:

Temperatura = 0 °C

Masa de agua es 700 g y la masa del hielo es 900 g

11. Se tiene un calorímetro de equivalente en agua despreciable, en el cual se introduce un bloque de hielo de masa 400 gramos a la temperatura de 0 °C y se vierte agua caliente en una cantidad de 400 gramos a 50 °C. Hallar la cantidad de agua en

su fase líquida que queda en el recipiente cuando logra alcanzar la temperatura de equilibrio.



Resolución:

Q_1 = calor ganado por X gramos de hielo.

Q_2 = calor perdido por el agua.

Principio de conservación de la energía:

$Q_1 = Q_2 \Rightarrow X(g)L_f = m_{H_2O}Ce_{(H_2O)}\Delta T$

$X(80) = 400 \times 1{,}0 \times 50 \Rightarrow X = 250$ gramos

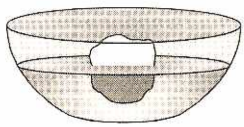
X: cantidad de hielo que se derrite.

Estado final de equilibrio térmico:

Temperatura = 0 °C

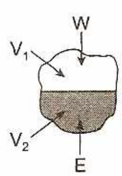
$m_{agua} = 650$ g $\wedge$ $m_{hielo} = 150$ g

12. La figura muestra un bloque de hielo sumergido parcialmente en agua. Si el recipiente se encuentra completamente lleno con agua, cuando el hielo se derrite, ¿cuánto (en kg) de agua se derrama?



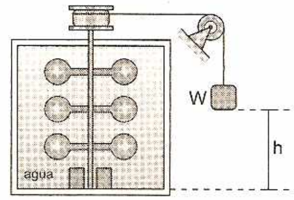
Resolución:

1. DCL (bloque de hielo):
   $V = V_1 + V_2$: volumen total
   V_1 : volumen no sumergido
   V_2 : volumen sumergido



2. $\Sigma F_y = 0$
   $E = W$
   $D_{H_2O}gV_2 = D_{Hielo}gV \Rightarrow D_{H_2O}V_2 = D_{Hielo}V$ ...(1)
3. Consideremos V', el volumen que ocupa el bloque de hielo cuando se derrite. Principio de conservación de la masa, cuando el bloque de hielo se derrite.
   $m_{(hielo)} = m_{(agua)} \Rightarrow D_{Hielo}V = D_{H_2O}V'$ ...(2)
   Comparando las ecuaciones (1) y (2): $V' = V_2$
   "El nivel de agua se mantiene inalterable, el agua no se derrama".

13. En un experimento de James P. Joule un bloque de peso 210 N cae desde una altura de 20 m y hace girar una rueda de paletas que agita 10 kg de agua. Si el bloque desciende con velocidad constante, determinar el incremento de temperatura del agua debido a la fricción con las paletas. Despreciar las pérdidas de calor hacia el calorímetro y al medio ambiente. Calor específico del agua es igual a 4200 J/kg°C.



Resolución:

Si el bloque desciende con velocidad constante, la variación de su energía cinética es nula, por consiguiente, el principio de conservación de la energía, la energía potencial del bloque W se transforma en energía calorífica debido a la fricción de las paletas con el agua.

$E_p = Q \Rightarrow Wh = mCe_{(agua)}\Delta T$

Reemplazando los datos en el SI:

$(210)(20) = (10)(4200)(\Delta T) \quad \therefore \Delta T = 0{,}1$ °C

Luego, el agua incrementa su temperatura en 0,1 °C.

14. Una resistencia recibe de una fuente eléctrica una potencia de 500 *watts*. El bloque de hielo en donde se encuentra el resistor es de 720 gramos a 0 °C. Encontrar después de cuántos minutos se logrará fundir íntegramente el hielo. 1 caloría = 4,2 *joule*.

Resolución:

Cálculo de la cantidad de calor para fundir íntegramente el bloque de hielo: $Q = mL_f$

$Q = (720)(80) \Rightarrow Q = 57\,600$ cal $\Rightarrow Q = 241\,920$ J

La cantidad de calor Q que libera la resistencia eléctrica, es igual al producto de la potencia P, por el tiempo transcurrido: $Q = Pt$

$241\,920 = (500)t \Rightarrow t = 483{,}84$ s $\Rightarrow t = 8$ min

Luego, el bloque de hielo se funde (cambio de fase) íntegramente después de 8 minutos aproximadamente.

15. Un proyectil que viaja con velocidad de 200 m/s, penetra en una pared, observándose que solo el 10% de su energía cinética se transforma en energía calorífica. Hallar el aumento de temperatura que experimenta el proyectil, sabiendo que su calor específico es 400 J/kg°C.

Resolución:

La cantidad de calor Q es el 10% de la energía cinética del proyectil: $Q = 10\%E_C$

$Q = (0{,}1)(1/2)(mv^2) = 0{,}05mv^2$ ...(1)

Cálculo del incremento de temperatura:

$Q = mCe\Delta T$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$0{,}05mv^2 = mCe\Delta T$

Reemplazando los datos en el SI:

$0{,}05(200)^2 = 400\Delta T \Rightarrow \Delta T = 5$ °C

Luego, el proyectil incrementa su temperatura en 5 °C.

16. ¿Con qué velocidad se debe lanzar un trozo de hielo a 0 °C contra la pared, tal que cambie de fase íntegramente (agua líquida a 0 °C)?
Calor latente de fusión del agua igual a 320 kJ/kg.

Resolución:

La energía cinética del trozo de hielo se transforma en energía calorífica: $Q = (1/2)(mv^2)$ ...(1)
Q, es la cantidad de calor que invierte el bloque de hielo para su cambio de fase (fusión):
$Q = mL_f$ ...(2)
Igualando (1) y (2), tenemos: $(1/2)(mv^2) = mL_f$
Reemplazando los datos en el SI:
$(1/2)(v^2) = 320\,000 \Rightarrow v = 800$ m/s
Luego, el trozo de hielo se debe lanzar con una velocidad de 800 m/s.

17. Un calentador eléctrico de 350 *watts* se emplea para preparar una jarra de té, para lo cual deberá hacerse hervir 500 g de agua. Si inicialmente la temperatura es de 18 °C, ¿en cuánto tiempo se logra hervir el agua?
1 cal = 4,2 J.

Resolución:

Cálculo de la cantidad de calor, para hacer hervir el agua: $Q = m\,Ce_{(agua)}\Delta T$
$Q = 500(1)(82) \Rightarrow Q = 41\,000$ cal
$\Rightarrow Q = 172\,200$ J
La cantidad de calor Q liberada por el calentador es igual al producto de la potencia P, por el tiempo "t" transcurrido: $Q = Pt$
$172\,200\text{ J} = (350\text{ W})t$
$t = 492\text{ s} \Rightarrow t = 8{,}2$ min
Luego, se logra hacer hervir el agua luego de 8,2 minutos.
El calentador eléctrico libera 350 J de energía calorífica en cada segundo.

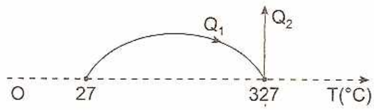
18. Cuando una bola de metal de 2 kg de masa cae desde una altura de 20 m solo puede rebotar hasta alcanzar una altura de 10 m. Si toda la energía potencial perdida se convirtió en calor, hallar el aumento de temperatura de la bola (Ce = 0,4 cal/g°C).
$g = 10$ m/s^2; 1 cal = 4,2 J.

Resolución:

Principio de conservación de la energía: $Q = mg\Delta h$
SI: $Q = (2)(10)(10) \Rightarrow Q = 200\text{ J} \Rightarrow Q = 48$ cal
Cálculo del incremento de la temperatura:
$Q = mCe\Delta T$
$48\text{ cal} = (2000)(0{,}4)\Delta T \Rightarrow \Delta T = 0{,}06$ °C
Luego, la temperatura de la bola metálica aumenta en 0,06 °C.

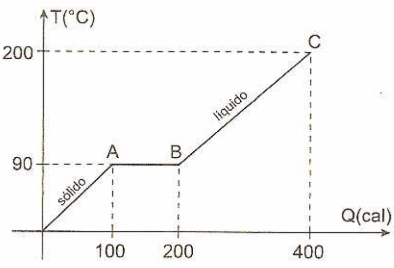
19. ¿Cuál sería la velocidad de una bala de plomo para que exactamente se funda al chocar con una pared? Suponer que el calor generado es retenido por la bala y que su temperatura inicial es 27 °C.
Para el plomo: Ce = 0,031 cal/g°C
$L_f = 5{,}8$ cal/g
Temperatura de fusión = 327 °C.

Resolución:



Principio de conservación de la energía:
$E_C = Q_1 + Q_2$
Sea "m" y 1000m la masa de la bala de plomo en kg y g, respectivamente:
$(1/2)(mv^2) = 4{,}2[(1000m)Ce\Delta T + 1000mL_f]$
$\Rightarrow (1/2)(v^2) = (4{,}2 \times 1000)(Ce\Delta T + L_f)$
$v^2 = 8400(0{,}031 \times 300 + 5{,}8) \Rightarrow v = 356$ m/s
Por lo tanto, la velocidad de la bala de plomo tendría que ser 356 m/s.

20. La gráfica T - Q muestra una sustancia que se funde a 80 °C. Hallar el coeficiente entre la capacidad calorífica en estado sólido y la capacidad calorífica en estado líquido.



Resolución:

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{100\text{ cal}}{80\text{ °C}} = 1{,}25\text{ cal/°C}$$

$$C_2 = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{200\text{ cal}}{120\text{ °C}} = 1{,}67\text{ cal/°C}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1{,}25}{1{,}67} = 0{,}748$$

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Con respecto al coeficiente de dilatación lineal se hacen las siguientes afirmaciones:

I. Su valor numérico es independiente de la escala de temperatura.

II. Depende del material del que está hecho el objeto sometido al cambio de temperatura.

III. Es independiente de la longitud inicial del objeto.

A) VFV B) VVV C) FVF
D) FFF E) FVV

Resolución:

En valor del coeficiente de dilatación líneas que presenta un cuerpo, depende de su composición (moléculas que los conforman), su temperatura y la escala en la que está representada. A pesar de esto, se puede considerar constante para pequeños intervalos de temperatura.

I. Falso II. Verdadero III. Verdadero

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

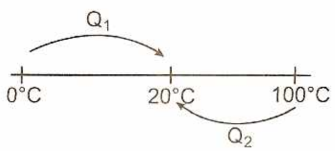
Una masa de aluminio de 0,1 kg, una de cobre de 0,2 kg y otra de plomo de 0,3 kg, se encuentran a la temperatura de 100°C. Se introducen en 2 kg de una solución desconocida a la temperatura de 0°C. Si la temperatura final de equilibrio es de 20 °C, determine el calor específico de la solución en J/kg°C

(C_{Al} = 910 J/kg°C; C_{Cu} = 390 J/kg°C; C_{Pb} = 130 J/kg°C)

A) 186 B) 266 C) 286
D) 326 E) 416

Resolución:

Realizamos el diagrama lineal:



m_x= 2 kg
Ce_x

Q_2 m_{AL} = 0,1 kg
m_{Cu} = 0,2 kg
m_{Pb} = 0,3 kg

De donde: $|Q_{Ganado}| = |Q_{Perdido}|$

$$2Ce_x(20) = \frac{1}{10}(910)(80) + \frac{2}{10}(390)(80) + \frac{3}{10}(130)80$$

$\therefore$ Ce_x = 416 J/kg°C

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Con respecto a las siguientes afirmaciones:

I. En el proceso de transferencia de calor por convección en un flujo, el calor se transfiere debido al movimiento del fluido.

II. La transferencia de calor por convección se produce incluso en el vacío.

III. En el proceso de trasferencia de calor por conducción entre dos cuerpos, es necesario el contacto entre ellos.

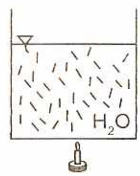
Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, luego de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVV E) FVF

Resolución:

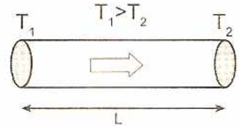
I. **Verdadero.** En la transferencia de calor por convección el fluido experimenta un desplazamiento de masa una diferencia de densidades. Este movimiento se denomina corriente de convección.

Ejemplo: el H_2O que está en la parte inferior se calienta y pierde densidad por lo tanto asciende y origina el movimiento del fluido.



II. **Falso.** La transferencia de calor que se produce en el vacío se denomina "radiación".

III. **Verdadero.** La transferencia de calor por conducción se da principalmente en los sólidos. Para que ocurra esto los cuerpos deben estar en contacto y presentar una diferencia de temperatura.



Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Se construye una terma solar con una caja de material térmicamente aislante, como se muestra en la figura. La tapa superior de la caja es transparente y tiene un área de 3 m^2. ¿Cuánto tiempo necesitaría la terma para calentar 60 litros de agua desde 20 °C hasta 60 °C? Considere que la terma no tiene pérdida de calor y que la densidad del agua es constante todo el tiempo.

ρ_{agua} = 1000 kgm^{-3}; C_{agua} = 1,0 $calg^{-1}(°C)^{-1}$

Intensidad de radiación del Sol que ingresa por la tapa: 550 Wm^{-2} (1 cal = 4,186 J)

A) 54 minutos
B) 1 hora 7 minutos
C) 1 hora 14 minutos
D) 1 hora 35 minutos
E) 1 hora 41 minutos

Resolución:

Por conservación de la energía:

$$\text{Energía que entrega el Sol} = \text{energía que absorbe el agua}$$

$$(I_{\text{radiación}})(\text{Área})(\text{tiempo}) = mCe\Delta T$$

Teniendo cuidado con las unidades: 1 cal = 4,186 J

$$\left(550\,\frac{w}{m^2}\right)(3\ m^2)(t) = (60\ L)\left(\frac{1kg}{1\ L}\right)\left(\frac{cal}{g\,°C}\right)\times (60-20)(°C)\left(\frac{4,186\ J}{1\,cal}\right)$$

$\therefore\ t = 6088,7272\ s = 1$ hora 41 minutos

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

Un cuerpo está compuesto por una aleación de 200 g de cobre, 150 g de estaño y 80 g de aluminio. Calcule su capacidad calorífica cal/°C y el calor, en cal, necesario para elevar su temperatura 50°C. (Los calores específicos del cobre, del estaño y del aluminio, en cal/(g°C), respectivamente son: 0,094; 0,055; 0,212).

A) 11,01; 1900,50
B) 22,01; 2000,50
C) 33,01; 2100,50
D) 44,01; 2200,50
E) 55,01; 2300,50

Resolución:

Determinando la capacidad calorífica:

$$C = \frac{Q}{T} = \frac{Q_{Cu} + Q_{Sn} + Q_{Al}}{T} = m_{Cu}C_{Cu} + m_{Sn}C_{Sn} + m_{Al}C_{Al}$$

$$Q_{Cu} = m_{Cu}C_{Cu}\Delta T\,;\ Q_{Sn} = m_{Sn}C_{Sn}\Delta T\,;\ Q_{Al} = m_{Al}C_{Al}\Delta T$$

ΔT: Variación de la temperatura.

Reemplazando:

$$C = 200 \times 0,094 + 150 \times 0,055 + 80 \times 0,212$$

$$C = 44,01\ cal/°C$$

Determinando el calor Q:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \Rightarrow Q = C\Delta T$$

Reemplazando:

$$Q = \left(44,01\,\frac{cal}{°C}\right)(50\ °C) \Rightarrow Q = 2200,50\ cal$$

Clave: D

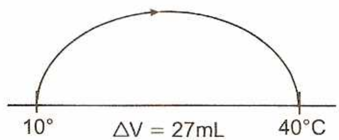
PROBLEMA 6 (UNI 2013 - I)

Un litro de petróleo a 10 °C aumento su volumen en 27 mL cuando temperatura para a 40 °C. Si a 40 °C se tienen 100 galones de petróleo, el volumen el petróleo, en galones a 10° será aproximadamente de:

A) 91,1
B) 93,3
C) 95,5
D) 97,3
E) 99,1

Resolución:

Realizando el diagrama para un litro de petróleo determinamos el coeficiente de dilatación volumétrico.

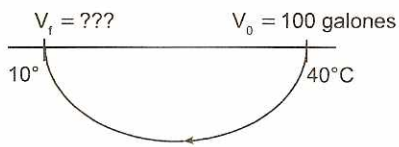


$V_0 = 1$ litro

$$\Delta V = V_0\,\gamma_{\text{petróleo}}\,\Delta T \Rightarrow 27 \times 10^{-3} = (1)(\gamma_{\text{petróleo}})(30)$$

$$\Rightarrow \gamma_{\text{petróleo}} = 9 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$$

Realizando el diagrama para 100 galones de petróleo.



$$\Delta V = V_0\,\gamma_{\text{petroleo}}\,\Delta T$$

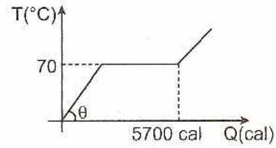
$$V_f - 100 = (100 \times 9 \times 10^{-4})(10 - 40)$$

$$V_f = 97,3\ \text{galones}$$

Clave: D

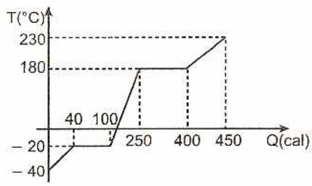
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El grafico representa la temperatura T en función del calor absorbido por 20 gramos de cierto líquido. ¿Cuánto vale el calor latente de evaporación del líquido, si: $\tan\theta = 10^{-1}$



A) 150 cal/g B) 200 cal/g C) 250 cal/g
D) 300 cal/g E) 350 cal/g

2. Una muestra de mineral de 10 g de masa recibe calor de modo que su temperatura tiene un comportamiento como el mostrado en la figura. Determinar los calores latentes específicos de fusión y vaporización en cal/g



A) 3 y 8 B) 10 y 15 C) 8 y 15
D) 6 y 15 E) 7 y 10

3. Una bala de plomo de masa 5 g se mueve con una energía cinética de 12,6 J, choca contra un blanco y queda en reposo. ¿Cuál es el incremento en la temperatura de la bala si no hay flujo de calor hacia el medio ambiente?
(Ce_{Pb}=0,03 cal/g°C)

A) 40,2 °C B) 20,1 °C C) 30,6 °C
D) 50 °C E) 15,3 °C

4. Un clavo de hierro de 20 g y calor especifico 481 Jkg°C está siendo golpeado por un martillo de 2 kg de masa. La velocidad de impacto del martillo es $\sqrt{3}$ m/s. Si la mitad de la energía cinética es convertida en energía térmica del clavo, ¿Cuántas veces hay que golpear el clavo para elevar su temperatura en 25 °C?

A) 17 golpes B) 20 golpes C) 27 golpes
D) 30 golpes E) 37 golpes

5. En un calorímetro de equivalente en agua 20 g, se tiene 180 g de agua a 15 °C, un bloque metálico de 500 g y Ce = 0,03 cal/g °C ingresa a 80 °C en el calorímetro. ¿Cuál será la temperatura de equilibrio?

A) 23,5 °C B) 30,5 °C C) 19,5 °C
D) 47,5 °C E) 42,3 °C

6. En un calorímetro de 500 g y calor especifico 0,03 cal/g°C se tiene 50 g de hielo a –10 °C, vierte en el calorímetro 70 g de agua a 40 °C. Encuentre usted las condiciones finales del sistema.

A) Agua 100 g; hielo 20 g a 0 °C
B) Agua 80 g; hielo 40 g a 0 °C
C) Agua 45 g; hielo 75 g a 0 °C
D) Agua 120 g; a 2 °C
E) Agua 120 g; a 23 °C

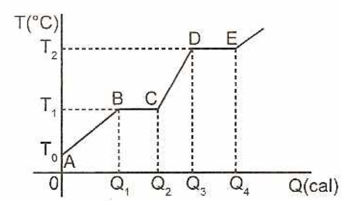
7. Calcular la temperatura de equilibrio al mezclar 40 g de agua a 10 °C con 60 g de agua a 30 °C y con 120 g de agua a 60 °C

A) 36,65 °C B) 59,14 °C C) 42,72 °C
D) 53,5 °C E) 24 °C

8. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tiene X gramos de hielo a 0 °C, en contacto con Y gramos de vapor de agua a 100 °C. Determinar la relación entre X e Y, para lograr que todo el contenido logre su equilibrio térmico, obteniendo solo líquido a 100°C.
(L_F = 80 cal/g; L_V = 540 cal/g)

A) X = 3Y B) Y = 3X C) X = Y
D) X = 4Y E) Y = 4X

9. Una masa "m" de cierto metal experimenta una variación de temperatura de acuerdo a la siguiente gráfica al entregarle calor. Cual(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), si la presión es constante?



I. En el tramo BC existe un cambio de fase.
II. El calor especifico de la sustancia líquida es $(Q_3 + Q_1)/m(T_2 - T_1)$.
III. El calor latente de fusión del material es $(Q_2 - Q_1)/m$.

A) Solo I B) I y II C) I y III
D) II y III E) Solo II

10. En un recipiente se tiene agua a 0 °C. Si se introduce 800 g de hielo a –10 °C. ¿Qué cantidad de agua se solidificará?

A) 20 g B) 30 g C) 40 g
D) 50 g E) 80 g

11. Un bloque de plata (Ce = 0,06 cal/g°C) de 200 g de masa se encuentra a 21 °C. ¿Qué cantidad de calor debe suministrársele para derretirlo, si la temperatura de fusión es 961 °C y su calor latente de fusión es 21 cal/g?

A) 10 000 cal B) 14 400 cal C) 15 000 cal
D) 15 480 cal E) 16 724 cal

12. Un cuerpo tiene una capacidad calorífica de 6 cal/°C y su masa de 300 g. Si su temperatura pasa de 16 °C a 26 °C, ¿qué cantidad de calor habrá absorbido?

A) 50 cal B) 60 cal C) 70 cal
D) 120 cal E) 80 cal

13. Si la cantidad de calor necesario para aumentar en 100 °C la temperatura de 10 kg de un metal es 100 kcal, ¿qué porcentaje de calor se disipa al medio exterior? (Ce = 0,085 cal/g°C)

A) 5% B) 10% C) 15%
D) 20% E) 25%

14. En un recipiente vaciamos 200 g de agua a 20 °C, 40 g de agua a 40 °C y 60 g de agua a 80 °C. Calcular la temperatura de equilibrio.

A) 34,66 °C B) 35 °C C) 38 °C
D) 50 °C E) 70 °C

15. En un calorímetro de equivalente en agua igual a 20 g, se tiene 280 g de agua a la temperatura de 15 °C. Si se introduce un bloque metálico de 400 g a 100 °C, se logra una temperatura de equilibrio de 25 °C. Hallar el Ce del metal en cal/g°C.

A) 0,9 B) 0,8 C) 0,6 D) 1,2 E) 0,1

16. Se tiene en un recipiente 100 g de agua a la temperatura de 20 °C. Si se introduce un trozo de metal de 400 g y a la temperatura de 100 °C, determinar la temperatura final de equilibrio, si el calor específico del metal es 0,11 cal/g°C

A) 20 °C B) 32,2 °C C) 12,6 °C
D) 44,4 °C E) 52,2 °C

17. Se mezclan masas iguales de tres líquidos A, B y C cuyas temperaturas son de 20; 40 y 60 °C respectivamente. Hallar la temperatura final de la mezcla, si: $Ce_{(A)} = \frac{1}{5}Ce_{(B)} = \frac{1}{4}Ce_{(C)}$,

A) 40 °C B) 46 °C C) 20 °C
D) 23 °C E) 57 °C

18. Se tiene 30 g de agua a 60 °C. Determinar la cantidad de calor que se requiere para tener 30 g de vapor de agua a 120 °C

A) 15,2 kcal B) 17,7 kcal C) 18,6 kcal
D) 19,0 kcal E) 20,2 kcal

19. Se tiene 360 g de agua a 20 °C. ¿Qué cantidad de calor se debe extraer para convertirla en hielo a 0 °C?

A) 6 kcal B) 12 kcal C) 18 kcal
D) 24 kcal E) 36 kcal

20. Si mezclamos 20 g de hielo a −60 °C con M gramos de vapor de agua a 100 °C se obtiene una temperatura de equilibrio de 40 °C. Entonces el valor de M es:

A) 12 B) 5 C) 8 D) 15 E) 10

21. En un calorímetro de equivalente en agua igual a 20 g, se tiene 180 g de agua en equilibrio térmico con 10 g de hielo. Si se inyecta 20 g de vapor de agua a 100 °C, ¿cuál es la temperatura de equilibrio?

A) 10 °C B) 0 °C C) 20 °C
D) 15 °C E) 23 °C

22. Se mezclan igual cantidad de masa de hielo a 0 °C y vapor de agua a 100 °C, en un recipiente de capacidad calorífica despreciable. ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio?

A) −10 °C B) 0 °C C) 15 °C
D) 100 °C E) 141 °C

23. Se tiene en un recipiente 100 g de agua a la temperatura de 20 °C. Si se introduce un trozo de metal de 400 g y a la temperatura de 100 °C, determinar la temperatura final de equilibrio, si el calor específico del metal es 0,11 cal/g°C

A) 20 °C B) 32,2 °C C) 12,6 °C
D) 44,4 °C E) 52,2 °C

24. En un calorímetro de capacidad calorífica despreciable se tiene 45 g de hielo a −24 °C. Si se hace ingresar 26 g de vapor de agua a 100 °C, hallar la temperatura final de equilibrio.

A) 100 °C B) 0 °C C) 36 °C
D) 56 °C E) 13 °C

25. Si en un calorímetro ideal, se introducen hielo a −10 °C con agua líquida a 85 °C en iguales cantidades, entonces podemos afirmar que en el equilibrio habrá:

A) Agua líquida a temperatura sobre 0 °C
B) Hielo a temperatura bajo 0 °C
C) Solamente hielo a 0 °C
D) Solamente agua líquida a 0 °C
E) Agua y hielo a 0 °C

26. Un proyectil de 50 g que se desplaza a 200 m/s, se incrusta sobre un bloque de hielo que se encuentra a 0 °C. Suponiendo que el 50% de la energía cinética se convierte en calor que es absorbido por el hielo, hallar la masa de hielo que se derrite.

A) 2,5 g B) 2 g C) 1,5 g
D) 1 g E) 0,5 g

27. En un calorímetro de equivalente en agua igual a 10 g contiene 150 g de agua a 0 °C. Se introduce un bloque metálico de 200 g a 200 °C. Hallar la temperatura de equilibrio.
$Ce_{metal} = 0,02$ cal/g°C

A) 2 °C B) 2,01 °C C) 3 °C
D) 4,87 °C E) 5 °C

28. Un joven midió la diferencia de temperatura entre las aguas de arriba y las de debajo de una catarata de 50 m de altura. Determine aproximadamente dicha diferencia.

A) 0 °C B) 0,12 °C C) 0,25 °C
D) 4 °C E) 5 °C

29. En un recipiente de capacidad calorífica 100 cal/°C se tiene 200 g de agua a 20 °C; si en el recipiente se vierten "m" gramos de agua a 100 °C se determina que la temperatura de equilibrio es 50 °C. ¿Cuál es el valor de "m"?

A) 180 g B) 200 g C) 220 g
D) 240 g E) 250 g

30. Se tiene 100 g de agua a la temperatura de 20 °C. ¿Qué cantidad de kilocalorías se le debe proporcionar para vaporizarla totalmente?

A) 54 B) 58 C) 62
D) 66 E) 70

31. Se tiene 2 g de agua a −10 °C. ¿Qué cantidad de calor se le debe agregar para transformarlo en agua a 80 °C?

A) 300 cal B) 310 cal C) 320 cal
D) 330 cal E) 340 cal

32. Calcule el calor que debe suministrarse a un gramo de hielo cuya temperatura es −10 °C para fundirlo completamente.

A) 80 cal B) 5 cal C) 85 cal
D) 90 cal E) 95 cal

33. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tiene 800 g de mercurio a 10 °C, al colocar en el mercurio una esfera de 2,4 kg se determina que la temperatura de equilibrio es de 70 °C. Determine la temperatura inicial de la esfera.

$Ce_{esfera} = 0,3\ \dfrac{cal}{g\,°C};\ Ce_{Hg} = 0,03\ \dfrac{cal}{g\,°C}$

A) 24 °C B) 36 °C C) 72 °C
D) 86 °C E) 92 °C

34. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se mezclan 2 líquidos A y B que estaban a 20 °C y 80 °C. Si la masa de A es el doble de la masa de B, determine la temperatura final de equilibrio que se establece, si el calor específico de A es la tercera parte del calor específico de B.

A) 46 °C B) 51 °C C) 54 °C
D) 56 °C E) 58 °C

35. Dos cuerpos esféricos del mismo material de radios R y 2R cuyas temperaturas son 45 °C y 90 °C respectivamente se ponen en contacto. Determine la temperatura final de equilibrio.

A) 55 °C B) 65 °C C) 75 °C
D) 85 °C E) 89 °C

36. Calcular el calor específico de un cuerpo que al ganar 200 cal incrementa su temperatura en 50 °C (masa del cuerpo 4 g).

A) 1 cal/g°C B) 2 cal/g°C
C) 3 cal/g°C D) 4 cal/g°C
E) 5 cal/g°C

37. Calcular la cantidad de calor que se le debe entregar a un cuerpo de 5 g. (Ce = 0,2 cal/g°C para aumentar de 10 °C a 50 °C)

A) 20 cal B) 30 cal C) 40 cal
D) 50 cal E) 60 cal

38. Calcular la masa de un cuerpo de Ce = 0,2 cal/g°C que al ganar 100 cal aumentó su temperatura de 10 a 50 °C.

A) 10,1 g B) 12,5 g C) 13,6 g
D) 20,5 g E) 14,5 g

39. Calcular la temperatura final de un cuerpo de masa 4 g (Ce = 0,1 cal/g °C) que se encuentra a 10 °C, al ganar 400 cal de energía calorífica.

A) 1010 °C B) 1000 °C C) 1020 °C
D) 1015 °C E) 1030 °C

40. Se tiene dos cuerpos a diferentes temperaturas y se ponen en contacto. Si uno de ellos pierde 40 cal decir cuánto gana el otro.

A) 10 cal B) 20 cal C) 30 cal
D) 40 cal E) 50 cal

41. En un recipiente se mezclan 40 g de agua a 10 °C y 60 g de agua a 50 °C. Calcular la temperatura de equilibrio

A) 20 °C B) 34 °C C) 44 °C
D) 54 °C E) 24 °C

42. En un recipiente que contiene 10 g de agua a 20 °C se introduce un cuerpo de masa 200 g a 80 °C. (Ce = 0,2 cal/g°C). Calcular la temperatura de equilibrio (aproximadamente)

A) 37,1 °C B) 35,1 °C C) 32,1 °C
D) 34,1 °C E) 36,1 °C

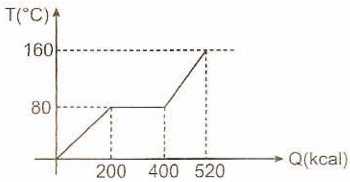
43. Tres esferas de radios R, 2R y 3R con temperaturas 20, 30 y 40 °C respectivamente son puestos en contacto. Determine la temperatura de equilibrio, si las esferas son del mismo material. (Desprecie la variación de la densidad y el calor específico debido a los cambios de temperatura).
(Dar respuesta aproximada)

A) 31,6 °C B) 21,3 °C C) 37,2 °C
D) 32,3 °C E) 40 °C

44. En un termómetro de columna de mercurio solo aparecen dos marcas, las de las temperaturas de 36 °C y 37 °C. La longitud de la columna entre estas marcas es de 1 cm. Una persona se pone el termómetro y constata que la columna de mercurio mide 2,8 cm por encima de la marca de 37 °C. Su temperatura en °C es de:

A) 38,8 B) 39,2 C) 39,8 D) 40,2 E) 40,8

45. Determine la cantidad necesaria de agua a 20 °C que se debe introducir en un recipiente de capacidad calorífica despreciable para que al mezclarse con una sustancia x que se encuentra a 120 °C y cuyo grafico T – Q se muestra, la temperatura de equilibrio sea de 80 °C.



A) 1,2 kg B) 1,7 kg C) 19 kg
D) 2,7 kg E) 1 kg

46. Determine la eficiencia de un calentador de agua que necesita 20 kg de carbón para calentar 100 L de agua desde 10 °C, hasta que se encuentre a punto de hervir. Se sabe que al quemar 3 kg de carbón se disipa 1500 kcal.

A) 15% B) 25% C) 30% D) 40% E) 90%

47. Se desea fundir un bloque de hielo de 10 kg que se encuentra a –15 °C de temperatura. ¿Cuál será la menor cantidad de agua a 87,5 °C requerida para fundir el bloque de hielo?

A) 1,5 kg B) 8 kg C) 9 kg
D) 10 kg E) 12 kg

48. Se tiene 10 g de agua en un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 5 gramos. Determine que temperatura presentará el sistema luego de recibir 5650 calorias. Inicialmente el sistema se encontraba a 90 °C.

A) 100 °C B) 110 °C C) 102 °C
D) 105 °C E) 150 °C

49. En un recipiente de capacidad calorífica 20 cal/°C se tiene 106 g de agua a 50 °C. ¿Qué masa de hielo a –30 °C se debe introducir al sistema a fin de que el 60% de su masa se fusione?

A) 100 g B) 200 g C) 300 g
D) 400 g E) 500 g

50. Un cubo de hielo de 3,6 kg y cuya temperatura es de –40 °C, se coloca en un estanque de agua que se encuentra a 0 °C. ¿Qué cantidad de agua se solidificará?

A) 1,5 kg B) 1,2 kg C) 0,9 kg
D) 0,8 kg E) 0,6 kg

51. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable que contiene 100 g de agua a temperatura de 20 °C, se vierten 200 g de agua a 80 °C. Determine la temperatura de equilibrio.

A) 20 °C B) 40 °C C) 60 °C
D) 80 °C E) 45 °C

52. En un recipiente de capacidad calorífica 50 cal/°C se tienen 400 g de agua a 40 °C, se tienen 400 g de agua a 40 °C, luego se introduce un bloque metálico de 900 g que se encuentra a 160 °C. Determine el calor específico del metal, si la temperatura de equilibrio es 60 °C.

A) $0,1\ \frac{cal}{g°C}$ B) $0,2\ \frac{cal}{g°C}$ C) $0,3\ \frac{cal}{g°C}$
D) $0,4\ \frac{cal}{g°C}$ E) $0,5\ \frac{cal}{g°C}$

53. Un recipiente de aluminio de 100 g, cuyo calor específico es de 0,22 cal/g°C, contiene 100 g de agua a 20 °C. Si el recipiente se ubica sobre un hornillo, determine la cantidad de calor que absorbe el sistema hasta el momento que el agua alcanza una temperatura de 80 °C

A) 6000 cal B) 8000 cal C) 6220 cal
D) 7320 cal E) 3220 cal

54. Un calorímetro de equivalente en agua 100 g contiene 200 g de agua a 70 °C. Si se vierten 600 g de un metal a 10 °C y la temperatura final del sistema es 40 °C, determine el calor específico del metal en $\frac{cal}{g\ °C}$

A) 0,3 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,8 E) 0,9

55. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable que contiene 200 g de agua a 20 °C, se introduce una esfera de aluminio de 5/11 kg que se encuentra a una temperatura de la esfera cuando el agua alcanza una temperatura de 40 °C ($Ce_{(Al)}$ = 0,22 cal/g°C).

A) 40 °C B) 60 °C C) 80 °C
D) 90 °C E) 100 °C

56. Indique verdadero (V) o falso (F) con respecto a dos sustancias a diferentes temperaturas.

I. La de mayor temperatura posee mayor energía cinética molecular en promedio por molécula que la de menor temperatura.
II. Si se ponen en contacto, la de mayor temperatura gana energía.
III. Si se ponen en contacto y llegan al equilibrio térmico, entonces, adquieren la misma energía interna.

A) VFF B) VVV C) FVF
D) VFV E) VVF

57. Determine la cantidad de hielo a 0 °C que hay que agregar a un recipiente de capacidad calorífica 20 cal/°C, el cual contiene 76 g de agua a 60 °C, para obtener agua líquida 40 °C

A) 15 g B) 17 g C) 18 g D) 16 g E) 20 g

58. Un calorímetro de capacidad calorífica despreciable contiene 20 g de agua a 40 °C. Si se coloca cierta cantidad de hielo a 0 °C, Se observa que la temperatura final de la mezcla es de 0 °C y se derrite todo el hielo. Determine la masa de hielo que se utilizó.

A) 2 g B) 4 g C) 6 g D) 8 g E) 10 g

59. Determine la cantidad de calor que se le debe suministrar a 5 g de hielo a −10 °C, para que se vaporice completamente.

A) 2725 cal B) 4225 cal C) 4625 cal
D) 3625 cal E) 3225 cal

60. En un recipiente térmicamente aislado se tienen 20 g de hielo a −5 °C. Si luego se le entregan 450 cal, determine la composición final que se obtiene.

A) 10 g hielo y 50 agua
B) 5 g hielo y 55 agua
C) 21 g hielo y 9 g agua
D) 20 g hielo y 0 g agua
E) 15 g hielo y 5 g agua

61. Se sabe que al colocar 1 kg de hielo a 0 °C sobre un hornillo de una cocina, se derrite al cabo de 2 min. ¿Al cabo de que tiempo después empezará a hervir el agua?

A) 1 min B) 2 min C) 2,5 min
D) 3 min E) 4 min

62. En un calorímetro ideal que contiene hielo en gran cantidad a 0 °C se colocan 5 kg de un metal a 8,5 °C. Cuando el calorímetro ha alcanzado el equilibrio térmico, se observa que 85 g de hielo se han fundido. Determine el calor especifico del metal en cal/g°C.

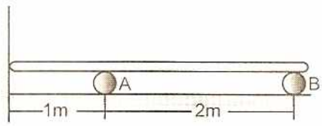
A) 0,8 B) 0,16 C) 0,025
D) 0,03 E) 0,08

63. Un reloj de péndulo metálico se adelanta 5 s por día a 15 °C y se atrasa 10 s por día a 30 °C. Determine el coeficiente de dilatación lineal del metal del cual está hecho el péndulo.

A) $20 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ B) $18 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$
C) $23 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ D) $28 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$
E) $26 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

64. Una varilla metálica ($\alpha_{metal} = 1,7 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$) de 3 m de longitud se encuentra sujeta por un extremo y apoyada sobre dos rodillos de 0,5 cm de radio. Se calienta por acción de una corriente eléctrica desde 20 °C hasta 220 °C, lo cual hace rotar a los rodillos. Determine cuanto es la diferencia de lo que rotan cada uno de los rodillos debido a la dilatación de la varilla. Desprecie los efectos térmicos sobre los rodillos.

A) 0,23 rad
B) 0,24 rad
C) 0,40 rad
D) 0,02 rad
E) 0,68 rad



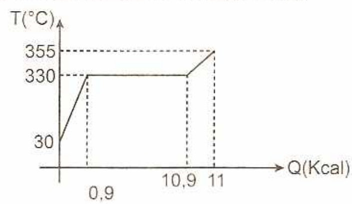
65. Un perno de acero se coloca con pequeña holguera en un orificio de una lámina de cobre, si $\alpha_{Cu} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ y $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$, entonces ocurrirá que:

A) Al calentar únicamente el perno la holguera aumentará.
B) Al calentar solamente la lámina, la holguera disminuirá
C) Al calentar ambos la holguera aumentará.
D) Al calentar ambos la holguera disminuirá.
E) Al enfriar ambos la holguera aumentará.

66. Un cubo de hielo de 100 g que se encuentra a −20 °C se coloca sobre el hornillo de una cocina cuya transferencia de calor es uniforme. Si hasta que el hielo se derrite pasan 18 s, ¿Al cabo de cuantos segundos de haberse fusionado completamente se vaporiza por completo?

A) 432 s B) 200 s C) 524 s
D) 128 s E) 324 s

67. En un laboratorio se trabajó con una sustancia que inicialmente se encontraba en su fase líquida (Ce = 0,03 cal/g°C), de tal manera que el comportamiento de su temperatura, conforme iba absorbiendo calor, se muestra en el gráfico adjunto. Determine el calor latente de vaporización y el calor especifico en su fase gaseosa.



A) 150 cal/g; 0,03 cal/g °C
B) 180 cal/g; 0,03 cal/g °C
C) 100 cal/g; 0,04 cal/g °C
D) 220 cal/g; 0,04 cal/g °C
E) 240 cal/g; 0,05 cal/g °C

68. En una jarra de capacidad calorífica 100 cal/°C se tienen 300 g de agua a 50 °C. Si una persona desea tomar el agua a 15 °C, ¿cuántos cubitos de hielo de 10 g cada uno a −10 °C se debe colocar en la jarra?

A) 5 B) 8 C) 10
D) 14 E) 6

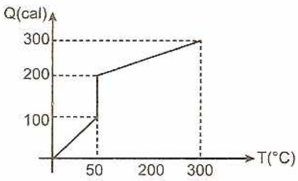
69. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tienen 65 g de agua a 20 °C. Si hacemos ingresar 20 g de hielo a −10 °C, ¿qué composición tendrá la mezcla al llegar el sistema al equilibrio térmico?

A) 85 g de agua líquida a 5 °C
B) 85 g de hielo a 0 °C
C) 85 g de hielo a −20 °C
D) 20 g de hielo y 65 g de H_2O a 0 °C
E) 5 g de hielo y 80 g de H_2O a 0 °C

70. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se mezclan 200 g de hielo a −10 °C con 50 g de vapor de agua a 100 °C. Calcule la cantidad de calor que intercambian hasta llegar al equilibrio térmico.

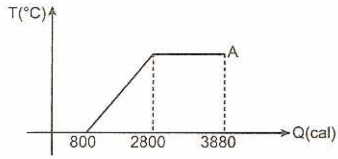
A) 20 kcal B) 23 kcal C) 19 kcal
D) 29 kcal E) 5 kcal

71. Se muestra la cantidad de calor absorbido en función de la temperatura, para 5 g de una sustancia inicialmente en fase líquida. Determine el calor latente de vaporización y el calor específico en la fase líquida.



A) 100 cal/g; 1 cal/g°C B) 200 cal/g; 0,2 cal/g°C
C) 20 cal/g; 0,2 cal/g°C D) 40 cal/g; 0,25 cal/g °C
E) 20 cal/g; 0,4 cal/g°C

72. El gráfico nos indica cómo varía la temperatura que experimenta cierta cantidad de agua con respecto al calor suministrado. Determine la cantidad de vapor que hay en A.



A) 2 g B) 9 g C) 10 g D) 11 g E) 12 g

73. En un recipiente impermeable al calor se ponen juntos 0,3 kg de hielo a 0 °C; 1,8 kg de agua a 10 °C, y 0,15 kg de vapor de agua a 100 °C. ¿Cuál es la temperatura de la mezcla una vez alcanzado el equilibrio térmico?

A) 20 °C B) 30 °C C) 40 °C
D) 50 °C E) 60 °C

74. Calcule la masa de hielo a 0 °C y la masa de vapor de agua a 100 °C, de manera que al mezclarlos en un recipiente de capacidad calorífica despreciable se obtenga 1,8 kg de agua a 0 °C.

A) 1600 g; 200 g B) 1500 g; 300 g
C) 1700 g; 100 g D) 1100 g; 700 g
E) 1200 g; 600 g

CLAVES

1. C	11. D	21. B	31. D	41. B	51. C	61. C	71. E
2. D	12. B	22. D	32. C	42. A	52. A	62. B	72. A
3. B	13. E	23. D	33. C	43. C	53. D	63. C	73. C
4. E	14. A	24. A	34. D	44. C	54. B	64. E	74. A
5. C	15. E	25. D	35. D	45. E	55. B	65. C	
6. A	16. D	26. C	36. A	46. E	56. A	66. D	
7. C	17. B	27. D	37. C	47. D	57. D	67. C	
8. A	18. B	28. B	38. B	48. B	58. E	68. D	
9. C	19. E	29. A	39. A	49. A	59. D	69. E	
10. D	20. B	30. C	40. D	50. C	60. E	70. D	

Termodinámica

14 capí

Nicolas Léonard Sadi Carnot (París, 1 de junio de 1796-24 de agosto de 1832), normalmente llamado Sadi Carnot fue un físico e ingeniero francés pionero en el estudio de la termodinámica. Licenciado en la Escuela Politécnica, en 1824 publicó su obra maestra *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas adecuadas para desarrollar esta potencia*, donde expuso las ideas que darían forma al segundo principio de la termodinámica. Estos trabajos, poco comprendidos por parte de sus contemporáneos, fueron más tarde conocidos en Alemania por Rudolf Clausius (quien los difundió) y por William Thomson (Lord Kelvin) en el Reino Unido.

Como reconocimiento a las aportaciones del primero, el principio de Carnot se rebautizó como principio de Carnot-Clausius. Este principio permite determinar el máximo rendimiento de una máquina térmica en función de las temperaturas de su fuente caliente y de su fuente fría. Poco después descubrió una relación entre las temperaturas del foco caliente y frío, además del rendimiento de la máquina. Como corolario se obtiene que ninguna máquina real alcanza el rendimiento teórico de Carnot (obtenido siguiendo el ciclo de Carnot). El ciclo de Carnot

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

Aspectos fundamentales:

1. Las sustancias tienen una estructura granulosa: toda sustancia está constituida de moléculas (átomos). Una molécula-gramo de una sustancia cualquiera contiene $N_o = 6{,}023 \times 10^{23}$ moléculas, independientemente de su estado.
2. Las moléculas se encuentran en continuo movimiento térmico (movimiento caótico).
3. El carácter del movimiento térmico de las moléculas depende del carácter de las interacciones de éstas y cambia cuando la sustancia pasa de un estado a otro.
4. La intensidad del movimiento térmico molecular depende del grado de calentamiento del cuerpo, que se caracteriza por su temperatura absoluta T. Teóricamente está demostrado que la energía promedio E_C de una molécula es directamente proporcional a la temperatura T; así por ejemplo, para las moléculas monoatómicas:

$$\boxed{E_C = \frac{3}{2}kT} \quad ...(14.1)$$

$$\boxed{k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K}} \quad ...(14.2)$$

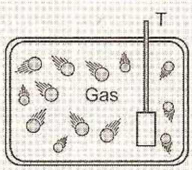
Número de Avogadro:
$N_o = 6{,}023 \times 10^{23}$

Constante de Boltzmann:

$$k = \frac{R}{N_o} = \frac{8{,}31\ \text{J/mol.K}}{6{,}023 \times 10^{23}\ \text{1/mol}}$$

$k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

GAS:



La energía cinética de cada molécula es directamente proporcional a la temperatura absoluta del gas.

5. Desde el punto de vista de la teoría cinético–molecular, la energía total E de un cuerpo es igual a la suma de los siguientes términos:

$$\boxed{E = E_C + E_P + U} \quad ...(14.3)$$

Donde E_C es la energía cinética del cuerpo en total, E_P es su energía potencial y U es la energía relacionada con el movimiento térmico de las moléculas del cuerpo. La energía U se denomina energía interna del cuerpo.

La consideración de la energía interna de un cuerpo al analizar las diferentes equiparticiones energéticas es un aspecto característico de la teoría cinético-molécular.

GAS IDEAL

Es aquel cuyas moléculas no interaccionan entre sí a distancia y tiene dimensiones propias infinitamente pequeñas. Al chocar entre sí y con las paredes del recipiente, las moléculas del gas perfecto se comportan como esferas perfectamente elásticas (su energía cinética no cambia). La energía interna es igual a la sumatoria de la energía cinética promedio de cada molécula.

Energía Interna (U)

$U = E_C \Rightarrow U = \frac{3}{2}kT$

Es la energía cinética de una molécula, de un gas ideal.
La energía interna de un sistema, de un gas ideal formado por n moles será:

$$U = 3/2\ nRT$$

ECUACIÓN DE ESTADO TERMODINÁMICO

Relaciona los parámetros, presión (P), volumen (V) y temperatura (T), de un gas ideal en estado de equilibrio termodinámico.

$$\boxed{PV = nRT} \quad ...(14.4)$$

P: presión (pascal = 1 N/m^2);
V: volumen (m^3);
n: cantidad de sustancia (mol);
R: constante universal de los gases ideales;
T: temperatura absoluta (K)

$$\boxed{R = 8{,}31\ \frac{J}{mol.K}} \quad ...(14.5)$$

Equilibrio termodinámico

Se dice que un gas ideal está en equilibrio termodinámico cuando sus variables: P, V y T, permanecen constantes en el tiempo, es decir, cuando su estado no varía.

SISTEMA AISLADO

Es aquella región del espacio que se aísla en forma real o imaginaria, con el fin de estudiar lo que ocurre dentro de ella. En este caso particular nuestro sistema aislado será el gas ideal contenido en el recipiente. En todo sistema aislado (masa constante) se cumple la siguiente relación de estados termodinámicos: (1); (2); (3); (4); (5); ...; (n).

$$\boxed{\frac{PV}{T} = nR = \text{constante}} \quad ...(14.6)$$

$$\boxed{\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3} = ... = \frac{P_nV_n}{T_n}} \quad ...(14.7)$$

Gas ideal en estudio

LEYES DE LOS GASES IDEALES

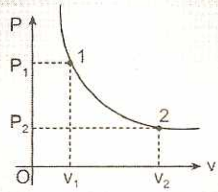
Ley de Boyle-Mariotte (T = constante)

El físico inglés Robert Boyle en 1662, y el francés Edme Marriotte en 1676, concluyeron que: A temperatura constante, el volumen (V) de un gas ideal es inversamente proporcional a la presión (P) que experimenta.

$$\boxed{T_1 = T_2 = \text{constante}} \qquad ...(14.8)$$

$$\boxed{P_1V_1 = P_2V_2} \qquad ...(14.9)$$

Isoterma: T = cte.



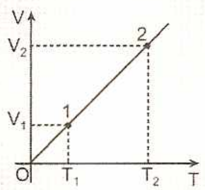
Ley de Charles (P = constante)

El físico francés Jacques Charles en 1785, descubrió que: A presión constante el volumen (V) de un gas ideal es directamente proporcional a su temperatura absoluta (T).

$$\boxed{P_1 = P_2 = \text{constante}} \qquad ...(14.10)$$

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}} \qquad ...(14.11)$$

Isóbara: P = cte.



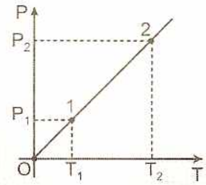
Ley de Gay Lussac (V = constante)

El físico francés Joseph Loui Gay Lussac, en 1802, propuso que: A volumen constante, la presión (P) de un gas ideal es directamente proporcional a su temperatura absoluta (T).

$$\boxed{V_1 = V_2 = \text{constante}} \qquad ...(14.12)$$

$$\boxed{\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}} \qquad ...(14.13)$$

Isócora: V = cte.



Ley de Avogadro

El físico italiano Amadeo Avogadro en 1811, estableció que: Volúmenes iguales de diferentes gases ideales a la misma temperatura y presión contienen el mismo número de moléculas.

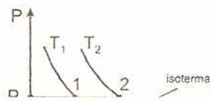
$$PV = nRT \Rightarrow \frac{PV}{RT} = n_A = n_B = n_C = \text{constante}$$

Si: $n_A = n_B = n_C = 1$ mol

Entonces: en cada recipiente existe el número de avogadro-moléculas.

$N_o = 6{,}023 \times 10^{23}$ moléculas/mol

Número de avogadro moléculas:



$n_A = 1$ mol $n_B = 1$ mol $n_C = 1$ mol

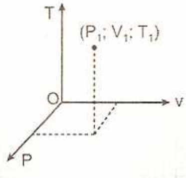
$P_A = P_B = P_C$; $V_A = V_B = V_C$; $T_A = T_B = T_C$

Cada recipiente contiene el número de avogadro moléculas.

PROCESO TERMODINÁMICO

Si cualquiera de los parámetros P; V; T de un sistema varía, se produce una variación del estado termodinámico del sistema, que se llama proceso termodinámico.

Estado termodinámico. Es una característica del sistema aislado. El estado termodinámico de un sistema queda determinado mediante las coordenadas: presión (P); volumen (V) y temperatura (T).



Un proceso termodinámico se dice que se desarrolla en equilibrio (proceso cuasiestático) si el sistema recorre con una lentitud infinita una serie continua de estados termodinámicos en equilibrio infinitamente próximos.

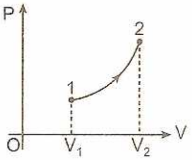


Fig. 14.1

La figura 14.1 representa un proceso termodinámico en equilibrio, pasando del estado (1) al estado (2):

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

◄ ENERGÍA INTERNA (U)

La energía interna de una sustancia se define como la sumatoria de todas las formas de energía asociadas a las moléculas que la constituyen. En el caso de un gas ideal (moléculas monoatómicas), la energía interna es igual a la sumatoria de la energía cinética promedio de cada molécula.

La energía interna de un sistema aislado de un gas ideal, formado por n moles:

$$\boxed{U = \frac{3}{2}nRT} \qquad ...(14.14)$$

Temperatura absoluta (T). La energía interna de un gas ideal, depende exclusivamente de la temperatura absoluta.

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

U: energía interna (J); n : cantidad de sustancia (mol);
R: constante universal; T : temperatura (K)

$$R = 8,31\ \frac{J}{mol.K}$$

En todo proceso termodinámico, la variación de la energía interna, no depende de los estados intermedios, solamente de los estados inicial y final.

$$\boxed{\Delta U = U_2 - U_1} \qquad ...(14.15)$$

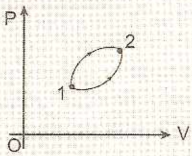
$$\Delta U = \frac{3}{2}nRT_2 - \frac{3}{2}nRT_1$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{3}{2}nR\,(T_2 - T_1)} \qquad ...(14.16)$$

Independiente del camino
La variación de la energía interna es independiente del camino seguido durante el proceso termodinámico.

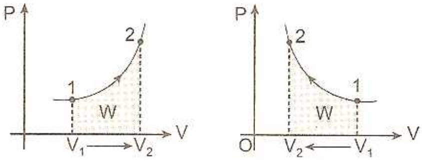
$$\Delta U = U_2 - U_1$$

U_1: energía interna inicial
U_2: energía interna final



◄ TRABAJO (W)

Cuando el sistema evoluciona de un estado termodinámico (1) hasta un estado final (2), el trabajo realizado por el sistema no depende solo de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios, es decir, del camino seguido. El trabajo realizado por el sistema, es numéricamente igual al área bajo la curva en el diagrama P-V.

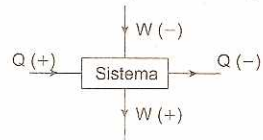


Cuando el gas se expande (el volumen aumenta) el trabajo realizado es positivo. Si el gas se comprime (el volumen disminuye) el trabajo realizado por el sistema es negativo.

$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \text{Área sombreada}} \qquad ...(14.17)$$

◄ PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Del principio de conservación de la energía se cumple que: En todo proceso termodinámico se cumple que la cantidad de calor entregado o sustraído a un sistema, es igual al trabajo realizado por o sobre el sistema, más el cambio de la energía interna experimentado por el sistema.

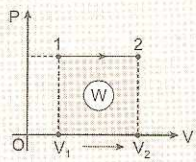


$$\boxed{Q = W + U} \qquad ...(14.18)$$

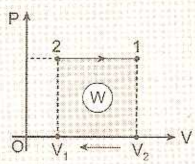
Q(+): calor entregado al sistema
Q(−): calor liberado por el sistema
W(+): trabajo realizado por el sistema
W(−): trabajo realizado sobre el sistema
ΔU(+): aumenta la temperatura del sistema
ΔU(−): disminuye la temperatura del sistema

Importante:

a) Trabajo positivo



b) Trabajo negativo

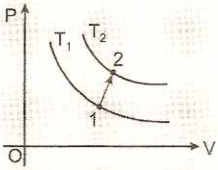


W (-): trabajo realizado sobre el sistema.

Variación de U

La variación de la energía inerna U depende sólo de las temperaturas inicial y final, T_1 y T_2 respectivamente.

$\Delta U = \frac{3}{2} nR\,(T_2 - T_1)$



CAPACIDAD CALORÍFICA MOLAR

La temperatura de un gas puede elevarse bajo condiciones muy diferentes, manteniendo la presión constante o manteniendo el volumen constante. En cada caso la cantidad de calor, por cada mol, necesaria para elevar en un grado la temperatura del gas, será diferente.

Capacidad calorífica molar a volumen constante (Cv)

Se define como la cantidad de calor por cada mol de sustancia para elevar la temperatura en un grado, sin que varíe su volumen.

$$\boxed{C_V = \frac{Q}{n\Delta T}} \qquad \text{...(14.19)}$$

Unidades: $\frac{J}{mol.K}$; $\frac{cal}{mol.^\circ C}$

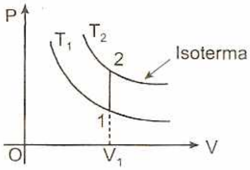


Fig. 14.2

Cantidad de calor entregado al sistema:

$$\boxed{Q = nC_V\Delta T} \qquad \text{...(14.20)}$$

Primera ley de la termodinámica:

$$\boxed{Q = W + \Delta U} \qquad \text{...(14.21)}$$

El trabajo realizado, en un proceso a volumen constante es igual a cero, W = 0, como se ve en la figura 14.2.

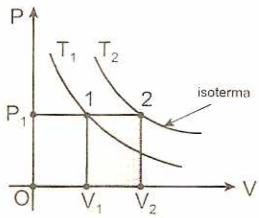
Reemplazando (14.20) en (14.21): $nC_V\Delta T = 0 + \Delta U$

$$\boxed{\Delta U = nC_V\,\Delta T} \qquad \text{...(14.22)}$$

Capacidad calorífica molar a presión constante (C_P)

Se define como la cantidad de calor, por cada mol de sustancia necesaria para elevar la temperatura en un grado, sin que varíe la presión.

$$\boxed{C_P = \frac{Q}{n\Delta T}} \qquad \text{...(14.23)}$$



Cantidad de calor entregado al sistema:

$$\boxed{Q = nC_P\Delta T} \qquad \text{...(14.24)}$$

Primera ley de la termodinámica:

$$\boxed{Q = W + \Delta U} \qquad \text{...(14.25)}$$

El trabajo realizado por el sistema a presión constante es:

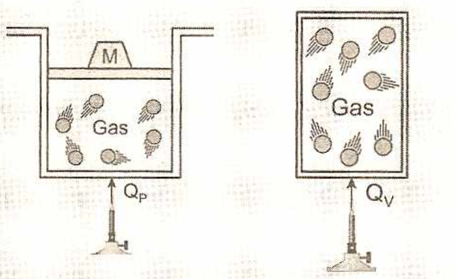
$$\boxed{W = P(V_2 - V_1) = P\Delta V} \qquad \text{...(14.26)}$$

Reemplazando (14.22), (14.24), (14.26) en (14.25):

$nC_P\Delta T = P\Delta V + nC_V\Delta T \Rightarrow nC_P\Delta T = nR\Delta T + nC_V\Delta T$

$$\boxed{C_P - C_V = R} \qquad \text{...(14.27)}$$

A presión constante **A volumen constante**



«El trabajo realizado en un proceso a volumen constante es igual a cero».

$$W = 0$$

Relación entre C_P y C_V: $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$

1. Para gases monoatómicos:
   helio, neón, argón, criptón, xenón,...
   $C_P = \frac{5}{2}R$ y $C_V = \frac{3}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$
2. Para gases diatómicos:
   hidrógeno, nitrógeno, oxígeno, monóxido de carbono (CO), ...
   $C_P = \frac{7}{2}R$ y $C_V = \frac{5}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$
3. Para gases poliatómicos:
   Cloruro de hidrógeno (HCl), vapor de agua (H_2O), anhidrido carbónico (CO_2), metano (CH_4), amoniaco (NH_3),...
   $C_P = \frac{4}{2}R$ y $C_V = \frac{3}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}$

PROCESOS TERMODINÁMICOS

Proceso isobárico (P = constante)

Es aquel proceso termodinámico realizado por el sistema (gas ideal), evolucionando de un estado (1) hasta un estado (2), manteniendo constante la presión, para lo cual recibe o libera calor. Durante el proceso realiza trabajo y modifica su energía interna, por consiguiente varía su temperatura.

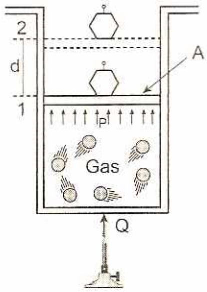


Fig. 14.3

- Cantidad de calor entregado:
  $Q = nC_p\Delta T$
- Trabajo realizado por el sistema:
  $W = Fd = (PA)d = P(Ad)$
  $W = P(V_2 - V_1)$
  $W = P\Delta V$

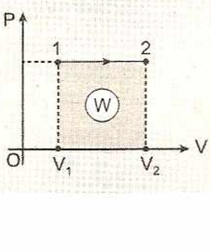
Cantidad de sustancia (n) $\quad n = \dfrac{m}{M}$

m = masa de la sustancia gaseosa
M = masa molecular de la sustancia.

Masa molecular de algunas sustancias		
H_2O: 18,016	O_2: 32,000	N_2: 28,016
H_2: 2,016	He: 4,003	Aire: 28,967

- Variación de la energía interna, de la primera ley de la termodinámica: $Q = W + \Delta U$
  $\Delta U = Q - W \Rightarrow \Delta U = nC_p\Delta T - P\Delta V$
- Ley de Charles (P = constante):
  $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$

Diagrama P-V
$P_1 = P_2 =$ constante
$W = P(V_2 - V_1)$
El trabajo realizado es igual al área del rectángulo.

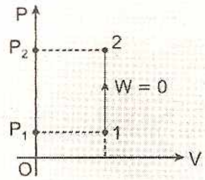


Proceso isócoro (V = constante)

Es aquel proceso termodinámico, en el cual el sistema evoluciona del estado (1) al estado (2), manteniendo el volumen constante. En este proceso el sistema no realiza trabajo, el calor entregado sirve para incrementar la energía interna.

- Cantidad de calor entregado:
  $Q = nC_V\Delta T$
- Trabajo realizado por el sistema:
  $W = Fd$, pero: $d = 0 \Rightarrow W = 0$
- Variación de la energía interna:
  De la primera ley de la termodinámica:
  $Q = W + \Delta U \Rightarrow Q = 0 + \Delta U \Rightarrow \Delta U = Q$
  $\Rightarrow \Delta U = nC_V\,\Delta T$
  Todo el calor que recibe para incrementar su energía interna.
- Ley de Gay Lusacc (V = constante): $\dfrac{P_1}{T_1} = \dfrac{P_2}{T_2}$

Diagrama P-V: $V_1 = V_2 =$ constante
Si el volumen se mantiene constante, el sistema no realiza trabajo.

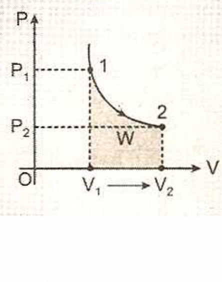


Proceso isotérmico (T = constante)

Es aquel proceso termodinámico en el cual el sistema evoluciona del estado (1) al estado (2), manteniendo la temperatura constante. Todo el calor entregado al sistema se transforma en trabajo.

- Variación de la energía interna:
  La energía interna solo depende de la temperatura, entonces si $T_1 = T_2$: $U_1 = U_2 \Rightarrow \Delta U = 0$
- Trabajo realizado por el sistema:
  Primera ley de la termodinámica:
  $Q = W + \Delta U$, pero: $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$
  Sabemos que:
  $W = nRTLn(V_2/V_1)$
- Calor entregado al sistema:
  $Q = nRTLn(V_2/V_1)$
- Ley de Boyle-Mariotte
  $P_1V_1 = P_2V_2$

Diagrama P-V:
El trabajo realizado por el sistema, es igual al área bajo la curva.
$W_{1\to2} = nRTLn(V_2/V_1)$



Proceso adiabático ($Q = 0$)

Es aquel proceso termodinámico, durante el cual no existe transferencia de calor, se aprovecha la energía interna de la sustancia (gas ideal) para realizar trabajo.

- Calor entregado: $Q = 0$
- Trabajo realizado por el sistema:

  $W = \dfrac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma}$; $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$

  También:

  $W = -nC_V(T_2 - T_1)$
- Variación de la energía interna:

  Primera ley de la termodinámica:

  $Q = W + \Delta U \Rightarrow \Delta U = Q - W$.

  Pero: $Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -W$

  El trabajo realizado es igual a la variación de la energía interna.

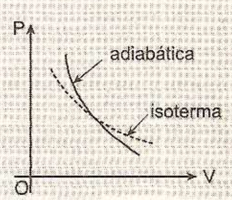
  Ecuación general de los gases ideales: $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$

  Además:

  $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$, donde: $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$

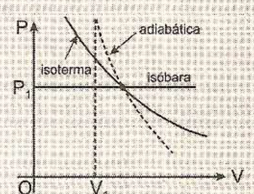
Diagrama P-V:

La adiabática tiene mayor pendiente absoluta que la isoterma.



Tres líneas notables

1. Isoterma:
   PV^1 = constante
2. Adiabática:
   PV^{γ} = constante
3. Isóbara:
   PV° = constante



MANÓMETROS Y BARÓMETROS

Un manómetro es un aparato que sirve para medir la presión de los gases contenidos en recipientes cerrados. Existen, básicamente, dos tipos de manómetros: los de líquidos y los metálicos. Los manómetros de líquidos emplean, por lo general, mercurio que llena un tubo en forma de J. El tubo puede estar o abierto por ambas ramas o abierto por una sola. En ambos casos la presión se mide conectando al recipiente que contiene el gas el tubo por su rama inferior y abierta y determinando el desnivel h de la columna de mercurio entre ambas ramas. Si el manómetro es de tubo abierto entonces es necesario tomar en cuenta la presión atmósferica P_{atm} en la ecuación:

$$\boxed{P = P_{atm} \pm rgh} \quad ...(14.28)$$

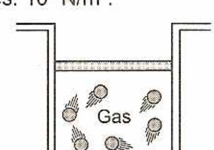
Si es de tubo cerrado, la presión vendrá dada directamente por $P = rgh$. Los manómetros de este segundo tipo permiten, por sus características, la medida de presiones elevadas. En los manómetros metálicos la presión del gas da lugar a deformaciones en una cavidad o tubo metálico.

Estas deformaciones se transmiten a través de un sistema mecánico a una aguja que marca directamente la presión del gas sobre una escala graduada.

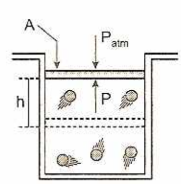
El barómetro es el aparato con el que se mide la presión atmosférica. Como en el caso de los manómetros, los hay también de mercurio y metálicos. Los primeros se basan en el dispositivo utilizado por Torricelli en sus experimentos. El llamado barómetro de fortín es, de hecho, una reproducción mejorada del aparato de Torricelli. Su cubeta posee un fondo compuesto de un material flexible, por lo que puede ser alterado mediante un tornillo auxiliar con el fin de conseguir ajustar el nivel del mercurio de la cubeta al cero de la escala graduada cada vez que se efectúa una medida. Los barómetros de sifón son simples manómetros de tubo cerrado en los cuales la rama corta del tubo en J hace las veces de cubeta y la rama larga de tubo de Torricelli.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura mostramos un cilindro vertical cerrado por un pistón liso de peso despreciable cuya sección es de 0,5 m^2. Si el volumen del gas se expande lentamente hasta que el pistón ascienda 20 cm, halle el trabajo que produce este gas. La presión atmosférica es: 10^5 N/m^2.



Resolución:



Si el pistón sube lentamente, la presión del gas (P) equivale a la presión atmosférica (P_{atm}), por consiguiente el proceso es considerado con presión constante (isobárico):

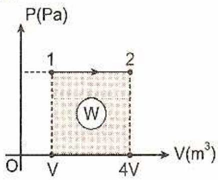
$W = P(V_2 - V_1) = P\Delta V$

$W = PAh$, pero: $P = P_{atm} = 10^5\ N/m^2$

$W = (10^5)(0{,}5)(0{,}2) \quad \therefore\ W = 10\ kJ$

2. Isobáricamente a la presión de 400 Pa el volumen de un gas ideal se expande hasta cuadriplicarse, si en este proceso el gas desarrolla un trabajo de 90 J, encuentre el volumen inicial que ocupa el gas.

Resolución:



Representamos el proceso isobárico.

El trabajo que realiza el gas es igual al área sombreada:

$W = P(V_2 - V_1) \Rightarrow 90\ J = (400)(4V - V)$

$\therefore\ V = 0{,}075\ m^3$

3. A la presión de una atmósfera ($10^5\ N/m^2$) y a 100 °C un gramo de agua (1 g) ocupa 1 cm^3 y al evaporarse ocupa 1671 cm^3. Halle el trabajo que desarrolla el gramo de agua al vaporizarse.

Resolución:

Cuando el gramo de agua se vaporiza la presión externa permanece constante, $P = 10^5\ N/m^2$.

El volumen inicial y final es:

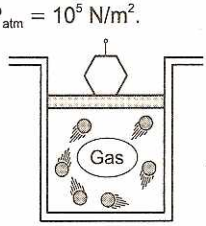
$V_1 = 1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3$; $V_2 = 1671\ cm^3 = 1671(10^{-6}\ m^3)$

En el proceso isobárico el trabajo es:

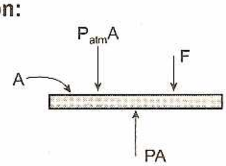
$W = P(V_2 - V_1) \Rightarrow W = (10^5)(1670)(10^{-6})$

$\therefore\ W = 167\ J = 40{,}08\ cal$

4. La figura muestra un cilindro cerrado por un pistón que carece de fricción, de 0,6 m^2 de sección y peso despreciable sobre el cual hay un bloque de peso 24 kN. Hallar el trabajo que desarrolla el gas cuando el pistón sube lentamente 10 cm. Presión atmosférica: $P_{atm} = 10^5\ N/m^2$.



Resolución:



Considerando que el pistón sube lentamente, establecemos la condición de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow PA = P_{atm}A + F$

$P = P_{atm} + \dfrac{F}{A} \Rightarrow P = 10^5 + \dfrac{24\,000}{0{,}6}$

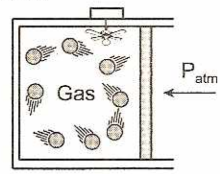
$\Rightarrow P = 140\,000\ N/m^2$

Si el pistón sube lentamente podemos considerar que la presión (P) del gas permanece constante y el proceso será considerado isobárico, luego el trabajo es:

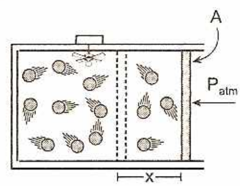
$W = P(V_2 - V_1) = PAh$

$\Rightarrow W = (140\,000)(0{,}6)(0{,}1) \quad \therefore\ W = 8400\ J$

5. Un gas ideal está encerrado por un pistón liso cuya sección es de 0,4 m^2. Si el gas se expande de manera que el pistón avanza 5 cm y el ventilador proporciona un trabajo de 900 J, encuentre el trabajo neto que realiza el gas. Presión atmosférica: $P_{atm} = 10^5\ N/m^2$.



Resolución:



El trabajo realizado por el ventilador es: 900 J

El trabajo realizado por el medio ambiente (aire) es:

$W_{AIRE} = P_{atm}(V_2 - V_1) = P_{atm}Ax$

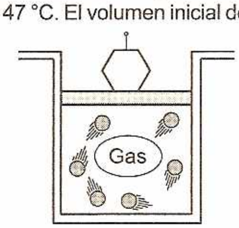
$W_{AIRE} = (10^5)(0{,}4)(0{,}05) \Rightarrow W_{AIRE} = 2000\ J = 2\ kJ$

Del teorema de la energía cinética, el trabajo total realizado sobre el pistón es nulo, por consiguiente el trabajo que realiza el gas, más el trabajo del ventilador, es igual al trabajo que realiza la presión atmosférica (aire):

$W_{GAS} + W_{VENTI} = W_{AIRE} \Rightarrow W_{GAS} + 900\ J = 2000\ J$

$\therefore\ W_{GAS} = 1100\ J$

6. Calcular el trabajo que realiza un gas ideal cuando se calienta isobáricamente ($P = 2 \times 10^5\ N/m^2$) desde 27 hasta 147 °C. El volumen inicial del gas es 5 litros.



Resolución:

El volumen inicial es: $V_1 = 5\ L = 5 \times 10^{-3}$

Cálculo del volumen final: $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$

Donde: $P_1 = P_2 = 2 \times 10^5$

$\Rightarrow T_1 = 27 + 273 = 300\ K$

$\Rightarrow T_2 = 147 + 273 = 420\ K$

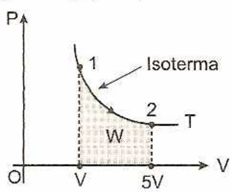
Reemplazando:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{5 \times 10^{-3}}{300} = \frac{V_2}{420} \Rightarrow V_2 = 7\ L = 7 \times 10^{-3}\ m^3$$

El trabajo en un proceso isobárico se halla con la fórmula: $W = P(V_2 - V_1)$

$W = (2 \times 10^5)(2 \times 10^{-3}) \quad \therefore W = 400\ J$

7. Un cilindro contiene 6 moles de cierto gas a la temperatura de 27 °C, si desplazando el pistón logramos quintuplicar el volumen del gas conservando la temperatura constante, encuentre el trabajo que desarrolla el gas. Ln(5) = 1,61.



Resolución:

Representamos el proceso isotérmico.

La temperatura absoluta es: $T = 27 + 273 = 300\ K$

El trabajo del gas es el área sombreada, y se consigue con la siguiente fórmula:

$$W = nRTLn\left[\frac{V_f}{V_0}\right]$$

Pero: $V_0 = V$ y $V_f = 5\ V$

Reemplazando en la fórmula tenemos:

$W = (6)(8{,}31)(300)(1{,}61)$

$\therefore W = 24\ kJ$

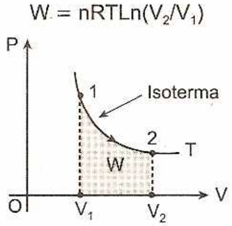
8. Encuentre el trabajo en expansión de un gas desde un volumen inicial de 5 litros hasta un volumen final de 40 litros, conservando la temperatura constante. La presión inicial del gas es $2 \times 10^5\ N/m^2$. Considere: Ln8 = 2,08.

Resolución:

El volumen inicial es: $V_1 = 5\ L = 5 \times 10^{-3}$. La presión inicial es: $P_1 = 2 \times 10^5\ N/m^2$.

En un proceso isotérmico el trabajo se calcula con la fórmula:

$$W = nRTLn(V_2/V_1)$$



Pero: $P_1V_1 = P_2V_2 = nRT$ y $W = P_1V_1Ln(V_2/V_1)$

Reemplazando:

$W = (2)(10^5)(5)(10^{-3})Ln(8) \quad \therefore W = 2080\ J$

9. Si 4 moles de un gas ideal es comprimido isotérmicamente (T = 27 °C) hasta que su presión absoluta se quintuplique, hallar el trabajo que realiza el gas. Considere: Ln(0,2) = −1,61.

Resolución:

La temperatura absoluta es:

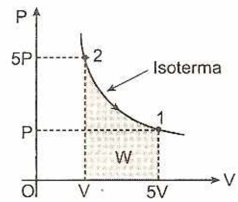
$T = 27 + 273 = 300\ K$

En un proceso isotérmico se cumple que:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{5}$$

Graficamos el proceso isotérmico:

$P_1 = P \Rightarrow P_2 = 5P$; $V_1 = 5V \Rightarrow V_2 = V$

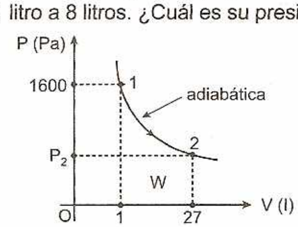


El trabajo se determina calculando el área sombreada, con la siguiente fórmula:

$W = nRTLn(V_2/V_1)$

$W = (4)(8{,}31)(300)Ln(0{,}2) \quad \therefore W = -16\ kJ$

10. La presión de un gas ideal es de 1600 Pa, siguiendo un proceso adiabático ($\gamma = 5/3$) logra variar su volumen de 1 litro a 8 litros. ¿Cuál es su presión final?



Resolución:

Representamos el proceso adiabático.

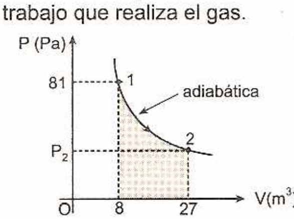
En todo proceso adiabático se cumple que:

$PV^\gamma = \text{constante}$

$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \Rightarrow 1600(1)^{5/3} = P_2(8)^{5/3}$

$1600 = P_2(32) \quad \therefore P_2 = 50\ Pa$

11. Cuando la presión de un gas es 81 Pa ocupa un volumen de 8 m^3, siguiendo un proceso adiabático ($\gamma = 4/3$) se expande hasta ocupar un volumen de 27 m^3. Hallar el trabajo que realiza el gas.



Resolución:

Representamos el proceso adiabático.

En todo proceso adiabático se cumple que:

$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \Rightarrow 81(8)^{4/3} = P_2(27)^{4/3} \Rightarrow P_2 = 16$ Pa

El trabajo realizado por el gas es igual al área sombreada y se consigue con la fórmula:

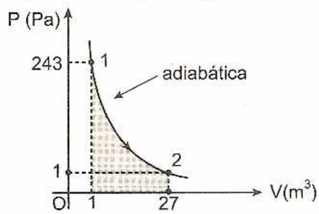
$$W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma} \Rightarrow W = \frac{(16)(27)-(81)(8)}{1-\frac{4}{3}} = \frac{432-648}{-\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ W = 648 J

12. En un plano P-V se muestra un proceso adiabático que evoluciona de 1 a 2. Hallar:

a) El coeficiente adiabático (γ).

b) El trabajo realizado por el gas ideal.



Resolución:

a) En todo proceso adiabático se cumple que:

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left[\frac{V_2}{V_1}\right]^{\gamma}$$

Reemplazando:

$$\frac{243}{1} = \left[\frac{27}{1}\right]^{\gamma} \Rightarrow 3^5 = (3^3)^{\gamma} \therefore \gamma = \frac{5}{3}$$

b) El trabajo realizado por el gas es igual al área sombreada en el diagrama P-V, y se consigue con la siguiente fórmula:

$$W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma} \Rightarrow W = \frac{(1)(27)-(243)(1)}{1-\frac{5}{3}} = \frac{-216}{-\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ W = 324 J

13. Una botella contiene hidrógeno (H_2) a la presión 831×10^4 Pa, cuya densidad es 4 kg/m^3. Determinar la temperatura del gas. Masa atómica(H) = 0,001 kg.

Resolución:

La ecuación de estado de un gas ideal:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow PM = \frac{m}{V}RT$$

PM = DRT

M: masa molecular del gas (H_2) y D: densidad del gas

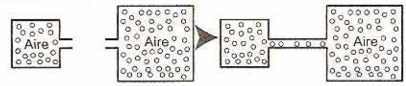
$$T = \frac{PM}{DR} \Rightarrow T = \frac{(831\times 10^4)(2\times 10^{-3})}{8,31(4)}$$

$\therefore$ T = 500 K

14. Se hace el vacío en dos frascos de 100 mL y 1000 mL, llegándose en el primero hasta una presión de 10 torr y en el segundo hasta 21 torr. Luego se unen entre sí, mezclándose el aire que contienen. Considerando un proceso isotérmico, halle la presión final en torr.

Considere: la presión atmosférica = 760 torr.

Resolución:



V_1 = 100 mL V_2 = 1000 mL V = 1100 mL

P_1 = 10 torr P_2 = 21 torr

De la ecuación universal de los gases ideales:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT}$$

Del principio de conservación de la masa:

$$n_{aire(1)} + n_{aire(2)} = n_{aire}$$

$$\frac{P_1V_1}{RT} + \frac{P_2V_2}{RT} = \frac{PV}{RT} \Rightarrow P_1V_1 + P_2V_2 = PV$$

(10)(100) + (21)(1000) = P(1100) $\therefore$ P = 20 torr

15. Se suministra 500 J de energía calorífica en cierto proceso en el cual el gas se expande realizando un trabajo de 120 J. Halle la variación de la energía interna.

Resolución:

De la primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U \Rightarrow 500 = 120 + \Delta U$

$\therefore \Delta U = 380$ J

16. Sobre un sistema se realiza 350 kJ de trabajo y absorbe 150 kJ de energía calorífica. Determinar la variación de la energía interna. ¿Aumenta o disminuye la temperatura?

Resolución:

Primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U$

Q(+): cantidad de calor que recibe el sistema = 150 kJ

W(−): cantidad de trabajo realizado sobre el sistema

W = −350 kJ

$150 = -350 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = +500$ kJ

La energía interna se incrementa en 500 kJ. La temperatura aumenta.

17. Un sistema absorbe 450 kJ de energía calorífica y luego realiza 200 kJ de trabajo. Determinar la variación de la energía interna. ¿Aumenta o disminuye la temperatura?

Resolución:

Primera ley de la termodinámica:

Q(+): cantidad de calor que recibe el sistema = 450 kJ

W(+): cantidad de trabajo que realiza el sistema = 200 kJ

$450 = 200 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = +250$ kJ

La energía interna se incrementa en 250 kJ. La temperatura aumenta.

18. En cierto proceso, 5 moles de gas monoatómico incrementan su temperatura de 50 hasta 90 °C. Hallar la variación de la energía interna que experimenta el gas.

Resolución:

Para cualquier gas monoatómico se cumple que:

$$C_V = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}(8,31) = 12,465\,\frac{J}{mol.K}$$

En cualquier proceso la variación de la energía interna se halla con la siguiente fórmula:

$$\Delta U = nC_V\Delta T \Rightarrow \Delta U = (5)(12,465)(40)$$

$$\therefore\ \Delta U = 2493\ J$$

19. Cierta variedad del virus del tabaco tiene una masa molecular igual a 40×10^6. Hallar el número de moléculas de virus contenidas en 1 cm^3 de una solución con 0,10 mg/cm^3 de virus. ($N_A = 6,02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$).

Resolución:

$$C_P = \left(\frac{Y}{2}+1\right)\frac{R}{M} = \left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{8,31\times10^3}{30}\right)$$

$$C_P = 969,5\ J/kg$$

El monóxido de carbono (CO) es diatónico (y = 5) su calor específico a presión constante es:

$$C_P' = \left(\frac{Y}{2}+1\right)\frac{R}{M} = \left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{8,31\times10^3}{28}\right)$$

$$C_P = 1038,75\ J/kg$$

$$\frac{C_P'}{C_P} = \frac{1038,75}{969,5} \Rightarrow \frac{C_P'}{C_P} \approx 1,1\ \text{veces}$$

20. Dos botellas iguales se encuentran unidas por un tubo con una válvula que deja pasar el gas de una botella a la otra cuando la diferencia de presión alcanza $\Delta P \geq 1,10$ atm. Inicialmente una de las botellas estaba vacia, y en la otra había un gas ideal a la temperatura de T_1 = 27 °C y a la presión de P_1 = 1,0 atm. Luego, ambas botellas fueron calentadas hasta la temperatura T_2 = 107 °C. ¿A cuánto llego la presión del gas en la botella que estaba vacía?

Resolución:

$$P_1V = n_1RT_1 \Rightarrow n_1 = \frac{P_1V}{RT_1}$$

$$(P_2+\Delta P)V = n_1'RT_2 \Rightarrow n_1' = \frac{(P_2+\Delta P)V}{RT_2}$$

Sustituyendo n_1, n_1' en la ecuación:

$$P_2V = (n_1 - n_1')RT_2$$

$$P_2V = \left[\frac{P_1}{RT_1}V - \left(\frac{P_2+\Delta P}{RT_2}\right)V\right]RT_2$$

$$P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1 - P_2 - \Delta P$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(P_1\frac{T_2}{T_1} - \Delta P\right)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left[\left((1)\frac{380}{300}\right) - 1,1\right]$$

$$\therefore\ P_2 = 0,08\ atm$$

21. Un recipiente de volumen V = 20 L contiene una mezcla de hidrógeno y helio a la temperatura 20° C, siendo su presión P = 2,0 atm. y la masa de la mezcla m = 5,0 g. Hallar la razón (m_1/m_2) de las masas del hidrógeno (m_1) y del helio (m_2) en la mezcla (R = 8,31 J/mol.°C).

Resolución:

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT$$

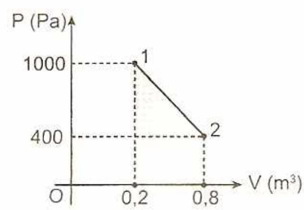
$$M = \frac{mRT}{PV} = \frac{(5\times10^3)(8,31\times10^3)(293)}{(2)(1,013\times10^5)(20\times10^3)} = 3,0\ kg/kmol$$

$$M = \frac{m_1+m_2}{(m_1/M_1)+(m_2/M_2)}$$

$$M = \frac{m_1/m_2+1}{(m_1/m_2M_1)+(1/M_2)}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1-M/M_2}{M/M_1-1} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}-1} \quad \therefore\ \frac{m_1}{m_2} = 0,5$$

22. El diagrama P-V muestra el proceso termodinámico de cierto gas, del estado 1 donde U_1 = 400 J hasta el estado 2 donde U_2 = 600 J. Halle el calor suministrado en el proceso 1 → 2.



Resolución:

La variación de la energía interna es:

$$\Delta U = U_2 - U_1 \Rightarrow \Delta U = 600 - 400 = 200\ J$$

El trabajo realizado es igual al área sombreada (trapecio):

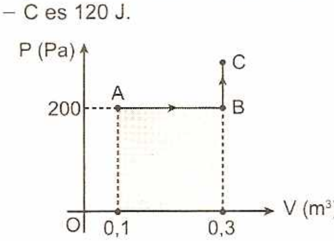
$$W = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(400+1000)}{2}(0,6) = 420\ J$$

De la primera ley de la termodinámica:

$$Q = W + \Delta U$$

$$Q = 420 + 200 \quad \therefore\ Q = 620\ J$$

23. En el diagrama P-V se representa el proceso termodinámico de cierto gas. La energía interna en A es 10 J, encuentre la energía interna en C sabiendo que el calor suministrado en el proceso A – B – C es 120 J.



Resolución:

El trabajo realizado en el proceso A – B – C es igual al área sombreada:

$W = bh = (0{,}2)(200) = 40\ J$

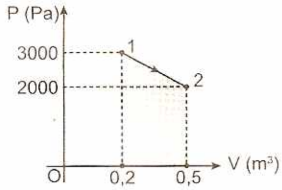
De la primera ley de termodinámica:

$Q = W + \Delta U \Rightarrow 120 = 40 + \Delta U$

Luego: $\Delta U = 80\ J$

Pero: $U_C - U_A = 80 \Rightarrow U_C - 10 = 80 \quad \therefore U_C = 90\ J$

24. En el diagrama P-V se muestra el proceso de 1 a 2 de un gas ideal cuando recibe 900 J de energía calorífica. Encuentre el incremento de su energía interna.



Resolución:

El trabajo realizado por el gas es igual al área sombreada (trapecio):

$$W = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(2000+3000)}{2}(0{,}3) = 750\ J$$

De la primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U \Rightarrow 900 = 750 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = 150\ J$

25. Un gas ideal experimenta un proceso a presión constante ($P = 2 \times 10^5\ N/m^2$) desde un volumen inicial de 1 litro hasta un volumen final de 5 litros. Si el calor transferido es 1 kJ, halle la variación de la energía interna que experimenta el gas.

Resolución:

Los volúmenes son:

$V_1 = 10^{-3}\ m^3 \quad y \quad V_2 = 5 \times 10^{-3}\ m^3$

En un proceso isobárico el trabajo realizado por el gas es:

$W = P(V_2 - V_1) \Rightarrow W = (2)(10^5)(4 \times 10^{-3})$

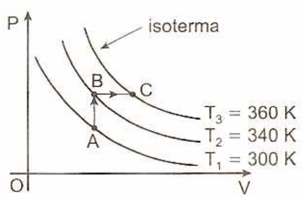
$\Rightarrow W = 800\ J$

De la primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U \Rightarrow 1000 = 800 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = 200\ J$

26. En un diagrama P-V se muestra un proceso A–B–C, donde AB: isócoro y BC: isobárico, de 3 mol de cierto gas monoatómico. Halle la cantidad de calor suministrado en todo el proceso.

$$C_V = 3\frac{cal}{molK} \quad y \quad C_P = 5\frac{cal}{molK}$$



Resolución:

Cálculo del calor Q_V en el proceso isócoro AB:

$Q_V = nC_V\Delta T = (3)(3)(40) \Rightarrow Q_V = 360\ cal$

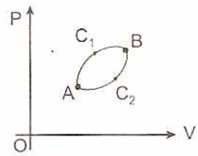
Cálculo del calor Q_P en el proceso isobárico BC:

$Q_P = nC_P\Delta t = (3)(5)(20) \Rightarrow Q_P = 300\ cal$

La cantidad de calor total suministrado al gas es:

$Q = Q_V + Q_P = 360 + 300 \quad \therefore Q = 660\ cal$

27. En el diagrama P-V se muestra dos procesos. En el proceso C_1 se suministra 400 J y el gas ideal realiza un trabajo de 150 J. Halle el calor suministrado en el proceso C_2 sabiendo que el gas realizó un trabajo de 120 J en dicho proceso.



Resolución:

La variación de la energía interna (ΔU) no depende del camino que sigue el proceso termodinámico sino solamente de los estados inicial y final.

Luego: $\Delta U_1 = \Delta U_2$.

En el proceso C_1, aplicamos la primera ley de termodinámica: $Q_1 = W_1 + \Delta U_1$

$400 = 150 + \Delta U_1 \Rightarrow \Delta U_1 = 250\ J$

En el proceso C_2, aplicamos la primera ley de la termodinámica: $Q_2 = W_2 + \Delta U_2$

$Q_2 = 120 + 250 \quad \therefore Q_2 = 370\ J$

28. Una botella contiene hidrógeno (gas) a la presión de $8{,}31 \times 10^6$ Pa y una temperatura de 127 °C. Determinar la densidad del gas. Masa atómica (H) = 0,001 kg.

Resolución:

La ecuación de estado de un gas ideal:

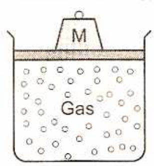
$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow PM = \frac{m}{V}RT \Rightarrow PM = DRT$$

Densidad del gas (H_2): $D = \dfrac{PM}{RT}$ ...(1)

Reemplazando en (1), en el SI:

$$D = \frac{(8{,}31 \times 10^6)(2 \times 10^{-3})}{8{,}31(400)} \quad \therefore D = 5\ kg/m^3$$

29. En el sistema termodinámico mostrado se produce un proceso isotérmico (T = constante). El pistón desciende 0,5 m. Hallar el calor disipado al medio ambiente. El bloque tiene una masa M = 400 kg y desprecie el peso del pistón. (g = 10 N/kg)



Resolución:

En todo proceso termodinámico a temperatura constante, la energía interna U se mantiene constante:

$DU = 0$ ...(1)

Cálculo del trabajo realizado sobre el sistema:

$W = Fd = (Mg)d$

$W = (4000)(0,5) \Rightarrow W = 2,0$ kJ ...(2)

Primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $Q = -2 + 0$

Luego: $Q = -2,0$ kJ

30. Un sistema termodinámico evoluciona desde un estado (1), $P_1 = 10$ kN/m^2; $V_1 = 2$ m^3, hasta un estado (2); $V_2 = 8$ m^3, isobáricamente. Si recibe una cantidad de calor: $Q = 100$ kJ, hallar el cambio de energía interna del sistema.

Resolución:

Cálculo del trabajo realizado por el sistema, a presión constante: $W = P(V_2 - V_1)$

$W = 10^4(8 - 2) \Rightarrow W = 60$ kJ ...(1)

Primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$100 = 60 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = 40$ kJ

31. Un sistema termodinámico realiza un proceso isócoro (V = constante) obteniendo calor de una resistencia eléctrica $R = 20\ \Omega$, por el cual circula una corriente $i = 10$ amperes, durante 1 minuto. Hallar la variación de la energía interna del sistema.

Resolución:

En todo proceso termodinámico a volumen constante, el trabajo realizado por el sistema es igual a cero:

$W = 0$ ...(1)

Cálculo del calor entregado al sistema.

Ley de Joule – Lenz: $Q = i^2Rt$

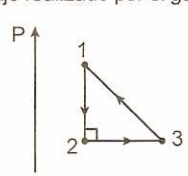
$Q = (100)(20)(60) \Rightarrow Q = 120$ kJ ...(2)

Primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U$ ...(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3): $\Delta U = 120$ kJ

32. En el diagrama presión (P) versus volumen (V), se muestra un ciclo termodinámico, en el cuál el gas ideal evoluciona por los estados $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Hallar el trabajo realizado por el gas entre este ciclo.



Resolución:

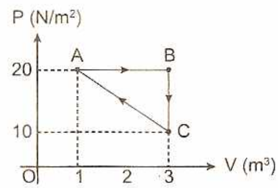
El trabajo realizado por el gas es numéricamente igual al área encerrada por la curva en el diagrama P – V. Si el sentido del ciclo es antihorario el trabajo tiene signo negativo (–), si el sentido del ciclo es horario el signo del trabajo será positivo (+).

$W = -$ Área del $\Delta = -\dfrac{1}{2}$ bh

$W = -\dfrac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_1 - P_2)$

El signo (–) significa que se realiza trabajo sobre el sistema termodinámico.

33. La figura representa en el diagrama P-V el ciclo experimentado por un gas ideal. La energía interna en A es de 10 J y en B es 15 J.



Resolución:

Preguntas y respuestas:

a) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas de A a B?

Proceso isobárico (A → B): $W_{A\to B} = P(V_B - V_A)$

$W_{A\to B} = 20(2) \Rightarrow W_{A\to B} = 40$ J ...(1)

b) ¿Cuál es el calor suministrado al gas de A a B?

1.ª ley de la termodinámica: $Q = W + \Delta U$

$Q_{A\to B} = W_{A\to B} + (U_B - U_A)$

$Q_{A\to B} = 40 + (15 - 10) \Rightarrow Q_{A\to B} = 45$ J ...(2)

c) ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas de C a A?

W = área bajo la recta CA

$W_{C\to A} = -\dfrac{(B + b)}{2}h \Rightarrow W_{C\to A} = -\dfrac{(20 + 10)}{2}(2)$

$\Rightarrow W_{C\to A} = -30$ J ...(3)

d) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas en este ciclo?

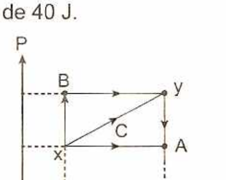
$W_{neto} =$ área encerrado por la curva

$W_{neto} =$ área ΔABC

$W_{neto} = +\dfrac{1}{2}bh \Rightarrow W_{neto} = \dfrac{1}{2}(2)(10)$

$\Rightarrow W_{neto} = +10$ J ...(4)

34. Un sistema pasa del estado X al estado Y siguiendo la trayectoria XAY cuando recibe 100 J y realiza un trabajo de 40 J.



Resolución:

Preguntas y respuestas:

a) ¿Cuál es la variación de la energía interna entre los estados X e Y?

1.ª ley de la termodinámica ($X \rightarrow A \rightarrow Y$)

$Q_{XAY} = W_{XAY} + \Delta U_{XY}$

$100 = 40 + \Delta U_{xy} \Rightarrow \Delta U_{XY} = 60$ J ...(1)

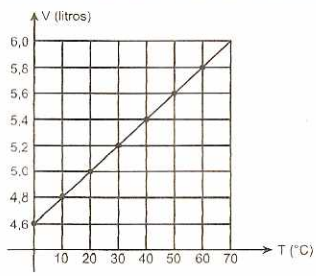
b) ¿Qué cantidad de calor recibe o libera, si el sistema a lo largo de la trayectoria XBY realiza un trabajo de 80 J?

1.ª ley de la termodinámica ($X \rightarrow B \rightarrow Y$)

$Q_{XBY} = W_{XBY} + \Delta U_{XY}$

$Q_{XBY} = 80 + 60 \Rightarrow Q_{XBY} = +140$ J ...(2)

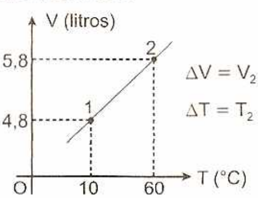
35. Un tanque cilíndrico de acero, lleno de hielo, tiene un pistón que puede moverse libremente. Cuando se altera la temperatura del gas el volumen varía, manteniendo la presión a 1 atm, se tomaron lecturas de varios valores del volumen del gas para diferentes temperaturas, los resultados se muestran en la grafica, a partir de estos datos experimentales, estime el número de moles de hielo en el cilindro.



Resolución:

Gas monoatómico (He): $P_1 = 10^5$ Pa = cte.

a) Del diagrama tomamos un par de estados termodinámicos.



$\Delta V = V_2 - V_1 = 1\text{ L} = 10^{-3}\text{ m}^3$

$\Delta T = T_2 - T_1 = 50\text{ °C} = 50\text{ K}$

b) Ecuación de estado termodinámico:

$P_1V_1 = nRT_1$ ...(1)

$P_1V_2 = nRT_2$ ...(2)

$P_1(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$

$P_1\Delta V = nR\Delta T$

Reemplazando los datos en el SI:

$10^5(10^{-3}) = n(8{,}31)(50) \Rightarrow n = 0{,}24067$ mol

36. Se calienta un gas monoatómico de modo que se dilata a presión constante. ¿Qué porcentaje del calor suministrado al gas pasa a incrementar su energía interna?

Resolución:

Gas monoatómico — Presión constante

$C_p = \frac{5}{2}R$ — $C_V = \frac{3}{2}R$

a) Cantidad de calor que gana el gas:

$Q = nC_p\Delta T$

$Q = n\frac{5}{2}R\Delta T \Rightarrow Q = \frac{5}{2}nR\Delta T$

b) Primera ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U \Rightarrow Q = P\Delta V + \Delta U$

$\frac{5}{2}nR\Delta T = nR\Delta T + \Delta U$

$\Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$

c) Relación entre el cambio de la energía interna y la cantidad de calor que el gas recibe.

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{\frac{3}{2}nR\Delta T}{\frac{5}{2}nR\Delta T} = \frac{3}{5}$$

El 60% de Q se transforma en ΔU

37. Se tiene 4 moles de gas helio contenidos en un cilindro de acero inoxidable a una temperatura de 27 °C, el sistema se calienta a volumen constante hasta una temperatura de 227 °C. ¿Qué cantidad de calor (en J) ha transferido al gas para incrementar su temperatura? ($C_V = 12{,}5$ J/mol)

Resolución:

a) Ley general de los gases ideales

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{300} = \frac{P_2}{500} \Rightarrow P_2 = \frac{5}{3}P_1$$

b) Cantidad de calor que recibe el gas:

$Q = nC_V\Delta T \Rightarrow Q = 4(12{,}5)(200)$

$Q = 10\,000$ J $\therefore Q = 10$ kJ

38. Calcular el trabajo realizado (en J) por 1 mol de un gas ideal que se mantiene a 27 °C durante una expansión de 3 litros a 12 litros (Ln2 = 0,7)

Resolución:

La cantidad de trabajo hecho por el gas:

$$W = nRT\text{Ln}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

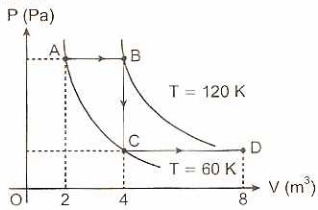
Reemplazando los datos

$W = 1(8{,}31)(300)\text{Ln}(4) \Rightarrow W = 2493\text{Ln}(4)$

$W = 3456{,}03$ J $\therefore W = 3{,}5$ kJ

39. Un gas monoatómico ideal con volumen inicial de 2 m^3 una presión de 500 Pa se expande isobaricamente y alcanza un volumen de 4 m^3 y una temperatura de 120 K. Luego se enfría a volumen constante hasta que su temperatura es de 60 K. Finalmente se expande a presión constante hasta un volumen de 8 m^3. Calcular el calor total (en J) realizado por el gas en este proceso.

Resolución:



I. Proceso isobárico
$W = P_A \Delta V = 500(2) = 1000$ J

II. Proceso isocoro
$T_0 = 120$ k; $T_f = 60$ k
Volumen constante
$W = 0 \Rightarrow \Delta V = nC_V\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right)\Delta T$
$\Delta T = \frac{3}{2}\left(\frac{P_B V_B}{T_B}\right)\Delta T$
$\Delta V = \frac{3}{2}\left[\frac{500(4)}{120}\right](-60) = -1500$ J

III. Proceso isobárico
$V_0 = 4\ m^3$; $V_f = 8\ m^3$
$W = P_C TV \Rightarrow W = (250)(4) = 1000$ J
$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \Rightarrow \frac{500}{120} = \frac{P_C}{60} \Rightarrow P_C = 250$ Pa

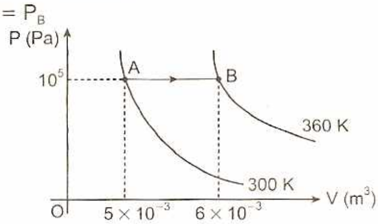
a) $W_{gas} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D}$
$W_{gas} = 1000 + 0 + 1000 \Rightarrow W_{gas} = 2000$ J

b) $Q = W_{gas} + \Delta U \Rightarrow Q = 2000 + (-1500)$
$Q = 500$ J

40. Un recipiente provisto de un émbolo liso, contiene un gas ideal que ocupa un volumen igual a $5 \times 10^{-3}\ m^3$, a una presión de 100 kPa ¿qué cantidad de trabajo realiza el gas sobre el émbolo cuando se expande isobáricamente de 27 hasta 87 °C?

Resolución:

Proceso isobárico
$P_A = P_B$



$P_A = P_B \Rightarrow \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{5 \times 10^{-3}}{300} = \frac{V_B}{360}$
$V_B = 6 \times 10^{-3}\ m^3$
$W_{A\to B} = P_A(V_B - V_A) \Rightarrow W_{A\to B} = 10^5(1 \times 10^{-3})$
$\therefore W_{A\to B} = 100$ J

41. En un motor diesel, el aire contenido dentro del cilindro de $810\ cm^3$ se encuentra a 27 °C, se comprime hasta un volumen final de $40\ cm^3$. El sistema es adiabático y reversible, el aire se comporta como un gas ideal. Hallar la temperatura final del aire (en °C) ($\gamma = 1{,}5$)

Resolución:

Proceso adiabático: $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$

$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{40}{810}\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$

Ecuación general de los gases

$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1V_1}{P_2V_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$\left(\frac{8}{729}\right)\left(\frac{810}{40}\right) = \frac{300}{T_2} \Rightarrow \frac{162}{729} = \frac{300}{T_2}$

$T_2 = 1350\ K = 1077\ °C$

42. Se tiene nitrógeno en un cilindro de acero y se le proporciona a 560 J de calor, el nitrógeno se expande isobáricamente. Hallar el trabajo realizado por el gas.

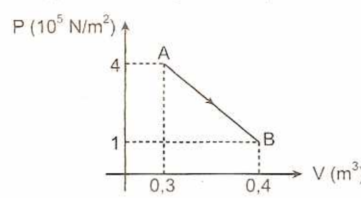
Resolución:

I. Proceso isobárico: $Q = nC_P\Delta T$
$560 = \frac{7}{2}nR\Delta T \Rightarrow nR\Delta T = 160$ J

II. Variación de la energía interna:
$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}(160) \Rightarrow \Delta U = 240$ J

III. Primera ley de la termodinámica: $Q = W + \Delta U$
$560 = W + 240 \quad \therefore W = 320$ J

43. Mediante el proceso A→B, la energía interna del gas ideal disminuye en 10 kJ, determinar la cantidad de calor (en kJ) que se le suministra en dicho proceso. ($T_A = 900$ K, $T_B = 300$ K)



Resolución:

$\Delta U_{A\to B} = -10$ kJ

$W_{A\to B} = \left(\frac{P_A + P_B}{2}\right)(V_B - V_A)$

$W_{A\to B} = \frac{5 \times 10^5}{2}(0{,}1) = 2{,}5 \times 10^4$ J $\qquad W_{A\to B} = 25$ kJ

Primera ley de la termodinámica: $Q = W + \Delta U$
$Q = 25 + (-10) \quad \therefore Q = 15$ kJ

44. En un reactor adiabático, se tiene un gramo de agua, que ocupa un volumen de $1\ cm^3$ a presión de 1 atm. Cuando esta cantidad de agua hierve, se convierte en $1671\ cm^3$ de vapor. Calcular el cambio en la energía interna (en J) de este proceso. ($L_V = 2{,}3 \times 10^6$ J/kg)

Resolución:

Cantidad de trabajo hecho por el gas

$W_{gas} = P\Delta V \Rightarrow W_{gas} = 10^5(1670 \times 10^{-6}) = 167$ J

$Q = mL_V \Rightarrow Q = 10^{-3}(2{,}3 \times 10^6) = 2300$ J

Primera ley de la termodinámica: $Q = W + \Delta U$

$2300 = 167 + \Delta U \quad \therefore \Delta U = 2133$ J

45. En el fondo de un lago de 40 m. de profundidad, se encuentra una burbuja de aire de 20 cm^3 a una temperatura de 39,2 F. la burbuja se eleva hasta la superficie libre que esta a una temperatura de 293 K. ¿En cuánto fue el incremento relativo de volumen?

Resolución:

$P_1 = P_{H_2O}gh + P_{atm} \Rightarrow P_1 = 1000(10)(40) + 10^5$

$P_1 = 500\,000\ N/m^2$

$\dfrac{F-32}{9} = \dfrac{C}{5} \Rightarrow \dfrac{39,2-32}{9} = \dfrac{C}{5}$

$C = 4\ °C \Rightarrow T_1 = 277\ K$

Ley general de los gases

$\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \dfrac{5\times 10^5(20)}{277} = \dfrac{10^5V_2}{293}$

$V_2 = 105,7761733$

$\therefore\ \dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = \dfrac{85,776}{20} = 4,2888 = 428\%$

46. Calcular el trabajo realizado (en J) por 1 mol de un gas ideal que se mantiene a 27 °C durante una expansión de 3 litros a 12 litros (Ln2 = 0,7).

Resolución:

Proceso isotérmico: $W_{1\to 2} = nRTLn\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$

$W_{1\to 2} = 1(8,31)(300)Ln\left(\dfrac{12}{3}\right)$

$\Rightarrow W_{1\to 2} = 3(831)Ln(4)$

$W_{1\to 2} = 6(831)Ln(2) \Rightarrow W_{1\to 2} = 4986(0,7)$

$W_{1\to 2} = 3490,2\ J \quad \therefore W = 3490\ J$

47. La llanta de un auto contiene un volumen de 15 625 cm^3 de aire a la presión manométrica de 1,63 atm cuando su temperatura es de 0 °C. Hallar la presión manométrica del aire (en atm) dentro de la llanta cuando su temperatura se eleva a 27 °C y su volumen aumenta a 15 938 cm^3.

Resolución:

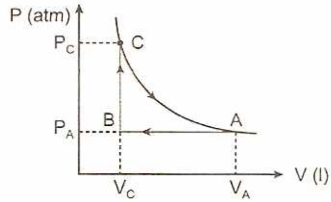
Ley general de los gases:

$\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \dfrac{2,63(15\,625)}{273} = \dfrac{P_2(15\,938)}{300}$

$P_2 = \dfrac{2,63(15\,625)(300)}{273(15\,938)} \Rightarrow P_2 = 2,833$

$\therefore\ P_{manométrica} = P_2 - P_{atm} = 2,833 - 1 = 1,83\ atm$

48. Un gas ideal se comprime lentamente a una presión constante de 2 atm. de 10 litros hasta 2 litros, en este proceso, algo de calor sale y la temperatura desciende. A continuación se agrega calor al gas, manteniendo constante el volumen, y se dejan aumentar la presión y la temperatura. Calcular el flujo de calor total hacia el gas. El proceso se muestra en la figura como el trayecto ABC. (Ln5 = 1,6)



Resolución:

$P_A = P_B = 2\ atm;\ V_A = 10\ L;\ V_B = V_C = 2\ L$

$W^{Gas}_{A\to B} = P_A(V_B - V_A) \Rightarrow W^{Gas}_{A\to B} = 2\times 10^5(2-10)10^{-3}$

$W^{Gas}_{A\to B} = -1600\ J \ \ y \ \ W^{Gas}_{B\to C} = 0\ J$

$W^{Gas}_{C\to A} = nRTLn\left(\dfrac{V_f}{V_0}\right) \Rightarrow W^{Gas}_{C\to A} = P_AV_ALn\left(\dfrac{V_A}{V_C}\right)$

$W^{Gas}_{C\to A} = (2\times 10^5)(10\times 10^{-3})Ln\left(\dfrac{10}{2}\right)$

$W^{Gas}_{C\to A} = (2\times 10^3)Ln(5) \Rightarrow W^{Gas}_{C\to A} = 3200\ J$

$Q = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A}$

$Q = -1600 + 0 + 3200 = 1600 \quad \therefore\ Q = 1600\ J$

49. En un recipiente cilíndrico se tiene 2 kg de oxígeno a una presión de 100 kPa y a una temperatura de 300 K. El gas es calentado manteniendo su volumen constante hasta que su presión se duplica, luego se expande isobáricamente hasta duplicar su volumen. Calcular el calor absorbido por el gas (en kJ) isobáricamente duplicando su volumen. (C_V = 0,7 kJ/kg.K; C_p = 1 kJ/kg.K)

Resolución

$m = 2\ kg \qquad \overline{M}_{O_2} = 32\times 10^{-3}\ kg$

$P_1 = 10^5\ Pa$

$T_1 = 300\ K$

Proceso isócoro: $V_1 = V_2 = V$

$P_2 = 2\times 10^5\ Pa$

Proceso isobárico: $P_2 = P_3$

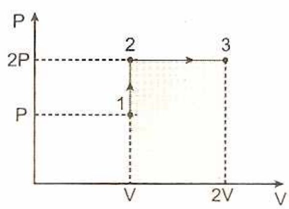
$V_3 = 2V$

I. $P_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow 10^5V_1 = \dfrac{2}{32\times 10^{-3}}(8,31)300$

$\Rightarrow V_1 = 1,55\ m^3$

II. $\dfrac{P_1}{T_1} = \dfrac{P_2}{T_2} \Rightarrow \dfrac{P}{300} = \dfrac{2P}{T_2} \Rightarrow T_2 = 600\ K$

III. $\dfrac{V_2}{T_2} = \dfrac{V_3}{T_3} \Rightarrow \dfrac{V}{600} = \dfrac{2V}{T_3} \Rightarrow T_3 = 1200\ K$



$\Delta U_{1\to 2} = nC_v\Delta T = n\left(\dfrac{5}{2}R\right)\Delta T$

$\Delta U_{1\to 2} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{10}{16}\right)^3 8,31(300) = 389,53125\ kJ$

$W_{1\to2}^{gas} = 0$

$W_{2\to3}^{gas} = P_2(V_3 - V_2) \Rightarrow W_{2\to3}^{gas} = 2P(2V - V)$

$W_{2\to3}^{gas} = 2\times10^5(0{,}519375)$

$W_{2\to3}^{gas} = 1{,}03875\times10^2(10^3) \Rightarrow W_{2\to3}^{gas} = 103{,}875\ \text{kJ}$

Variación de la energía interna: $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{32\times10^{-3}}\right)8{,}31(600)$$

$$\Delta U_{2\to3} = \left(\frac{3}{32}\times10^3\right)8{,}31(600) = 467{,}4375$$

Primera ley de la termodinámica: $Q = W_{gas} + \Delta U$

$Q = 103{,}875 + 389{,}53125 + 467{,}4375$

$Q = 960{,}84375\ \text{kJ}$

50. Dos moles de argón contenidos en un cilindro provisto de un pistón, se expanden adiabaticamente desde una temperatura de 127 °C hasta una temperatura de 27 °C. Hallar el trabajo realizado en este proceso (en J). ($\gamma = 5/3$).

Resolución:

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$$

$P_1V_1 = nRT_1$ y $P_2V_2 = nRT_2$

$$W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-\gamma} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{1-\gamma}$$

$$W = \frac{2(8{,}31)(-100)}{1-\frac{5}{3}} = \frac{2(831)}{\frac{2}{3}} \qquad \therefore\ W = 2493\ \text{J}$$

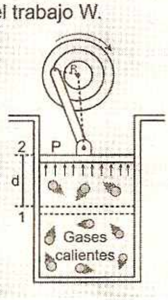
SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Funcionamiento de un motor de combustión interna

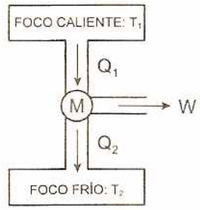
El combustible (gasolina) colocado en el cilindro del motor al ser quemado libera su energía interna en forma de calor Q_1 aumentando violentamente la presión y la temperatura de los gases del cilindro.

El aumento de la presión y la temperatura en el interior del cilindro dilatan los gases empujando los pistones, moviendo de este modo el mecanismo interno del motor que realiza un trabajo W.

Movimiento del pistón P. Observe cómo el movimiento del pistón P permite que el rotor (disco R) pueda girar desarrollándose el trabajo W.



Representación de un motor



T_1: Temperatura que alcanza la combustión.

Q_1: Calor que se entrega al motor M debido a la combustión.

W: Trabajo que desarrollan los gases calientes.

T_2: Temperatura en la tubería de escape.

Q_2: Calor perdido (desaprovechado) en el escape ya que los gases salen aún calientes.

Motor térmico. Los motores térmicos son aquellos aparatos que transforman la energía térmica (calor) en trabajo mecánico.

Principio de conservación de la energía

$$\boxed{Q_1 = W + Q_2} \qquad ...(14.29)$$

$$\boxed{W = Q_1 - Q_2} \qquad ...(14.30)$$

La segunda ley de la termodinámica se puede enunciar en las siguientes formas:

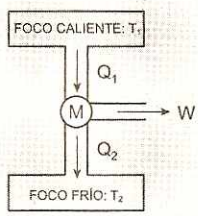
1.ª Es imposible construir un motor térmico que no tenga tubería de escape, esto implica que siempre se perderá calor por esta tubería, luego:
No es posible convertir todo el calor (Q_1) que se entrega en trabajo (W).

2.ª Hemos visto que en una máquina térmica no es posible convertir todo el calor en trabajo, o sea:
Es imposible construir una máquina térmica 100% eficiente.

Representación de una máquina térmica. Relación de Kelvin:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

La máquina térmica es aquel dispositivo mecánico que se encarga de transformar la energía calorífica que se le transfiere, en energía mecánica.



3.ª Es posible que el calor fluya espontáneamente (por sí solo) de menor temperatura a otra de mayor temperatura.
Para que el calor pueda fluir de menor a mayor temperatura es necesario el uso indispensable de trabajo, esto sucede en las refrigeradoras.

Eficiencia de una máquina térmica

Es la relación entre el trabajo neto entregado por la máquina, y el calor invertido para su funcionamiento proveniente del foco caliente.

$$\boxed{n = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}} \quad ...(14.31)$$

$$\boxed{n = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}} \quad ...(14.32)$$

Relación de Kelvin

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}} \quad ...(14.33)$$

Reemplazando (14.33) en (14.32):

$$\boxed{n = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \quad ...(14.34)$$

$$\boxed{\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} < 1} \quad ...(14.35)$$

CICLO TERMODINÁMICO

Es aquel proceso termodinámico, en donde el sistema retorna a su estado inicial por un camino diferente. En todo ciclo termodinámico la variación de la energía interna es igual a cero.

El trabajo neto realizado por el sistema, durante el ciclo es igual al área encerrada por las curvas, en el diagrama P-V.

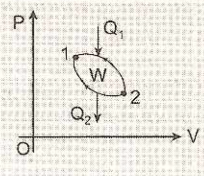
$$\boxed{W_{neto} = Q_1 - Q_2} \quad ...(14.36)$$

Q_1 (+): cantidad de calor entregado al sistema

Q_2 (−): cantidad de calor liberado por el sistema

Trabajo neto:

$W_{neto} = Q_1 - Q_2$



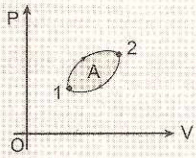
Ciclo horario y antihorario

En un proceso termodinámico, cuando el sistema se expande (el volumen aumenta) el trabajo realizado por el sistema es positivo, si el volumen se comprime (el volumen disminuye) el trabajo realizado es negativo (trabajo realizado sobre el sistema).

Si el ciclo termodinámico tiene sentido horario, el trabajo neto realizado es positivo.

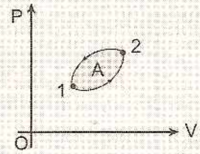
Si el ciclo termodinámico tiene sentido antihorario, el trabajo neto realizado es negativo.

Ciclo horario:



$W_{neto} = +A$

Ciclo antihorario:



$W_{neto} = -A$

Ciclo de Carnot

Fue descrito por el Ing. francés Sadi Carnot, en 1824.

El ciclo de Carnot, es aquel mediante el cual una máquina térmica logra obtener la máxima eficiencia posible.

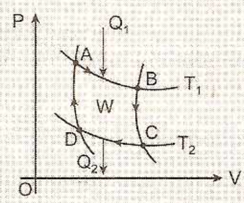
El ciclo está constituido por dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos.

1. Expansión Isotérmica (A → B): el sistema (gas) recibe una cantidad de calor Q_1 y se expande a una temperatura constante T_1.
2. Expansión Adiabática (B → C): el sistema sigue expandiéndose, pero sin ingreso ni salida de calor, de modo que su temperatura disminuye hasta T_2.
3. Compresión isotérmica (C → D): el sistema (gas) es comprimido, manteniendo su temperatura constante T_2, de modo que expulsan una cantidad de calor Q_2.
4. Compresión Adiabática (D → A): finaliza la compresión de manera que durante el proceso no entra ni sale calor, hasta alcanzar la temperatura T_1.

Máxima eficiencia:

$$n = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$T_2 < T_1$



Eficiencia del ciclo de Carnot

La eficiencia depende solo de las temperaturas absolutas de los focos calientes T_1 y frío T_2.

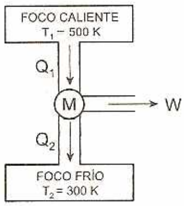
$$n = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 < T_1$$

Solo para máquinas ideales o de Carnot:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La temperatura de la caldera de una máquina de vapor es 500 K y la de su condensador es de 300 K. Sabiendo que su rendimiento real es el 25% de su rendimiento ideal, halle su rendimiento real.



Resolución:

Cálculo del rendimiento ideal:

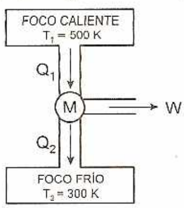
$$n_{ideal} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{500 - 300}{500} \Rightarrow n_{ideal} = 0,4$$

Cálculo del rendimiento real:

$$n_{real} = 25\%(n_{ideal}) \Rightarrow n_{real} = (0,25)(0,4) = 0,1$$

$$\therefore\ n_{real} = 10\%$$

2. El esquema representa una máquina térmica. Determine si esta máquina es reversible o irreversible, sabiendo que: $Q_1 = 300$ kJ y $Q_2 = 210$ kJ.



Resolución:

La eficiencia de cualquier máquina térmica reversible o irreversible se puede hallar usando la siguiente fórmula:

$$n_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{300 - 210}{300} \Rightarrow n_1 = 0,3 \text{ o } 30\%$$

La máquina será reversible si usando las temperaturas se obtiene la misma eficiencia, de lo contrario será irreversible:

$$n_2 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{500 - 300}{500} \Rightarrow n_2 = 0,4 \text{ o } 40\%.$$

Como $n_2 > n_1 \Rightarrow$ la máquina es irreversible.

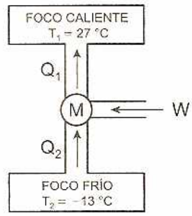
Una máquina térmica es reversible, ideal o de Carnot cuando:

$$n_1 = n_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

Una máquina térmica es irreversible o real cuando:

$$n_2 > n_1 \Rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}$$

3. ¿Qué cantidad de calor extrae un refrigerador reversible de un sistema que está a −13 °C, si lo expulsa al medio ambiente que está a 27 °C, invirtiendo un trabajo de 50 kJ?



Resolución:

Foco caliente: $T_1 = 27 + 273 = 300$ K

Foco frío: $T_2 = -13 + 273 = 260$ K

De la relación de Kelvin:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{300}{260} \Rightarrow \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{40}{260} \qquad \text{...(1)}$$

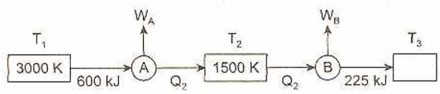
Del principio de conservación de la energía:

$$Q_2 + W = Q_1 \Rightarrow W = Q_1 - Q_2 = 50 \text{ kJ} \qquad \text{...(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{50}{Q_2} = \frac{2}{13} \qquad \therefore\ Q_2 = 325 \text{ kJ}$$

4. En el esquema, A y B son dos máquinas térmicas reversibles. Si la eficiencia de A es el doble que de B, determinar la temperatura T_3.



Resolución:

Aplicando la relación de Kelvin, en la máquina A:

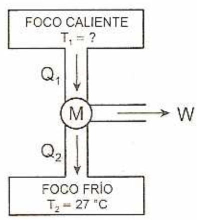
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \Rightarrow \frac{3000}{1500} = \frac{600 \text{ kJ}}{Q_2} \Rightarrow Q_2 = 300 \text{ kJ}$$

Aplicando la relación de Kelvin, en la máquina B:

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{Q_2}{Q_3} \Rightarrow \frac{1500}{T_3} = \frac{300}{225} \qquad \therefore\ T_3 = 1125 \text{ K}$$

5. La eficiencia de un motor de Carnot es de 40%, estando su foco frío a 27 °C.

¿En cuántos grados centígrados hay que aumentar la temperatura de su foco caliente, para que su eficiencia aumente al 50%?



Resolución:

La eficiencia, en el primer caso, es:

$$n_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow 0,4 = \frac{T_1 - 300}{T_1} \Rightarrow T_1 = 500 \text{ K}$$

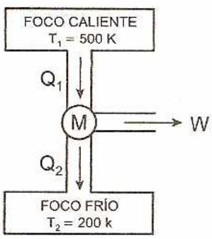
La eficiencia, en el segundo caso, es:

$$n_2 = \frac{T_x - T_2}{T_x} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{T_x - 300}{T_x} \Rightarrow T_x = 600\,K$$

El incremento de temperatura en el foco caliente es:

$\Delta T = T_x - T_1 = 100\,K$ o $100\,°C$ $\quad \therefore \Delta T = 100\,°C$

6. Un motor térmico ideal funciona a 360 r. p. m. y en cada resolución absorbe 200 kJ de energía calorífica del foco caliente. Este motor funciona entre las temperaturas de 500 K y 200 K. Halle la potencia del motor térmico.



Resolución:

Relación de Kelvin:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \Rightarrow \frac{500}{200} = \frac{200}{Q_2} \Rightarrow Q_2 = 80\text{ kJ}$$

El trabajo en cada ciclo es:

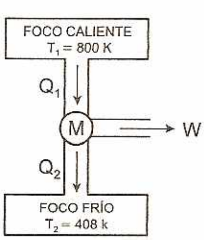
$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow W = 200 - 80 = 120\text{ kJ}$

El período es: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{360}\text{ min} = \frac{1}{6}\text{ s}$

La potencia es: $P = \frac{W}{T} = \frac{120\text{ kJ}}{\frac{1}{6}\text{ s}}$ $\quad \therefore P = 720\text{ kW}$

7. Si la eficiencia de una máquina térmica que funciona siguiendo un ciclo de Carnot es del 49%, la fuente que entrega calor se encuentra a 527 °C y proporciona 500 kJ de energía calorífica a la máquina, hallar el trabajo realizado por la máquina en cada ciclo.

Resolución:



Foco caliente: $T_1 = 527 + 273 = 800\text{ K}$

Calor entregado: $Q_1 = 500\text{ kJ}$

Rendimiento:

$$n = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow 0{,}49 = 1 - \frac{T_2}{800\text{ K}} \Rightarrow T_2 = 408\text{ K}$$

Relación de Kelvin: $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$

$$\frac{Q_2}{500} = \frac{408}{800} \Rightarrow Q_2 = 255\text{ kJ}$$

Foco frío: $T_2 = 408\text{ K}$

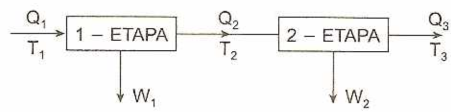
Calor recibido: $Q_2 = 255\text{ kJ}$

Del principio de conservación de la energía, tenemos que: $Q_1 = W + Q_2 \Rightarrow 500 = W + 255$

$\therefore W = 245\text{ kJ}$

8. Una máquina de Carnot funciona entre las temperaturas del foco caliente y el foco frío. Se propone mejorar el rendimiento que se obtiene del siguiente modo: la máquina sigue el ciclo de Carnot y funciona en dos etapas. En la 1.ª etapa recibe una cantidad de calor Q_1 a la temperatura constante T_1, realizando un trabajo W_1 y expulsando una cantidad de calor Q_2 a la temperatura constante T_2.

El calor expulsado en la primera etapa es recibido en la 2.ª etapa, en la cual realiza un trabajo W_2 y expulsa una cantidad de calor Q_3 a la temperatura constante T_3. Después de analizar el proceso cíclico, determinar la eficiencia.



Resolución:

Por definición, la eficiencia de la máquina es:

$$n = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} \qquad \text{...(1)}$$

Trabajo realizado por etapas:

$W_1 = Q_1 - Q_2$ y $W_2 = Q_2 - Q_3$

Reemplazando en (1):

$$n = \frac{Q_1 - Q_2 + Q_2 - Q_3}{Q_1} \Rightarrow n = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1} \qquad \text{...(2)}$$

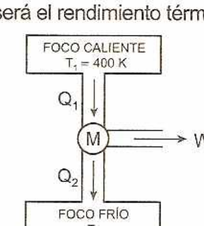
Relación de Kelvin: $\frac{Q_1}{Q_3} = \frac{T_1}{T_3}$

Reemplazando en (2): $\therefore n = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$

9. Un motor que sigue el ciclo de Carnot, funciona, cuyo foco caliente se encuentra a 400 K toma 100 kJ por ciclo y cede 80 kJ al foco frío.

a) ¿Cuál es la temperatura del foco frío?

b) ¿Cuál será el rendimiento térmico del ciclo?



Resolución:

a) De la relación de Kelvin:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \Rightarrow \frac{400}{T_2} = \frac{100}{80} \Rightarrow T_2 = 320\text{ K}$$

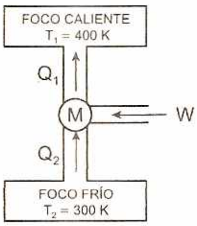
b) Rendimiento o eficiencia:

$$n = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow n = 1 - \frac{80}{100} = 0{,}2 \Rightarrow n = 20\%$$

10. Una máquina refrigerante de Carnot toma energía calorífica del foco frío a 300 K, la cantidad de 1200 J y lo cede al foco caliente a una temperatura de 400 K.

a) ¿Cuánto de calor cede al foco caliente?

b) ¿Qué trabajo se entrega a la máquina?



Resolución:

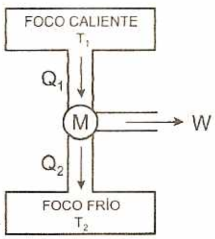
a) Relación de Kelvin: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$

$\frac{400}{300} = \frac{Q_1}{1200} \Rightarrow Q_1 = 1600$ J

b) Conservación de la energía: $Q_2 + W = Q_1$

$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow W = 1600 - 1200 = 400$ J

11. Un motor de Carnot recibe 10 000 J de un foco caliente a 727 °C, realiza un trabajo y cede una cierta cantidad de energía a un foco a 27 °C.



Resolución:

a) ¿Cuál es el rendimiento térmico de este motor?

$n = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow n = 1 - \frac{300}{1000}$

$n = 0{,}7 \Rightarrow n = 70\%$

b) ¿Qué cantidad de calor es cedido al foco frío?

Relación de Kelvin:

$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \Rightarrow Q_2 = \frac{T_2}{T_1}(Q_1)$

$Q_2 = \frac{300}{1000}(10\,000) \Rightarrow Q_2 = 3000$ J

c) ¿Cuál es el trabajo neto realizado?

$n = \frac{W_{neto}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

$W_{neto} = nQ_1 \Rightarrow W_{neto} = (0{,}7)(10\,000)$

$W_{neto} = 7000$ J

12. Una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot trabaja entre los focos de temperatura 700 K y 500 K. Si se le entrega 14 kJ de energía calorífica en cada ciclo, ¿qué cantidad de trabajo produce en cada ciclo?

Resolución:

La cantidad de calor (Q) de cada fuente de energía es directamente proporcional a la temperatura absoluta (T).

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{500}{700} = \frac{Q_2}{14} \Rightarrow Q = 10$ kJ

Principio de conservación de la energía:

$Q_1 = W + Q_2 \Rightarrow 14 = W + 10 \quad \therefore W = 4$ kJ

13. Una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot trabaja entre los focos de temperatura 7 °C y 427 °C. Determinar la eficiencia de la máquina.

Resolución:

La temperatura absoluta de las fuentes de energía es:

$T_1 = 273 + 427 = 700$ K

$T_2 = 273 + 7 = 280$ K

La eficiencia de una máquina que desarrolla el ciclo de Carnot solo depende de las temperaturas de los focos caliente y frío.

$n = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow n = \frac{700 - 280}{700} = 0{,}6$

Por lo tanto, la eficiencia de la máquina es 60%.

14. Una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot de eficiencia 30% realiza una cantidad de trabajo de 6 kJ en cada ciclo. Determinar la cantidad de calor que cede al foco frío en cada ciclo.

Resolución:

La eficiencia se define como el grado de perfeccionamiento de la máquina térmica. No tiene unidades, su valor varía entre cero y la unidad.

$n = \frac{W}{Q_1} \Rightarrow 0{,}3 = \frac{6}{Q_1}$

Despejando tenemos que:

$Q_1 = 20$ kJ

Principio de conservación de la energía:

$Q_1 = W + Q_2 \Rightarrow 20 = 6 + Q_2 \quad \therefore Q_2 = 14$ kJ

15. Una máquina térmica libera 600 kJ en cada ciclo. Si la potencia del motor es 5 kW. ¿Cuánta energía (en kJ) absorbe el motor en cada ciclo, si este emplea 40 segundos en realizarse?

Resolución:

El trabajo es igual al producto de la potencia por el tiempo transcurrido.

$W = Pt \Rightarrow W = (5)(40) = 200$ kJ

Principio de conservación de la energía:

$Q_1 = W + Q_2 \Rightarrow Q_1 = 200 + 600 \quad \therefore Q_1 = 800$ kJ

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un mol de gas ideal bajo un proceso isócoro se lleva del estado 1 al estado 2 tal que su presión disminuye de P a P/α ($a > 1$).

Después el gas se calienta isobáricamente hasta su temperatura inicial y el gas realiza un trabajo W. Determine la temperatura inicial del gas en términos de W, R y α.

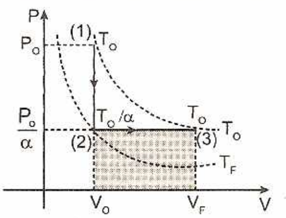
(R es la constante universal de los gases ideales).

A) $\dfrac{W}{R(\alpha-1)}$ B) $\dfrac{\alpha W}{R(\alpha-1)}$ C) $\dfrac{(\alpha-1)W}{R\alpha}$

D) $\dfrac{\alpha W}{R}$ E) $\dfrac{\alpha W}{R(\alpha+1)}$

Resolución:

Graficando los procesos mencionados, tenemos:



En el proceso isobárico: (2) → (3):

$$W = (V_F - V_o)\left(\frac{P_0}{\alpha}\right)$$

$$V_F - V_o = \frac{\alpha W}{P_0} \text{ como: } PV = nRT$$

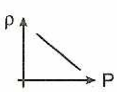
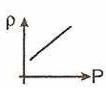
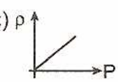
Tenemos: $\dfrac{\alpha nRT_0}{P_0} - \dfrac{\alpha nRT_0}{\alpha P_0} = \dfrac{\alpha W}{P_0}$

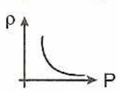
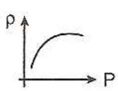
Despejando: $T_0 = \dfrac{\alpha W}{R(\alpha-1)}$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

De las siguientes gráficas indique cuál representa la variación con densidad ρ de un gas ideal con respecto de la presión P en un proceso isotérmico.

A)  B)  C) 

D)  E) 

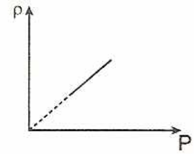
Resolución:

La ecuación de estado de un gas ideal está definido por la siguiente expresión:

$PV = nRT$; donde $n = \dfrac{m}{\overline{M}}$

$$PV = \frac{m}{\overline{M}} \Rightarrow P = \frac{m}{V}\frac{RT}{\overline{M}} \Rightarrow P = \rho\frac{RT}{\overline{M}}$$

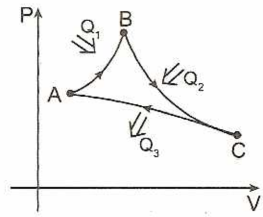
En un proceso termodinámico isotérmico la temperatura permanece contante por lo cual: $\dfrac{P}{\rho}$ = constante.



Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

En la gráfica P versus V se muestra el ciclo termodinámico que sigue una maquina térmica. Si $Q_1 = 120$ J, $Q_2 = 200$ J y $Q_3 = 180$ J son los calores usados en cada proceso, determine aproximadamente la eficiencia de la maquina térmica.



A) 25,8 % B) 33,8% C) 40,8%

D) 43,8% E) 65,8%

Resolución:

El rendimiento o eficiencia de una máquina térmica se determina por: $n = 1 - \dfrac{Q_L}{Q_A}$

Q_L: Sumatoria de cantidad de calores liberados durante el ciclo.

Q_A: Sumatoria de cantidades de calores absorbidos durante el ciclo.

De los datos del problema reemplazamos:

$$n = 1 - \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2} \Rightarrow n = \left[1 - \frac{180}{(120+200)}\right]100$$

$\therefore\ n \cong 43,8\%$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Un mol de gas ideal que se encontraba bajo una presión de 6×10^5 Pa se comprime isotérmicamente de 4 L hasta 2 L.

(La constante universal de los gases ideales es $R = 8{,}3$ J/molK)

Dadas las siguientes proposiciones respecto del proceso:

I. La presión aumenta 10^5 Pa.

II. La presión aumenta 2×10^5 Pa.

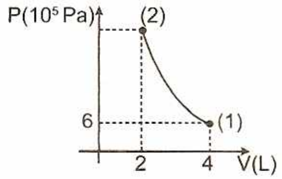
III. La temperatura del gas es aproximadamente de 15,8 °C.

Indique la secuencia correcta después de determinar si las proposiciones anteriores son verdaderas o falsas.

A) VFV B) FFV C) VVF
D) FVV E) VFF

Resolución:

En el problema, realizaremos un gráfico para representar el proceso termodinámico.



Por ser el proceso isotérmico: $P_1V_1 = P_2V_2$

$6 \times 10^5(4) = P_2(2) \rightarrow P_2 = 12 \times 10^5$ Pa

Tambien: PV = nRT

$(6 \times 10^5)(4 \times 10^{-3}) = (1)(8{,}31)T \Rightarrow 288{,}8\ K = T$

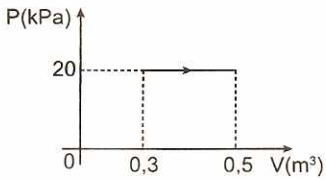
Pasando a Celsius: T = 15,8 °C

I. Falso: La presión aumenta de 6×10^5 Pa a 12×10^5 Pa
II. Falso:
III. Verdadero:

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

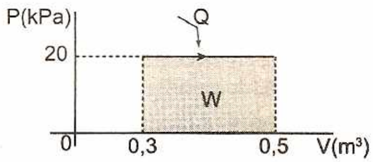
En la figura se muestra el proceso isobárico que realiza un gas ideal entre dos estados termodinámicos. Determine el cambio de la energía interna (en J) si el calor entregado fue de 1 kcal (1 cal = 4,18 J).



A) 180 B) 380 C) 580 D) 980 E) 1800

Resolución:

Del gráfico:



De la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W$

$Q = 1\ \text{Kcal}\ \dfrac{1000\ \text{cal}}{1\text{kcal}}\left(\dfrac{4,18\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) = 4180\ \text{J}$

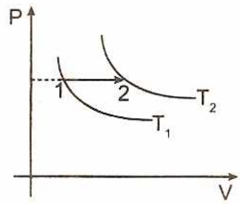
$W = P\Delta V = 20\ \text{KPa}(0{,}5 - 0{,}3)\ \text{m}^3 = 4000\ \text{J}$

$\Delta U = (+4180\ \text{J}) - (+4000\ \text{J}) \therefore\ \Delta U = 180\ \text{J}$

Clave: A

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - I)

Un proceso termodinámico puede ser representado por la trayectoria 1 → 2 que se muestra en el siguiente diagrama P – V.

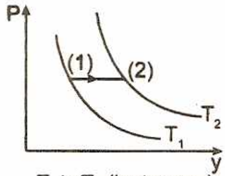


Indique cual o cuales de las siguientes afirmaciones son correctas respecto al proceso 1 → 2.

I. **La variación de energía interna es nula.**
II. **El sistema no realiza trabajo.**
III. **El sistema recibe calor y parcialmente realiza trabajo.**

A) I y III B) II y III C) Solo I
D) Solo II E) Solo III

Resolución



$T_2 > T_1$ (isotermas)

Proceso (1) → (2) Isobárico (P = cte)

I. **Falso**

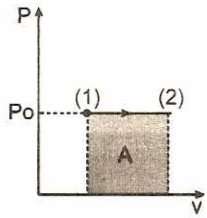
La variación de la energía interna en todo proceso que experimenta un gas ideal se determina por:

$U = nCv\Delta T$

Como en el proceso T > 0 la energía interna aumenta.

II. **Falso**

En el proceso, el trabajo se determina por el área de la superficie bajo la curva.



$A = Po\Delta V > 0$ (expansión)

III. **Verdadero**

Aplicando la primera Ley de la termodinámica:

$Q = W + \Delta U$ por lo expuesto anteriormente

$Q > 0$ (El sistema absorbe calor).

Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un cilindro de sección 10 cm^2 está cerrado por un émbolo de masa 5 kg que puede deslizar sin rozamiento. Cuando el cilindro se mueve hacia abajo con una aceleración 4g; el volumen del gas que hay debajo del émbolo aumenta al doble. Si la temperatura del gas no varía. Hallar la presión exterior.

A) 2×10^5 Pa B) $2{,}5 \times 10^5$ Pa C) 3×10^5 Pa
D) $3{,}5 \times 10^5$ Pa E) 4×10^5 Pa

2. Un sistema termodinámico pierde una cantidad de calor equivalente a 200 J, mientras efectúa un trabajo de 100 J. Calcular la variación de su energía interna en Joules.

A) 100 B) -300 C) -100 D) 300 E) 200

3. Un gas ideal se expande isobáricamente de 1000 cm^3 a 1500 cm^3 a una presión de 10^5 N/m^2. Si se le entregaron 75 J de calor. Hallar el incremento de la energía interna del gas (en J).

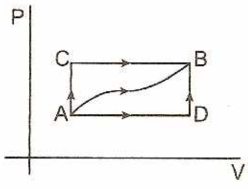
A) 5 B) 15 C) 25 D) 50 E) 75

4. Para calentar cierta cantidad de gas de 20 °C hasta 100 °C se requieren 400 cal siempre que su volumen permanezca constante. ¿Cuánto aumentará su energía interna en el proceso?

A) 200 cal B) 400 cal C) 500 cal
D) 350 cal E) 250 cal

5. Cuando un sistema pasa del estado A al B a lo largo de la trayectoria ACB, recibe 20 000 cal y realiza 7500 cal de trabajo. ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria ADB, si el trabajo es 2500 cal?

A) 12 000 cal
B) 18 000 cal
C) 15 000 cal
D) 19 000 cal
E) 22 000 cal



6. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

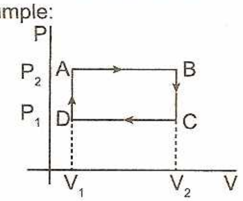
A) La variación de la energía interna de un gas ideal depende solo del proceso termodinámico experimentado.
B) La variación de la energía interna de una masa determinada de gas ideal solo depende de su variación de temperatura.
C) El calor que un gas ideal gana no depende del proceso termodinámico experimentado.
D) El trabajo realizado por un gas ideal no depende del proceso termodinámico experimentado.
E) En un proceso isométrico la variación de la energía interna de un gas es igual al trabajo que realiza.

7. En un proceso isócoro (Volumen = cte.) puede ocurrir que:

I. El sistema reciba calor y la energía interna aumente.
II. El sistema cede calor y la energía interna disminuye.

A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) Ninguno E) F. D.

8. En la figura, se muestra un proceso cíclico, entonces se cumple:



A) Al pasar de A a B el sistema expele calor.
B) Al pasar de D a A el sistema expele calor.
C) Al pasar de B a C el sistema expele calor.
D) Al pasar de C a D el sistema gana calor.
E) De A a B el trabajo realizado es $P_1(V_1 + V_2)$

9. Un mol de cierto gas ideal fue calentado isobáricamente en 72,17 K comunicándole una cantidad de calor de 1600 J. ¿Cuál es el incremento de energía interna del gas? R = 8,314 J/mol.K.

A) 2 kJ B) 1 kJ C) 1,5 kJ
D) 0,8 kJ E) 0,4 kJ

10. En un determinado proceso, se suministran a un sistema 50 000 cal y simultáneamente el sistema se expande contra una presión exterior de $7{,}2 \times 10^5$ Pa. La energía interna del sistema es la misma al comienzo que al final del proceso. Determinar el incremento de volumen del sistema.

A) 0,78 m^3 B) 0,29 m^3 C) 0,12 m^3
D) 0,68 m^3 E) 2,00 m^3

11. Una máquina térmica ideal de gas opera en un ciclo de Carnot entre 227 °C y 127 °C, absorbe 60 000 cal a la temperatura mayor. ¿Qué cantidad de trabajo es capaz de ejecutar, por ciclo, esta máquina?

A) 50 000 J B) 60 450 J C) 62 790 J
D) 50 232 J E) 20 000 J

12. En un ciclo de Carnot, la dilatación isotérmica ocurre a 400 K y la comprensión isotérmica a 300 K. Durante la dilatación se comunica 500 cal de energía calorífica. Luego el trabajo realizado por el gas durante la expansión isotérmica y la eficiencia de ciclo, son:

A) 524,25 J; 25% B) 500,00 J; 40%
C) 3420 J; 25% D) 2093 J; 25%
E) 1860 J; 30%

13. Un motor que funciona con el ciclo de Carnot tiene su foco caliente a 127°C, toma 100 cal a esta temperatura de cada ciclo, y cede 80 cal al foco frío. Calcular la temperatura de este depósito.

A) 50 °C B) 197 K C) 320 K
D) 102 °C E) 273 K

14. La eficiencia de una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot es $n_1 = 0{,}4$ y la eficiencia de otra semejante es $n_2 = 0{,}6$. Hallar la eficiencia de una máquina térmica compuesta por las dos anteriores. Si se sabe que el calor que libera la primera máquina es absorbida por la segunda para realizar su ciclo.

A) 0,24 B) 0,33 C) 0,76 D) 0,40 E) 0,50

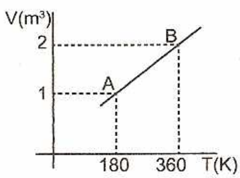
15. Si una máquina térmica de Carnot trabaja entre las temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) y realiza 20,93 KJ de trabajo por cada 10 Kcal de calor que recibe. Hallar la relación T_1/T_2.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 1/4 E) 1/3

16. Un gas se expande isotérmicamente, si ha recibido una cantidad de calor igual al de una kilocaloría. Calcular el trabajo que el gas realiza en la expansión.

A) 0,24 J B) 1178 J C) 1427 J
D) 0 J E) 4186 J

17. El gráfico representa el volumen de un gas ideal en función de su temperatura a presión constante de 3 N/m^2. Si durante la transformación de A hacia B el gas absorbió 5 calorías. ¿Cuál fue la variación de su energía interna?



A) 2 J
B) 2 cal
C) 17,93 J
D) 17,93 cal
E) 4 J

18. Dos moles de un gas ideal en un cilindro con un pistón, es comprimido adiabaticamente. La fuerza de compresión realiza 4157 J de trabajo en contra del gas. ¿Cuánto aumenta la temperatura del gas, si $\gamma = 1{,}4$?

A) 150 °C B) 200 °C C) 180 °C
D) 100 °C E) 180 K

19. A dos moles de un gas ideal que se encontraba a la temperatura de $T_0 = 300$ K se le enfrió isocóricamente, como resultado de lo cual su presión se redujo a la mitad. Luego el gas fue expandido isobáricamente hasta que su temperatura llego a ser igual a la inicial. Hallar la cantidad neta del calor transferida al gas en este proceso.

A) 100 cal B) 300 cal C) 600 cal
D) 900 cal E) 500 cal

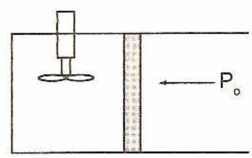
20. En un cilindro vertical cerrado por ambos extremos, se encuentra un émbolo de fácil movilidad, en cada lado del cual hay 1 mol de gas ideal en estado de equilibrio. Cuando la temperatura es $T_0 = 300$ K, el volumen de la parte superior es 4 veces el de la parte inferior. ¿A qué temperatura la relación de estos volúmenes llegara a ser 3?

A) 337,5 K B) 450,78 K C) 421,87 K
D) 472,87 K E) 400 K

21. Un gas ideal realiza un ciclo de Carnot. Hallar el rendimiento del ciclo si durante la expansión adiabática la presión disminuye a la octava parte, el gas posee un coeficiente adiabático $\gamma = 1{,}5$.

A) 0,2 B) 0,5 C) 0,6 D) 0,4 E) 1,2

22. Un gas ideal está encerrado por un pistón liso cuya sección es de 0,3 m^2 si el gas se extiende de manera que el pistón avanza 8 cm y el ventilador proporciona un trabajo de 0,8 KJ, encuentre el trabajo neto. $P_0 = 105$ N/m^2

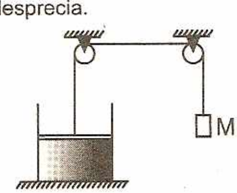


A) 1,6 KJ B) 1,2 KJ C) 1,0 KJ
D) 0,5 KJ E) 3,2 KJ

23. Un submarinista emplea el tiempo $T_1 = 10$ min en inspeccionar los deterioros de la parte sumergida de un barco. En este tiempo, la presión en el balón de acualong, que inicialmente era $P_1 = 150$ atm ($1{,}5 \times 10^7$ Pa), desciende 20%. Después, el submarinista empieza a hacer las reparaciones y el gasto de aire aumenta vez y media. ¿Al cabo de cuánto tiempo "T" de haber sumergido tiene que terminar su trabajo dicho submarinista, si la presión no debe descender a menos de $P_2 = 30$ atm ($0{,}3 \times 10^7$ Pa)?

A) 15 min B) 10 min C) 20 min
D) 30 min E) 40 min

24. En un cilindro, bajo el émbolo, cuya área $S = 100$ cm^2, se encuentran m = 28 g de nitrógeno a la temperatura $t_1 = 100$ °C. Al émbolo, por medio de un sistema de poleas, está colgada una pesa de masa M = 50 kg. El cilindro se enfría hasta $t_2 = 0$ °C. ¿A qué altura h se elevará la pesa?
La presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa. La masa del émbolo se desprecia.



A) 120 cm B) 136 cm C) 164 cm
D) 202 cm E) 184 cm

25. En un cilindro vertical de sección S, debajo del émbolo, cuya masa es "m", hay aire a la temperatura T_1. Cuando sobre el émbolo se coloca una pesa de masa M, la distancia desde el hasta el fondo del cilindro disminuye "n" veces. ¿Cuánto se elevará la temperatura del aire en el cilindro?
La presión atmosférica es igual a P_O

A) $T_1\dfrac{[Mg/S-(n-1)(P_o+mg/S)]}{n(P_o+mgS)}$

B) $T_1\dfrac{[Mg/S-(n+1)(P_o+mg/S)]}{n(P_o+mgS)}$

C) $T_1\dfrac{Mg}{SP_o}$

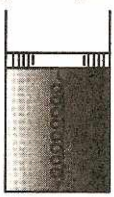
D) $T_1\dfrac{P_O}{mgS}$

E) $T_1\dfrac{Mg}{SP_O}\dfrac{(n+1)}{n}$

26. En un cilindro vertical de sección S, debajo del émbolo, cuya masa es "m", hay aire. Sobre el émbolo se encuentra una pesa. Si se quita dicha pesa, el volumen que ocupa el aire que hay debajo del émbolo se duplica y la temperatura de dicho aire se hace dos veces menor. Determinar la masa de la pesa M. La presión atmosférica es igual a P_O. g: aceleración de la gravedad.

A) $1\left(m+\dfrac{PoS}{g}\right)$ B) $2\left(m+\dfrac{PoS}{g}\right)$ C) $3\left(m+\dfrac{PoS}{g}\right)$
D) $4\left(m+\dfrac{PoS}{g}\right)$ E) $5\left(m+\dfrac{PoS}{g}\right)$

27. En un cilindro vertical hay una masa "m" de gas. El gas está separado de la atmósfera por un émbolo unido con el fondo del cilindro por medio del muelle, cuya rigidez es "k". A la temperatura T_1, el émbolo se encuentra a la distancia "h" del fondo del cilindro. ¿Hasta qué temperatura T_2 hay que calentar el gas para que el émbolo se eleve hasta la temperatura H?
La masa molar del gas es igual a "μ".



A) $T_1\dfrac{H}{h}+\dfrac{\mu kH(H-h)}{mR}$ B) $T_1+\dfrac{\mu kH(H-h)}{mR}$

C) $T_1\dfrac{H}{h}+\dfrac{\mu kH(H+h)}{mR}$ D) $T_1\dfrac{h}{H}+\dfrac{\mu kH(H-h)}{mR}$

E) $T_1+\dfrac{\mu kH^2}{mR}$

28. Unos recipientes, cuyas capacidades son $V_1 = 200\ cm^3$ y $V_2 = 100\ cm^3$, se comunican entre sí por un tubo corto en el cual hay un tabique termoaislante poroso. Mediante este tabique se establecen presiones iguales en los recipientes. El sistema se halla a la temperatura $t_o = 27\ °C$ y contiene gas a la presión $P_o = 10^5$ Pa. ¿Qué presión se establecerá en dicha sistema si el recipiente menor se introduce en hielo a la temperatura $t_2 = 0\ °C$ y la mayor, en vapor a la temperatura $t_1 = 100\ °C$? Despreciar la dilatación de los recipientes.

A) 6×10^4 Pa B) 8×10^4 Pa C) 9×10^4 Pa
D) 11×10^4 Pa E) 13×10^4 Pa

29. Un cilindro vertical, cerrado por ambos extremos, está dividido por un émbolo pesado termoaislante en dos partes: las dos partes del cilindro contienen la misma cantidad de aire. Cuando la temperatura del aire es la misma en ambas partes, $T_1 = 400$ K, la presión P_2 en la parte inferior es dos veces mayor que la presión P_1 en la parte superior. ¿Hasta que temperatura T_2 hay que calentar el aire en la parte inferior para que los volúmenes de las partes superior e inferior se hagan iguales?

A) 500 K B) 550 K C) 600 K
D) 700 K E) 750 K

30. Un cilindro vertical está dividido en dos partes iguales por un émbolo pesado termoaislante que puede deslizarse sin rozamiento. En la mitad superior del cilindro hay hidrógeno a la temperatura T y la presión P, y en la parte inferior, oxígeno a la temperatura 2T. Si el cilindro se invierte, para que el émbolo siga dividiendo el cilindro en dos partes iguales, hay que enfriar el oxígeno hasta la temperatura T/ 2. La temperatura del hidrógeno sigue siendo la misma que antes (T). Determinar la presión del oxígeno en los casos primero y segundo.

A) 4P/5, 6P/5 B) 6P/5, P/5 C) 7P/5, 3P/5
D) P/5, 9P/5 E) 8P/5, 2P/5

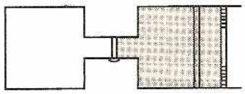
31. Los émbolos de dos cilindros iguales están rígidamente unidos entre sí de manera que los volúmenes que hay debajo de ellos son también iguales. Dentro de cada cilindro se ha introducido la misma masa de aire a la temperatura T.
Después uno de los cilindros se calienta hasta la temperatura T_1 y el otro se mantiene a la temperatura T. ¿Qué presiones habrá en los cilindros?
La presión atmosférica es igual a P_O. Las masas de los émbolos deben despreciarse.

A) $\dfrac{2P_O}{1+T/T_1}, \dfrac{2P_O}{1+T_1/T}$ B) $2P_O, 2P_O$

C) $\dfrac{P_O}{T}T_1, \dfrac{P_O}{T_1}T$ D) $3P_O\dfrac{T_1}{T}, 3P_O\dfrac{T}{T_1}$

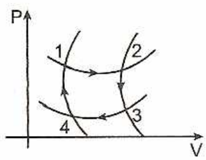
E) $4P_O, 4P_O$

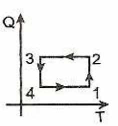
32. Un cilindro, cerrado por un émbolo, se comunica, por medio de un tubo corto, delgado, provisto de llave de paso, con un recipiente del cual se ha extraído el aire. Estando cerrada la llave, se introduce debajo del émbolo cierta cantidad de gas "v". El volumen que ocupa este gas en el cilindro es igual a la capacidad del recipiente. ¿Qué parte del gas permanecerá en el cilindro después de abrir la llave de paso? La temperatura del gas en el cilindro es $t_1 = -173$ °C y en el recipiente, $t_2 = 127$ °C.

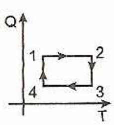


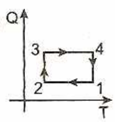
A) $\frac{1}{6}$V B) $\frac{1}{8}$V C) $\frac{1}{2}$V D) $\frac{3}{4}$V E) $\frac{1}{4}$V

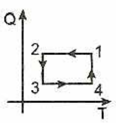
33. Se tiene el siguiente diagrama de un ciclo de Carnot ¿Cuál sería su diagrama calor (Q) versus temperatura (T)?

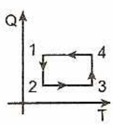


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

34. Decir si es verdadero (V) o falso (F):

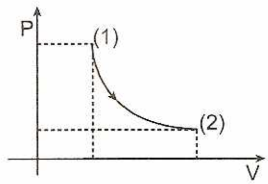
I. En una transformación a volumen constante no se realiza trabajo.
II. En una transformación isotérmica no hay intercambio de calor, entre el sistema y el medio ambiente.
III. La cantidad de calor necesaria para calentar un gas a presión constante es menor que la necesaria para calentarlo a volumen constante.

A) VFV B) FFF C) VFF D) VVV E) FVF

35. La eficiencia de una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot es $n_1 = 0,4$ y la eficiencia de otra semejante es $n_2 = 0,6$. Hallar la eficiencia de una máquina térmica compuesta por la dos anteriores, si se sabe que el calor que libera la primera máquina es absorbida por la segunda para realizar su ciclo.

A) 0,24 B) 0,33 C) 0,76 D) 0,40 E) 0,50

36. La gráfica es una adiabática si V_1 y V_2 son las energías internas de los puntos (1) y (2) respectivamente. Indicar que relación se cumple:



A) $V_1 \geq V_2$ B) $V_1 \leq V_2$
C) $V_1 > V_2$ D) $V_1 < V_2$
E) Falta información para decidir

37. En un cilindro vertical de sección "S" debajo del émbolo, cuya masa es"m", hay aire, sobre el émbolo se encuentra una pesa. Si se quita dicha pesa, el volumen que ocupa el aire que hay debajo del émbolo se duplica y la temperatura de dicho aire se hace la mitad. Determinar la masa "M" de la pesa, la presión atmosférica es igual a P_o
(g = gravedad)

A) $m + \frac{P_o s}{g}$ B) $2\left(m + \frac{P_o s}{g}\right)$
C) $2m + \frac{P_o s}{g}$ D) $3\left(m + \frac{P_o s}{g}\right)$
E) $3m + \frac{P_o s}{g}$

38. Un mol de un gas monoatómico se expande adiabáticamente variando su temperatura desde 290 °C hasta 250 °C y su volumen de a 4 litros. Calcular el trabajo realizado en este proceso.

A) 498,6 J B) 226,8 J
C) 333,8 J D) 518,6 J
E) 281,6 J

39. Determinar la variación de energía interna que tiene lugar en la fusión de 91 kg de hielo a la presión de 10^5 Pa. La densidad del hilo es 910 kg/m^3; joule = 0,24 cal

A) 7280,216 kcal B) 9280,216 kcal
C) 6280,216 kcal D) 8280,216 kcal
E) 1680,216 kcal

40. ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar a un gas ideal, para que al expandirse isobáricamente realice un trabajo de 4 J?

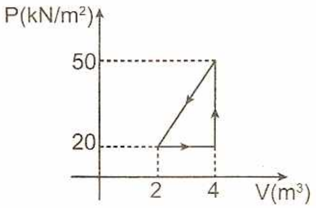
$\gamma = k = 7/5$
$\gamma = k =$ exponente adiabático del gas

A) 8 J B) 10 J C) 12 J
D) 14 J E) 16 J

41. Si se realiza sobre un sistema un trabajo igual a 418 J mientras que se suministra a la vez 200 cal de calor a dicho sistema, el cambio de energía interna del sistema en calorías es: (1 cal = 4,18 J)

A) 300 B) 100 C) 319
D) 218 E) 200

42. Hallar el trabajo realizado por el gas ideal en este ciclo:

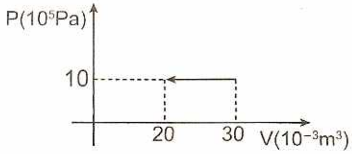


A) −10 kJ B) −20 kJ C) −30 kJ
D) −40 kJ E) −60 kJ

43. Se comprime un gas a presión constante de 160 kPa desde 8 dm^3 hasta 4 dm^3. Si el gas disipa 100 J de calor, ¿qué variación experimentó la energía interna del gas?

A) 450 J B) 540 J C) 640 J
D) 700 J E) 900 J

44. Un gas experimenta un proceso termodinámico tal como se indica en la gráfica. SI su energía interna aumentó en 25 kJ, ¿qué cantidad de calor ganó o cedió el medio exterior?



A) Ganó 10 kJ B) Perdió 10 kJ
C) Ganó 15 Kj D) Perdió 15 kJ
E) No ganó ni perdió

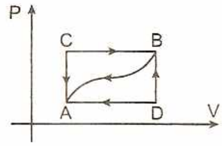
45. Un ventilador suministra 1,5 kW a un sistema durante 60 s aumentando su volumen de 0,03 m^3 a 0,09 m^3, mientras la presión se mantiene constante en 500 kPa. ¿Qué variación de energía interna experimenta el sistema, si este disipa 12 kJ de calor durante el mencionado periodo?

A) 48 kJ B) 118 kJ C) 72 kJ
D) −48 kJ E) −72 kJ

46. Un gas se expande isotérmicamente. Si ha recibido una cantidad de calor de una kilocaloría, calcular el trabajo que el gas realiza en la expansión. (1 cal = 4,186 J)

A) 4186 J B) 1178 J C) 1427 J
D) 0,24 J E) 0 J

47. Cuando un sistema pasa del estado A al B a lo largo de la trayectoria ACB, recibe 20 000 cal y realiza 7500 cal de trabajo. ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria ADB, si el trabajo es 2500 cal?



A) 12 000 cal B) 18 000 cal C) 15000 cal
D) 19 000 cal E) 22 000 cal

48. Un gas ideal encerrado en un cilindro que tiene pistón deslizante, mediante un proceso isotérmico recibe 48 cal de calor y logra desplazar al pistón horizontalmente. ¿Qué cambio de energía interna experimento el gas? ¿Qué trabajo realizo el gas al mover al pistón? Dar como respuesta la diferencia del mayor menos el menor (En joules) (1 joule = 0,24 cal)

A) Cero B) 100 C) 200
D) −100 E) −200

49. Una máquina térmica sigue el ciclo de Carnot trabajando entre las temperaturas de 200 K y 800 K. Halle el trabajo, sabiendo que expulsa 120 cal.

A) 270 cal B) 300 cal C) 360 cal
D) 540 cal E) 240 cal

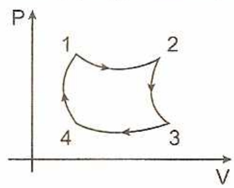
50. Un motor que funciona con el ciclo de Carnot tiene su foco caliente a 127 °C, toma 100 cal a esta temperatura en cada ciclo, y cede 80 cal al foco frío. Calcular la temperatura de este depósito.

A) 50 °C B) 197 K C) 320 K
D) 102 °C E) 273 K

51. La temperatura del foco caliente de una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot es de 300 K y su eficiencia es de 50%. ¿En qué porcentaje disminuiría su eficiencia si la temperatura del foco caliente disminuye en 50 °C?

A) 5% B) 8% C) 10% D) 12% E) 15%

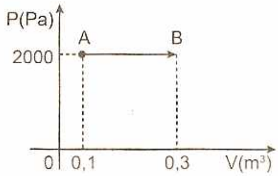
52. El gráfico representa el ciclo de Carnot señalar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:



I. Es el ciclo más eficiente que se conoce.
II. (1−2) y (3−4) son procesos isotérmicos.
III. (2−3) y (4−1) son procesos adiabáticos.
IV. En (3−4) la máquina recibe calor.

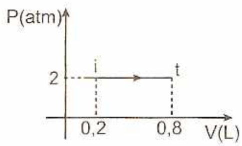
A) VVVV B) VVVF C) VFFV
D) VFFF E) FVVV

53. Conociendo que en el proceso AB el gas ideal recibió 100 cal, encuentre la variación de la energía interna en el mencionado proceso.



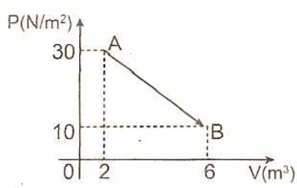
A) 300 J B) −300 J C) 100 J
D) 48 J E) 18 J

54. En el proceso termodinámico mostrado, determine el trabajo efectuado por el sistema.
(Considere: 1 atm = 10^5 Pa)



A) 100 J B) 120 J C) 150 J
D) 180 J E) 240 J

55. El plano P−V muestra el proceso que sigue un gas ideal, la energía interna en A es 60 J y en B es de 75 J. Halle el calor suministrado en el proceso AB.



A) 80 J B) 95 J C) 103 J
D) 108 J E) 121 J

56. Una máquina térmica ideal trabaja entre las temperatura de 500 K y 200 K. Si recibe 1600 cal de las calderas halle el trabajo neto (1 cal = 4,18 J)

A) 2012,8 J B) 3012,8 J C) 4012,8 J
D) 5012,8 J E) 6012,8 J

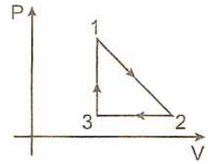
57. Una máquina térmica de produce 480 J por cada 10 ciclos con un rendimiento de 30%. Halle el calor que la máquina térmica cede al foco frío en cada ciclo.

A) 84 J B) 54 J C) 28 J D) 140 J E) 112 J

58. En una máquina de Carnot el calor rechazado es la cuarta parte del calor que absorbe la máquina. Halle la temperatura del foco caliente si el foco frio está a 7 °C.

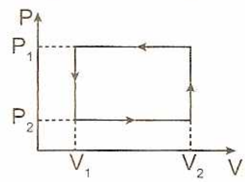
A) 347 °C B) 112 °C C) 847 °C
D) 947 °C E) 1000 °C

59. Un gas ideal realiza el ciclo 1231. El trabajo realizado por el gas en este ciclo es:



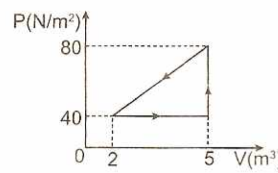
A) $1/2[(P_1 + P_2)(V_2 - V_3)]$
B) $1/2[(P_1 + P_3)(V_2 + V_3)]$
C) $1/2[(P_1 - P_2)(V_2 + V_3)]$
D) $1/2[(P_1 - P_3)(V_2 - V_3)]$
E) Cero

60. En la figura se muestra el diagrama "Presión" versus "Volumen" correspondiente al ciclo termodinámico efectuado por un sistema. Determine el trabajo neto efectuando durante el ciclo.



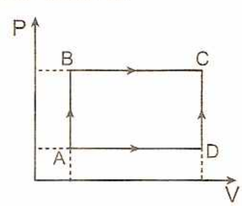
A) $(P_1 - P_2)(V_2 - V_1)$ B) $(P_2 - P_1)(V_1 - V_2)$
C) $(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$ D) $P_1V_1 + P_2V_2$
E) $P_1V_1 - P_2V_2$

61. Se tiene un sistema termodinámico el cual realiza el ciclo mostrado. El trabajo realizado durante el ciclo es:



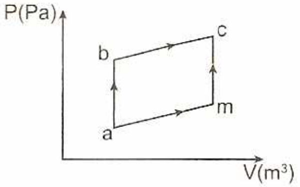
A) 20 J B) 40 J C) −60 J
D) 80 J E) 100 J

62. Cuando un gas pasa del estado "A" al estado "C" siguiendo la trayectoria ABC, recibe 20 000 cal y efectúa un trabajo de 7500 cal. Calcular el calor recibido a lo largo de la trayectoria ADC, si el trabajo efectuado es de 2500 cal.



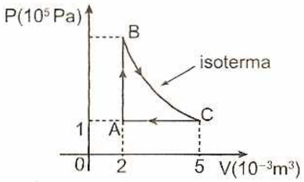
A) 5000 cal B) 10 000 cal C) 15 000 cal
D) 20 000 cal E) 1500 cal

63. Cuando se lleva un sistema del estado a al estado c, siguiendo el proceso abc, se encuentra que el calor suministrado es 800 J y el trabajo realizado por el gas es de 500 J. Si se sigue el proceso amc el calor suministrado seria 700 J. Determinar el trabajo realizado por el gas siguiendo el proceso amc.



A) 200 J B) 300 J C) 400 J
D) 500 J E) 600 J

64. La gráfica muestra el ciclo termodinámico desarrollado por un gas ideal. Determine el trabajo de un ciclo y el calor absorbido en dos ciclos, si en el proceso C → A el gas disipa 400 KJ de energía en forma de calor (Ln 2,5 = 0,9).

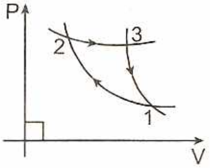


A) 150 J; 1100 J B) 450 J; 230 J C) 150 J; 550 J
D) 450 J; 550 J E) 300 J; 230 J

65. Un cilindro en cuyo interior se desplaza un pistón contiene 3 L de nitrógeno a una presión de 1 bar y 27° C. Si se calienta el gas isobáricamente hasta 327° C, calcule la variación, de energía interna que experimenta el gas (C_p = 7 cal/mol.K; C_V = 5 cal/mol.K).

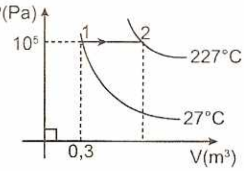
A) 100 J B) 200 J C) 750 J
D) 350 J E) 500 J

66. El ciclo mostrado está constituido por 1−2 proceso adiabático, 2−3 proceso isotérmico, 3−1 proceso adiabático; entonces podemos afirmar que



A) El ciclo termodinámico puede ser efectuado por un motor térmico que trabaje con gas ideal.
B) El estado 1 no es posible.
C) La eficiencia de este ciclo es menor que la eficiencia del ciclo de Carnot.
D) El cambio de energía interna de 2 a 3 es mayor que cero.
E) Ninguna proposición es correcta.

67. Un gas ideal experimenta una exposición tal como se muestra. Si a dicho gas se le entregó la misma cantidad de calor que necesita 10 g de agua a 80°C para vaporizarse completamente, ¿En cuánto varía la energía interna del gas? (1 cal=4,2 J)

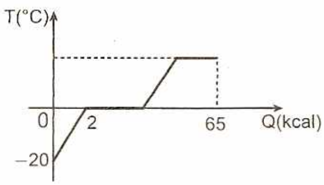


A) 3,52 kJ B) 4,51 kJ C) 5,1 kJ
D) 6,2 kJ E) 7,25 kJ

68. En un matraz se encontraba agua a 0°C. Evacuando, por medio de una bomba, el vapor se logró congelar todo el agua que quedaba en el matraz. ¿Qué % de agua se evacuó?

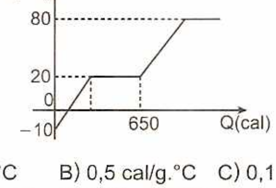
A) 10% B) 11% C) 12% D) 13% E) 0%

69. El gráfico que se muestra corresponde al comportamiento de la temperatura de cierta cantidad de agua cuando se le entrega calor. ¿Cuál es la composición final del sistema? Desprecie el calor que absorbe el recipiente.



A) 50 g vapor, 100 g de líquido.
B) 50 g de vapor, 200 g de líquido.
C) 150 g de vapor, 50 g de líquido.
D) 50 g de vapor, 150 g de líquido.
E) 100 g de vapor, 100 g de líquido

70. La figura muestra el comportamiento de la temperatura de una sustancia solida de 50 g cuando le suministramos calor. Si el calor latente de fusión es 10 cal/g, determine su calor específico en la fase sólida.



A) 1 cal/g.°C B) 0,5 cal/g.°C C) 0,1 cal/g.°C
D) 0,2 cal/g.°C E) 0,32 cal/g.°C

71. ¿Cómo varia la energía interna de un gas ideal monoatómico si su presión aumenta 3 veces y su volumen disminuye 2 veces?

A) Aumenta 1,5 veces B) Disminuye 1,5 veces
C) Aumenta 2 veces D) Disminuye 2 veces
E) Aumenta 3 veces

72. Un recipiente cuya capacidad es V contiene un gas ocupando un volumen V/2 y este tiene una tapa de masa despreciable. Al recipiente se le suministra calor cuidadosamente, de tal modo que mantenga la temperatura constante. ¿Cuál es la cantidad de calor que se debe dar hasta que la tapa logra ascender de manera que el gas ocupe todo el recipiente? (V = 1 L)

A) 60,5 J B) 66,4 J C) 69,3 J
D) 76,4 J E) 98,2 J

73. En un cilindro se tiene cierta cantidad de gas tapado por un émbolo de 10 KN a la presión atmosférica. ¿Qué masa de carbón se debe quemar para incrementar en 10 KJ la energía interna del gas, si el émbolo de 0,5 m^2 de sección sube lentamente 50 cm? El poder calorífico del carbón es 20 kJ/kg y su eficiencia de combustión es 80%.

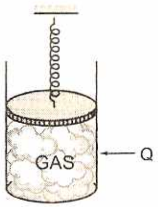
A) 1 kg B) 2 kg C) 2,5 kg D) 4 kg E) 5 kg

74. Determine qué porcentaje del calor recibido se gasta para desarrollar trabajo durante la expansión isobárica de un gas monoatómico.

A) 10% B) 20% C) 30% D) 40% E) 50%

75. Un cilindro contiene un gas ideal y es tapado por un émbolo de 1 kg y 10 cm^2 de sección que está en equilibrio unido a un resorte de constante de rigidez K = 400 N/m sin deformar.

Si le transferimos al gas 185 J de calor y el gas aumenta su energía interna en 80 J, ¿Cuánto se comprime el resorte? Considere que la presión atmosférica es de 1 atm.

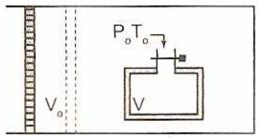


A) 20 cm B) 30 cm C) 50 cm
D) 60 cm E) 80 cm

76. Un cilindro de 2 cm^2 de sección, se dispone vertical. El cilindro contiene 40 cm^3 de aire a 1 atm, el cual está encerrado mediante un émbolo liviano. Luego, encima del émbolo se coloca un bloque de 52 kg el cual desciende lentamente hasta quedar en equilibrio. Si el sistema es impermeable al calor; ¿Cuánto desciende el émbolo? y ¿Cuánto trabajo desarrollo el aire durante el proceso? (Cp = 0,24; Cv = 0,16) KJ/kg.K (g = 10 m/s^2)

A) 17,78 cm; −16 J B) 17,78 cm; 12 J
C) 14,22 cm; −12 J D) 10,24 cm; 16 J
E) 10,24 cm; −9 J

77. En un recipiente térmicamente aislado con volumen interno V se ha practicado un vacío profundo. El aire circundante tiene la temperatura T_0 y presión atmosférica P_0. En cierto momento se abre el grifo, después de lo cual tiene lugar la rápida carga del recipiente con el aire. ¿Qué temperatura T tendrá el aire en el recipiente una vez que se llene?



A) $T = T_0$ B) T < T0
C) T > T0 D) $T \leq$ T0
E) No se puede precisar

78. Señale la proposición verdadera (V) o falsa (F) según corresponda.

I. En todo proceso isotérmico, el cambio de energía interna es nulo.
II. A mayor presión atmosférica el agua hierve a menor temperatura.
III. En todo ciclo termodinámico, el cambio de energía interna es nulo.
IV. Para un gas ideal la energía interna es directamente proporcional a su temperatura.

A) FVVV B) FVFV C) FFVV
D) VFFV E) VVFV

79. Un gas contenido en un cilindro se comprime por medio de un pistón; señale la proposición incorrecta.

A) El volumen del gas disminuye y la presión aumenta.
B) Se realiza trabajo sobre el gas.
C) El gas se calienta.
D) La energía interna del gas varia.
E) La variación de la energía interna fue mayor que el trabajo realizado sobre él.

80. En un proceso isotérmico, la presión de un gas ideal varía de 10^6 Pa a 10^5 Pa, ¿qué sucede con la densidad de aquel gas?

A) Aumenta en 10% B) Disminuye al 10%
C) Aumenta en 90% D) Disminuye al 90%
E) No varía.

81. Sabemos que el aire caliente se eleva. Parecería entonces que la temperatura debería ser más elevada en la cima de las montañas que más abajo. Sin embargo, en general ocurre lo contrario. ¿Por qué?

A) Porque el aire en la cima de la montaña lo enfría.
B) Porque el aire caliente no llega a la cima de la montaña.
C) Porque el aire caliente se dirige hacia los cuerpos fríos.
D) Porque cuando se eleva experimenta expansión.
E) Porque cuando se eleva experimenta compresión.

82. Un cilindro en cuyo interior se desplaza un pistón contiene 2,8 g de nitrógeno a una presión de 1 atm y 27 °C. Si se calienta el gas isobáricamente hasta 327 °C, Calcule la variación de energía interna que experimenta el gas. Considere:
Calor especifico a presión constante
Cp = 7 cal/mol °K
Calor especifico a volumen constante
Cv = 5 cal/mol °K

A) 210 cal B) 150 cal C) 60 cal
D) 270 cal E) 300 cal

83. Un ventilador suministra 1,5 kW a un sistema durante un minuto, incrementando su volumen de 0,03 m^3 a 0,09 m^3, mientras la presión del sistema se mantiene constante en 5 atm. Calcule la variación de energía interna del sistema, si este disipo 12 kJ de calor durante el mencionado proceso.

A) 72 kJ B) 60 kJ C) 48 kJ D) 36 kJ E) 30 kJ

84. Durante un proceso de expansión con suministro de 240 kJ de calor, 1 kg de aire efectúa un trabajo igual a 180 kJ. ¿En cuánto se elevara la temperatura del aire en este proceso? El calor específico del aire a volumen constante es 0,722 kJ/kg.K.

A) 90 °C B) 83 °C C) 75 °C D) 60 °C E) 50 °C

85. Respecto a las máquinas térmicas, es cierto que:
I. Funcionan bajo el segundo principio de la termodinámica.
II. Tienen teóricamente la máxima eficiencia si funcionan bajo el ciclo de Carnot.
III. Pueden tener eficiencia de 100%.
IV. En toda máquina térmica se cumple:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)=\left(\frac{Q_A}{Q_B}\right)$$

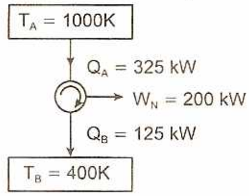
A) Solo I B) I y II C) Solo III
D) Solo IV E) IV y I

86. La sustancia de trabajo de una máquina térmica al recibir 100 cal en un ciclo desarrolla un trabajo de 105 J, luego al culminar el ciclo es cierto que
I. La sustancia incrementa su temperatura.
II. La sustancia pierde 315 J de energía interna.
III. La sustancia incrementa su energía interna en 20 J
IV. La sustancia desarrolla el ciclo entre 2 focos de temperatura donde:

$$T_{\substack{\text{foco}\\\text{caliente}}} \geq \frac{4}{3}T_{\substack{\text{foco}\\\text{frío}}}$$

A) Solo I B) I y IV C) III y IV
D) Solo II E) Solo IV

87. Respecto a la máquina térmica que se esquematiza

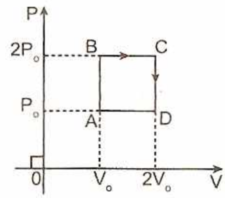


Es correcto afirmar que:

A) Dicho motor es reversible y puede disipar aún menos calor.
B) El ciclo con el cual opera el motor es irreversible.
C) La máquina esquematizada es imposible, pues no puede desarrollar el mencionado trabajo.
D) La máquina realiza el ciclo de Carnot.
E) La máquina opera cíclicamente, pero con un gas ideal.

88. Un motor térmico realiza el ciclo mostrado en la gráfica, con una sustancia de trabajo que es un gas ideal, cuyo calor especifico a volumen constante es $C_V = \frac{8}{5}R$. ¿Qué eficiencia térmica tiene dicho motor?

A) 38,1%
B) 31,3%
C) 26,5%
D) 19,8%
E) 14,7%



89. Un recipiente térmicamente aislado, contiene agua a 40 °C, se introduce 100 g de hielo a −8 °C y luego de cierto tiempo se observa que no todo el hielo se funde, ¿cuántos gramos de agua como mínimo debe haber inicialmente en el recipiente?

A) 150 g B) 180 g C) 210 g
D) 280 g E) 320 g

90. ¿Hasta qué temperatura (aprox.) se debe calentar un cubo de aluminio, para que al colocarlo sobre hielo a 0 °C, se logre sumergir totalmente en el hielo? Las densidades del hielo y el aluminio son 0,9 y 2,7 g/cm^3. El calor específico del aluminio es 880 J/kg.K

A) 300 K B) 350 K C) 400 K
D) 450 K E) 500 K

91. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tiene 1 kg de hielo a −20°C. ¿Qué mínima cantidad de un líquido a 80°C debe ingresar al sistema para que finalmente quede 225 g de hielo? El líquido tiene un calor especifico que varía con la temperatura (T) según la ley Ce = 10 + 2T (cal/g.°C).

A) 100 g B) 80 g C) 50 g
D) 30 g E) 10 g

92. Un kilogramo de vapor a 100°C ingresa a un depósito de capacidad calorífica despreciable que contiene 20 kg de hielo a −68°C. ¿Qué energía calorífica intercambian el hielo con el vapor hasta llegar al líquido térmico?

A) 640 kcal B) 680 kcal C) 720 kcal
D) 800 kcal E) 540 kcal

93. Un recipiente de capacidad calorífica despreciable contiene 6,5 g de vapor de agua a 100 °C. Determine cuantos cubitos de hielo de 10 g cada uno, que se encuentra a −20 °C, debe introducirse en dicho recipiente para que la mezcla alcance el equilibrio térmico a 40 °C.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

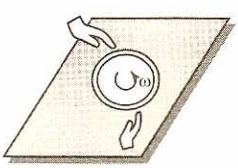
94. Una sustancia de 20 g se encuentra a 10 °C y se observa que su calor especifico (Ce) varia con la temperatura de acuerdo a la siguientes relación Ce(t) en segundo y Ce en cal/g.°C). Determine la cantidad de calor que se requiere entregar para variar su temperatura en 30 °C.

A) 30 kcal B) 32,4 kcal C) 24 kcal
D) 10 kcal E) 50 kcal

95. Una bola de plomo que se desplaza con una velocidad de 400 m/s, choca contra una pared, considerando que el 5% de su energía cinética se invierte en calentarla. Determine la variación de temperatura que sufre la bola si su Ce = 0,03 cal/g.°C.

A) 30 °C B) 31 °C C) 32 °C
D) 40 °C E) 50 °C

96. Un anillo metálico (Ce=0,24 cal/g.°C) cuya masa es 0,5 kg se hace girar sobre una mesa horizontal rugosa tal como se indica. Si el anillo adquirió 50 rad/s, ¿En cuánto incrementa su temperatura hasta que deja de girar? Considere que el anillo no experimenta disipación de energía (radio del anillo: 10 cm)

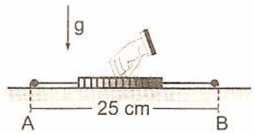


A) 0,0125 °C B) 0,0200 °C C) 0,0400 °C
D) 0,125 °C E) 0,12 °C

97. Un bloque de hielo a 0 °C se lanza sobre una superficie rugosa. Determine que masa tiene el bloque de hielo, cuando se detiene, si el 50% de la energía cinética se disipa al medio en forma de calor (m = 2 kg).

A) 1960 g B) 1970 g C) 1985 g
D) 1990 g E) 1890 g

98. Una moneda de cobre de 20 g es friccionada sobre una superficie horizontal áspera (μ_k = 0,1) entre A y B. Si la fuerza normal de la persona sobre la moneda es 15 N y esta absorbe el 80% de calor producido; ¿Cuántas veces debe recorrer dicho tramo para incrementar su temperatura en 10 °C? Ce_{Cu} = 380 J/kg.°C (g = 10 m/s^2)



A) 100 B) 200 C) 250
D) 300 E) 500

99. Una cinta metálica de 1 m de longitud esta calibrada a 10 °C, pero es utilizada a 80 °C en la medición del largo de un terreno; si la cinta indico 200 m, ¿Cuál es la longitud real del terreno? ($\alpha_{cinta} = 4 \times 10^{-5}$°C^{-1})

A) 199,44 m B) 199,22 m C) 200 m
D) 200,44 m E) 200,56 m

100. Un matraz de vidrio de 250 cm^3 de capacidad se llena completamente con mercurio a 30 °C. Si los coeficientes de dilatación cúbica para el vidrio y el mercurio son $1,2 \times 10^{-5}$°C^{-1} y 18×10^{-5}°C^{-1} respectivamente. ¿Qué volumen de mercurio se derrama si el sistema se calienta hasta 80 °C?

A) 2,05 cm^3 B) 2,10 cm^3
C) 2,15 cm^3 D) 2,20 cm^3
E) 2,25 cm^3

101. En un recipiente impermeable al calor se ponen juntos 0,3 kg de hielo a 0 °C, 1,8 kg de agua a 10 °C; y 0,15 kg de vapor de agua a 100 °C. ¿Cuál es la temperatura de la mezcla una vez alcanzado el equilibrio térmico?

A) 20 °C B) 30 °C C) 40 °C
D) 50 °C E) 60 °C

102. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable, se tiene 20 g de hielo a −10 °C. Si se logra verter 20 g de agua a 25 °C en dicho recipiente, determine la composición final de la mezcla.

A) 5 g de hielo, 35 g de agua líquida
B) 10 g de hielo, 30 g de agua liquida
C) 15 g de hielo, 25 g de agua líquida
D) 4 g de hielo, 36 g de agua líquida
E) 34 g de agua líquida, 6 g de hielo.

lor y sometidos a la compresión hasta la presión P = 1200 atm. Encuentre la masa de hielo derretido, si el descenso de la temperatura es directamente proporcional a la presión y al aumentar la presión en 120 atm, la temperatura de fusión disminuye en 1 °C

A) 10 g B) 12,5 g C) 15 g
D) 20 g E) 6,25 g

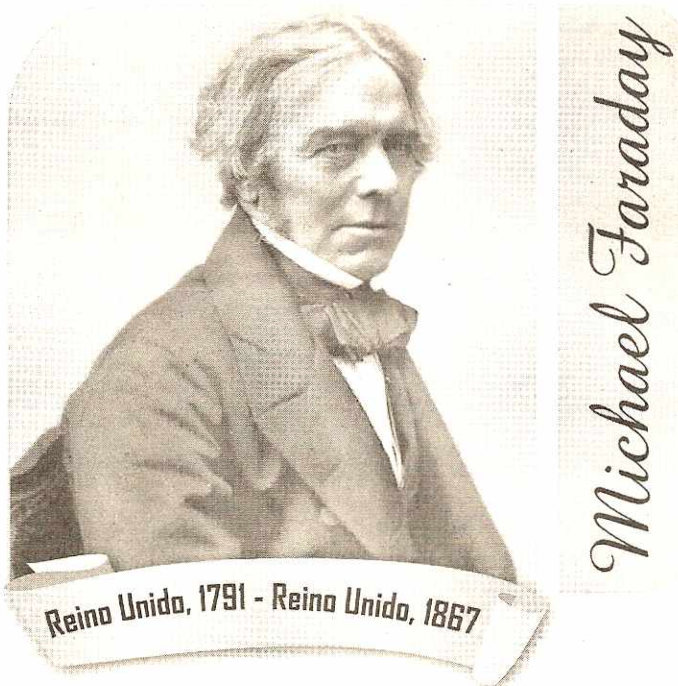
de ese instante, ¿Dentro de cuánto tiempo el agua se vaporizara por completo?

A) 50 minutos
B) 60 minutos
C) 70 minutos
D) 40 minutos
E) 55 minutos

CLAVES

1. D	14. C	27. A	40. D	53. B	66. E	79. E	92. B
2. B	15. B	28. C	41. B	54. B	67. A	80. B	93. C
3. C	16. E	29. D	42. C	55. B	68. B	81. D	94. B
4. B	17. C	30. E	43. B	56. C	69. D	82. E	95. C
5. C	18. D	31. A	44. C	57. B	70. C	83. C	96. A
6. B	19. C	32. D	45. E	58. C	71. D	84. B	97. C
7. C	20. C	33. A	46. A	59. D	72. C	85. B	98. C
8. C	21. B	34. C	47. C	60. C	73. C	86. E	99. E
9. B	22. E	35. A	48. C	61. C	74. D	87. C	100. B
10. B	23. D	36. C	49. C	62. C	75. C	88. E	101. C
11. D	24. C	37. A	50. C	63. C	76. A	89. C	102. C
12. D	25. A	38. A	51. C	64. A	77. B	90. E	103. E
13. C	26. C	39. A	52. B	65. C	78. C	91. E	104. B

Michael Faraday (Newington, 22 de septiembre de 1791-Londres, 25 de agosto de 1867) fue un físico y químico británico que estudió el electromagnetismo y la electroquímica. Sus principales descubrimientos incluyen la inducción electromagnética, diamagnetismo y la electrólisis. Faraday es uno de los científicos más influyentes de la historia,debido a su estudio del campo magnético alrededor de un conductor por el que circula una corriente continua y por establecer las bases para desarrollar el concepto de campo electromagnético. Faraday también estableció que el magnetismo podía afectar a los rayos de luz y que había una relación subyacente entre ambos fenómenos. Descubrió, también, el principio de inducción electromagnética, el diamagnetismo, las leyes de la electrólisis e inventó algo que él llamó «dispositivos de rotación electromagnética». La unidad de capacidad eléctrica en el SI de unidades, el farad (F), se denomina así en su honor.



En su trabajo en electricidad estática, el experimento de la cubeta de hielo de Faraday demostró que la carga eléctrica se acumula solo en el exterior de un conductor cargado, sin importar lo que hubiera en su interior. Esto es debido a que las cargas se distribuyen en la superficie exterior de tal manera que los campos eléctricos internos se cancelan. Este efecto de barrera es conocido como «la jaula de Faraday».

Fuente: Wikipedia

ELECTRICIDAD

Estudia los fenómenos producidos por las cargas eléctricas, para su mejor estudio se divide en electrostática y electrodinámica.

CARGA ELÉCTRICA

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia (como la masa). La materia está constituida por unidades pequeñas llamadas moléculas y las moléculas constituidas por átomos, los cuales a su vez están formados por neutrones que no tienen carga eléctrica, protones y electrones, que tienen carga eléctrica igual en magnitud pero de signos diferentes: positiva y negativa respectivamente.

La carga eléctrica de un cuerpo macroscópico está dada por la diferencia entre el número de protones y electrones que existen en él.

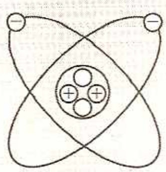
Un cuerpo es eléctricamente neutro, si el número de protones es igual al número de electrones, cargado positivamente si tiene exceso de protones; cargado negativamente si tiene exceso de electrones.

Átomo:

Todo átomo tiene dos zonas bien definidas: el núcleo y la nube electrónica.

En el núcleo se encuentran los neutrones y protones.

En la nube electrónica se encuentran los electrones, girando alrededor del núcleo en órbitas elípticas.



modelo atómico

CARGA ELEMENTAL (e)

Existe una carga mínima, denominada elemental, que poseen partículas elementales como los electrones y protones. Las cargas de las partículas elementales solo se diferencian por sus signos. Separar parte de la carga, por ejemplo del electrón, es imposible.

$$\boxed{e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \textit{coulomb}} \qquad \ldots(15.1)$$

Partícula	Carga
Electrón	$-e$
Protón	$+e$
Neutrón	0

Masas:

Electrón: $9{,}1091 \times 10^{-31}$ kg

Protón: $1{,}6725 \times 10^{-27}$ kg

Neutrón: $1{,}6748 \times 10^{-27}$ kg

CUANTIFICACIÓN DE LA CARGA

Todo cuerpo, molécula o átomo puede ganar o perder un número entero de electrones, entonces, la carga de todo sistema de cuerpos es múltiplo de la carga elemental.

$$\boxed{q = ne} \qquad \ldots(15.2)$$

n: número entero positivo o negativo

e: carga elemental

q: carga del cuerpo o sistema de cuerpos.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA ELÉCTRICA

Se dice que un sistema de cargas eléctricas, es eléctricamente aislado cuando sobre el sistema elegido no ingresan ni salen cargas, y además no interactúan con cuerpos cargados que se encuentran fuera del sistema elegido.

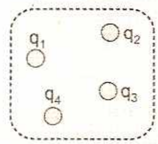
La suma algebraica de las cargas eléctricas de los cuerpos o partículas que forman un sistema eléctricamente aislado no varía cualquiera que sean los procesos que ocurran en dicho sistema.

$$\boxed{\Sigma q_{(inicial)} = \Sigma q_{(final)}} \qquad \ldots(15.3)$$

Sistema aislado

En todo sistema aislado eléctricamente, la carga neta permanece constante.

$$\Sigma q = \text{constante}$$



ELECTROSTÁTICA

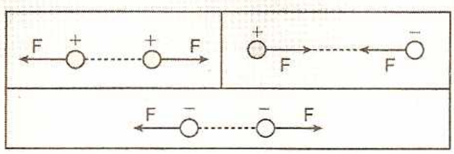
Se llama electrostática, a la teoría de la electricidad en que se estudia la interacción y las propiedades de los sistemas de cargas eléctricas en reposo relativo.

Ley cualitativa

Enunciado por primera vez por el físico norteamericano Benjamín Franklin (1706-1790).

«Las cargas eléctricas del mismo signo se repelen y cargas de signos diferentes se atraen».

Fuerzas eléctricas



Ley cuantitativa (Ley de Coulomb)

La fuerza de interacción en el vacío de dos cuerpos puntuales cargados en reposo es directamente proporcional al producto de los módulos de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$\boxed{F = k\left(\frac{q_1q_2}{d^2}\right)} \quad \ldots(15.4)$$

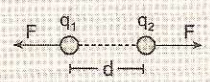
La constante eléctrica "k" es el Sistema Internacional (SI) se puede escribir en la siguiente forma:

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2C^{-2}} \quad \ldots(15.5)$$

La magnitud ε_o (ε es una letra griega que se lee épsilon), se denomina constante eléctrica, su valor es:

$$\boxed{\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}} \quad \ldots(15.9)$$

Ley de Coulomb



$$F = k\left(\frac{q_1q_2}{d^2}\right)$$

F: fuerza eléctrica (N)
q: carga eléctrica (C)
d: distancia (m)
k: constante eléctrica
$k = 9 \times 10^9\ Nm^2/c^2$

Cargas puntuales

Por cargas puntuales entendemos, cuerpos cargados cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia que los separa.

FENÓMENOS DE ELECTRIZACIÓN

Es aquel fenómeno por el cual los cuerpos pueden cargarse positiva o negativamente por defecto o por exceso de electrones. Las formas de electrización son los siguientes:

Por frotamiento

I. Uno de los dos cuerpos que se frota pierde electrones y se carga positivamente, el otro gana electrones y se carga negativamente. Por ejemplo, la frotación de una varilla de vidrio con un paño de seda, el vidrio resulta cargado positivamente y el paño de seda negativamente.

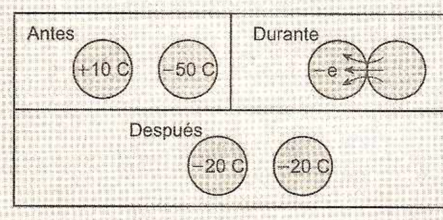
Por contacto

II. Cuando dos cuerpos conductores se ponen en contacto (por lo menos uno de ellos cargado) se establece una transferencia de cargas entre los cuerpos debido a una diferencia de potencial entre las superficies de ambos cuerpos conductores, el flujo de cargas cesa cuando las superficies de ambos cuerpos alcanzan el mismo potencial eléctrico.

III. Cuando dos cuerpos esféricos de igual radio cargados con q_1 y q_2 son puestos en contacto, se establece un flujo de electrones, al final las esferas se reparten las cargas equitativamente cada uno con carga Q.

$$\boxed{Q = \frac{q_1 + q_2}{2}} \quad \ldots(15.7)$$

Radios iguales

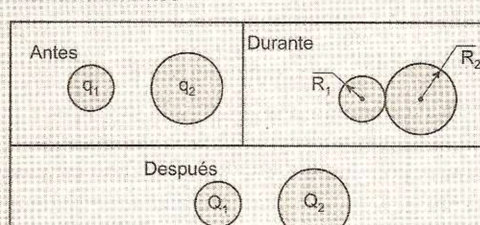


IV. Cuando dos esferas conductoras de radios R_1 y R_2 cargadas con q_1 y q_2 son puestas en contacto, las cargas se redistribuyen en las superficies esféricas en forma proporcional al cuadrado de los radios respectivos, de modo que la carga total se conserva. Si la carga final en cada esfera es Q_1 y Q_2 respectivamente, del principio de conservación de las cargas se cumple que:

$$\boxed{q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2} \quad \ldots(15.8)$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{Q_2}{R_2^2}} \quad \ldots(15.9)$$

Radios diferentes



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos esferillas cargadas con igual magnitud distan 3 cm, están situados en el aire y se repelen con una fuerza de 40 N. Calcular la carga de cada esferilla.

Resolución:

Aplicamos la ley de Coulomb: $F = k\left(\dfrac{qq}{d^2}\right)$

$$\Rightarrow 40 = \frac{(9\times10^9)q^2}{(3\times10^{-2})^2} \Rightarrow q^2 = 4\times10^{-12} \quad \therefore\ q = 2\,\mu C$$

2. Dos cargas puntuales se repelen con fuerzas de 12 N de intensidad. Si ahora duplicamos la distancia de separación, y triplicamos la carga de uno de ellos, calcular la nueva fuerza de repulsión.

Resolución:

Aplicamos la ley de Coulomb a cada situación:

Sea F_1 la fuerza inicial:

$$F_1 = k\left(\frac{qQ}{d^2}\right) = 12\ \text{N}$$

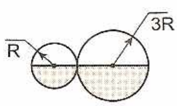
Sea F_2 la fuerza final:

$$F_2 = k\frac{(3q)Q}{(2d)^2} = \frac{3}{4}(k)\left(\frac{qQ}{d^2}\right) \Rightarrow F_2 = \frac{3}{4}(F_1) \Rightarrow F_2 = \frac{3}{4}F_1$$

$$F_2 = \frac{3}{4}(12) \quad \therefore\ F_2 = 9\ \text{N}$$

3. Se tiene una esfera cargada con 180 μC se pone en contacto con otra esfera de carga 120 μC cuyo radio es el triple que la anterior. Hallar la carga de las esferas después del contacto.

Resolución:



Después del contacto, la carga almacenada por cada esfera es directamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura.

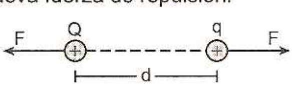
$$\frac{q}{R^2} = \frac{Q}{(3R)^2} \Rightarrow Q = 9q$$

Del principio de conservación de las cargas eléctricas:

$\Sigma q_{(inicial)} = \Sigma q_{(final)} \Rightarrow 180 + 120 = q + Q$

$300 = 10q \quad \therefore\ q = 30\,\mu C \wedge Q = 270\,\mu C$

4. Dos partículas electrizadas con cantidad de carga Q y q se encuentran separadas una distancia "d" y se repelen mutuamente con una fuerza de módulo 100 N. Si duplicamos la cantidad de carga de una, triplicamos la cantidad de carga de la otra y reducimos la distancia a la mitad, determinar el módulo de la nueva fuerza de repulsión.



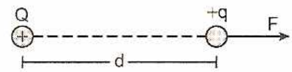
Resolución:

Sabemos que: $F = \dfrac{kqQ}{d^2} = 100$ N

La nueva fuerza de repulsión es:

$$F_1 = \frac{k(2q)(3Q)}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 24\left(\frac{kqQ}{d^2}\right) = 2400\ \text{N}$$

5. Se muestra dos partículas electrizadas con $Q = 80\,\mu C$ y $q = +2\,\mu C$, si se encuentran separadas $d = 0{,}3$ m, determinar el módulo de la fuerza eléctrica que actúa sobre "q".



Resolución:

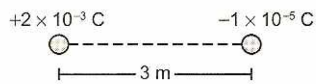
Ley de Coulomb: $F = \dfrac{kqQ}{d^2}$

Para determinar el módulo no se reemplaza el signo de las partículas electrizadas.

Reemplazando:

$$F = \frac{9\times10^9(2\times10^{-6})(80\times10^{-6})}{(3\times10^{-1})^2} = 16\ \text{N}$$

6. Se muestra dos partículas electrizadas. Determinar el módulo de la fuerza de atracción eléctrica entre las partículas.



Resolución:

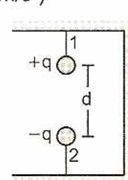
Ley de Coulomb: $F = \dfrac{kqQ}{d^2}$

Para determinar el módulo no se reemplaza el signo de las partículas electrizadas.

Reemplazando:

$$F = \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-3})(1{,}0\times10^{-5})}{3^2} = 20\ \text{N}$$

7. Se muestra dos cuerpos esféricos de masas iguales a 2 kg y electrizados con igual cantidad de carga $q = 10\,\mu C$, pero con signos diferentes. Si la distancia de separación vertical es $d = 0{,}1$ m, determinar el módulo de la tensión en las cuerdas (1) y (2). ($g = 10\ m/s^2$)

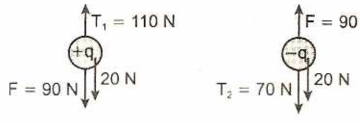


Resolución:

Ley de Coulomb: $F = \dfrac{kqQ}{d^2}$

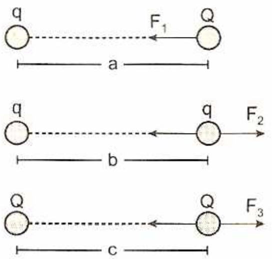
$$\Rightarrow F = \frac{(9\times10^9)(10\times10^{-6})(10\times10^{-6})}{(10^{-1})^2} = 90\ \text{N}$$

Realizamos el DCL de cada esfera:



Para la esfera $+q$: $T_1 = 90 + 20 = 110$ N
Para la esfera $-q$: $90 = T_2 + 20 \Rightarrow T_2 = 70$ N

8. En la figura mostrada, "q" y Q, son cargas puntuales y F_1, F_2 y F_3 son las fuerzas eléctricas respectivas que una de ellas ejerce sobre la otra en cada situación. Si se cumple que: $F_1^2 = F_2F_3$



Halle la relación que existe entre las distancias a, b y c.

Resolución:

Aplicando la ley de Coulomb a cada situación hallamos F_1, F_2 y F_3:

$F_1 = k\left(\dfrac{qQ}{a^2}\right)$ (atracción)

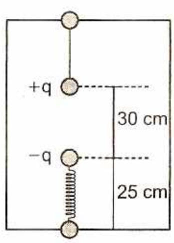
$F_2 = k\left(\dfrac{qq}{b^2}\right)$ (repulsión)

$F_3 = k\left(\dfrac{QQ}{c^2}\right)$ (repulsión)

Reemplazando en la condición: $F_1^2 = F_2F_3$

$$\left(k\frac{qQ}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{kqq}{b^2}\right)\left(\frac{kQQ}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^4} = \left(\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad \therefore a^2 = bc$$

9. Dos esferas de pesos iguales a 120 N cada una se encuentran en equilibrio. Si ambas esferas poseen cargas iguales $q = 40\ \mu$C pero de signos diferentes, calcular la longitud natural del resorte cuya constante elástica es $k = 400$ N/m.



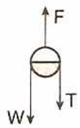
Resolución:

Calculamos la fuerza de atracción entre las cargas, aplicando la ley de Coulomb:

$$F = K\left(\frac{qq}{d^2}\right) \Rightarrow F = (9\times10^9)\frac{(4\times10^{-5})^2}{(3\times10^{-1})^2} \Rightarrow F = 160\ \text{N}$$

Analizando el DCL de la esfera que se encuentra unido al resorte:

DCL $(-q)$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W + T = F$

$\Rightarrow 120 + T = 160 \Rightarrow T = 40$ N

De la ley de Hooke, la tensión en el resorte es directamente proporcional a la deformación del resorte:

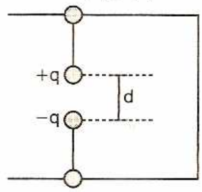
$T = kx \Rightarrow 40 = (400)x$

$x = 0{,}1$ m

La longitud natural del resorte es:

$l_0 = 25 - 10 \quad \therefore l_0 = 15$ cm

10. La figura muestra dos cuerpos esféricos de pesos iguales a 20 N y cargados con igual magnitud $q = 10^{-5}$ C, pero con signos diferentes. Si la distancia de separación es $d = 0{,}1$ m, determinar la tensión en las cuerdas (1) y (2).

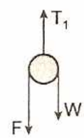


Resolución:

La fuerza de atracción F entre las cargas eléctricas será:

$$F = k\frac{qq}{d^2} = (9\times10^9)\frac{10^{-10}}{10^{-2}} = 90\ \text{N}$$

Haciendo el DCL de la esfera con carga positiva:

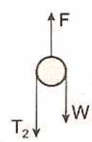


$\Sigma F_y = 0$

$T_1 = F + W \Rightarrow T_1 = 90 + 20$

$T_1 = 110$ N

Haciendo el DCL de la esfera con carga negativa:



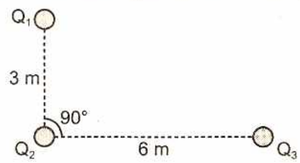
$\Sigma F_y = 0$

$T_2 + W = F$

$T_2 = F - W$

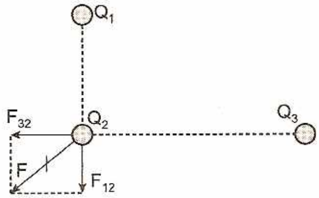
$T_2 = 90 - 20 \Rightarrow T_2 = 70$ N

11. Si los valores de las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 son de 30; 100 y 160 μC respectivamente, determinar la fuerza eléctrica resultante que actúa sobre Q_2.



Resolución:

Graficando las fuerzas eléctricas que actúan sobre Q_2:

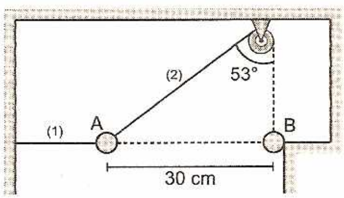


Calculando las fuerzas eléctricas, mediante la ley de Coulomb:

$$F_{12} = k\left(\frac{Q_1 - Q_2}{d_1^2}\right) = 3\text{ N} \wedge F_{32} = k\left(\frac{Q_3Q_2}{d_3^2}\right) = 4\text{ N}$$

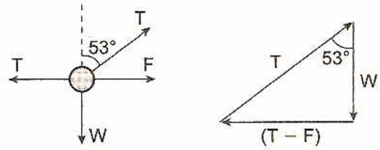
Cálculo de la fuerza eléctrica resultante, mediante el teorema de Pitágoras: $F = 5\text{ N}$

12. Si la esfera A pesa 15 N y tiene una carga $q = 10\ \mu C$, determinar la carga de la esfera B, para que las tensiones en las cuerdas (1) y (2) sean iguales.



Resolución:

Haciendo el DCL de la esfera A y construyendo el triángulo de fuerzas:



Resolviendo el triángulo:

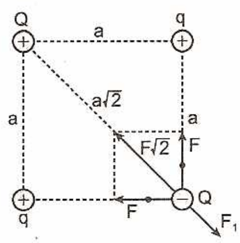
$T = 5F \wedge F = 3W \Rightarrow F = 45\text{ N}$

Cálculo de la carga de B, aplicando la ley de Coulomb: $F = k\left(\frac{q_Aq_B}{d^2}\right)$

Reemplazando datos en el SI y despejando: $q_B = 5\ \mu C$

El signo de la carga B es negativa (−).

13. En dos vértices opuestos de un cuadrado se fijan cargas $+q$ mientras que en los otros vértices se ubican cargas $-Q$, halle la relación entre éstas cargas de modo que $-Q$ no se mueva.



Resolución:

Cálculo de las fuerzas:

$$F = k\frac{Qq}{a^2} \Rightarrow F_1 = k\frac{Q^2}{(a\sqrt{2})^2} = k\frac{Q^2}{2a^2}$$

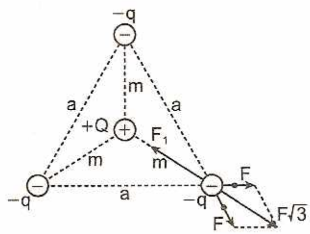
Si Q no debe moverse, la suma de fuerzas debe ser cero, igualamos módulos: $F_1 = F\sqrt{2}$

$$k\frac{Q^2}{2a^2} = k\frac{Qq}{a^2}(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{q} = 2\sqrt{2}$$

14. En un triángulo equilátero de lado "a", se colocan cargas $-q$ en cada vértice. Si queremos que el sistema permanezca en equilibrio, ¿qué carga debemos fijar en el centroide del triángulo?

Resolución:



Para que la carga en el vértice no se mueva, la suma de fuerzas debe ser cero. Luego la carga ubicada en el centroide debe atraer las cargas ubicadas en los vértices con una fuerza F_1.

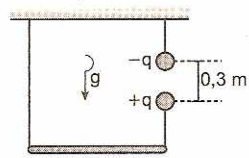
Cálculo de las fuerzas: $F = k\frac{qq}{a^2} = k\frac{q^2}{a^2}$

$$F_1 = \frac{kQ(-q)}{m^2} = \frac{kQq}{(a/\sqrt{3})^2} = 3k\left(\frac{Qq}{a^2}\right)$$

Para el equilibrio, estas fuerzas deben tener igual módulo: $F_1 = F\sqrt{3}$

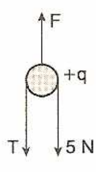
$$3k\frac{Qq}{a^2} = \sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2} \Rightarrow Q = \frac{q\sqrt{3}}{3}$$

15. La figura muestra una barra homogénea y uniforme en equilibrio. Cada esfera tiene un peso de 5 N y cargadas con magnitud $q = 20\ \mu C$, pero signos diferentes. Hallar el peso de la barra.



Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera $+q$:



$\Sigma F_y = 0$

$T + 5\text{ N} = F$

$T + 5\text{ N} = k\left(\frac{qq}{d^2}\right)$

Reemplazando datos:

$T + 5 = 40 \Rightarrow T = 35\text{ N}$ ...(1)

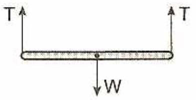
Realizamos el DCL de la barra:

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow W = 2T \qquad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$W = 70\ N$

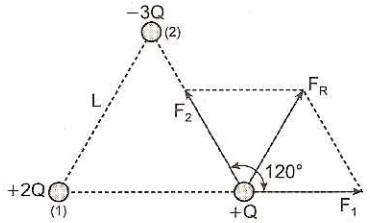


16. En los vértices de un triángulo equilátero de lado 0,3 m se han colocado tres cargas eléctricas de magnitud: $+Q$; $+2Q$; $-3Q$, donde: $Q = 10\ \mu C$. Determinar la fuerza resultante que actúa sobre la carga $+Q$. Considere solo fuerzas eléctricas.

Resolución:

Cálculo de las fuerzas F_1 y F_2:

$$F_1 = k\left[\frac{Q(2Q)}{L^2}\right] = 20\ N \ \wedge\ F_2 = k\left[\frac{Q(3Q)}{L^2}\right] = 30\ N$$

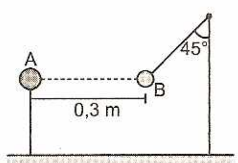


Cálculo de la fuerza resultante:

$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2(\cos 120°)$

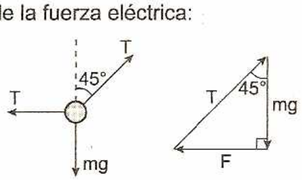
Reemplazando: $F_R = 10\sqrt{7}\ N$

17. En la figura, la esfera A y el péndulo poseen cargas de igual magnitud y de signos contrarios. Sabiendo que B está en equilibrio y que su masa tiene un valor de 10 gramos, determine la magnitud de la carga en cada uno de estos cuerpos. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Cálculo de la fuerza eléctrica:



$$F = k\left(\frac{qq}{d^2}\right) = \frac{9\times 10^9(q^2)}{9\times 10^{-2}} \Rightarrow F = 10^{11}q^2 \qquad ...(1)$$

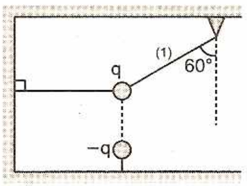
Haciendo el DCL, de la esfera B:

Del triángulo de fuerzas: $F = mg \qquad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2): $10^{11}q^2 = 10^{-2}(10)$

Luego: $q = 10^{-6}\ C$

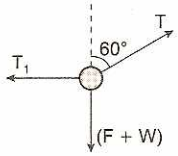
18. La figura muestra dos esferas cargadas con igual magnitud pero signos diferentes ($q = 20\ \mu C$), peso 20 N cada uno y separados una distancia de 30 cm. Determinar la tensión en la cuerda (1).



Resolución:

Cálculo de la fuerza eléctrica:

$$F = k\left(\frac{qq}{d^2}\right) = 9\times 10^9\left(\frac{4\times 10^{-10}}{9\times 10^{-2}}\right) \Rightarrow F = 40\ N$$



Realizamos el DCL de la esfera (+q):

$\Sigma F_y = 0$

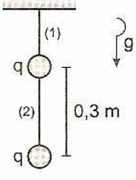
$T\cos 60° = (F + W) \qquad ...(1)$

Reemplazando en (1):

$T\left(\frac{1}{2}\right) = (40 + 20).$

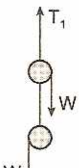
Luego: $T = 120\ N$

19. La figura muestra dos esferas idénticas de peso 10 N y carga $q = 20\ \mu C$, cada uno. Determinar la tensión en la cuerdas (1) y (2).



Resolución:

Realizamos el DCL del sistema formado por las dos cargas, para determinar la tensión en la cuerda (1). En este diagrama las fuerzas eléctricas se anulan.



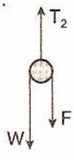
$\Sigma F_y = 0$

$T_1 = 2W$

Luego: $T_1 = 20\ N \qquad ...(1)$

Cálculo de la fuerza eléctrica de repulsión: $F = k\left(\frac{qq}{d^2}\right) = 40\ N$

Realizamos el DCL de la esfera inferior:



$\Sigma F_y = 0$

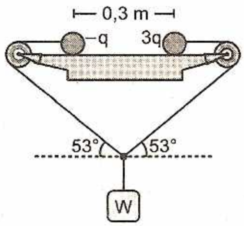
$T_2 = W + F$

Reemplazando:

$T_2 = 10 + 40.$

Luego: $T_2 = 50\ N$

20. La figura muestra dos esferillas de igual tamaño cargadas con magnitud $-q$ y $3q$ respectivamente. Despreciando las fuerzas de fricción, hallar el peso del bloque W, tal que, el sistema se encuentre en equilibrio. ($q = 10\ \mu C$).

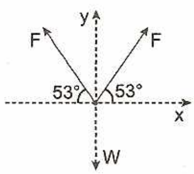


Resolución:

Hallaremos primeramente la fuerza de atracción eléctrica entre los cuerpos cargados eléctricamente; de la ley de Coulomb:

$$F = k\left(\frac{q_1q_2}{d^2}\right) \Rightarrow F = (9\times10^9)\frac{(10)(30)}{(0,3)^2} \quad \therefore F = 30\ N$$

Como no existe rozamiento, la tensión en la cuerda no vertical es igual a la fuerza eléctrica F.



Haciendo el DCL del nudo y aplicando la primera condición de equilibrio tenemos que: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow W = 2F\text{sen}53°$

$\Rightarrow W = 2\times30\times\frac{4}{5}$

$\therefore W = 48\ N$

21. Un estudiante realiza un experimento para medir la carga eléctrica de cuatro cuerpos. Los siguientes son sus resultados experimentales:

$Q_1 = 2,4\times10^{-19}C$; $Q_2 = 11,2\times10^{-19}C$;

$Q_3 = 8,8\times10^{-19}C$; $Q_4 = 8,0\times10^{-19}C$

¿Cuáles de estos resultados no son correctos?

Carga elemental $= 1,6\times10^{-19}C = e$.

Resolución:

Del principio de cuantización de la carga, sabemos, que toda carga eléctrica de un cuerpo o partícula es múltiplo entero de la carga elemental o sea de la carga de un electrón. Es decir:

$$Q = ne \Rightarrow n = \frac{Q}{e};\ n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...$$

Haciendo las divisiones respectivas:

Para Q_1: $n = \frac{Q_1}{e} = \frac{2,4\times10^{-19}}{1,6\times10^{-19}} = 1,5$

Para Q_2: $n = \frac{Q_2}{e} = \frac{11,2\times10^{-19}}{1,6\times10^{-19}} = 7$

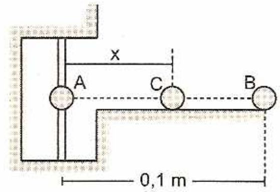
Para Q_3: $n = \frac{Q_3}{e} = \frac{8,8\times10^{-19}}{1,6\times10^{-19}} = 5,5$

Para Q_4: $n = \frac{Q_4}{e} = \frac{8\times10^{-19}}{1,6\times10^{-19}} = 5$

Los valores de "n" para Q_1 y Q_3 son incorrectos, por consiguiente Q_4 y Q_2 son correctos.

22. La figura muestra tres esferillas A, B y C cargadas. $Q_A = 40\ \mu C$; $Q_B = 90\ \mu C$.

Determinar el valor de la carga que debe tener la esferilla C y la distancia x con la condición de que las esferillas B y C estén cada una en equilibrio. La superficie es aislante y lisa.

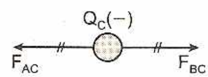


Resolución:

1. Analizaremos primeramente el estado de equilibrio de la esferilla C. haciendo el DCL y aplicando la primera condición de equilibrio:

   $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} = F_{BC}$

   $\Rightarrow k\frac{(40)Q_C}{x^2} = k\frac{(90)Q_c}{(10-x)^2}$

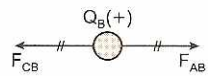


   $\therefore x = 0,04\ m$

2. Analizaremos a continuación el estado de equilibrio de la esfera B. Haciendo el DCL y aplicando la primera condición de equilibrio, tenemos que:

   $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{CB} = F_{AB}$

   $\frac{k(90)Q_C}{(0,06)^2} = \frac{k(40)(90)}{(0,1)^2}$



   Luego: $Q_C = 14,4\ \mu C$

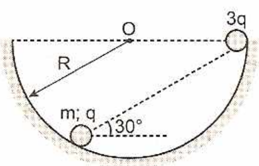
   Pero el signo de Q_C es negativo, entonces:

   $Q_C = -144\times10^{-7}C$

23. La figura muestra dos esferitas cargadas con magnitud "q" y 3q respectivamente. La esferilla móvil de masa $m = 90$ g y carga eléctrica "q" se encuentra en equilibrio en la posición mostrada.

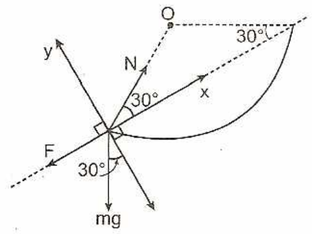
La esferilla de carga 3q se encuentra fijo.

Si el radio del casquete, dieléctrico y liso, es $R = 10$ cm, hallar "q". ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Analizaremos el estado de equilibrio de la esfera cargada con magnitud "q". Haciendo el DCL y aplicando las condiciones de equilibrio:



$\Sigma F_y = 0$

$N\text{sen}30° = mg\cos 30°$ ...(1)

$\Sigma F_x = 0$

$N\cos 30° = F + mg\text{sen}30°$ ...(2)

F: fuerza eléctrica

Dividiendo las ecuaciones: (1) y (2):

$$\tan 30° = \frac{mg\cos 30°}{F + mg\text{sen}30°}$$

Despejando: $F = mg$ ...(3)

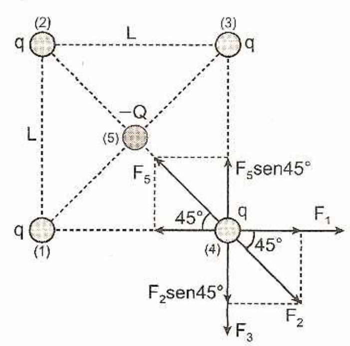
De la ley de Coulomb: $\dfrac{k(q)(3q)}{(2R\cos 30°)^2} = mg$

Reemplazando datos en el SI:

Luego: $q = 10^{-6}$ C

24. Cuatro cargas puntuales de valor "q" cada uno, están situados en los vértices de un cuadrado. ¿Cuál será la carga Q de signo contrario que es necesario colocar en el centro del cuadrado, tal que, el sistema se encuentre en equilibrio?

Resolución:



1. Si el sistema está en equilibrio, entonces cada carga debe estar en equilibrio, luego, analizamos la carga (4), donde:

   $F_3 = \dfrac{kqq}{L^2}$ ...(1)

   $F_5 = k\left(\dfrac{qQ}{L^2/2}\right) = 2\left(\dfrac{kqQ}{L^2}\right)$ ...(2)

   $F_2 = k\dfrac{qq}{2L^2}$ ...(3)

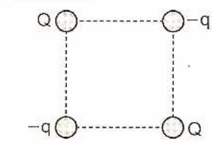
2. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_5\text{sen}45° = F_2\text{sen}45° + F_3$

   Luego: $\dfrac{2kqQ}{L^2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = k\left(\dfrac{qq}{2L^2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\left(\dfrac{qq}{L^2}\right)$

   Reduciendo:

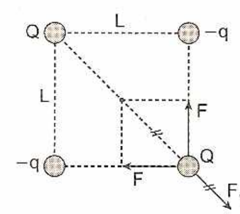
   $Q\sqrt{2} = q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 1\right) \Rightarrow Q = \dfrac{q}{4}(1 + 2\sqrt{2})$

25. En los vértices de un cuadrado se han colocado cuatro cargas eléctricas, como muestra la figura. Si, Q se encuentra en equilibrio, determinar la relación entre las cargas: Q/q. Las cargas −q se encuentran fijos al plano.



Resolución:

Graficando las fuerzas eléctricas, sobre la carga Q: $\Sigma F = 0$



$F_1 = F\sqrt{2}$

$k\dfrac{QQ}{(L\sqrt{2})^2} = k\dfrac{Qq}{L^2}(\sqrt{2})$

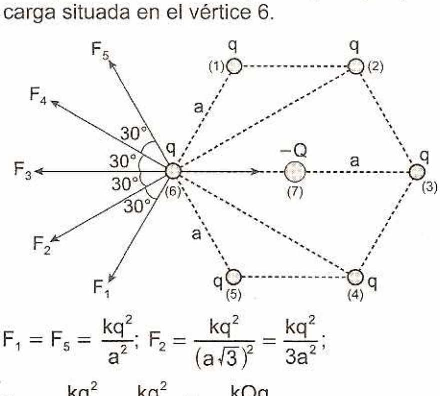
$\Rightarrow \dfrac{Q}{q} = 2\sqrt{2}$

26. En los vértices de un hexágono regular se colocan cargas eléctricas iguales de valor +q. ¿Qué carga habrá que colocar en el centro del hexágono, para que todo este sistema de cargas permanezca en equilibrio?

Resolución:

1. Para el equilibrio de las seis (6) cargas de magnitud "q", el signo de la carga Q colocada en el centro debe ser negativo.

   Por simetría del esquema, es suficiente analizar el equilibrio de una sola de estas cargas, no importa cual sea. Escojamos, por ejemplo la carga situada en el vértice 6.



   $F_1 = F_5 = \dfrac{kq^2}{a^2}$; $F_2 = \dfrac{kq^2}{(a\sqrt{3})^2} = \dfrac{kq^2}{3a^2}$;

   $F_3 = \dfrac{kq^2}{(2a)^2} = \dfrac{kq^2}{4a^2}$; $F_7 = \dfrac{kQq}{a^2}$

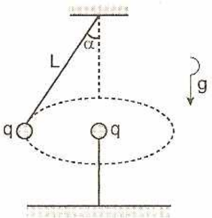
2. De la condición de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$

   $\Rightarrow F_3 + 2F_1\cos 60° + 2F_2\cos 30° = F_7$

   $\dfrac{kq^2}{4a^2} + 2\left(\dfrac{kq^2}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2\left(\dfrac{kq^2}{3a^2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = k\dfrac{qQ^2}{a^2}$

   $\therefore Q = 1{,}83q$

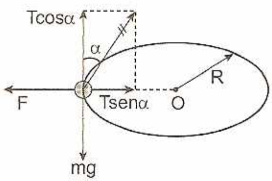
27. Una esferita de masa "m" y carga "q" puede girar en el plano vertical suspendida de un hilo de longitud L, gira alrededor de una carga inmóvil, igual a la carga de la esferita, donde α es el ángulo que forma la dirección del hilo con la vertical. Encontrar la velocidad angular con la cual la esferita gira uniformemente.



Resolución:

En principio, la esferita se mueve por una trayectoria que es parte de una superficie equipotencial esférica.

Haciendo el DCL de la esferita respecto de un observador en la tierra:



$\Sigma F_{(\text{radiales})} = ma_C$

$T\text{sen}\alpha - F = m\omega^2 R$

$T\text{sen}\alpha = F + m\omega^2 R \qquad ...(1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg \qquad ...(2)$

Dividiendo las ecuaciones (1) entre (2):

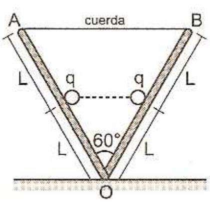
$$\tan\alpha = \frac{F + m\omega^2 R}{mg} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g\tan\alpha}{R} - \frac{F}{mR} \qquad ...(3)$$

Pero de la ley de Coulomb: $F = \dfrac{kq^2}{R^2}$, además:

$R = L\text{sen}\alpha \qquad ...(4)$

Reemplazando (4) en (3): $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\alpha} - \dfrac{kqq}{mL^3\text{sen}^3\alpha}}$

28. En el sistema mostrado las barras son ingrávidas. Determinar la tensión en la cuerda horizontal AB para que el sistema se encuentre en equilibrio, en la posición mostrada, si se sabe que las esferas mostradas, de igual peso y carga ($q = 150\ \mu C$), pueden moverse a lo largo de las barras mostradas ($L = 50$ cm).



Resolución:

Hallaremos primeramente la fuerza de repulsión entre las esferas cargadas eléctricamente:

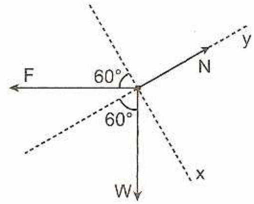
Sabemos: $F = k\dfrac{q_1 q_2}{d^2} \Rightarrow F = k\dfrac{q^2}{L^2} \quad \therefore F = 810\ N$

Hallaremos a continuación el peso de la esfera cargada. Haciendo DCL de la esfera y aplicando la primera condición de equilibrio tenemos:

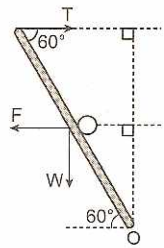
$\Sigma F_x = 0$

$F\cos 60° = W\text{sen}60°$

$\Rightarrow W = 270\sqrt{3}\ N \quad ...(2)$



Hallaremos, finalmente, la tensión en la cuerda horizontal. Haciendo el DCL del sistema barra-esfera y aplicando la segunda condición de equilibrio tenemos:

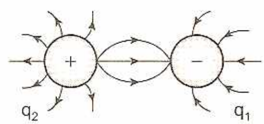


$\Sigma M_o = 0$

$\Rightarrow T(2L\text{sen}60°) = FL(\text{sen}60°) + WL(\cos 60°)$

Despejando: $T = 540\ N$

29. La figura muestra las líneas de fuerza entre dos esferas cargadas. Determinar la proporción entre las cantidades de carga de las esferas conductoras cargadas.



Resolución:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{N.°_{\text{líneas de (1)}}}{N.°_{\text{líneas de (2)}}} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \therefore \frac{q_1}{q_2} = \frac{4}{5}$$

30. Dos esferas conductoras de radios iguales (mucho menores de 3 cm) y con cargas de $Q_1 = 8 \times 10^{-9}$ C y $Q_2 = -40 \times 10^{-9}$ C, se ponen en contacto y posteriormente se las separa 3 cm. Calcular la fuerza que actúa después sobre cada una de ellas.

Resolución:

a) Cuando dos partículas electrizadas se ponen en contacto se establece una transferencia de electrones hasta alcanzar potenciales iguales en ambas esferas.

$Q_1 = 8 \times 10^{-9}$ C $\wedge$ $Q_2 = -40 \times 10^{-9}$ C

Después del contacto: $q_1 = q_2 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2}$

b) La cantidad de carga se reparte en forma equitativa.

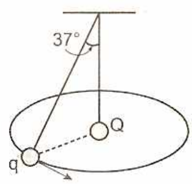
$q_1 = q_2 = -16 \times 10^{-9}$ C

c) Ley de Coulomb: (d = 3 cm = 3×10^{-2} m)

$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{9 \times 10^9 (16 \times 10^{-9}) 16 \times 10^9}{9 \times 10^{-4}}$$

$F = 256 \times 10^{-5}$ N

31. La esfera de 2 kg y carga q = 150 μC sostenida por una cuerda aislante de 5 m, gira convirtiéndose en un péndulo cónico. Determinar la rapidez angular del movimiento, si en el centro O de la circunferencia permanezca estática una carga Q = −900 μC.



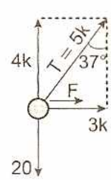
Resolución:

a) Fuerza eléctrica:

$$F = \frac{kqQ}{d^2} \Rightarrow F = \frac{9 \times 10^9 (150 \times 10^{-6})(900 \times 10^{-6})}{3^2}$$

$\Rightarrow F = 135$ N

b) Ley de aceleración en el movimiento circunferencial:



$\Sigma F_y = 0$

$4k = 20 \Rightarrow k = 5$

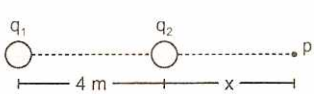
$\Sigma F_{radian} = ma_C$

$3k + F = m\omega^2 R$

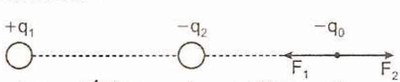
$15 + 135 = 2\omega^2(3)$

$\omega^2 = 25 \Rightarrow \omega = 5$ rad/s

32. Determinar la distancia x (en m), tal que cualquier carga negativa que se coloque en la posición "p" se encuentre siempre en equilibrio, las cargas eléctricas son: q_1 = +50 μC y q_2 = −18 μC, respectivamente.



Resolución:



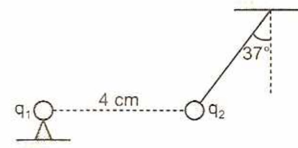
$F_1 = F_2$

$$\frac{kq_1q_0}{(4+x)^2} = \frac{kq_2q_0}{x^2} \Rightarrow \frac{q_1}{(4+x)^2} = \frac{q_2}{x^2}$$

$$\frac{50}{(4+x)^2} = \frac{18}{x^2} \Rightarrow \frac{25}{(4+x)^2} = \frac{9}{x^2}$$

$$\frac{5}{4+x} = \frac{3}{x} \Rightarrow 5x = 12 + 3x \Rightarrow 2x = 12 \quad \therefore x = 6\,\text{m}$$

33. La figura muestra dos cuerpos en equilibrio cargados con cargas eléctricas de q_1 = 1 μC y q_2 = −1 μC se encuentran en equilibrio. Determinar la masa del cuerpo 2 (en gramos).
(g = 10 m/s²; k = 9×10^9 N.m²/C²)

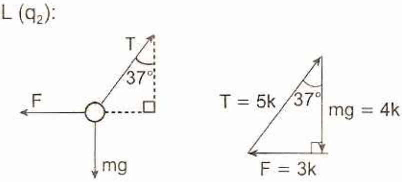


Resolución:

Ley de Coulomb:

$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{9 \times 10^9 (10^{-6})(10^{-6})}{(4 \times 10^{-2})} = \frac{9}{16}(10) = \frac{90}{16}\ \text{N}$$

CDL (q_2):

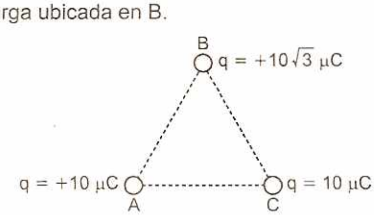


$$\frac{90}{16} = 3k \Rightarrow k = \frac{30}{16}$$

$$mg = 4k \Rightarrow m(10) = 4\left(\frac{30}{16}\right) \Rightarrow m = \frac{3}{4}\,\text{kg}$$

$\therefore m = 750$ g

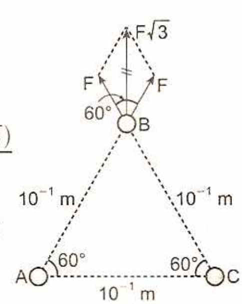
34. Tres cargas puntuales se ubican en los vértices de un triángulo equilátero ABC de 10 cm de lado, como muestra la figura. Determinar la dirección y magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la carga ubicada en B.



Resolución:

DCL de la esfera B

Ley de Coulomb:



$$F = \frac{kqq\sqrt{3}}{d^2}$$

$$F = \frac{9 \times 10^9 (10^{-5})(10^{-5}\sqrt{3})}{10^{-2}}$$

$\Rightarrow F = 90\sqrt{3}$

$F_R = F\sqrt{3} \Rightarrow F_R = 270$ N

La fuerza resultante es:

En general:

$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$

CAMPO ELÉCTRICO

Toda carga eléctrica altera las propiedades del espacio que la rodea, el mismo que adquiere una sensibilidad eléctrica que se pone en manifiesto cuando otra carga ingresa a esta región. Así, llamamos campo eléctrico a aquella región del espacio que rodea a toda carga eléctrica, lugar en el cual deja sentir su efecto sobre otras partículas cargadas. El campo eléctrico es un agente transmisor de fuerzas.

INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO ($\vec{E}$)

Es una magnitud física vectorial, que sirve para describir el campo eléctrico. Su valor se define como la fuerza eléctrica resultante que actúa por cada unidad de carga positiva en un punto del campo.

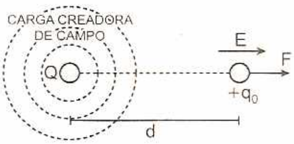


Fig. 15.1

Se representa por un vector que tienen la misma dirección y sentido que la fuerza eléctrica resultante. Para detectar el campo se utiliza una carga positiva puntual de prueba ($+q_0$).

Esta carga de prueba, es tan pequeña, que su presencia no provoca un cambio en el campo que se investiga, es decir $+q_0$ no distorsiona el campo que se estudia con su ayuda. En la figura 15.1 tenemos una carga Q creadora del campo en estudio y una carga puntual de prueba $+q_0$.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}} \qquad \ldots(15.10)$$

De la ley de Coulomb:

$$\boxed{F = k\left(\frac{q_0 Q}{d^2}\right)} \qquad \ldots(15.11)$$

Reemplazando (15.11) en (15.10) tenemos:

$$\boxed{E = k\left(\frac{Q}{d^2}\right)} \qquad \ldots(15.12)$$

La magnitud del campo eléctrico es directamente proporcional a la magnitud de la carga creadora Q e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" que existe entre la carga creadora y el punto en estudio.

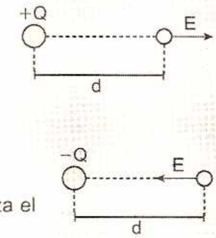
Carga creadora

Se observa que el sentido del vector campo eléctrico $\vec{E}$, depende del signo de la carga creadora del campo Q.

$$E = k\left(\frac{Q}{d^2}\right)$$

$\vec{E}$, se mide en: N/C

En la fórmula, no se reemplaza el signo de la carga creadora Q.



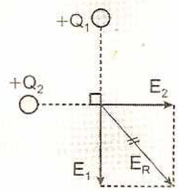
PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE LOS CAMPOS

Si en un punto del espacio varía partículas cargadas crean campos eléctricos cuyas intensidades sean: $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, la intensidad resultante será la suma vectorial de las intensidades parciales:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Campo Resultante

$$E_R = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$



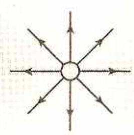
LÍNEAS DE FUERZA

Fueron ideadas por el físico inglés Michael Faraday (1791-1867). Las líneas de fuerza representan gráficamente a un campo eléctrico. Convencionalmente salen de las cargas positivas e ingresan a las cargas negativas. Las líneas de fuerza son líneas continuas, no se cortan entre sí, debido a la unicidad del campo en un punto. La intensidad del campo $\vec{E}$ en un punto se representa por un vector tangente a la línea de fuerza.

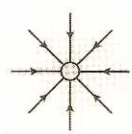
La densidad de líneas de fuerza es mayor en las proximidades de los cuerpos cargados, donde la intensidad del campo también es mayor.

Representación del campo

Carga positiva



Carga negativa

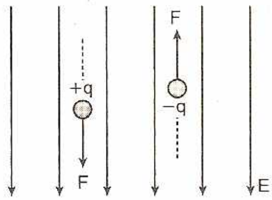


CAMPO ELÉCTRICO HOMOGÉNEO

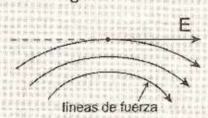
Un campo eléctrico cuya intensidad es igual en todos los puntos del espacio se llama campo homogéneo o

uniforme y se representa mediante líneas de fuerza paralelas. Toda carga "q" dentro del campo homogéneo experimenta una fuerza cuya dirección es paralela a las líneas de fuerza y su módulo es:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \quad \text{...(15.13)}$$



Recuerda:
El vector intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ se representa por un vector tangente a la línea de fuerza.

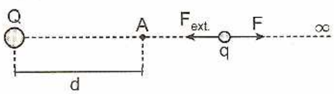


ENERGÍA POTENCIAL DE INTERACCIÓN ELÉCTRICA

La energía potencial de interacción eléctrica (E_{pe}) entre dos cargas puntuales "q" y Q se define como el trabajo realizado por un agente externo para trasladar uno de los cuerpos desde el infinito, lentamente, sistema casi estático, hasta un punto A del campo eléctrico generado por el otro cuerpo.

$$E_{pe} = W_{\infty \to A}$$

$$E_{pe} = \frac{kQq}{d}$$

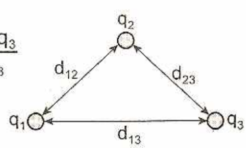


En el movimiento casi estático (equilibrio) de la carga eléctrica "q" la fuerza externa (igual en módulo a la fuerza eléctrica) realiza un trabajo negativo (fuerza opuesta al movimiento) o positivo (fuerza en favor del movimiento), por esta razón la energía potencial de interacción eléctrica puede ser positivo o negativo dependiendo del signo de las cargas eléctricas. En la fórmula se reemplaza el signo de las cargas "q" y Q.

SISTEMA DE CARGAS ELÉCTRICAS

Energía potencial de interacción eléctrica para un sistema de tres cuerpos.
Es importante señalar que los términos del segundo miembro se consigue mediante la combinación de tres elementos agrupados de dos en dos.

$$E_{pe}^{sistema} = \frac{kq_1q_2}{d_{12}} + \frac{kq_1q_3}{d_{13}} + \frac{kq_2q_3}{d_{23}}$$



ENERGÍA POTENCIAL

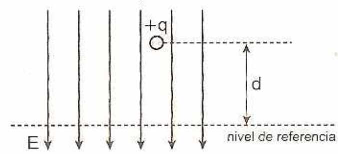
Se llama energía potencial a la parte de la energía de un sistema mecánico que solo depende de su configuración, es decir, de la posición mutua de todas las partículas (puntos materiales) del sistema y de sus posiciones en el campo de potencial externo (gravitatorio, eléctrico, magnético y otros).
Formas de energía potencial: energía potencial gravitatoria, energía potencial elástica, energía potencial de interacción gravitatoria, energía potencial de interacción eléctrica, energía potencial eléctrica, energía potencial hidrostática y otros.

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

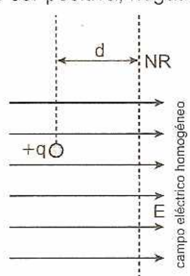
Es una magnitud física escalar. Se define como la capacidad que tiene una partícula cargada eléctricamente para realizar trabajo mecánico en virtud a la posición dentro del campo eléctrico homogéneo E respecto de un sistema de referencia arbitrariamente elegida.

I. Su valor es igual al producto de la magnitud de la carga "q" por la intensidad del campo eléctrico homogéneo E, por la distancia (análoga con la altura) entre dos líneas equipotenciales que contiene a los puntos elegidos.

$$E_{pe} = qEd$$



II. En la fórmula se reemplaza el signo de la carga eléctrica, por consiguiente la energía potencial eléctrica puede ser positiva, negativa o nula.



III. Convencionalmente la energía potencial eléctrica será nula en el punto que se encuentra sobre el nivel de referencia. $E_{pe} = 0$.

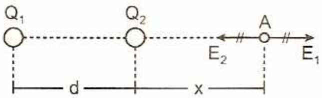
IV. La línea de referencia o nivel de referencia se traza en forma arbitraria, siempre perpendicular a las líneas de fuerza que representan al campo eléctrico homogéneo.

V. Las líneas de fuerza se desplazan en el sentido de mayor a menor potencial eléctrico.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos cargas puntuales de magnitud 4Q y −Q están separados una distancia d = 0,2 m. ¿A qué distancia x a partir de la carga −Q, en la línea que une las cargas, el campo eléctrico resultante es nulo?

Resolución:



Sea E_1 el campo creado por $Q_1 = 4Q$ y E_2 el campo creado por $Q_2 = -Q$. Analizando previamente, deducimos que el campo puede ser nulo a la derecha de la carga Q_2. El campo resultante en A será nulo si:

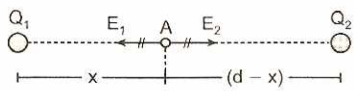
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{k(4Q)}{(d+x)^2} = k\frac{(Q)}{x^2} \Rightarrow \frac{4}{(d+x)^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = d$$

$\therefore\ x = 0,2$ m

$\therefore$ El campo eléctrico resultante es nulo a 0,2 m a la derecha de la carga −Q.

2. Dos cargas puntuales de magnitud $Q_1 = -16\ \mu C$ y $Q_2 = -9\ \mu C$, están separados una distancia d = 1,4 m. ¿A qué distancia x a partir de la carga Q_1, cualquier carga positiva o negativa se encontrará en equilibrio?

Resolución:



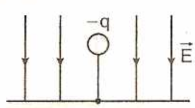
Si en el punto A el campo eléctrico es nulo, entonces, cualquier carga se encontrará en equilibrio.
Entonces, se cumple que:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{Q_1}{x^2} = k\frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

$$(d-x) = x\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \Rightarrow x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}}$$

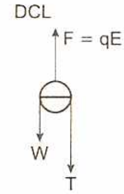
Reemplazando los datos tenemos que: x = 0,8 m

3. Una esferita de peso 4 N y carga $q = -40\ \mu C$ está sujeto mediante un hilo de seda, dentro de un campo eléctrico homogéneo de intensidad E = 300 kN/C, como muestra la figura. Determinar la tensión en el hilo.



Resolución:

Toda carga eléctrica dentro de un campo eléctrico homogéneo experimenta la acción de una fuerza paralela a las líneas de fuerza. En este caso la carga tiene signo negativo (−) por consiguiente el sentido de la fuerza es opuesto al sentido del campo $\vec{E}$.



De la condición de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0$

$W + T = qE$

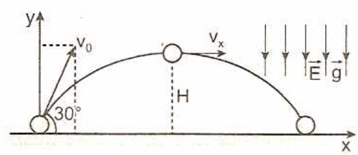
$4 + T = (4 \times 10^{-5})(3 \times 10^{5})$

$4 + T = 12$

$\therefore\ T = 8$ N

4. Una esferita de masa $m = 10^{-3}$ kg y carga $q = 10\ \mu C$ se lanza con una velocidad inicial $v_0 = 20$ m/s formando un ángulo de 30° respecto de la horizontal, dentro de un campo homogéneo de intensidad E = 1500 N/C representado mediante líneas de fuerza hacia abajo. Determinar la altura máxima alcanzada por la esferita. (g = 10 m/s²)

Resolución:



Cálculo de la gravedad efectiva ($\vec{g}_{ef}$):

$$\vec{g}_{ef} = \frac{\vec{F}_R}{m} \Rightarrow g_{ef} = \frac{qE + mg}{m} = \frac{qE}{m} + g$$

$$g_{ef} = \frac{(10^{-5})(1500)}{10^{-3}} + 10 = 25 \text{ m/s}$$

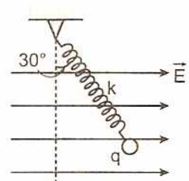
La componente vertical inicial de la velocidad de lanzamiento es:

$$v_{0(y)} = v_0 \text{sen}30° \Rightarrow v_{0(y)} = (20)\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \text{ m/s}$$

Analizando cinemáticamente, la altura máxima que alcanza es:

$$H = \frac{v_{0(y)}^2}{2g_{ef}} \Rightarrow H = \frac{(10)^2}{2(25)} \qquad \therefore\ H = 2 \text{ m}$$

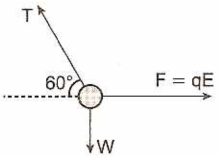
5. Un resorte de material no conductor tiene una constante de elasticidad k = 20 N/cm. Sabiendo que la esfera se encuentra en equilibrio y cargada con $q = 500\ \mu C$, se pide encontrar la deformación del resorte, siendo el campo homogéneo de intensidad E = 60 kN/C.



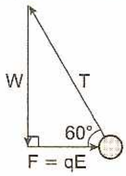
Considere el campo homogéneo gravitatorio de intensidad $g = 10\ m/s^2$.

Resolución:

DCL (esfera)



Triángulo de fuerzas



De la condición de equilibrio, sabemos que se forma un triángulo vectorial con las tres fuerzas:

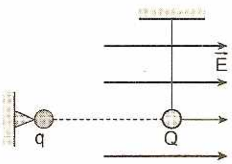
$T = 2F \Rightarrow T = 2(qE)$

$T = 2(5\times10^{-4})(6\times10^{4}) \Rightarrow T = 60\ N$

De la ley de Hooke, sabemos que la tensión en el resorte es directamente proporcional a la deformación:

$T = kx \Rightarrow 60 = (20)x \quad \therefore\ x = 3\ cm$

6. Determinar la distancia x entre las cargas puntuales "q" y Q, tal que la carga Q se encuentre en equilibrio en la posición mostrada. El campo eléctrico homogéneo tiene intensidad E = 600 N/C y la carga $q = -0{,}6\ \mu C$.



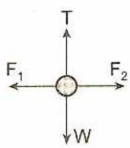
Resolución:

Analizando el DCL de la carga Q.

Sea F_1 la fuerza de atracción que ejerce la carga negativa "q":

$$F_1 = k\frac{qQ}{x^2}$$

DCL (Q)



Sea F_2 la fuerza que ejerce el campo eléctrico homogéneo E: $F_2 = QE$

De la condición de equilibrio, en el eje horizontal:

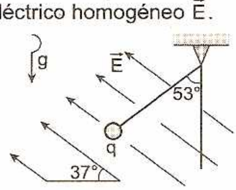
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

$$\frac{kqQ}{x^2} = QE \Rightarrow x^2 = \frac{kq}{E} \Rightarrow x^2 = \frac{(9\times10^{9})(6\times10^{-7})}{600}$$

$\therefore\ x = 3\ m$

7. En la figura mostrada, una esfera pequeña conductora de peso 6 N y carga eléctrica q = 1 mC, unido a un hilo de seda se encuentra suspendido de un punto fijo.

Sabiendo que existe equilibrio, halle la intensidad del campo eléctrico homogéneo $\vec{E}$.



Resolución:

Analizando el DCL de la esferita:

$\Sigma F_x = 0$

$qE\cos37° = T\cos37°$

$\Rightarrow qE = T$

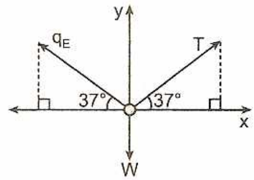
$\Sigma F_y = 0$

$qE\text{sen}37° + T\text{sen}37° = W$

$qE\left(\frac{3}{5}\right) + (qE)\left(\frac{3}{5}\right) = W$

$\frac{6}{5}qE = W$

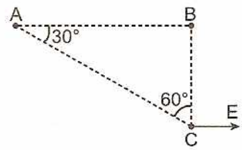
DCL



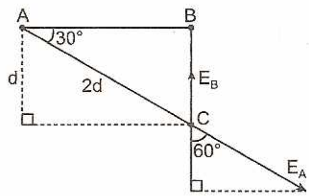
Reemplazando los datos tenemos:

$\frac{6}{5}(10^{-3})E = 6 \Rightarrow E = 5\times10^{3}\ \frac{N}{C} \quad \therefore\ E = 5\ \frac{kN}{C}$

8. Los puntos A, B y C determinan un triángulo de 30° y 60°. Dos cargas son colocadas como se muestra en la figura en los vértices A y B, $Q_A = 64\ \mu C$. Determinar la magnitud y signo de la carga Q_B, tal que, la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto C sea horizontal.



Resolución:



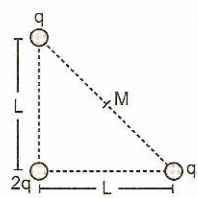
Analizamos las intensidades de campo parciales en el punto C. Graficando el campo creado por Q_A observamos que tiene una componente vertical hacia abajo, de aquí deducimos que el signo de la carga Q_B es negativo, tal que la intensidad resultante en la línea vertical sea nula.

$\Sigma \vec{E}_y = 0 \Rightarrow E_B = E_A\cos60°$

$$\frac{kQ_B}{d^2} = \frac{kQ_A}{(2d)^2}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow Q_B = \frac{Q_A}{8}$$

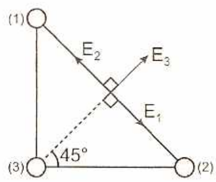
$\therefore\ Q_B = -8\ \mu C$

9. En el triángulo rectángulo mostrado en la figura, determinar el valor de la intensidad del campo en el punto medio M de la hipotenusa.



Resolución:

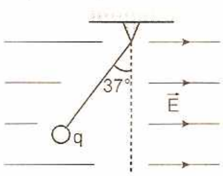
Graficando los vectores intensidad de campo en el punto M, generados por cada una de las cargas. Es fácil comprobar que, $E_1 = E_2$, por consiguiente, éstas se cancelan.



Por lo tanto, el vector intensidad de campo resultante es generado solo por la carga que está en la posición (3), según esto:

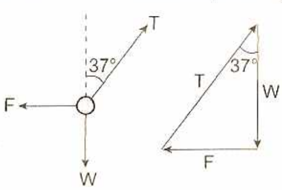
$$E_R = E_3 \Rightarrow E_R = k\left[\frac{2q}{(L/\sqrt{2})^2}\right] \quad \therefore E_R = 4\left(\frac{kq}{L^2}\right)$$

10. Una esferita de peso 4×10^{-3} N y carga eléctrica $q = -10\ \mu C$, unida a un hilo de seda se encuentra suspendido de un punto fijo, dentro de un campo eléctrico homogéneo. Sabiendo que la esferita se encuentra en equilibrio, determina E.



Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera de peso W y carga "q".



De la condición de equilibrio la suma de las tres fuerzas es igual a cero; del triángulo de fuerzas tenemos:

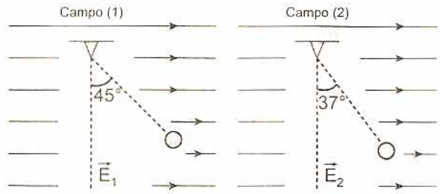
$$\tan 37° = \frac{F}{W} \Rightarrow F = \frac{3}{4}W$$

$$qE = \frac{3}{4}W \Rightarrow E = \frac{3}{4}\left(\frac{W}{q}\right)$$

Reemplazando datos:

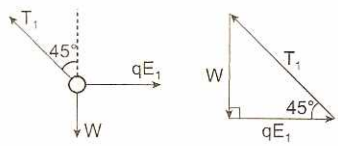
$$E = \frac{3}{4}\left(\frac{4 \times 10^{-3}}{10^{-5}}\right) \quad \therefore E = 300 \text{ N/C}$$

11. Un péndulo de masa "m", carga eléctrica "q" y longitud L, se utiliza para medir la intensidad del campo eléctrico homogéneo por comparación. Cuando el sistema se coloca en un campo de intensidad $E_1 = 80$ N/C el hilo de seda forma un ángulo de 45° respecto de la vertical. Cuando el sistema se lleva a otro campo homogéneo el hilo experimenta una desviación angular de 37° respecto de la vertical. Hallar la intensidad E_2 de este último campo homogéneo.



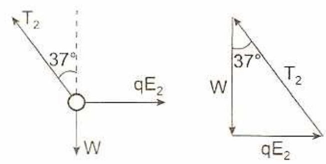
Resolución:

DCL (esfera), en el primer campo eléctrico, $\vec{E}_1$:



Del triángulo de fuerzas: W = peso = qE_1 ...(α)

DCL (esfera), en el segundo campo eléctrico, $\vec{E}_2$:



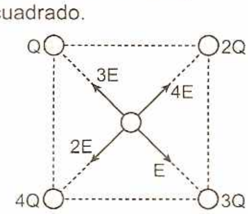
Del triángulo de fuerzas: $\tan 37° = \dfrac{qE_2}{W}$ ...(β)

Reemplazando (α) en (β):

$$\frac{3}{4} = \frac{qE_2}{qE_1} \Rightarrow E_2 = \frac{3}{4}E_1$$

$\therefore E_2 = 60$ N/C

12. En los vértices de un cuadrado se han colocado cuatro cargas puntuales de magnitud Q; 2Q; 3Q y 4Q. Si la carga Q genera un campo cuya intensidad en el centro del cuadrado es $25\sqrt{2}$ N/C, determinar la intensidad de campo resultante en el centro del cuadrado.



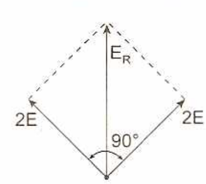
Resolución:

Las cargas equidistan del centro, por consiguiente la intensidad de campo será directamente proporcional a la magnitud de cada carga. Sea, $E = 25\sqrt{2}$ N/C, la intensidad del campo generado por Q.

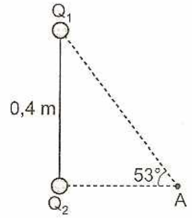
Cálculo de la resultante de la intensidad de campo, en el centro del cuadrado:

$E_R = (2E)\sqrt{2}$ ...(I)

Reemplazando la magnitud de E en (I): $E_R = 100$ N/C

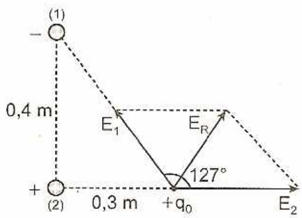


13. En los vértices de un triángulo rectángulo se han colocado dos cargas eléctricas de magnitud: $Q_1 = -125 \times 10^{-8}$ C y $Q_2 = +27 \times 10^{-8}$ C, separados una distancia de 0,4 m como muestra la figura. Determinar la intensidad del campo eléctrico resultante en el vértice A.



Resolución:

Llevamos una carga de prueba $+q_0$ al vértice A para determinar la dirección y sentido del campo eléctrico.



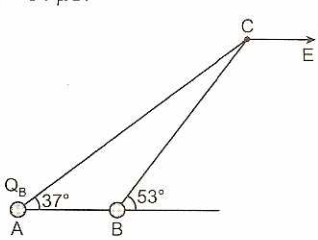
$$E_1 = k\left(\frac{Q_1}{d^2}\right) = (9 \times 10^9)\left(\frac{125 \times 10^{-8}}{25 \times 10^{-2}}\right)$$

$\Rightarrow E_1 = 45$ kN/C $\wedge$ $E_2 = 27$ kN/C

Cálculo de la resultante, mediante el método del paralelogramo: $E_R^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 127°$

Reemplazando datos: $E_R = 36$ kN/C

14. En la figura, determinar el valor de la carga que se debe colocar en la posición B para que la intensidad del campo en el punto C sea horizontal, sabiendo que la carga en la posición A es de magnitud $Q_A = 64\ \mu$C.

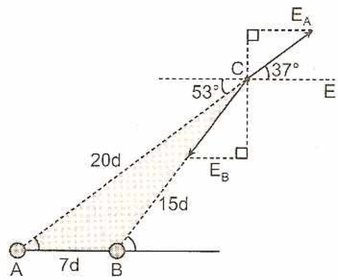


Resolución:

De la geometría elemental se deduce un triángulo ABC de lados: 7d, 15d y 20d, respectivamente.

Es fácil deducir que la carga en B, que cumple con la condición, debe ser de signo negativo.

Graficando los vectores parciales intensidades de campo en el punto C deducimos que se debe cumplir que: $\Sigma E_y = 0$



$E_A \text{sen}37° = E_B = \text{sen}53°$

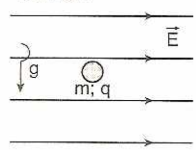
$$\Rightarrow\ k\frac{Q_A}{(20d)^2}\left(\frac{3}{5}\right) = k\frac{Q_B}{(15d)^2}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$Q_B = \frac{27}{64}Q_A \Rightarrow Q_B = 27\ \mu\text{C}$$

Pero el signo de la esfera en B es negativo:

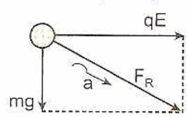
$\therefore\ Q_B = -27\ \mu$C

15. Si se abandona la esfera mostrada de masa $m = 10$ kg y carga eléctrica $q = 5\sqrt{3}$ C, determinar la aceleración que adquiere, sabiendo que el campo eléctrico es homogéneo de intensidad $E = 20$ N/C. Considere: $g = 10$ m/s^2.



Resolución:

Sobre la esfera actúan su peso y la fuerza eléctrica.



Cálculo de la fuerza resultante F_R:

$$F_R = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2} \qquad ...(1)$$

De la segunda ley de Newton:

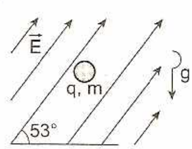
$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}{m} \qquad ...(2)$$

Reemplazando datos en (2):

$$a = \frac{\sqrt{10\,000 + 30\,000}}{10}$$

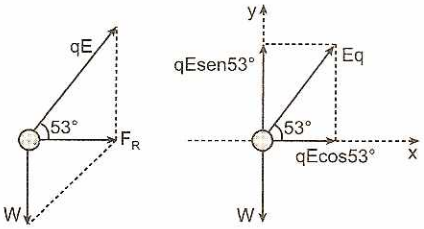
Luego: $a = 20$ m/s^2

16. La esfera mostrada tiene un peso $W = 20$ N y carga eléctrica $q = 10$ C. Hallar la intensidad del campo eléctrico homogéneo E, sabiendo que al soltar el cuerpo, éste inicia un movimiento horizontal hacia la derecha.



Resolución:

Sabiendo que al soltar el cuerpo (velocidad inicial nula) inicia su movimiento horizontalmente hacia la derecha esto significa que la fuerza resultante es hacia la derecha.



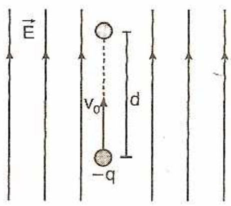
$\Sigma F_y = 0$, entonces: $qEsen53° = W$

$\Rightarrow (10)(E)\left(\frac{4}{5}\right) = 20$

Luego: $E = 2,5$ N/C

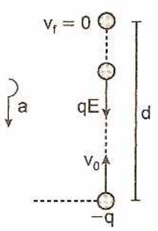
17. Una esferita de masa "m" y carga eléctrica $-q$ se lanza verticalmente hacia arriba dentro de un campo homogéneo eléctrico de intensidad E representado mediante líneas de fuerzas verticales hacia arriba.

Determinar la velocidad v_0 de lanzamiento, tal que, la esferita alcanza una altura máxima "d". Desprecie el campo gravitatorio.



Resolución:

Cálculo de la aceleración mediante la segunda ley de Newton:



$$\vec{a} = \frac{(qE)}{m}(-\hat{j}) \quad ...(1)$$

Del movimiento vertical:

$$v_{f(y)}^2 = v_{0(y)}^2 - 2ad$$

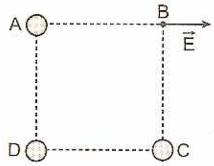
$$0 = v_{f(y)}^2 = v_{0(y)}^2 - 2ad \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

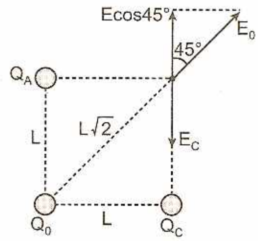
$$v_0^2 = \frac{2qEd}{m}$$

Luego: $v_0 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$

18. Los puntos A, B, C y D determinan un cuadrado. Tres cargas son colocadas como se muestra en la figura en los vértices A, C y D. $Q_A = 10$ C y $Q_D = 28$ C. Calcular la magnitud y signo de la carga Q_C que se debe colocar en el vértice C, tal que, la intensidad del campo eléctrico E en el vértice B sea horizontal.



Resolución:



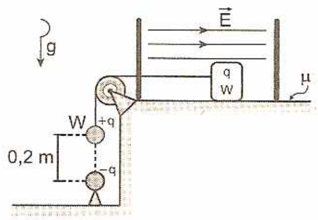
Analizamos las intensidades de campo parciales en el punto B. Graficando la intensidad creada por Q_D, observamos que tiene una componente vertical hacia arriba, de aquí deducimos que el signo de la carga Q_C debe ser negativo, tal que la intensidad sea vertical hacia abajo, de la condición del problema:

$\Sigma E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_C = E_D\cos45°$

$$\frac{kQ_C}{L^2} = \frac{kQ_D}{(\sqrt{2}L)^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow Q_C = \frac{\sqrt{2}}{4}Q_D \quad \therefore Q_C = -7\sqrt{2}\ C$$

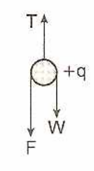
En la solución del problema no analizamos la intensidad de la carga Q_A, debido a su dirección horizontal.

19. Determinar la intensidad de campo E mínimo posible, del campo electrostático homogéneo mostrado en la figura, con la condición que el sistema conserve su estado de equilibrio. La esfera y el bloque tienen igual peso, W = 40 N y carga q = 20 μC. Coeficiente de rozamiento estático 0,75 entre el bloque y la superficie horizontal.



Resolución:

Analizando el estado de equilibrio de la esfera cargada con signo positivo. Haciendo DCL y aplicando las condiciones de equilibrio tenemos:



$\Sigma F_y = 0$

$T = W + F$

$T = W + \frac{kqq}{d^2}$

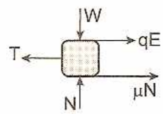
Reemplazando datos:

$T = 130$ N ...(1)

Analizando el estado de equilibrio del bloque W. Haciendo el DCL y aplicando las condiciones de equilibrio:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = qE + \mu W$

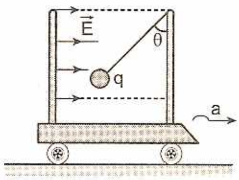
$qE = T - \mu W$



Reemplazando datos:

$E = 5 \times 10^6$ N/C

20. ¿Con qué aceleración constante se desplaza el móvil, para que la esfera de masa m= 0,1 kg y carga $q = -20\ \mu C$ se encuentre en equilibrio respecto del carro? El hilo de seda forma un ángulo de 45° respecto de la vertical. El campo homogéneo en el interior tiene una intensidad E = 30 kN/C.
Considere: $\theta = 45°$.



Resolución:

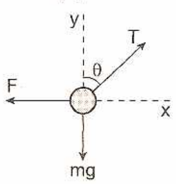
Realizamos el DCL de la esfera q: $\Sigma F_y = 0$

$T\cos\theta = mg \quad ...(1)$

En el eje X, la 2.ª ley de Newton: $F_R = ma$

$(T\text{sen}\theta - F) = ma$

$T\text{sen}\theta = F + ma \quad ...(2)$



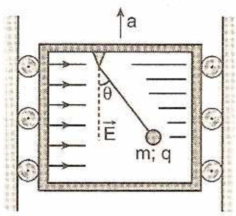
Dividiendo (2) entre (1):

$\tan\theta = \dfrac{F + ma}{mg}$, donde: $F = qE$

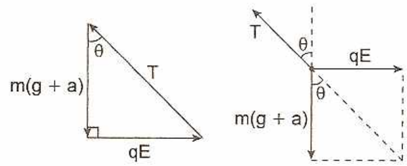
$\Rightarrow a = g(\tan\theta) - \dfrac{qE}{m} \quad ...(3)$

Reemplazando datos en (3): $a = 3{,}8$ m/s^2

21. La figura muestra un ascensor que sube con aceleración constante "a". En el techo del ascensor se encuentra suspendido una esferita de masa "m" y carga "q" mediante un hilo de seda. Sabiendo que dentro del ascensor existe un campo eléctrico homogéneo E, hallar el ángulo θ que forma el hilo con la vertical. Considere el campo gravitatorio "g".



Resolución:



Realizamos el diagrama del cuerpo libre de la esferita respecto de un observador ubicado en el piso del ascensor, sistema de referencia "no inercial".

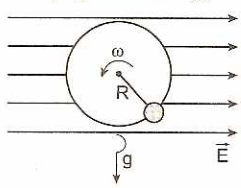
Para nuestro observador la esferita estará en reposo relativo. $\Sigma F = 0$

Luego, se construye el triángulo de fuerzas:

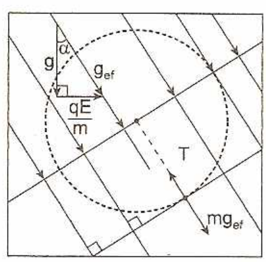
$\tan\theta = \dfrac{qE}{m(g+a)} \Rightarrow \theta = \arctan\left[\dfrac{qE}{m(g+a)}\right]$

22. En un campo electrostático uniforme de intensidad $E = 5 \times 10^5$ N/C y cuyas líneas de fuerza están dirigidas horizontalmente hacia la derecha en un plano vertical, atada a un hilo de longitud L = 0,5 m una esferita de masa m = 0,5 kg y carga eléctrica $q = 6\ \mu C$ gira con velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s. Hallar la tensión máxima en el hilo de seda.

Considere el campo gravitatorio (g = 10 m/s^2)



Resolución:



Cálculo de la gravedad efectiva: $a = \dfrac{F_{(\text{resultante})}}{\text{masa}} = g_{ef}$

$g_{ef} = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{qE}{m}\right)^2} \quad ...(1)$

La tensión en el hilo será máxima, cuando la esferita pasa por la posición más baja respecto del campo efectivo, por consiguiente la tensión T y el peso efectivo son colineales.

Dinámica circular:

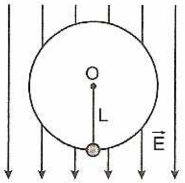
$\Sigma F_{(\text{rad})} = ma_C \Rightarrow T - mg_{ef} = m\omega^2 L \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

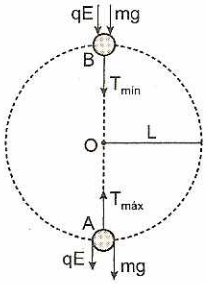
$T = mg_{ef} + m\omega^2 L \quad ...(3)$

Datos en (3), tenemos: $T_{\text{máx.}} = 11$ N

23. Un péndulo de longitud L, masa "m" y carga eléctrica "q" se mueve en un plano vertical con velocidad angular constante ω. Sabiendo que el campo eléctrico E es homogéneo, calcular la diferencia entre la tensión máxima y la tensión mínima en el hilo de seda. Considere el campo gravitatorio "g".



Resolución:



La tensión máxima se consigue cuando el cuerpo pasa por la posición más baja de su trayectoria y la tensión mínima en el punto mas alto de la trayectoria circular.

Dinámica circular en A:

$\Sigma F(\text{radiales}) = ma_C$

$T_{máx} - qE - mg = m\omega^2 L \quad ...(\alpha)$

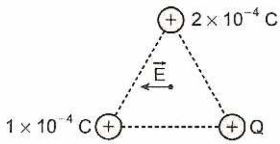
Dinámica circular en B:

$T_{min} + qE + mg = m\omega^2 L \quad ...(\beta)$

Igualando, (α) y (β): $T_{máx.} - qE - mg = T_{min.} + qE + mg$

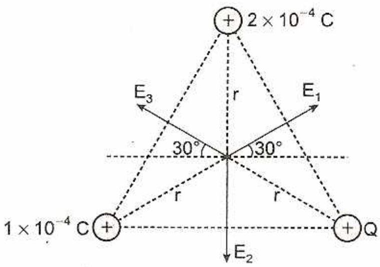
$\therefore\ T_{máx.} - T_{min.} = 2(mg + qE)$

24. En un triángulo equilátero se fijan en dos de sus vértices dos cargas de $+1\times10^{-4}$ C y $+2\times10^{-4}$ C, encuentre la tercera carga Q de modo que la intensidad resultante (E) en el baricentro sea horizontal.



Resolución:

Representamos la intensidad de cada una de las cargas.



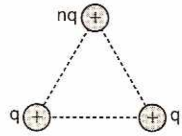
Para que la intensidad resultante sea horizontal, no debe haber componente vertical, o sea: $\Sigma E_y = 0$

$\therefore\ E_3\text{sen}30° + E_1\text{sen}30° = E_2$

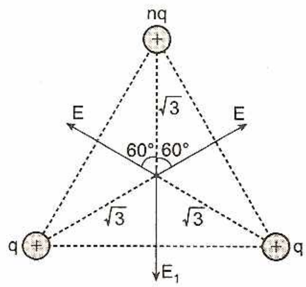
$$\left[k\left(\frac{Q}{r^2}\right)\right]\frac{1}{2} + \left[k\left(\frac{1\times10^{-4}}{r^2}\right)\right]\frac{1}{2} = \left[k\left(\frac{2\times10^{-4}}{r^2}\right)\right]$$

$Q = \ +1\times10^{-4} = 4\times10^{-4} \Rightarrow Q = 3\times10^{-4}\,C$

25. En el siguiente triángulo equilátero, el lado mide 3 m y la intensidad de campo eléctrico en el baricentro es 600 N/C. Hallar "n", si "q" mide $+10^{-8}$ C.



Resolución:



Representación de intensidades en el baricentro:

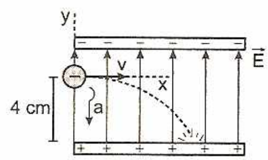
$E_0 = E_1 - 2E\cos60° \Rightarrow E_0 = E_1 - E$

$E_0 = \left[k\left(\frac{nq}{r^2}\right)\right] - \left[k\left(\frac{q}{r^2}\right)\right] \Rightarrow E_0 = k\left(\frac{q}{r^2}\right)(n-1)$

Reemplazando datos: (unidades en el SI)

$0 = 9\times10^9\left[\frac{10^{-8}}{(\sqrt{3})^2}\right](n-1) \Rightarrow n = 21$

26. Un electrón penetra en un condensador plano (placas paralelas de cargas opuestas) paralelamente a sus láminas y a una distancia de 4 cm de la placa positiva. ¿Cuánto tiempo demora el electrón en caer en dicha lámina?, la intensidad en el condensador es 500 N/C, la masa del electrón es 9×10^{-28} g. Desprecie efectos gravitatorios.



Resolución:

Cuando la carga es negativa (electrón: e^-) la fuerza del campo y la aceleración cuando se desprecia el efecto gravitacional tiene sentido contrario que $\vec{E}$:

Sabemos que: $a = \dfrac{Eq}{m}$.

Para el electrón: $a = \dfrac{Ee^-}{m} \quad ...(1)$

Analizamos el movimiento parabólico, en el eje Y (MRUV):

$$h = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \qquad ...(2)$$

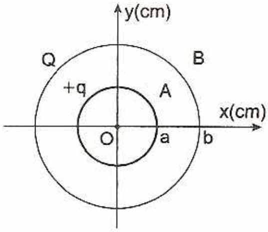
(1) en (2): $t = \sqrt{\frac{2mh}{Ee^-}}$

Reemplazando datos: (unidades en el SI)

$$t = \sqrt{\frac{2(9\times10^{-31})(4\times10^{-2})}{(500)(1{,}6\times10^{-19})}}$$

$\therefore\ t = 3\times10^{-6}\,s$

27. La figura muestra dos cascarones esféricos concéntricos de radios de curvatura a = 4 cm; b = 6 cm. El cascarón de radio "a" tiene una carga uniforme de magnitud q = 25 μC. Hallar la magnitud Q de la carga del cascarón de radio "b", tal que la intensidad de campo en los puntos A = (3; 4) y B = (6; 8) sean iguales en magnitud, dirección y sentido.



Resolución:

a) En principio, la intensidad del campo en el interior de un cascarón conductor es igual a cero debido a su carga uniforme en la superficie. Por consiguiente la intensidad de campo en el punto A = (3; 4) se debe únicamente a la carga "q":

$$E_A = k\frac{q}{d^2}$$

$$\Rightarrow E_A = 9\times10^9\left(\frac{25\times10^{-6}}{25\times10^{-4}}\right) = 9\times10^7\ N/C$$

b) El punto B = (6; 8) se encuentra externo a la superficie de radio "b", por consiguiente el campo se debe a la suma de cargas q + Q.

$E_B = k\frac{(q+Q)}{D^2}$, de la condición del problema:

$E_A = E_B \quad ...(1)$

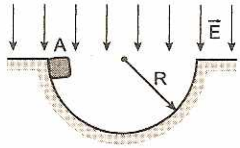
Reemplazando en (1):

$$k\frac{q}{d^2} = k\frac{q}{d^2} = k\frac{(q+Q)}{D^2} \Rightarrow \frac{q}{d^2} = \frac{(q+Q)}{D^2}$$

Del dato tenemos: $\frac{25}{25\times10^{-4}} = \frac{(25+Q)}{100\times10^{-4}}$

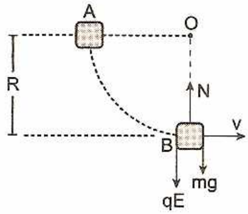
Luego: Q = +75 μC

28. En la posición A mostrada en la figura se abandona un bloque de 1 kg de masa y 2 C de carga, el cual se mueve sobre la superficie cilíndrica, lisa y no conductora, de radio de curvatura R = 1 m. Sabiendo que la intensidad del campo uniforme es E = 10 N/C, calcular la máxima fuerza de reacción que ejerce la superficie sobre el bloque. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

Como sobre el bloque solo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica se conservará en el tiempo, es decir:



$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$mgR + qER = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(1)$$

Aplicando dinámica circular en la posición B:

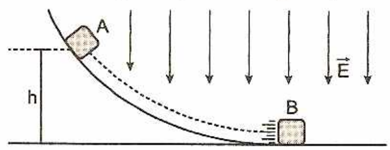
$$F_C = ma_C \Rightarrow N - mg - qE = m\frac{v^2}{R} \qquad ...(2)$$

Resolviendo de (1) y (2):

N = 3(mg + qE).

Reemplazando datos: N = 90 *newtons*

29. En la figura mostrada se abandona un pequeño bloque de masa m = 1 kg y carga q = 5 mC en la posición A sobre una superficie áspera no conductora, dentro de un campo eléctrico homogéneo de intensidad E = 12 kN/C. Sabiendo que el bloque llega a la posición B con una velocidad de 8 m/s, hallar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento sobre el bloque. Considere h = 1 m y desprecie el campo de gravedad (g = 0).



Resolución:

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual a la variación de la energía mecánica:

$$W^{F_r} = E_{M(B)} - E_{M(A)} \Rightarrow W^{F_r} = E_{P(B)} + E_{K(B)} - E_{P(A)} - E_{K(A)}$$

$$W^{F_r} = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 - qEh - 0$$

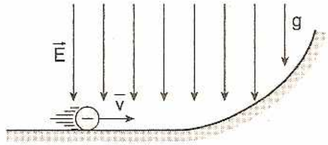
$$\Rightarrow W^{F_r} = \frac{1}{2}(1)(8)^2 - (5\times10^{-3})(12\,000)(1)$$

$$\Rightarrow W^{F_r} = 32 - 60$$

$$\therefore\ W^{F_r} = -28\ J$$

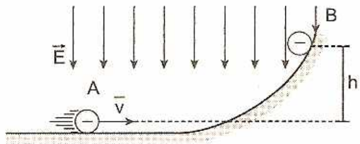
30. Encuentre la velocidad de lanzamiento (v) de una masa "m" con carga −q, sobre una superficie no conductora lisa, de modo que por acción de un

campo eléctrico de intensidad E la masa suba una altura máxima "h".



Resolución:

Sobre la carga negativa la fuerza (Eq) es hacia arriba y como el desplazamiento es también hacia arriba el trabajo será positivo, luego:



El trabajo realizado por el campo eléctrico es igual a la variación de la energía mecánica:

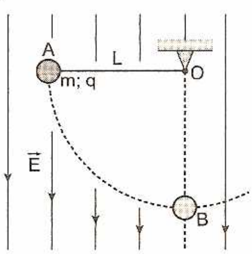
$W_{CE} = E_{M(B)} - E_{M(A)}$

$Eqh = mgh - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2h(mg - Eq)}{m}}$

Demuestre que si la carga fuese positiva, la velocidad sería:

$v = \sqrt{\frac{2h(mg - Eq)}{m}}$

31. La figura muestra un péndulo de longitud L = 0,5 m de masa m = 0,05 kg y carga q = 500 μC, se abandona en la posición A. El campo eléctrico de intensidad E = 600 N/C es uniforme, representado mediante líneas de fuerzas verticales. Calcular la máxima velocidad que adquiere "m". Considere: $g = 10\ m/s^2$.



Resolución:

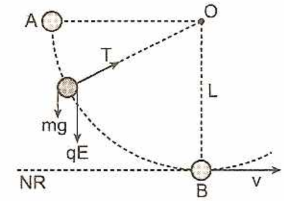
Sobre el cuerpo esférico actúan dos fuerzas constantes: el peso mg y la fuerza eléctrica qE y la tensión T que es una fuerza variable.

La energía potencial del cuerpo será debido al campo gravitatorio y al campo eléctrico.

La esferilla alcanza su máxima velocidad cuando pasa por su trayectoria más baja esto quiere decir cuando la energía potencial es mínima la energía cinética será máxima.

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{P(A)} + E_{K(A)} = E_{P(B)} + E_{K(B)}$$



$mgh + qEh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$, pero: h = L

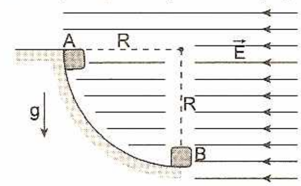
Luego: $v = \sqrt{2L\left(g + \frac{qE}{m}\right)}$

Reemplazando:

$v = \sqrt{2(0,5)\left[10 + \frac{(500 \times 10^{-6})(600)}{0,05}\right]}$

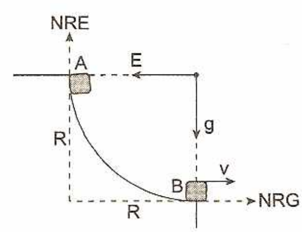
$\therefore\ v_{máx.} = 4\ m/s$

32. Un bloque de 50 gramos de masa y carga q = −50 μC se abandona en la posición A dentro de un campo eléctrico homogéneo de intensidad E = 6 kV/m. Si no existe rozamiento, determinar la velocidad del bloque cuando pasa por B. (R = 2 m y $g = 10\ m/s^2$)



Resolución:

El bloque se mueve dentro de dos campos homogéneos, eléctrico y gravitatorio, perpendiculares entre sí.



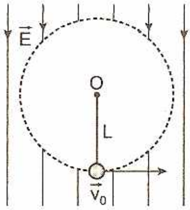
Por principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$E_{pg(A)} = E_{pe(B)} + E_{k(B)} \Rightarrow mgR = qER + \frac{1}{2}mv^2$

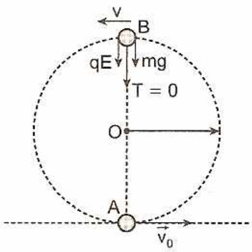
Reemplazando los datos en el SI: v = 8 m/s

33. La figura muestra un péndulo de masa "m", longitud L y carga eléctrica +q, dentro de un campo (homogéneo) eléctrico E representado mediante líneas de fuerzas verticales. Hallar la mínima velocidad v_0 que se le debe comunicar en su posición más bajo, tal que, pueda describir por lo menos una vuelta en un plano vertical. Considere el campo gravitatorio "g".



Resolución:

Dinámica circular en el punto más alto. La tensión mínima en B debe tender a cero.
($T \to 0$), de la condición del problema:



$$\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$$

$$(qE + mg) = m\,\frac{v^2}{L} \qquad ...(1)$$

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{P(A)} + E_{K(A)} = E_{P(B)} + E_{K(B)}$$

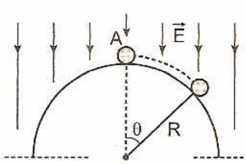
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (qE + mg)(2L) + \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2), tenemos:

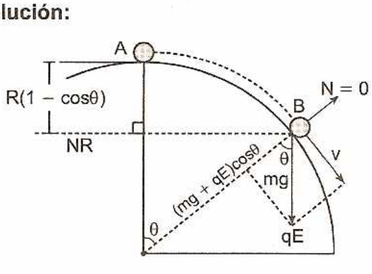
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (qE + mg)(2L) + \frac{1}{2}(qE + mg)L$$

$$\therefore\ v_0 = \sqrt{\frac{5L}{m}(mg + qE)}$$

34. En la figura mostrada se abandona una esferilla de masa "m" y carga "q" en la posición A más alto de la superficie cilíndrica de radio de curvatura R, sabiendo que el campo eléctrico E es homogéneo. Hallar la posición definido por el ángulo θ donde el cuerpo abandona la superficie. Desprecie el rozamiento. Considere el campo gravitatorio "g".



Resolución:



El campo gravitatorio y eléctrico son conservativos, esto quiere decir que el trabajo realizado por mg y qE no depende del camino seguido por el cuerpo.

Principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{P(A)} + E_{K(A)} = E_{P(B)} + E_{K(B)}$$

$$mgh + qEh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Luego: $mv_B^2 = 2h(mg + qE) \qquad ...(1)$

Dinámica circular en B: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$(mg + qE)\cos\theta - N = m\dfrac{v_B^2}{R}$, pero cuando la esfera abandona la superficie: $N = 0$.

Entonces: $R(mg + qE)\cos\theta = mv_B^2$ ...(2)

Además: $h = R(1 - \cos\theta)$ ...(3)

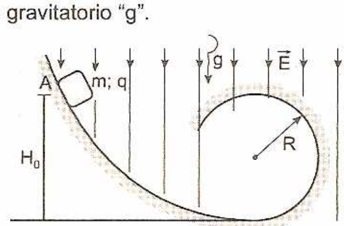
Igualando (1) y (2):

$$2R(1 - \cos\theta)(mg + qE) = R(mg + qE)\cos\theta$$

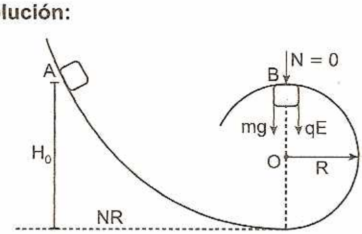
$$2 - 2\cos\theta = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

El valor del ángulo no depende de los campos $\vec{g}$ y $\vec{E}$.

35. En el sistema mecánico mostrado, el carrito en la posición A, tiene masa "m" y carga eléctrica +q. Sabiendo que el campo eléctrico E es homogéneo, calcular la mínima altura H_0 desde el cual se debe abandonar el carrito, tal que, pueda dar una vuelta completa sobre el rizo de radio de curvatura R. Los rieles por donde se desliza el carrito es liso y no conductor de las cargas eléctricas. Considere el campo gravitatorio "g".



Resolución:



Para que el carrito pueda dar una vuelta con su mínima energía mecánica, la reacción normal en la parte más alta del rizo, punto B, debe tender a cero ($N \to 0$).

Dinámica circular en B: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$

$$mg + qE = m\frac{v_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = (mg + qE)\frac{R}{m} \qquad ...(1)$$

Como los campos "g" y E son conservativos, aplicamos la conservación de la energía mecánica entre A y B:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)} \Rightarrow E_{P(A)} + E_{K(A)} = E_{P(B)} + E_{K(B)}$$

$$(mg + qE)H_0 + 0 = (mg + qE)(2R) + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad ...(2)$$

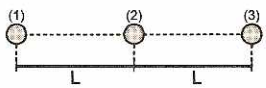
Reemplazando (1) en (2), tenemos:

$$(mg + qE)(H_0 - 2R) = \frac{1}{2}(mg + qE)R$$

Luego: $H_0 = \frac{5}{2}R$

Por lo tanto, su valor no depende de la intensidad de los campos "g" y E.

36. En la figura mostrada, determinar la energía potencial de interacción eléctrica del sistema de cargas eléctricas, de magnitud Q cada una.



Resolución:

La energía potencial de interacción eléctrica del sistema es:

$$E_{P(sistema)} = E_{p(1-2)} + E_{p(1-3)} + E_{p(2-3)}$$

$$E_{P(sistema)} = k\frac{QQ}{L} + k\frac{QQ}{2L} + k\frac{QQ}{L}$$

$$\therefore E_{P(sistema)} = \frac{5}{2}\left(\frac{kQ^2}{L}\right)$$

37. Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de magnitud 40 y 50 μC, separados una distancia de 5 cm. Hallar la energía potencial de interacción eléctrica del sistema.

Resolución:

La energía potencial de interacción del sistema es:

$$E_P = k\frac{q_1q_2}{d} \Rightarrow E_P = (9\times10^9)\frac{(4\times10^{-5})(5\times10^{-5})}{5\times10^{-2}}$$

$$\therefore E_P = 360 \text{ J}$$

38. Se tienen dos cargas puntuales de 30 y 60 μC separadas 90 cm entre sí. ¿Qué trabajo debemos realizar sobre el sistema para aproximarlos a 60 cm entre sí?

Resolución:

La energía inicial de interacción es:

$$E_{P(1)} = k\frac{q_1q_2}{D} \Rightarrow E_{P(1)} = (9\times10^9)\frac{(3\mu)(5\times10^{-5})}{9\times10^{-1}}$$

$$\Rightarrow E_{P(1)} = 18 \text{ J}$$

La energía final de interacción es:

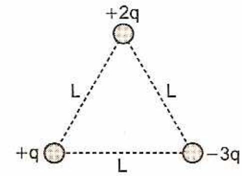
$$E_{P(2)} = k\frac{q_1q_2}{d} \Rightarrow E_{P(2)} = (9\times10^9)\frac{(3)(60)}{6\times10^{-1}}$$

$$\Rightarrow E_{P(2)} = 27 \text{ J}$$

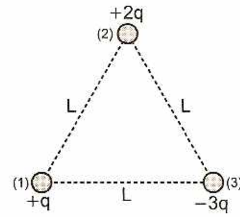
El trabajo realizado sobre el sistema es igual a la variación de la energía potencial de interacción eléctrica.

$$W = E_{P(2)} - E_{P(1)} \Rightarrow W = 27 - 18 \quad \therefore W = 9 \text{ J}$$

39. Determinar la energía de interacción del sistema de cargas puntuales, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L.



Resolución:



La energía potencial de interacción eléctrica del sistema, es igual al trabajo realizado por un agente externo para llevar desde el infinito hasta los vértices del triángulo las cargas:

$+q$; $+2q$; $-3q$

Su valor se determina mediante la fórmula (1), donde se considera el signo de las cargas:

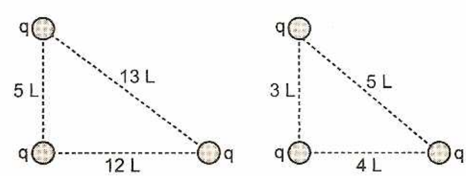
$d_{12} = d_{13} = d_{23} = L$

$$E_P = k\left(\frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}}\right) \quad ...(1)$$

Reemplazando valores y signos en (1):

$$E_P = \frac{kq^2}{L}(2 - 3 - 6) \Rightarrow E_P = -7\frac{kq^2}{L}$$

40. ¿Cuánto trabajo deberá efectuar un agente externo para cambiar de configuración a las tres cargas iguales de un triángulo a otro? Se sabe que: $\frac{kqq}{L} = 260$ J.



Resolución:

La energía inicial de interacción eléctrica es:

$$E_{P(1)} = \frac{kqq}{5L} + \frac{kqq}{12L} + \frac{kqq}{13L} = \frac{281}{780}\left(\frac{kqq}{L}\right)$$

La energía final de interacción eléctrica es:

$$E_{P(2)} = \frac{kqq}{3L} + \frac{kqq}{4L} + \frac{kqq}{5L} = \frac{47}{60}\left(\frac{kqq}{L}\right)$$

El trabajo realizado por el agente externo es igual a la variación de la energía potencial de interacción eléctrica que experimenta el sistema de tres cargas:

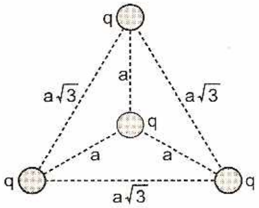
$$W = E_{P(2)} - E_{P(1)} \Rightarrow W = \frac{47}{60}\left(\frac{kqq}{L}\right) - \frac{281}{760}\left(\frac{kqq}{L}\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{11}{26}\left(\frac{kqq}{L}\right)$$

$$\therefore W = 110 \text{ J}$$

41. Halle la energía potencial eléctrica de una distribución de 4 cargas iguales a "q" ubicados en los vértices y baricentro de un triángulo equilátero de lado $a\sqrt{3}$.

Resolución:



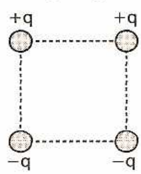
Para mayor facilidad seleccione las energías potenciales que resulten semejantes.

Observe que en total debe hacer 6 combinaciones de dos en dos.

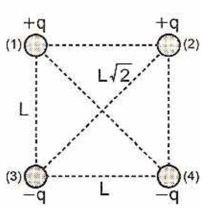
Observe que hay 3 pares de carga cuya separación es "a" y 3 pares de carga cuya separación es $a\sqrt{3}$.

Luego: $E_P = \dfrac{3kq^2}{a} + \dfrac{3kq^2}{a\sqrt{3}} \Rightarrow E_P = \dfrac{kq^2}{a}(3+\sqrt{3})$

42. En el sistema mostrado, la energía de interacción de las cargas puntuales, situadas en los vértices del cuadrado de lado L, es igual a:



Resolución:



La energía potencial de interacción eléctrica del sistema, es igual al trabajo realizado por un agente externo para llevar desde el infinito hasta los vértices del cuadrado las cargas eléctricas. Su valor se determina mediante la fórmula (1), donde se considera el signo de las cargas. Además las distancias de separación son:

$d_{12} = d_{13} = d_{24} = d_{134} = L$

$d_{14} = d_{23} = L\sqrt{2}$

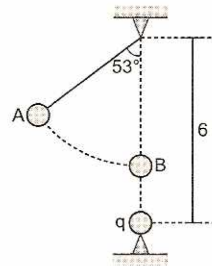
$$E_P = k\left(\frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{q_1q_4}{d_{14}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}} + \frac{q_2q_4}{d_{24}} + \frac{q_3q_4}{d_{34}}\right) \ldots (1)$$

Reemplazando valores y signos en (1):

$$E_P = \frac{kq^2}{L}\left(1 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 1\right)$$

Luego: $E_P = -\sqrt{2}\left(\dfrac{kq^2}{L}\right)$

43. Un péndulo de 5 cm de longitud, masa $m = 14{,}4$ kg y carga $Q = 2\ \mu C$, se abandona en la posición A. Si, $q = -3\ \mu C$, determinar la máxima velocidad que adquiere la esferita cargada "m". ($g = 10\ m/s^2$)



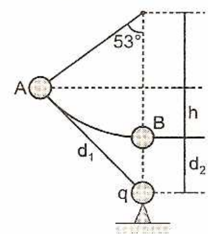
Resolución:

La energía potencial de interacción eléctrica varía, cuando la carga Q cambia de posición.

De la figura se deduce:

$d_1 = 5$ cm; $d_2 = 1$ cm y $h = 2$ cm

Por principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(inicial)} = E_{M(final)}$



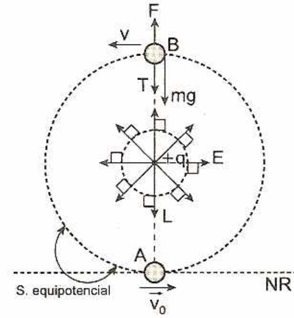
$(E_{pe} + E_{pg})_0 = (E_{pe} + E_k)_f$

$\Rightarrow k\dfrac{qQ}{d_1} + mgh = k\dfrac{qQ}{d_2} + \dfrac{1}{2}mv^2$

Reemplazando datos en el SI y despejando tenemos: $v = 1$ m/s

44. Una esferita de masa "m" y carga "q" puede girar en un plano vertical suspendida de un hilo de seda de longitud L. En el centro de giro se encuentra una segunda esferita, cuya carga es igual en valor y en signo a la carga de la esferita que gira. ¿Cuál es la velocidad horizontal mínima que hay que comunicarle a la esferita en su posición más baja para que pueda realizar una vuelta completa?

Resolución:



En principio la esferita se mueve en una superficie equipotencial eléctrica, por consiguiente su energía potencial eléctrica se mantiene constante en el tiempo.

La esferita se mueve en un campo (gravitatorio + eléctrico) conservativo, entonces la energía mecánica se conserva en el tiempo.

$E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$\Rightarrow E_{K(A)} + E_{P(A)} = E_{K(B)} + E_{P(B)}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{kqq}{L} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2L) + \frac{kqq}{L}$$

$$v_0^2 = v^2 + 4gL \quad ...(1)$$

Dinámica circular en B: $\Sigma F_{(\text{radiales})} = ma_C$

$$(mg + T - F) = m\frac{v^2}{L}$$

Donde: $F = k\dfrac{qq}{L^2}$ ...(2)

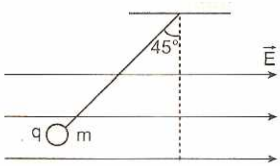
De la condición del problema (v_0 y "v" son mínimos) la tensión en la cuerda tiende a cero, ($T \to 0$).

Luego, en (2): $v^2 = gL - \dfrac{kqq}{mL}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1):

$$v_0 = \sqrt{5gL - \frac{kqq}{mL}}$$

45. Una esferita pendular electrizada de masa m = 2 gr. se encuentra en equilibrio en una región donde hay un campo eléctrico uniforme de magnitud E = 100 N/C, como se muestra en la figura. Calcular la carga eléctrica de la esferita.

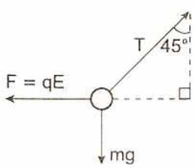


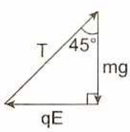
Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera

$m = 2\text{ g} = 2 \times 10^{-3}$ kg

E = 100 N/C





Primera condición de equilibrio: qE = mg

$q(100) = (2 \times 10^{-3})10$

$\therefore q = 200\ \mu C$

POTENCIAL ELÉCTRICO

Es una magnitud física escalar. Se define como el trabajo realizado por un agente externo contra el campo eléctrico, por cada unidad de carga positiva, para trasladar a velocidad constante desde el infinito hasta un cierto punto A dentro del campo. Sea Q la carga creadora del campo eléctrico.

$$\text{Potencial eléctrico} = \frac{\text{trabajo}}{\text{carga}}$$

$$\boxed{V_A = \frac{W_{\infty \to A}}{q}} \quad ...(15.14)$$

Pero el trabajo realizado por el agente externo es:

$$\boxed{W_{\infty \to A} = k\left(\frac{Qq}{d}\right)} \quad ...(15.15)$$

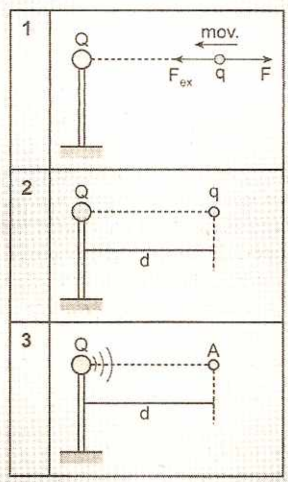
Reemplazando (15.15) en (15.14) tenemos:

$$\boxed{V_A = k\left(\frac{Q}{q}\right)} \quad ...(15.16)$$

El potencial eléctrico en el punto A es directamente proporcional a la magnitud de la carga Q e inversamente proporcional a la distancia "d" entre la carga creadora y el punto A. En la fórmula se reemplaza el signo de la carga creadora. El potencial eléctrico se mide en *volt* (V), en honor al científico italiano Alejandro Volta (1745 -1827).

$$1\ \textit{volt} = \frac{1\ \textit{joule}}{1\ \textit{coulomb}} \Rightarrow 1\text{ V} = \frac{1\text{J}}{\text{C}}$$

Agente externo



El potencial eléctrico en el punto A se determina con la fórmula: $V_A = kQ/d$

El potencial en A puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de la carga creadora Q.

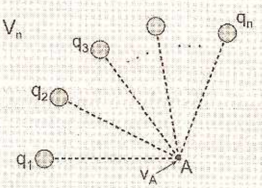
POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS

El potencial eléctrico resultante en el punto A debido a un sistema de cargas puntuales, es igual a la suma algebraica de los potenciales parciales, V_1, V_2, V_3,V_4, ..., V_n.

$$\boxed{V_A = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n} \qquad ...(15.17)$$

Sistema de cargas

$V_A = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$



DIFERENCIA DE POTENCIAL

Su valor se define como el trabajo realizado por un agente externo sobre cada unidad de carga para trasladar a velocidad constante desde un punto inicial A a otro final B dentro del campo eléctrico.

$$\boxed{V_B - V_A = V_{BA}} \qquad ...(15.18)$$

$$\boxed{V_{BA} = \frac{W_{A \to B}}{q}} \qquad ...(15.19)$$

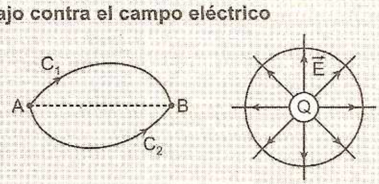
La diferencia de potencial suele llamarse tensión. El sentido de las líneas de fuerza es tal que se dirigen de mayor a menor potencial eléctrico.

El trabajo realizado por el agente externo (Fex) para trasladar la carga "q" de un punto inicial A hasta otro final B es igual al producto de la magnitud de la carga que se lleva por la diferencia de potencial final e inicial.

$$\boxed{W_{A \to B} = q(V_B - V_A)} \qquad ...(15.20)$$

El trabajo realizado sobre la carga "q" desde A hasta B es independiente del camino o trayectoria que se sigue, solo depende del potencial inicial y final.

Trabajo contra el campo eléctrico



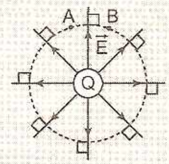
El trabajo de A hasta B es independiente de los caminos C_1 y C_2.

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Se denomina así a aquel lugar geométrico constituido por puntos de igual potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales se caracterizan por ser perpendiculares a las líneas de fuerza. El trabajo realizado para trasladar una carga del punto A hasta el punto B, que pertenecen a la misma superficie equipotencial, es igual a cero.

Trabajo nulo

Si, $V_A = V_B \Rightarrow W_{A \to B} = 0$



En el caso del campo homogéneo las líneas de fuerza son paralelas por consiguiente las superficies equipotenciales también son paralelas representadas por líneas punteadas.

La intensidad del campo eléctrico está dirigida en el sentido que disminuye el potencial eléctrico.

RELACIÓN ENTRE POTENCIAL Y CAMPO

La diferencia de potencial entre dos puntos A y B dentro de un campo homogéneo $\vec{E}$, es igual al producto de la distancia "d" por la intensidad de campo $\vec{E}$.

Donde "d" es la distancia entre dos superficies equipotenciales que contienen a los puntos A y B respectivamente.

$$\boxed{V_A > V_B} \qquad ...(15.21)$$

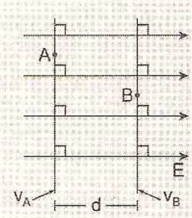
$$\boxed{V_{AB} = Ed} \qquad ...(15.22)$$

De (15.22) se deduce que la unidad de la intensidad de campo $\vec{E}$ es voltio/metro.

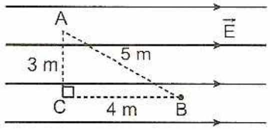
Campo homogéneo

$V_A > V_B$

$V_{AB} = Ed$



1. La figura muestra un campo eléctrico homogéneo de intensidad E = 500 kN/C, representado mediante líneas de fuerza hacia la derecha. Determinar el trabajo realizado por un agente externo para trasladar una carga q = 50 μC, desde la posición A hasta B siguiendo como trayectoria la hipotenusa del triángulo rectángulo.



Resolución:

Los puntos A y C se encuentran a igual potencial eléctrico ($V_A = V_C$), además la diferencia de potencial entre los puntos B y C es:

$V_B < V_C$; $(V_B - V_C) = -Ed$

$\Rightarrow V_B - V_C = (500\,000)(4) = -2 \times 10^6$ voltios

Luego: $V_B - V_A = -2 \times 10^6$ voltios

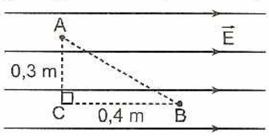
El trabajo realizado contra el campo eléctrico es independiente del camino seguido, solo interesa el potencial inicial (A) y final (B):

$W_{A \to B}^{Ext} = q(V_B - V_A) = (50 \times 10^{-6})(-2 \times 10^6)$

$\Rightarrow W_{A \to B}^{Ext.} = -100$ J

Luego, el trabajo realizado por el agente externo es igual a 100 J, el signo (−) significa que el agente externo se opone al movimiento de la carga "q".

2. La figura muestra un campo eléctrico homogéneo de intensidad E = 10 N/C, representado mediante líneas de fuerza horizontales hacia la derecha. Determinar la diferencia de potencial eléctrica ($V_B - V_A$) entre los puntos B y A.



Resolución:

La diferencia de potencial entre dos puntos: (B y A) es igual al producto de la intensidad de campo E por la distancia "d" entre las superficies equipotenciales, que son perpendiculares a las líneas de fuerza. Las líneas de fuerza tienen el sentido de mayor a menor potencial eléctrico, entonces:

$V_A > V_B$

$(V_A - V_B) = +Ed$

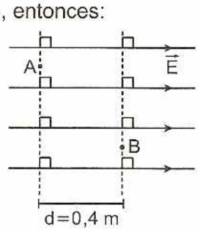
$(V_B - V_A) = -Ed$

$-Ed = -10(0,4)$

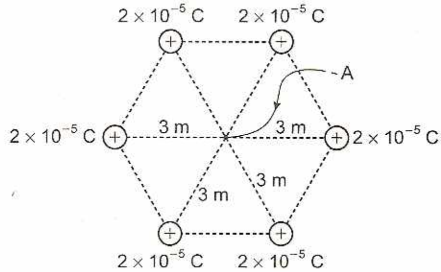
$-Ed = -4$ voltios

Luego:

$V_B - V_A = -4$ voltios



3. En un hexágono regular, cuyo lado mide 3 m, se ubican seis cargas en los vértices, cada una es de $+2 \times 10^{-5}$ C, halle el trabajo sobre una carga de -10^{-3} C para moverla desde el infinito hasta el centro del hexágono.



Resolución:

Representamos el hexágono regular:

Cálculo de los potenciales:

Punto de llegada B: $V_B = 6\left[k\left(\dfrac{2 \times 10^{-5}}{3}\right)\right]$

En el SI: $k = 9 \times 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2} \Rightarrow V_B = 36 \times 10^4$ V

Punto de salida A:

Como es en el infinito: $V_A = V_\infty = 0$

Cálculo del trabajo:

$W = (V_B - V_A)q_0 \Rightarrow W = (36 \times 10^4 - 0)(-10^{-3})$

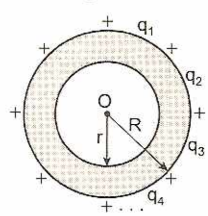
$W = -360$ J

4. Un cascarón metálico de radios "r": interno y R: externo tiene una carga +Q, encuentre el potencial eléctrico en el centro del cascarón.

Resolución:

La carga se ubica en la superficie exterior del cascarón metálico, todo sólido metal es conductor.

Tomamos pequeñas cargas sobre la superficie externa del cascarón, luego, en el centro (O).



$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + ...$

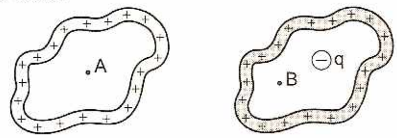
$V_0 = k\dfrac{q_1}{R} + k\dfrac{q_2}{R} + k\dfrac{q_3}{R} + k\dfrac{q_4}{R} + ...$

$\Rightarrow V_0 = \dfrac{k}{R}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + ...)$

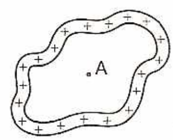
La suma de estas pequeñas cargas será Q, luego:

$V_0 = k\left(\dfrac{Q}{R}\right)$

5. Se muestran cargas cascarones (+Q) y cargas sólidas (−q), determine cualitativamente la intensidad de campo eléctrico en los puntos A y B para cada caso.



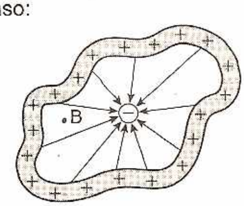
Resolución:



Primer caso:
Sabemos que las líneas de fuerza salen de la carga positiva e ingresan a las cargas negativas, pero como en este caso en el interior del cascarón no hay cargas negativas luego interiormente no se forman líneas de fuerza.
La intensidad de campo eléctrico ($\vec{E}$) es directamente proporcional al número de líneas de fuerza, como no se forman líneas de fuerza en el interior del cascarón la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto interior será cero.

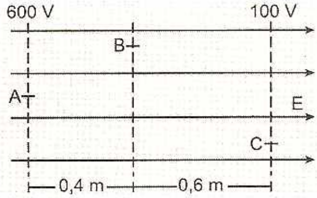
$$E_A = 0$$

Segundo caso:



Al ubicar una carga negativa (−q) en el interior del cascarón, se forman líneas de fuerza que salen del cascarón (+Q) e ingresan a la carga negativa (−q). Esto quiere decir que en el interior del cascarón, si existe campo eléctrico, luego: $E_B > 0$

6. Se muestra un campo eléctrico uniforme y homogéneo. Determinar el potencial eléctrico en el punto B.



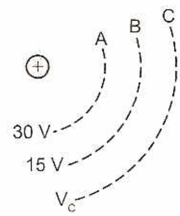
Resolución:
Las líneas de fuerza que representan al campo eléctrico homogéneo se desplazan de mayor a menor potencial eléctrico. Observe que: $V_A > V_B$
Sabiendo que el campo eléctrico es homogéneo, se cumple que:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{d_{AB}} = \frac{V_B - V_C}{d_{BC}}$$

Reemplazando, tenemos que:

$$\frac{600 - V_B}{0{,}4} = \frac{V_B - 100}{0{,}6} \Rightarrow V_B = 400\ \text{V}$$

7. Se muestra tres líneas equipotenciales. Para trasladar lentamente una partícula electrizada de cantidad de carga +10 C desde A hasta C, un agente externo realiza una cantidad de trabajo de −200 J contra el campo eléctrico. Determinar el potencial eléctrico en C.

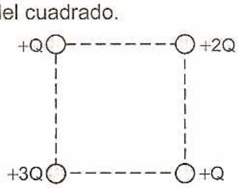


Resolución:
La cantidad de trabajo hecho por un agente externo contra el campo eléctrico para trasladar la partícula electrizada "q" desde un punto inicial A a otro final C, es igual al producto de la magnitud de la partícula electrizada por la diferencia de potencial entre los puntos final e inicial.

$$W_{A-C}^{AE} = q(V_C - V_A) \Rightarrow -200 = 10(V_C - 30)$$

$$V_C = +10\ \text{V}$$

8. Se muestran cuatro esferas pequeñas electrizadas en los vértices de un cuadrado de lado L. Si la esfera de cantidad de carga eléctrica +2Q genera un potencial eléctrico de 10 V en el centro del cuadrado, determinar el potencial eléctrico resultante en el centro del cuadrado.

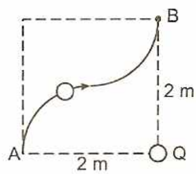


Resolución:
El potencial eléctrico generado por 2Q en el centro del cuadrado es +10 V, entonces la cantidad de carga Q genera 5 V. Sabiendo que las partículas electrizadas equidistan del centro, entonces:

$$V_{centro} = \frac{k(\sum q)}{d} \Rightarrow V_{centro} = \frac{k(7Q)}{d}$$

$$V_{centro} = 7\left[\frac{k(Q)}{d}\right] = 7(5) = +35\ \text{V}$$

9. Una esfera electrizada con cantidad de carga Q = +80 μC genera a su alrededor un campo eléctrico. Determinar la cantidad de trabajo realizado por un agente externo para trasladar lentamente una partícula electrizada de cantidad de carga q = −2 μC desde la posición A hasta la posición B siguiendo la trayectoria mostrada.



Resolución:

Cálculo del potencial eléctrico en el punto A.

$$V_A = \frac{kQ}{d} \Rightarrow V_A = \frac{(9\times10^9)(80\times10^{-6})}{2} = +360\times10^3\ V$$

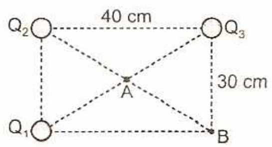
Observando el gráfico deducimos que los puntos A y B tienen el mismo potencial eléctrico.

Sabemos:

$$W_{A\to B}^{A.E} = q(V_B - V_A) \Rightarrow W_{A\to B}^{A.E} = q(V - V) = 0\ J$$

La cantidad de trabajo hecho por el agente externo contra el campo eléctrico es nula.

10. Tres cargas puntuales de magnitud $Q_1 = 40\ \mu C$; $Q_2 = -50\ \mu C$ y $Q_3 = 30\ \mu C$, han sido colocados en tres vértices de un rectángulo cuyos lados miden 30 cm y 40 cm como se muestra en la figura. Determinar el trabajo realizado por un agente externo para trasladar una carga $q_0 = -2\ \mu C$ desde el punto A hasta B.



Resolución:

Cálculo del potencial en el punto A:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A} \Rightarrow V_A = k\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2} + \frac{Q_2}{d_3}\right)$$

Luego: $V_A = 72\times10^4\ V$

Cálculo del potencial en el punto B:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} \Rightarrow V_A = k\left(\frac{Q_1}{D_1} + \frac{Q_2}{D_2} + \frac{Q_3}{D_3}\right)$$

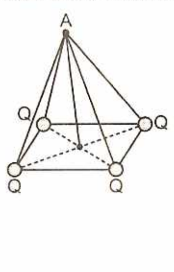
Luego: $V_B = 90\times10^4\ V$

Cálculo del trabajo realizado por el agente externo sobre la carga q_0:

$$W_{A\to B} = q_0(V_B - V_A) \Rightarrow W_{A\to B} = (-2\times10^6)(18\times10^4)$$

$$\therefore\ W_{A\to B} = -0{,}36\ J$$

11. La figura muestra una pirámide de altura 24 m y base cuadrada cuya diagonal mide 14 m. En los vértices del cuadrado se han colocado cuatro cargas eléctricas puntuales, Q = 25 C, idénticas. Determinar la energía potencial eléctrica de la carga q = 2 μC, ubicada en el vértice A de la pirámide.



Resolución:

Cálculo del potencial eléctrico en el punto A. Las cargas Q equidistan del punto A, donde d = 25 m.

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \Rightarrow V_A = 4k\left(\frac{Q}{d}\right) = 4(9\times10^9)\frac{25}{25}$$

$V_A = 36\times10^9$ voltios ...(1)

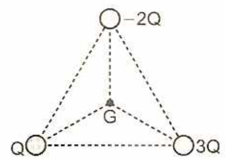
Cálculo de la energía potencial de la carga "q", ubicado en el punto A:

$$E_P = qV_A \Rightarrow E_P = (2\times10^{-6})(36\times10^9) \Rightarrow E_P = 72\ kJ$$

12. En los vértices de un triángulo equilátero se han colocado tres cargas eléctricas puntuales de magnitud: Q; −2Q; 3Q.

Sabiendo que la carga Q genera un potencial de 10 voltios en el baricentro del triángulo, determinar el potencial eléctrico resultante en el baricentro.

Resolución:



Las cargas equidistan del punto G, por consiguiente el potencial eléctrico generado por cada carga es proporcional a la magnitud de la carga. El signo de la carga y del potencial generado son iguales:

+Q : potencial eléctrico: +10 V

−2Q: potencial eléctrico: −20 V

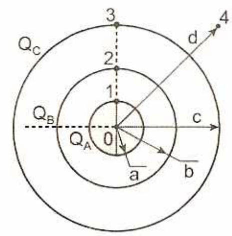
+3Q : potencial eléctrico: +30 V

Potencial eléctrico resultante en el punto G:

$$V_G = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V_G = 10 - 20 + 30$$

$V_G = 20$ voltios

13. La figura muestra tres cascarones esféricos de radios de curvatura "a", "b" y "c", cargados eléctricamente con magnitud Q_A, Q_B y Q_C respectivamente. Hallar los potenciales eléctricos en los puntos: 1; 2; 3 y 4. La posición del punto 4 está definida por el radio "d".



Resolución:

Debemos recordar antes, que el potencial eléctrico en el interior del cuerpo conductor esférico es constante e igual al potencial en la superficie. Para efectos externos (fuera de la superficie) se puede considerar que toda la carga (carga neta) del cuerpo esférico está concentrada en su centro geométrico.

Cálculo de los potenciales:

En el punto 1: $V_1 = k\left(\dfrac{Q_A}{a} + \dfrac{Q_B}{b} + \dfrac{Q_C}{c}\right)$

En el punto 2: $V_2 = k\left[\dfrac{(Q_A + Q_B)}{b} + \dfrac{Q_C}{c}\right]$

En el punto 3: $V_3 = k\left(\dfrac{Q_A + Q_B + Q_C}{c}\right)$

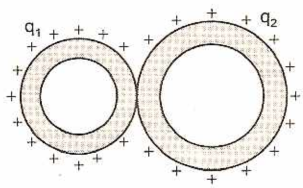
En el punto 4: $V_4 = k\left(\dfrac{Q_A + Q_B + Q_C}{d}\right)$

14. Dos cascarones esféricos conductores, con radios "r" y 2r, con cargas respectivas de +14 y −4 C, deben hacer contacto según sus casos, externamente (caso A) e internamente (caso B). ¿Qué cargas tendrán los cascarones después del contacto, según sea el caso?

Resolución:

En cada caso la carga total (14 − 4) se conservará: Q = 10 C

Caso A: (contacto externo). Recuerde que en cualquier cuerpo conductor, la carga positiva o negativa se aloja en la superficie externa, luego:



$$\frac{q_1}{r^2} = \frac{q_2}{(2r)^2} \Rightarrow q_2 = 4q_1 \quad ...(1)$$

Conservación de la carga:

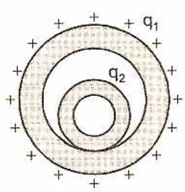
$q_1 + q_2 = 10$ C

$q_1 + (4q_1) = 10$ C $\Rightarrow q_1 = 2$ C $\Rightarrow q_2 = 8$ C

Caso B: (contacto interno). Como la carga de un cuerpo o sistema de cuerpos conductores se va a la superficie exterior, los 10 C se alojan en el cascarón mayor:

$q_1 = 10$ C

$q_2 = 0$



De aquí se desprende que si desde un cuerpo conductor se requiere pasar toda la carga a otro cuerpo conductor, debe practicarse un contacto interno.

15. Se tiene n + 1 esferas conductoras de igual radio de curvatura, de los cuales una sola esfera tiene carga y esta es de q = 128 μC. Si ésta se pone en contacto con la segunda esfera hasta alcanzar el equilibrio eléctrico, luego con la tercera, repitiéndose el proceso con las otras esferas restantes. Hallar el número de esferas, si después del último contacto la carga de la esfera inicial es 2 μC.

Resolución:

Cuando dos esferas de igual tamaño se ponen en contacto, éstas se reparten las cargas equitativamente.

Carga de la esfera inicial : q

Después del 1.^{er} contacto: q/2

Después del 2.° contacto: q/4

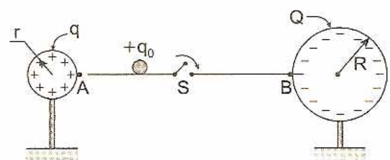
Después del 3.^{er} contacto: q/8

Después del enésimo contacto: $\dfrac{q}{2^n} = 2\ \mu C$

Reemplazando el dato: $128 = 2^{n+1}$

Luego: (n + 1) = 7

16. Dos esferas conductoras de radios de curvatura "r" y R (R = 2r), se encuentran cargadas con magnitud: q = + 16 μC y Q = −4 μC, alejados entre sí una distancia infinitamente grande. Determinar la carga final que tendrá cada esfera tiempo después que se les conecte mediante un alambre conductor.



Resolución:

Al cerrar la llave S, se establece un flujo de cargas eléctricas (convencionalmente positivas) de mayor a menor potencial. El flujo de cargas eléctricas cesa cuando los potenciales eléctricos en A y B alcanzan igual valor. Inicialmente $V_A > V_B$.

$$V'_A = V'_B \Rightarrow k\frac{q'}{r} = k\frac{Q}{R} \Rightarrow \frac{q'}{r} = \frac{Q'}{R} \Rightarrow \frac{q'}{r} = \frac{Q'}{2r}$$

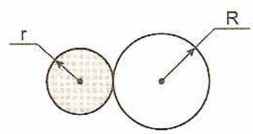
Q' = 2q'

Principio de conservación de las cargas eléctricas:

q + Q = q' + Q' ⇒ 16 − 4 = q' + 2q'

Luego: q' = 4 μC ∴ Q' = 8 μC

17. Una esfera conductora de radio de curvatura r = 3 cm y cargada con magnitud q = 250 μC, se pone en contacto con otra esfera conductora de radio de curvatura R = 4 cm, descargada (Q = 0). Después de separar las esferas, hallar la carga en cada esfera.



Resolución:

Cuando ponemos en contacto las esferas se establece un flujo de cargas eléctricas, de tal modo que las cargas se reparten directamente proporcional al cuadrado de sus radios de curvatura:

$$\frac{q'}{r^2} = \frac{Q'}{R^2} \Rightarrow \frac{q'}{9} = \frac{Q'}{16} \Rightarrow q' = \frac{9}{16}Q'$$

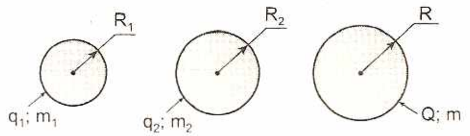
Principio de conservación de las cargas eléctricas:

$q + Q = q' + Q' \Rightarrow 250\ \mu C + 0 = \frac{9}{16}Q' + Q'$

Resolviendo: $Q' = 160\ \mu C \wedge q' = 90\ \mu C$

18. Dos gotas de agua esféricas de radio de curvatura $R_1 = 1{,}0$ mm y $R_2 = \sqrt[3]{7}$ mm y cargados con magnitud: $q_1 = 20\ \mu C$ y $q_2 = -70\ \mu C$ luego se juntan las gotas para formar otra gota también esférica. Determinar el potencial eléctrico de la nueva gota considerándola como una esfera conductora.

Resolución:



Principio de conservación de la masa:

$m_1 + m_2 = m \Rightarrow DV_1 + DV_2 = DV$

$\frac{4\pi}{3}R_1^3 + \frac{4\pi}{3}R_2^3 = \frac{4\pi}{3}R^3 \Rightarrow R_1^3 + R_2^3 = R^3$

Reemplazando: $R = 2$ mm

Principio de conservación de las cargas eléctricas:

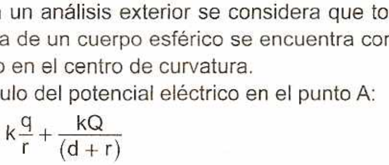
$q_1 + q_2 = Q$

Reemplazando: $Q = -50\ \mu C$

Cálculo del potencial eléctrico, de la nueva gota:

$$V_E = k\left(\frac{Q}{R}\right) = 9 \times 10^9 \frac{(5 \times 10^{-5})}{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow V_E = -225\ \text{MV}$$

19. Dos esferas conductoras de radios de curvatura $r = 1$ m y $R = 2{,}0$ m, se encuentran cargadas con magnitud: $q = 60\ \mu C$ y $Q = -30\ \mu C$, respectivamente. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos A y B, sabiendo que la distancia de separación entre A y B es $d = 4$ m.



Resolución:

Para un análisis exterior se considera que toda la carga de un cuerpo esférico se encuentra concentrado en el centro de curvatura.

Cálculo del potencial eléctrico en el punto A:

$$V_A = k\frac{q}{r} + \frac{kQ}{(d + r)}$$

$$\Rightarrow V_A = 9 \times 10^9 \frac{(60 \times 10^{-6})}{1} + 9 \times 10^9 \frac{(-30 \times 10^{-6})}{6}$$

$\Rightarrow V_A = 495$ kV

Cálculo del potencial eléctrico en el punto B:

$$V_B = k\left(\frac{Q}{R}\right) + k\frac{q}{(d + r)}$$

$$V_B = 9 \times 10^9 \frac{(-30 \times 10^{-6})}{2} + 9 \times 10^9 \frac{(60 \times 10^{-6})}{5}$$

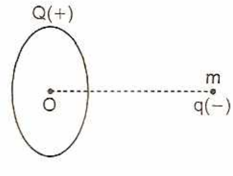
$V_B = -27$ kV

Diferencia de potencial entre A y B:

$(V_A - V_B) = 495 + 27 \Rightarrow V_A - V_B = 522$ kV

20. Un anillo conductor de 3 m de radio tiene una carga de 3×10^{-2} C uniformemente distribuida. Si desde un punto de su eje de simetría a una distancia de 4 m de su centro O se coloca un cuerpo de 0,2 kg de masa y -10^{-5} C de carga eléctrica, hallar su velocidad cuando pase por el punto O.

Desprecie la acción de la gravedad sobre el cuerpo.

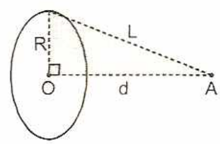


Resolución:

Hallaremos primeramente los potenciales eléctricos en los puntos A y O del espacio, generado por la carga distribuida del anillo.

$$V_A = \frac{kQ}{L} \Rightarrow V_A = 54 \times 10^6\ \text{V};$$

$$V_B = \frac{kQ}{R} \Rightarrow V_B = 90 \times 10^6\ \text{V}$$



Hallaremos a continuación la energía potencial eléctrica que tiene la carga móvil "q" cuando pasa por estos puntos:

$E_{P(A)} = V_A q \Rightarrow E_{P(A)} = -540$ J

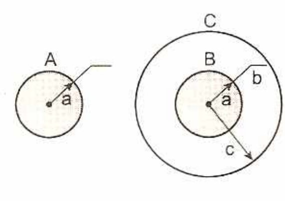
$E_{P(B)} = V_B q \Rightarrow E_{P(B)} = -900$ J

Finalmente, como sobre la carga móvil solo actúa una fuerza electrostática, que es una fuerza conservativa, se conservará su energía mecánica, es decir:

$E_{M(A)} = E_{M(O)} \Rightarrow E_{P(A)} = E_{P(O)} + E_{K(O)}$

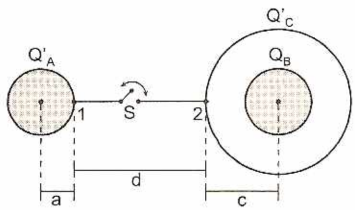
$$\Rightarrow -540 = -900 + \frac{1}{2}(0{,}2)V^2 \quad \therefore V = 60\ \text{m/s}$$

21. La figura muestra tres cuerpos esféricos de radios de curvatura "a", "b" y "c", cargadas con magnitud Q_A, Q_B y Q_C respectivamente. El cascarón de radio "c" y la esfera de radio "b" son concéntricos y aislados. Hallar la carga final, tiempo después, que se pone en contacto la esfera de radio "a", con el cascarón de radio "c".



Resolución:

Analizamos el caso general, cuando los cuerpos están separados una distancia finita "d". Si cerramos el circuito mediante la llave S, se establece un flujo de cargas eléctricas (convencionalmente positivas) de mayor a menor potencial. El flujo de cargas cesa cuando los potenciales de los puntos 1 y 2 se hacen iguales.



Luego: $V_1 = V_2$

$$\frac{kQ'_A}{a} + \frac{k(Q_B + Q_C)}{(d+c)} = \frac{kQ'_A}{(a+d)} + \frac{kQ'_C}{c} + \frac{kQ_B}{c}$$

Despejando: $\dfrac{Q'_A}{a(a+d)} = \dfrac{(Q_B + Q'_C)}{c(d+c)}$ ...(1)

Analizando la ecuación (1). Si la distancia "d" es muy grande ($d \to \infty$), entonces: $(a + d) \approx (d + c)$

entonces, se deduce que: $\dfrac{Q'_A}{a} = \dfrac{Q_B + Q'_C}{c}$

Para nuestro caso particular, los cuerpos están en contacto, entonces: d = 0, reemplazando en (1):

$$\frac{Q'_A}{a^2} = \frac{(Q_B + Q'_C)}{c^2} \qquad ...(2)$$

Por principio de conservación de las cargas eléctricas:

$\Sigma q_{inicial} = \Sigma q_{final}$

$Q_A + Q_B + Q_C = Q'_A + Q_B + Q'_C$

Luego: $Q'_C = Q_A + Q_C - Q'_A$ ...(3)

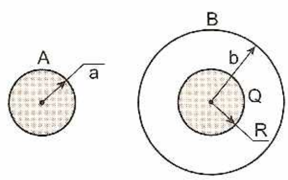
Reemplazando (3) en (2), tenemos que:

$$Q'_A = \frac{a^2}{(a^2 + c^2)}(Q_A + Q_B + Q_C)$$

Reemplazando en (3), tenemos:

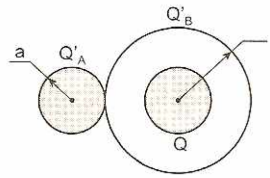
$$Q'_C = \frac{c^2(Q_A + Q_C) - a^2 Q_B}{(a^2 + c^2)}$$

22. La figura muestra tres cuerpos de radios de curvatura a = 3 cm; b = 4 cm y R. La esfera de radio R y carga Q = 25 μC se encuentra dentro del cascarón de radio "b", aislados eléctricamente ambos cuerpos. Los cuerpos de radios "a" y "b" no tienen carga eléctrica. Sabiendo que la esfera de radio "a" se pone en contacto con el cascarón de radio "b" y tiempo después se separa, hallar la carga final de los cuerpos A y B.



Resolución:

Cuando ponemos en contacto los cuerpos de radios "a" y "b", se establece un flujo de cargas eléctricas a través del punto en contacto, de mayor a menor potencial. El flujo de cargas (positivas) cesa cuando los potenciales de los cuerpos en contacto se hacen iguales.



En estas condiciones las cargas eléctricas se reparten directamente proporcional al cuadrado de los radios de curvatura, teniendo en cuenta que los cuerpos de radios, "b" y R forman un solo cuerpo, se cumple que:

$$\frac{Q'_A}{a^2} = \frac{(Q + Q'_B)}{b^2} \qquad ...(1)$$

Por principio de conservación de las cargas eléctricas en un sistema aislado:

$\Sigma q_{inicial} = \Sigma q_{final} \Rightarrow Q = Q'_A + Q'_B + Q$

Luego: $Q'_A = -Q'_B$ ...(2)

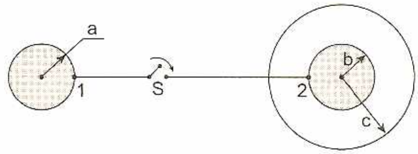
Reemplazando (2) en (1):

$$Q'_A = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)}Q \ \text{ y } \ Q'_B = \frac{-a^2}{a^2 + b^2}Q$$

Reemplazando valores:

$Q'_A = +9\ \mu C$ y $Q'_B = -9\ \mu C$

23. La figura muestra tres cascarones esféricos de radio de curvatura a = 10 cm; b = 20 cm; c = 30 cm, inicialmente el cascarón de radio "a" no tiene carga ($Q_a = 0$) y los cascarones de radios "b" y "c" se encuentran cargados con magnitud $Q_b = 40\ \mu C$ y $Q_c = 30\ \mu C$. Las esferas de radio "a" y "b" están conectados por medio de un alambre aislado que pasa a través de un agujero en el cascarón de radio "c". Considerando que la distancia de separación es muy grande entre las esferas de radios "a" y "b", hallar la carga final en el cascarón de radio "a" cuando se cierra el interruptor S.



Resolución:

Al conectar el alambre conductor, cerramos la llave S, se establece un flujo de cargas eléctricas (convencionalmente positivas) de mayor a menor potencial eléctrico. El flujo de cargas cesa cuando los potenciales eléctricos en los puntos 1 y 2 alcanzan igual valor:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow k\frac{Q'_a}{a} = k\frac{Q'_b}{b} + k\frac{Q_c}{c} \Rightarrow \frac{Q'_a}{a} = \frac{Q'_b}{b} + \frac{Q_c}{c} \quad ...(1)$$

Por principio de conservación de las cargas eléctricas: $\Sigma q_{inicial} = \Sigma q_{final} \Rightarrow Q_b + Q_c = Q'_a + Q'_b + Q_c$

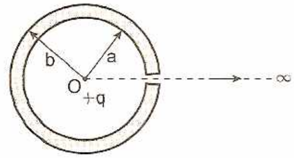
Luego: $Q'_b = Q_b - Q'_a$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1), tenemos:

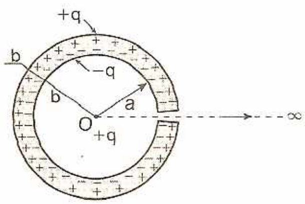
$$\frac{Q'_a}{a} = \frac{Q'_b - Q'_a}{b} + \frac{Q_c}{c} \Rightarrow Q'_a = \frac{a}{(a+b)}\left(Q_b + \frac{b}{c}Q_c\right) \quad ...(3)$$

Reemplazando los datos en (3): $Q'_a = 20\ \mu C$

24. En el centro O de una capa esférica conductora sin carga, que tiene un pequeño orificio, se encuentra una carga puntual "q". Los radios internos y externos de la capa son iguales a "a" y "b", respectivamente. ¿Qué trabajo se debe realizar contra las fuerzas eléctricas, para desplazar lentamente la carga "q", a través del orificio, desde el punto O hacia el infinito?



Resolución:



La capa esférica se polariza, de modo que en la superficie de radio "a" se induce una carga −q y en la superficie de radio "b" se induce una carga +q; la carga neta de la capa es igual a cero, por consiguiente la capa esférica genera un potencial eléctrico en el punto O.

$$V_0 = k\frac{(-q)}{a} + k\frac{(+q)}{b} \Rightarrow V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad ...(I)$$

El trabajo realizado por un agente externo contra las fuerzas eléctricas es igual al producto de la carga +q que se traslada por la diferencia de potencial entre el punto inicial (0) y el punto final (∞). Pero en el infinito el potencial eléctrico es igual a cero, entonces:

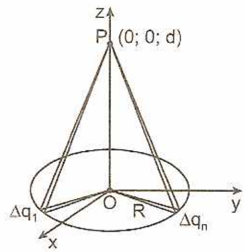
$$W_{0\to\infty} = q(V_\infty - V_0) = -qV_0 \quad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II), tenemos:

$$W_{0\to\infty} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

25. Se tiene un anillo de radio R cargado con magnitud +q uniformemente distribuido en el anillo. Sabiendo que el anillo se encuentra en el plano x-y con centro en el origen de coordenadas, hallar el potencial eléctrico en un punto del eje del anillo P(0; 0; d) y en el centro (0; 0; 0).

Resolución:



Cada diferencial de carga Δq_1; Δq_2; Δq_3; ...; Δq_n, del anillo, genera un potencial en el punto P la distancia entre el punto P y cada diferencial de carga es constante igual a: $\sqrt{R^2 + d^2} = D$ ...(1)

El potencial en el punto P será:

$$V_P = k\left(\frac{\Delta q_1}{D} + \frac{\Delta q_2}{D} + \frac{\Delta q_3}{D} + ... + \frac{\Delta q_n}{D}\right)$$

$$V_P = \frac{k}{P}(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + ... + \Delta q_n).$$

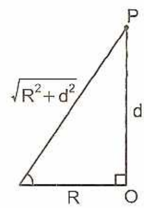
Pero: $q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + ... + \Delta q_n$

Luego: $V_P = \frac{kq}{D}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2), tenemos:

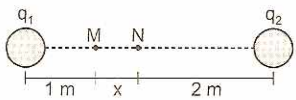
$$V_P = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + d^2}} \quad ...(3)$$

De la ecuación (3), el potencial eléctrico en O, el origen, cuando d = 0.



Entonces: $V_O = k\left(\frac{q}{R}\right)$

26. Determinar la distancia (en m) entre los puntos M y N, sabiendo que sus potenciales son iguales ($x \neq 0$), las cargas eléctricas son: $q_1 = +2\ \mu C$ y $q_2 = +5\ \mu C$, respectivamente.



Resolución:

$$V_{resultante(M)} = V_{resultante(N)}$$

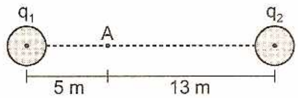
$$\frac{q_1}{1} + \frac{q_2}{(2+x)} = \frac{q_1}{(1+x)} + \frac{q_2}{2}$$

$$\frac{2}{1} + \frac{5}{2+x} = \frac{2}{1+x} + \frac{5}{2}$$

$$\frac{2(2+x)+5}{(2+x)} = \frac{4+5(1+x)}{2(x+1)} \Rightarrow 0 = x^2 - 3x$$

$(x-3)(x) = 0 \Rightarrow$ Como M y N tienen que ser puntos diferentes $x = 3$ m

27. Hallar el potencial eléctrico total (en kV) en el punto A, si las cargas eléctricas son: $q_1 = +25\ \mu C$ y $q_2 = -26\ \mu C$ respectivamente.



Resolución:

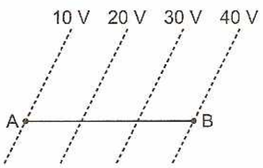
$$V_A = \frac{kq_1}{d_1} + \frac{kq_2}{d_2}$$

$$V_A = \frac{9\times10^9(25\times10^{-6})}{5} - \frac{9\times10^9(26\times10^{-6})}{13}$$

$$V_A = 45\times10^3 - 18\times10^3 \Rightarrow V_A = 27\times10^3$$

$$\therefore\ V_A = 27\ \text{kV}$$

28. Calcular el trabajo (en J) realizado por un agente externo para llevar una partícula electrizada con una carga eléctrica q = 10 C, desde la posición A hasta la posición B a velocidad constante.

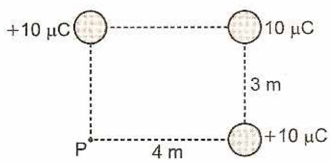


Resolución:

$$W_{A\to B}^{Ext} = q(V_B - V_A)$$

$$W_{A\to B}^{Ext} = 10(40-10) \qquad \therefore\ W_{A\to B}^{Ext} = 300\ \text{J}$$

29. En la siguiente configuración rectangular electrostática de cargas. Hallar el potencial eléctrico (en kV) en el vértice P.



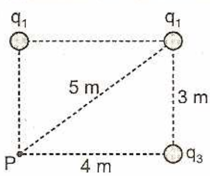
Resolución:

Potencial eléctrico en P debido a un sistema de cuerpos electrizados:

$q_1 = 10\times10^{-6}$ C

$q_2 = 10\times10^{-6}$ C

$q_3 = 10\times10^{-6}$ C



Fórmula: $V_P = \frac{kq_1}{d_1} + \frac{kq_2}{d_2} + \frac{kq_3}{d_3}$

$$V_P = \frac{9\times10^9(10^{-5})}{3} + \frac{9\times10^9(10^{-5})}{5} + \frac{9\times10^9(10^{5})}{4}$$

$$V_P = 3\times10^4 + 1{,}8\times10^4 + 2{,}25\times10^4$$

$$V_P = (30 + 18 + 22{,}5)(10^3)$$

$$\therefore\ V_P = 70{,}5\ \text{kV}$$

CAPACIDAD ELÉCTRICA

Es una magnitud física escalar que nos expresa la cantidad de carga "q" que se le debe entregar o sustraer a un cuerpo conductor para modificar en una unidad el potencial eléctrico en su superficie.

$$\boxed{C = \frac{q}{V}} \qquad \text{...(15.22)}$$

La capacidad eléctrica C se mide en *farad* (F), en honor al físico inglés Michael Faraday (1791-1867)

$$\boxed{1\ farad = \frac{1\ coulomb}{volt}} \qquad \text{...(15.23)}$$

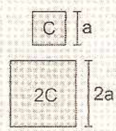
Si un cuerpo conductor aislado aumenta la cantidad de carga acumulada, las cargas se distribuyen por la superficie del conductor con distinta densidad superficial. El carácter de la distribución depende solamente de la forma del conductor y no de la cantidad de carga "q" que hay en él. Cada nueva porción de cargas se distribuye por la superficie de una manera semejante al anterior.

La capacidad eléctrica de un conductor aislado eléctricamente depende de su forma y de sus dimensiones. Para los conductores geométricamente semejantes, las capacidades son proporcionales a sus dimensiones lineales.

Depende de su forma geométrica

"La capacidad eléctrica de un conductor depende de su forma y de sus dimensiones".

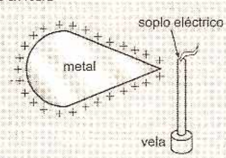
$$C = \frac{q}{V} = \frac{2q}{2V} = \frac{3q}{3V}$$



Las cargas eléctricas en un cuerpo conductor se distribuyen de tal modo que el potencial eléctrico en cualquier punto del cuerpo sea de la misma magnitud, es decir, el potencial eléctrico en su interior es constante.

Las cargas alcanzan mayor concentración en las zonas de mayor convexidad o en las puntas del cuerpo conductor.

Poder de las puntas



La propiedad que tienen los conductores de distribuir las cargas por su superficie hace que éstas se concentren en las puntas y menos en los llanos o hendiduras. La intensidad de campo en las puntas es verdaderamente grande, en ocasiones produce chispazos eléctricos de descarga.

CAPACIDAD DE UNA ESFERA

El potencial eléctrico en la superficie (igual en su interior) de la esfera conductora de radio R es:

$$\boxed{V = k\left(\frac{q}{R}\right)} \qquad \ldots(15.24)$$

De la definición de capacidad eléctrica: $C = \frac{q}{V}$

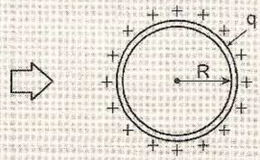
Reemplazando (15.24) en (15.22) tenemos:

$$\boxed{C = \frac{R}{k}} \qquad \ldots(15.25)$$

Depende del radio

«La capacidad eléctrica de la esfera conductora depende solo de radio R y no de la cantidad de carga "q" acumulada».

$C = \frac{R}{k}$



$k = 9 \times 10^9\ Nm^2C^{-2}$

CAPACIDAD MUTUA Y CONDENSADORES

En un sistema de dos cuerpos conductores próximos entre sí con carga "q" iguales en valor absoluto pero de signos diferentes, surge una diferencia de potencial V directamente proporcional a "q".

$$\boxed{V = \left(\frac{1}{C}\right)q} \qquad \ldots(15.26)$$

Donde C es la capacidad mutua de los dos conductores.

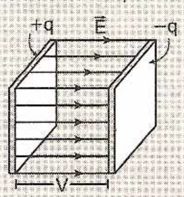
$$\boxed{C = \frac{q}{V}} \qquad \ldots(15.25)$$

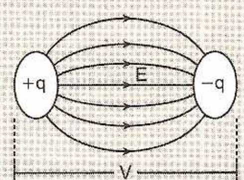
La capacidad mutua C de dos conductores es numéricamente igual a la carga que debemos trasladar de un conductor a otro para que la diferencia de potencial entre ellos varíe en la unidad.

Un sistema de dos conductores con cargas iguales en valor absoluto pero de signos diferentes, se llama condensador. Los conductores reciben el nombre de armaduras del condensador. La capacidad del condensador es la capacidad mutua de sus armaduras.

Capacidad mutua

«La capacidad mutua C de dos conductores depende de sus formas, dimensiones y disposición mutua».





Según la forma de las armaduras el condensador puede denominarse: planos, esféricos, cilíndricos, ...

CONDENSADOR PLANO

Es aquel dispositivo formado por dos placas conductoras dispuestas paralelamente, con igual magnitud de carga pero con signos diferentes. La distancia entre las placas debe ser relativamente menor comparado con las dimensiones de la placa con el fin de obtener un campo eléctrico homogéneo entre las placas.

La capacidad eléctrica C de un condensador es directamente proporcional al área A de una de las placas e inversamente proporcional a la distancia "d" de separación entre las placas.

$$\boxed{C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)} \qquad \ldots(15.28)$$

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m}} \qquad \ldots(15.29)$$

La diferencia de potencial entre las armaduras de un condensador plano es igual al producto de la intensidad de campo eléctrico, por la distancia de separación entre las placas:

$$\boxed{V = Ed} \qquad \ldots(15.30)$$

La energía almacenada por un condensador es igual al semiproducto de la capacidad del condensador, por el cuadrado de la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

$$\boxed{W = \frac{1}{2}CV^2} \qquad \ldots(15.31)$$

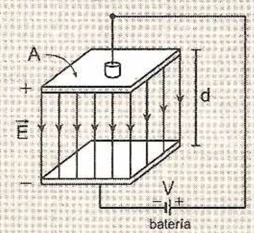
Reemplazando (15.27) en (15.31), tenemos:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}qV} \qquad \ldots(15.32)$$

Reemplazando (15.26) en (15.31) tenemos:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)} \qquad \ldots(15.33)$$

Condensador plano



$C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$

C: capacidad mutua (F)
A: área (m^2)
d: distancia (m)
ε_0: constante eléctrica (F/m)

DIELÉCTRICOS

Se denomina "dieléctrico" toda sustancia que ofrece una gran dificultad al desplazamiento de las cargas

eléctricas a través de su masa. Estrictamente vienen a ser toda sustancia, que no posee cargas eléctricas libres, de tal manera que cuando un dieléctrico es instalado entre las placas de un condensador los valores de la capacidad, intensidad de campo y diferencia de potencial son alterados.
Todo dieléctrico es identificado por un número (adimensional) que es característica de cada material, denominado constante dieléctrica ε, donde $\varepsilon \geq 1$.

Constante dieléctrica

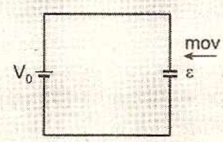
Sustancia	ε
Aire	1,0
Ebonita	2,7
Cuarzo	4,5
Vidrio	5,0
Alcohol etílico	27,0
Agua (pura)	81,0

Formas de colocar un dieléctrico

I. Sin desconectar el condensador de la fuente (batería).
Características:
- La diferencia de potencial entre las placas del condensador permanece constante, $V = V_0$.
V_0: sin dieléctrico; V: con dieléctrico
- La capacidad aumenta, $C = \varepsilon C_0$
C_0: sin dieléctrico; C: con dieléctrico
- El módulo de la carga aumenta, $q = \varepsilon q_0$
q_0: sin dieléctrico; q: con dieléctrico.

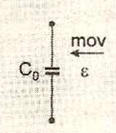
II. Desconectando el condensador de la fuente.
Características:
- La carga almacenada permanece constante, $q = q_0$
q_0 : sin dieléctrico; q: con dieléctrico
- La capacidad aumenta, $C = \varepsilon C_0$
C_0 : sin dieléctrico; C: con dieléctrico
- La diferencia de potencial entre las placas del condensador disminuye,
$V = \dfrac{V_0}{\varepsilon}$; $e \geq 1$
V_0: sin dieléctrico; V: con dieléctrico

Con la fuente



Sin dieléctrico	Con dieléctrico
V_0	$V = V_0$
C_0	$C = \varepsilon C_0$
q_0	$q = \varepsilon q_0$

Sin fuente



Sin dieléctrico	Con dieléctrico
q_0	$q = q_0$
C_0	$C = \varepsilon C_0$
V_0	$V = \dfrac{V_0}{\varepsilon}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar la capacidad eléctrica de una esfera conductora de radio 18 cm.

Resolución:
La capacidad eléctrica de una esfera conductora es directamente proporcional al radio de la esfera.

$$C = \frac{R}{k} \Rightarrow C = \frac{18\times 10^{-2}}{9\times 10^{9}}$$

$\Rightarrow C = 2\times 10^{-11}$ F
$\therefore C = 20$ pF

2. Cuando una esfera conductora recibe una carga de 40 pC el potencial eléctrico se incrementa en 0,25 V. Determinar el radio de la esfera.

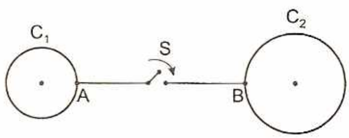
Resolución:
De la definición de capacidad eléctrica:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow C = \frac{40}{0,25} = 160 \text{ pF}$$

La capacidad eléctrica de una esfera conductora es directamente proporcional al radio de la esfera:

$R = kC \Rightarrow R = 9\times 10^{9}(160\times 10^{-12})$
$\Rightarrow R = 1,44$ m $\quad \therefore R = 144$ cm

3. Dos esferas conductoras de capacidad eléctrica $C_1 = 1$ μF y $C_2 = 3$ μF, se encuentran cargadas con magnitud $q_1 = 50$ μC y $q_2 = 30$ μC respectivamente. Los cuerpos están conectados por medio de un alambre. Considerando que la distancia de separación es muy grande entre los cuerpos, hallar la carga final en cada esfera cuando se cierra el interruptor S.



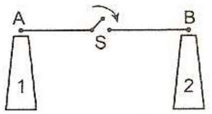
Resolución:
Al cerrar la llave S se establece un flujo de cargas eléctricas (convencionalmente positivas) de mayor

a menor potencial eléctrico. El flujo de cargas termina cuando los potenciales en las esferas alcanzan igual valor.

$V_A = V_B \Rightarrow \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \dfrac{Q_1}{1} = \dfrac{Q_2}{3} \Rightarrow Q_2 = 3Q_1$

Siendo Q_1 y Q_2 las cargas finales en cada esfera.
Del principio de conservación de las cargas eléctricas:
$q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2$
$50 + 30 = Q_1 + 3Q_1 \Rightarrow Q_1 = 20\ \mu C$
$\Rightarrow Q_1 = 20\ \mu C \ \wedge\ Q_2 = 60\ \mu C$

4. Dos cuerpos conductores de capacidad eléctrica $C_1 = 40\ \mu F$ y $C_2 = 20\ \mu F$, se encuentran cargados con magnitud $Q = 30\ \mu C$ y $q = 0$, respectivamente. Los cuerpos están conectados por medio de un alambre. Considerando que la distancia de separación es muy grande entre los cuerpos, hallar la carga final en cada cuerpo cuando se cierra el interruptor S.



Resolución:

Cuando cerramos la llave S, se establece un flujo de cargas eléctricas (convencionalmente positivas) de mayor a menor potencial eléctrico. El flujo de cargas cesa cuando los potenciales eléctricos en los puntos A y B alcanzan igual valor:

$V_A = V_B;\ \dfrac{Q'}{C_1} = \dfrac{q'}{C_2}$

Reemplazando datos: $Q' = 2q'$ ...(1)
Conservación de las cargas eléctricas:
$Q + q = Q' + q' \Rightarrow 30 + 0 = 2q' + q'$
Resolviendo: $q' = 10\ \mu C \ \wedge\ Q' = 20\ \mu C$

5. Se tiene 8 gotitas esféricas de mercurio, iguales, de capacidad eléctrica 3 μF cada uno. ¿Cuál será la capacidad de la gota grande que se obtiene como resultado de la unión de estas gotitas?

Resolución:

Sea "m" la masa de cada gotita y M la masa de la gota grande.
Principio de conservación de la masa: $M = 8m$...(1)
Sea "a" el radio de cada gotita y "b" el radio de la gota grande.

En (1): $D\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)b^3 = 8D\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)a^3 \Rightarrow b = 2a$ ...(2)

Capacidad de cada gotita: $C_1 = \dfrac{a}{k} = 3\ \mu F$ ...(3)

Capacidad de la gota grande: $C = \dfrac{b}{k} = \dfrac{2a}{k} = 2\,C_1$
$\Rightarrow C = 2(3\ \mu F)$ $\quad\therefore C = 6\ \mu F$

6. Un condensador plano tiene capacidad eléctrica igual a 5 μF. Determinar su capacidad si el área de las placas se cuadriplica y la distancia de separación entre las placas se reduce a la tercera parte.

Resolución:

La capacidad inicial es: $C_1 = \varepsilon_o\left(\dfrac{A}{d}\right) = 5\ \mu F$

La capacidad final es: $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0(4A)}{\dfrac{d}{3}} = 12\left(\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}\right)$

Se deduce que: $C_2 = 12C_1$ $\quad\therefore C_2 = 60\ \mu F$

7. Un condensador cuya capacidad es de 25 μF puede almacenar una energía de 2 μJ. Determinar el valor absoluto de la carga que almacena cada una de sus armaduras.

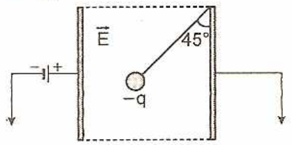
Resolución:

La energía almacenada es:

$W = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q^2}{C}\right) \Rightarrow q^2 = 2WC \Rightarrow q^2 = 2(2)(25)$

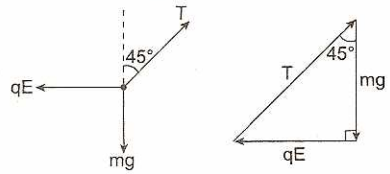
$\therefore q = 10\ \mu C$

8. La diferencia de potencial, entre las armaduras de un condensador que se encuentran separadas 0,1 m, es igual a 3000 voltios. Una esferita de masa 3,0 gramos y carga $-q$ se encuentra sujeto a una de las placas mediante un hilo de seda. Hallar q. ($g = 10$ N/kg)



Resolución:

Realizamos el DCL de la esfera cargada:

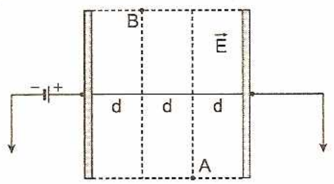


De la condición de equilibrio, la fuerza resultante es igual a cero. Del triángulo de fuerzas:
$qE = mg$ ...(1)
Cálculo de la intensidad del campo homogéneo:

$V = Ed \Rightarrow E = \dfrac{V}{d} \Rightarrow E = 3 \times 10^4$ N/C

Reemplazando datos en (1): $q = 1\ \mu C$

9. La diferencia de potencial entre las placas de un condensador es 240 kV. Determinar el trabajo realizado por un agente externo para trasladar una carga $q = 50\ \mu C$, desde el punto A hasta la posición B.



Resolución:

Diferencia de potencial entre las placas del condensador, es igual al producto de la intensidad del campo homogéneo E por la distancia entre las placas:

$\Delta V = Ed_1$

$240 = E(3d)$

$Ed = 80\ kV$ ...(1)

Diferencia de potencial entre los puntos A y B:

$V_B > V_A \Rightarrow (V_B - V_A) = Ed = 80\ kV$

Trabajo realizado para trasladar la carga "q":

$W_{A\to B} = q(V_B - V_A)$ ...(2)

Reemplazando datos en (2):

$W_{A\to B} = (50 \times 10^{-6})(80\,000) \quad \therefore\ W_{A\to B} = +4\ J$

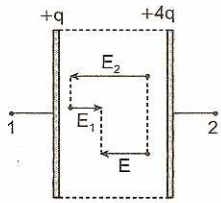
10. En una de las placas de un condensador plano de capacidad C hay una carga +q y en la otra, una carga +4q. Hallar la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

Resolución:

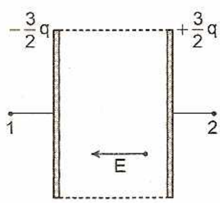
Añadamos a cada placa la carga q' = −5q/2 (semisuma de las cargas de las placas tomadas con signo contrario). Entonces el condensador resultará cargado normalmente y las cargas de las placas serán ±3q/2. La diferencia de potencial entre las placas será:

$$V = \frac{\text{carga}}{\text{capacidad}} = \frac{3q}{2C}$$

Pero los campos de las cargas 3q/2 de las placas dentro del condensador se compensan uno a otro. Por consiguiente, las cargas que hemos añadido no cambian el campo entre las placas ni la diferencia de potencial en el condensador.

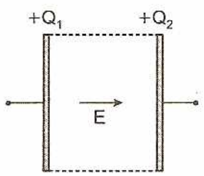


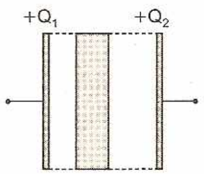
Sistema real



Sistema equivalente

11. En un condensador plano una armadura tiene carga $Q_1 = +70\ \mu C$ y la otra, la carga $Q_2 = +10\ \mu C$. Dentro del condensador, y paralela a las armaduras, se coloca una placa metálica sin carga. ¿Qué magnitud de carga se inducirá en las superficies izquierda y derecha de la placa?





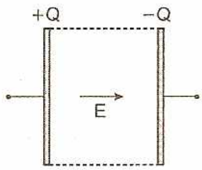
Resolución:

En principio le daremos la forma natural de un condensador, mediante el siguiente artificio: a cada placa le añadimos la carga $q' = -(Q_1 + Q_2)/2$ (semisuma de las cargas de las placas tomada con signo contrario). Entonces el condensador resultará cargado con la siguiente magnitud:

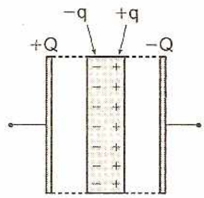
$$Q = \frac{(Q_1 - Q_2)}{2} \text{ y signos diferentes.}$$

Luego: $Q = 30\ \mu C$

Cuando colocamos el metal entre las placas del condensador, la placa metálica se polariza, por consiguiente: $q = Q = \frac{Q_1 - Q_2}{2} = 30\ \mu C$

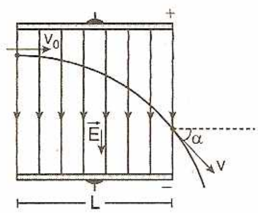


Sistema equivalente



Metal polarizado ±q

12. Una partícula penetra en un condensador plano paralelamente a sus láminas con una velocidad igual a $V_0 = 1000$ m/s. La partícula tiene una masa $m = 10^{-8}$ kg y carga eléctrica $q = 200\ \mu C$. Hallar el ángulo α que forma la velocidad de la partícula, cuando sale del condensador, respecto de la horizontal; sabiendo que la intensidad del campo eléctrico es E = 1000 N/C, además: L = 0,05 m. Desprecie el campo gravitatorio.



Resolución:

En el eje X, la fuerza resultante es igual a cero, sobre la partícula, entonces se cumple el MRU: $d = v_x t$

$\Rightarrow L = v_0 t \Rightarrow t = \frac{L}{v_0}$ ...(1)

Cálculo de la aceleración en el eje Y, de la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{F_{(\text{resultante})}}{\text{masa}} = \frac{qE}{m} \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m} \quad ...(2)$$

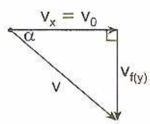
Cálculo de la velocidad final en el eje Y:

$v_{f(y)} = v_{0(y)} + a_y t$ ...(3)

Reemplazando (1) en (2) en (3): $v_{f(y)} = \frac{qEL}{mv_0}$ ...(4)

Cálculo del ángulo α,

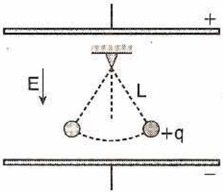
$$\tan\alpha = \frac{v_{f(y)}}{v_x} = \frac{qEL}{mv_0^2}$$



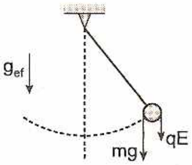
$$\alpha = \arctan\left(\frac{qEL}{mv_0^2}\right)$$

De los datos: $\alpha = 45°$

13. Una esferita de masa "m" y de carga +q está suspendida de un hilo delgado de longitud L, dentro de un condensador plano de láminas horizontales. La intensidad del campo del condensador es igual a E, las líneas de fuerza están dirigidas hacia abajo. Se pide encontrar el período de oscilaciones de este péndulo.



Resolución:



El período de un péndulo depende de la longitud del hilo y de la "gravedad efectiva" del campo donde se encuentra oscilando.

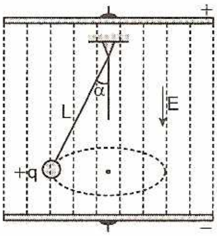
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}} \qquad ...(1)$$

La esferita se mueve por acción de dos fuerzas "mg" y "qE" constantes en módulo, dirección y sentido, por consiguiente se puede determinar un campo de fuerzas equivalente al sistema. Cálculo de la gravedad efectiva:

2.ª ley de Newton: $g_{ef} = \dfrac{F_{(resultante)}}{masa} = \dfrac{mg + qE}{m}$ ...(2)

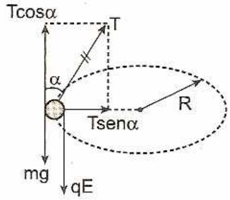
Reemplazando (2) en (1): $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g + \dfrac{qE}{m}}}$

14. Dentro de un condensador plano cuyo campo tiene una intensidad igual a E, gira uniformemente una esferita de masa "m" y carga eléctrica +q, suspendida de un hilo de longitud L. El ángulo de inclinación del hilo respecto a la vertical es igual a α. Hallar la velocidad angular de la esferita.



Resolución:

En principio la esferita se mueve en una superficie equipotencial eléctrica y gravitatoria, describiendo una trayectoria circular. Haciendo el DCL de la esferita y aplicando las leyes de Newton: $\Sigma F_{(radiales)} = ma_C$



$T\text{sen}\alpha = m\omega^2 R$ ...(1)

Pero: $R = L\text{sen}\alpha$

En (1): $T = m\omega^2 L$ ...(2)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg + qE$ ...(3)

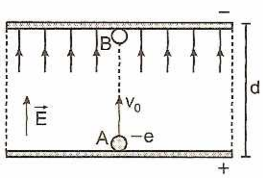
Reemplazando (2) en (3): $m\omega^2 L\cos\alpha = mg + qE$

Despejando tenemos: $\omega = \sqrt{\left(q + \dfrac{qE}{m}\right)\dfrac{\sec\alpha}{L}}$

15. En un condensador de placas planas paralelas, en el vacío, se dispara un electrón de la placa positiva hacia la negativa. Si la diferencia de potencial entre las placas es de 100 V y la separación entre ellas es de 1 cm, ¿cuál debe ser su energía cinética inicial para que el electrón apenas llegue a la placa negativa?

Carga elemental: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

Resolución:



Cuando se trabaja a nivel de partículas elementales se desprecia la acción del campo gravitatorio.

Como la única fuerza que actúa sobre el electrón, es la fuerza eléctrica eE, que es una fuerza conservativa, entonces se conservará la energía mecánica en el tiempo.

$E_{M(A)} = E_{M(B)}$; tomando como línea de referencia la placa positiva.

$$E_{P(A)} + E_{k(A)} = E_{P(B)} + E_{k(B)}$$

$0 + E_{k(A)} = -(-e)Ed + 0$; la energía potencial en el punto B es negativa.

Luego: $E_{k(A)} = eEd = e\Delta V$

Reemplazando valores:

$E_{k(A)} = 1{,}6 \times 10^{-19}(100)$

$\therefore\ E_{k(A)} = 1{,}6 \times 10^{-17}$ J

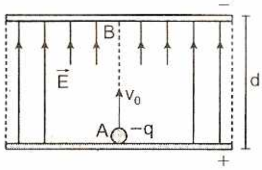
Debemos recordar que la diferencia de potencial entre las placas de un condensador es:

$\Delta V = Ed = 100$ V

16. De la placa positiva de un condensador plano, cuyas placas están sometidas a una diferencia de potencial V, se lanza una partícula de masa "m"

y carga eléctrica $-q$, en la dirección y sentido del campo. Determinar la mínima velocidad U_0 con que se debe lanzar la partícula para que con las justas llegue a la otra placa. Desprecie la fuerza gravitatoria.

Resolución:



Tomando como referencia la placa positiva, la energía potencial eléctrica de la partícula en A es cero: $E_{P(A)} = 0$

La energía potencial en el punto B es negativo:

$E_{P(B)} = -(-q)Ed \Rightarrow E_{P(B)} = qEd$ ...(1)

Como la única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza electrostática, que es una fuerza conservativa, se conservará su energía mecánica es decir: $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

$E_{P(A)} + E_{k(A)} = E_{P(B)} + E_{k(B)}$

$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}mU_0^2 = qEd + 0$

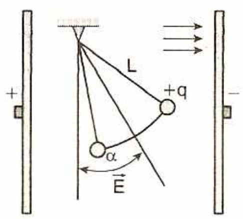
Luego: $\sqrt{\frac{2(Ed)q}{m}}$ ...(2)

Pero por otro lado sabemos que:

$V = Ed$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2): $U_0 = \sqrt{\frac{2Vq}{m}}$

17. Una esferita de masa "m" y de carga "q" está suspendida de un hilo delgado de longitud L, dentro de un condensador plano de láminas verticales, la intensidad del campo del condensador es igual a E, las líneas de fuerza están dirigidas hacia la derecha. Se pide encontrar el período de las oscilaciones de este péndulo.

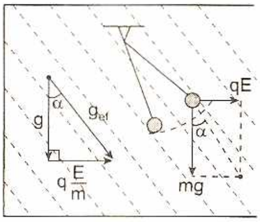


Resolución:

El período de un péndulo depende de la longitud del hilo y de la gravedad efectiva del campo donde se encuentra oscilando.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}}$ ...(1)

La esferita se mueve por acción de dos fuerzas mg y qE constantes en módulo, dirección y sentido, por consiguiente se puede determinar un campo de fuerzas equivalente al sistema. La gravedad efectiva es la suma vectorial de la aceleración de la gravedad terrestre y la aceleración del campo electrostático y su dirección coincide con la del hilo en la posición de equilibrio.



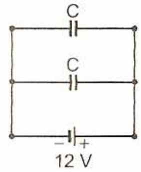
$g_{ef} = \frac{F_{(resultante)}}{masa} = \sqrt{g^2 + (qE/m)^2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1), tenemos:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + (qE/m)^2}}}$

18. Dos condensadores de placas paralelas, cada uno con una capacidad de 2μF, están conectados en paralelo a través de una batería de 12 V. Determinar la energía total almacenada en los condensadores (en μJ)

Resolución:



$C = 2\ \mu F$; $V = 12$ voltios

$C_{eq} = 2C = 4 \times 10^{-6}$ F

$W = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2}(4 \times 10^{-6})(12)^2$

$W = 288 \times 10^{-6}$ J

$\therefore W = 288\ \mu J$

19. Un condensador de 100 μF se carga a 2500 V. ¿Qué cantidad de hielo a 0 °C, se puede fundir si toda la energía del condensador se emplea para ello?

Resolución:

$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(10^{-4})(2500)^2$

$W = 312{,}5\ J = (312{,}5\ J)\left(\frac{0{,}24\ cal}{1\ J}\right) = 75\ cal$

$W = mL_f$ (Energía $\cong$ calor)

$75\ cal = m\left(\frac{80\ cal}{g}\right)$

$m = 0{,}9375$ gramos

$\Rightarrow m = 0{,}94$ gramos

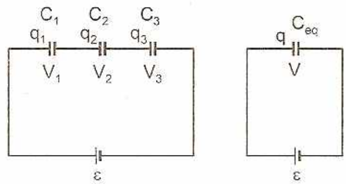
ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Se denomina capacidad equivalente a aquél único condensador capaz de reemplazar a un conjunto de condensadores, acumulando la misma cantidad de energía que el conjunto de condensadores.

El condensador equivalente C_{ep} debe encontrarse sometido a la misma diferencia de potencial V que los dos puntos que limitan al conjunto de condensadores reemplazados.

En serie

Conectados unos a continuación de otros con el objetivo de compartir la diferencia de potencial de la fuente (batería).



Obsérvese que por inducción la fuente hace circular la carga "q" por todos los condensadores,

$$\boxed{q = q_1 = q_2 = q_3} \qquad \ldots(15.34)$$

La caída de potencial en la fuente V es igual a la suma de caídas de potencial en cada condensador,

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + V_3} \qquad \ldots(15.35)$$

Pero: $V_1 = \dfrac{q}{C_1}$; $V_2 = \dfrac{q}{C_2}$; $V_3 = \dfrac{q}{C_3}$;

$$\boxed{V = \frac{q}{C_{eq}}} \qquad \ldots(15.36)$$

Reemplazando (15.36) en (15.35) tenemos:

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \qquad \ldots(15.37)$$

En paralelo

Los condensadores se conectan a una misma diferencia de potencial V con el objetivo de compartir la carga "q" que entrega la fuente (batería).

La carga total "q" que entrega la fuente es igual a la suma de las cargas que almacena cada condensador, del principio de conservación de las cargas eléctricas:

$$\boxed{q = q_1 + q_2 + q_3} \qquad \ldots(15.38)$$

La caída de tensión en la fuente V es igual a las caídas de tensión en cada condensador:

$$\boxed{V = V_1 = V_2 = V_3} \qquad \ldots(15.39)$$

La carga acumulada en cada condensador es directamente proporcional a su capacidad:

$q_1 = VC_1$; $q_2 = VC_2$; $q_3 = VC_3$

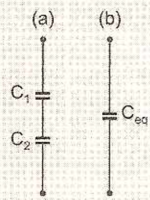
$$\boxed{q = VC_{eq}} \qquad \ldots(15.40)$$

Reemplazando (15.40) en (15.38) tenemos:

$VC_{eq} = VC_1 + VC_2 + VC_3$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3} \qquad \ldots(15.41)$$

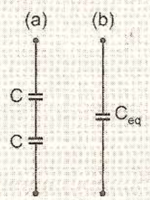
I. Dos condensadores



$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$$

Capacidad equivalente para dos condensadores en serie.

II. Dos condensadores iguales

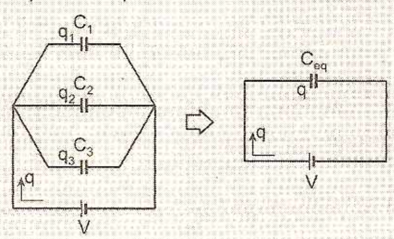


$$C_{eq} = \frac{C}{2}$$

La capacidad equivalente es la mitad de uno de los condensadores.

Arreglo en paralelo

La capacidad equivalente es:



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

PUENTE WHEATSTONE

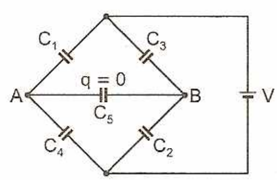


Fig. 15.2

En esta disposición especial de los cinco condensadores, figura 15.2, si se cumple que:

$$\boxed{C_1C_2 = C_3C_4} \quad \ldots(15.42)$$

Entonces el potencial eléctrico en los puntos A y B son iguales:

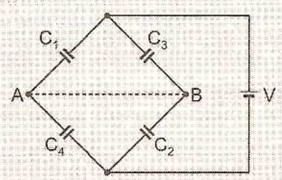
$$V_A = V_B \Rightarrow (V_A - V_B) = 0$$

Por consiguiente el capacitor C_5 entre los puntos A y B no almacena carga.

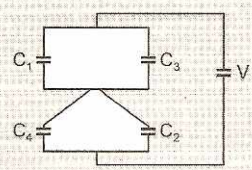
$$\boxed{q_5 = C_5(V_A - V_B) = 0} \quad \ldots(15.43)$$

esto quiere decir que el condensador C_5 puede retirarse, o sea juntar los puntos A y B.

Sale el quinto



Uniendo A y B tenemos:



TEOREMA DE LA TRAYECTORIA

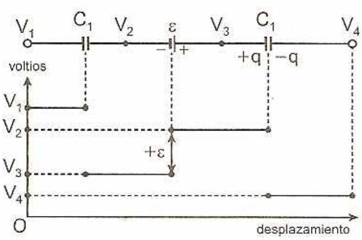


Fig. 15.3

Consiste en el desplazamiento imaginario de una carga de prueba convencionalmente positivo a través del tramo de un circuito eléctrico.

La carga de prueba al atravesar el condensador C_1 pierde energía esto significa que se desplaza de mayor a menor potencial. Cuando la carga de prueba atraviesa la batería gana energía $+\varepsilon$ cuando se desplaza del polo negativo al polo positivo, en caso opuesto perderá $-\varepsilon$. Cuando pasa a través del capacitor C_2 la carga de prueba vuelve a perder energía. La caída de potencial a través del condensador es igual a: $\dfrac{q}{C}$.

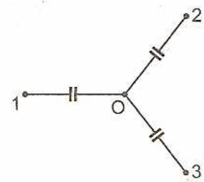
Respecto del circuito mostrado en la figura 15.3; salimos del punto 1 y llevamos la carga "q" hasta el punto 4.

$$V_1 - \frac{q}{C_1} + \varepsilon - \frac{q}{C_2} = V_4$$

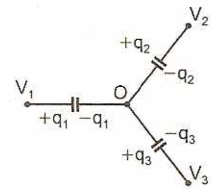
LEYES DE KIRCHHOFF

En 1848, el físico alemán Gustavo Roberto Kirchhoff establece reglas generales para el cálculo de circuitos eléctricos complejos que determinan íntegramente su estado eléctrico, aportando de esta manera dos leyes de gran trascendencia en la electricidad. Analizamos a continuación para el caso de los condensadores.

1.ª ley de nudos



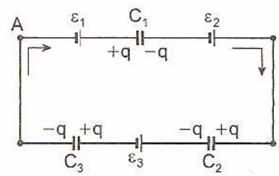
Circuito sin carga
Fig. 15.4.a



Circuito sin carga
Fig. 15.4.b

1. Como bien sabemos, entre las placas de un condensador no hay flujo de cargas eléctricas. En la figura 15.4.a se muestra un sistema de condensadores sin carga, esto significa que la carga neta en el nudo es cero (eléctricamente neutro).
2. Cuando se establece una diferencia de potencial entre los puntos 1; 2 y 3 se consigue un estado de polarización entre las placas del condensador. Pero, por principio de conservación de las cargas eléctricas la carga neta en el nudo debe ser nula, entonces:
   $-q_1 + q_2 + q_3 = 0$
   Por principio de conservación de las cargas eléctricas: "La carga neta en un nudo es cero".

2.ª ley de voltajes



1. En todo circuito simple, los capacitores acumulan igual cantidad de carga independiente de sus capacidades.
2. Tomando como referencia el punto A, llevamos la carga de prueba "q" en sentido horario. Si la carga de prueba imaginariamente pasa de la placa positiva a la negativa de un condensador pierde su energía o potencial eléctrico en: $-\dfrac{q}{C}$ (*joules/coulomb*)
3. En el caso que la carga de prueba pasa imaginariamente de la placa negativa a la placa positiva su potencial se incrementa en: $+\dfrac{q}{C}$.
4. Teorema de la trayectoria: circuito cerrado
   $$V_A + \varepsilon_1 - \frac{q}{C_1} + \varepsilon_2 - \frac{q}{C_2} - \varepsilon_3 - \frac{q}{C_3} = V_A.$$

Otro modo: $\varepsilon_1 - \dfrac{q}{C_1} + \varepsilon_2 - \dfrac{q}{C_2} - \varepsilon_3 - \dfrac{q}{C_3} = 0$

«La suma de caídas de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado en una red es nula».

Otro modo: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \dfrac{q}{C_1} + \dfrac{q}{C_2} + \dfrac{q}{C_3}$

«Suma algebraica de fem es igual a la suma de caídas de potencial en los condensadores»

$$\sum \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{C_i}$$

5. La ecuación anterior se justifica por el principio de conservación de la energía:
La energía entregada por la fem es almacenada por los capacitores.

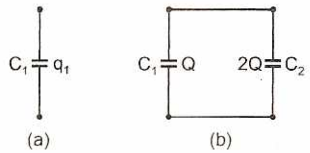
$$E_{entregada} = E_{almacenada}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un capacitor de capacitancia 2000 μF tiene una carga de 900 mC y se halla inicialmente desconectado. Si se conecta en paralelo con otro capacitor inicialmente descargado, cuya capacitancia es el doble del anterior, la carga final (en μC) almacenada en este último es:

Resolución:

$C_1 = 2 \times 10^{-3}$ F; $q_1 = 9 \times 10^{-4}$ C
$C_2 = 4 \times 10^{-3}$ F



Conexión en paralelo en (b)
Principio de conservación de la carga eléctrica

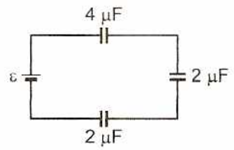
$q_1 = Q + 2Q \Rightarrow 9 \times 10^{-4} = 3Q$

$Q = 3 \times 10^{-4}$ C

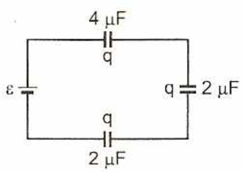
$\Rightarrow 2Q = 6 \times 10^{-4}$ C $\Rightarrow 2Q = 600 \times 10^{-6}$ C

$\therefore\ 2Q = 600\ \mu C$

2. En el circuito mostrado en la figura, la diferencia de potencial en el capacitor de 4 μF es de 2 V. Determinar el voltaje de la fuente (en V).



Resolución:



$q = CV \Rightarrow q = (4 \times 10^{-6})(2) = 8 \times 10^{-6}$ C

$\varepsilon = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{q}{C_1} + \dfrac{q}{C_2} + \dfrac{q}{C_3}$

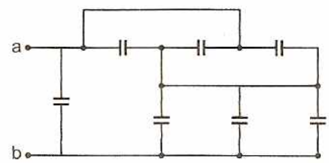
$$\varepsilon = \frac{8 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} + \frac{8 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} + \frac{8 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}}$$

$\varepsilon = 2 + 4 + 4 = 10$ V

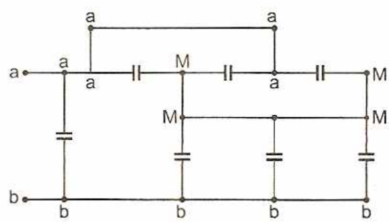
$\therefore\ \varepsilon = 10$ voltios

En serie los capacitores almacenan igual cantidad de carga.

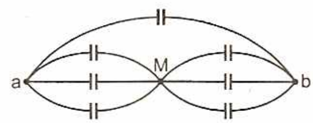
3. En el sistema de capacitores mostrados en la figura, hallar la capacitancia equivalente entre los terminales "a" y "b", si la capacitancia de cada uno de los capacitores es 2 μF.



Resolución:



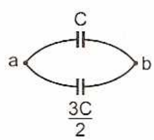
Uniendo puntos de igual potencial



$C_{eq} = C + \dfrac{3}{2}C = \dfrac{5}{2}C$

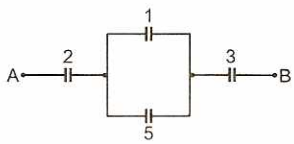
$C_{eq} = \dfrac{5}{2}(2)$

$C_{eq} = 5\mu F$



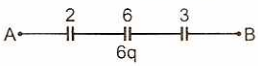
4. En el circuito mostrado, el condensador de 1 μF, almacena en sus placas una carga de magnitud

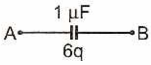
$q = 2\ \mu C$. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos A y B. La capacidad se expresa en μF.



Resolución:

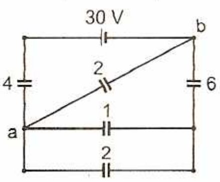
Los condensadores de 1 y 5 μF están conectados en paralelo, entonces si 1 μF almacena q el de 5 μF almacena 5q y el condensador equivalente de estos dos almacena la suma, es decir, 6q. Reduciendo el circuito tenemos:

I) 

II) 

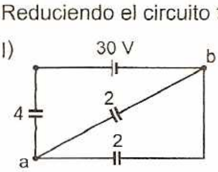
En un circuito en serie todos los condensadores almacenan igual magnitud de carga, en este caso 6q.
Pero: $6q = 12\ \mu C$.
En (II):
$q_{neta} = C_{eq}V_{AB} \Rightarrow 12 = (1)V_{AB} \quad \therefore V_{AB} = 12$ voltios

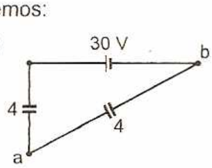
5. En el circuito eléctrico mostrado, calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b. La capacidad eléctrica se expresa en μF.



Resolución:

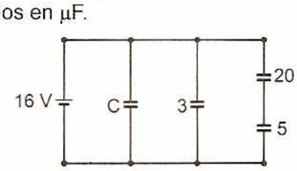
Reduciendo el circuito tenemos:

I) 

II) 

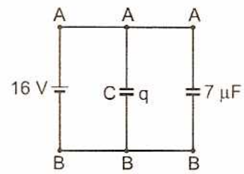
En el circuito (II) la caída de potencial es igual en cada condensador de 4 μF, entonces la diferencia de potencial entre a y b es: 15 voltios.

6. Del sistema de condensadores mostrado, determine la carga en el condensador C, si la capacidad equivalente es 12 μF. Los condensadores están expresados en μF.



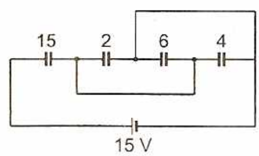
Resolución:

Reduciendo el circuito, obtenemos la capacidad equivalente:
$12 = C + 7 \Rightarrow C = 5\ \mu F$

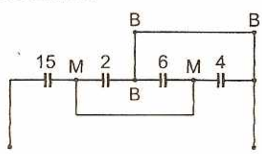


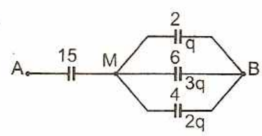
La carga acumulada por C es: $q = CV_{AB}$
$q = (5)(16)$
$\therefore q = 80\ \mu C$

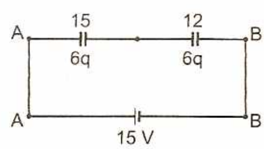
7. En el sistema capacitivo calcule la carga almacenada en el condensador de 6 μF. Todas las capacidades están dadas en μF.



Resolución:

a. 

b. 

c. 

Reducimos el circuito, uniendo los puntos de igual potencial eléctrico, figura (a).

Los condensadores de 2; 4 y 6 F están conectados en paralelo, por consiguiente la magnitud de carga almacenada será: q; 2q y 3q respectivamente, figura (b).

Siguiendo los pasos a); b) y c) obtenemos la capacidad equivalente

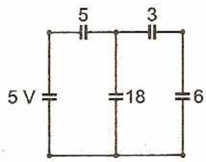
$C_{eq} = \frac{20}{3}\mu F$

La carga neta es: $q_{neta} = C_{eq} = V_{AB}$

$6q = \frac{20}{3}(15) \Rightarrow q = \frac{50}{3}\mu C$

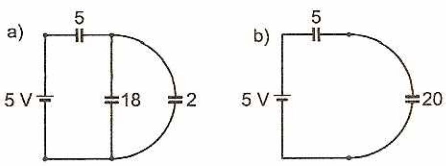
$\therefore 3q = 50\ \mu C$

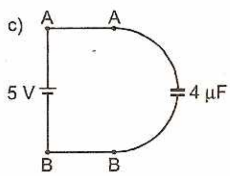
8. Halla la energía almacenada por el sistema de condensadores, en la figura mostrada. Todos los capacitores se dan en μF.



Resolución:

Siguiendo los pasos a), b) y c) obtenemos la capacidad equivalente: $C_{eq} = 4\ \mu F$

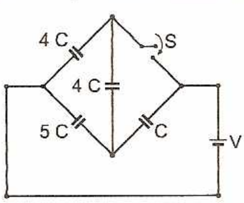




La energía almacenada por el sistema es:

$W = \frac{1}{2} C_{eq} V_{AB}^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(4)(5)^2 \quad \therefore W = 50\ \mu J$

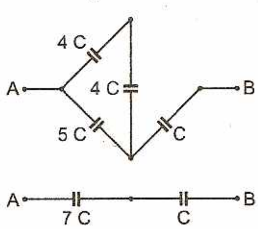
9. Si al cerrar el interruptor S la capacidad equivalente del sistema de capacitores aumenta en 45 μF.



Resolución:

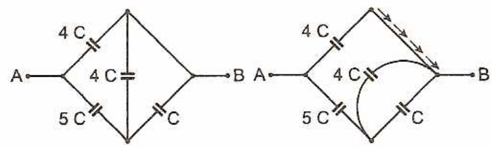
a. S: ABIERTO

Reduciendo el circuito obtenemos la capacidad equivalente: $C_1 = \frac{7}{8}C$



b. S: CERRADO

Reduciendo el circuito obtenemos la capacidad equivalente. $C_2 = \frac{13}{2}C$



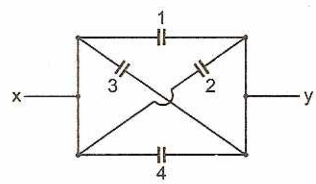
De la condición del problema:

$C_2 - C_1 = 45\ \mu F$

$\frac{45}{8}C = 45\ \mu F$

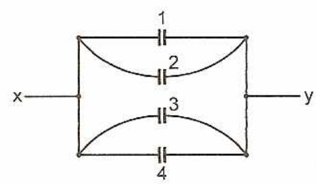
$\therefore C = 8\ \mu F$

10. En el circuito mostrado, determine la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y". Todos los condensadores se dan en μF.

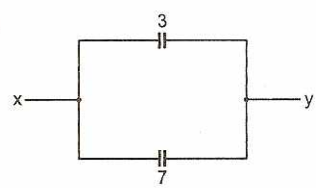


Resolución:

a.



b.



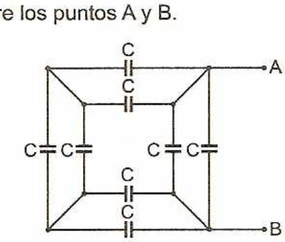
Analizando el circuito nos damos cuenta que los condensadores de 1 y 2 μF están en paralelo, del mismo modo los condensadores de 3 y 4 μF, como muestra la figura (a).

Siguiendo los pasos (a) y (b) deducimos que los cuatro condensadores están conectados en paralelo.

$C_{eq} = 1 + 2 + 3 + 4$

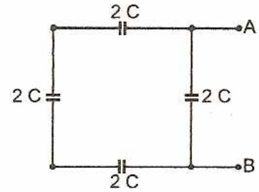
$\therefore C_{eq} = 10\ \mu F$

11. En el circuito mostrado la capacidad de cada condensador es $C = 3\ \mu F$. Halle la capacidad equivalente entre los puntos A y B.

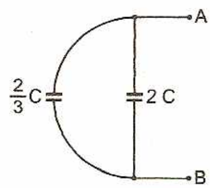


Resolución:

a.



b.

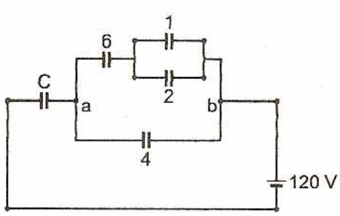


Analizando el circuito, logramos reducir los condensadores que están conectados en paralelo, de par en par.

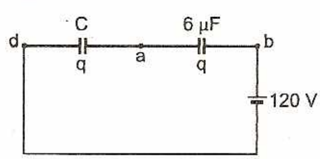
Siguiendo los pasos (a) y (b) obtenemos la capacidad equivalente:

$$C_{eq} = \frac{2C}{3} + 2\,C \Rightarrow C_{eq} = \frac{8}{3}C \qquad \therefore C_{eq} = 8\ \mu F$$

12. Si la diferencia de potencial entre los puntos "a" y "b" es 90 V, hallar la capacidad eléctrica C del condensador. Los condensadores tienen capacidades en μF.



Resolución:



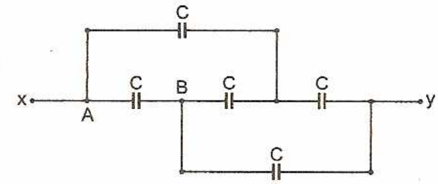
Reducimos el circuito previamente, tenemos dos condensadores C y 6 μF conectados en serie, es decir, almacenan igual magnitud de carga q: $q = C_1 V_{ab}$

$q = (6)(90) \Rightarrow q = 540\ \mu C$

La diferencia de potencial entre los puntos "a" y "d" es 30 V:

$$C = \frac{q}{V_{ad}} \Rightarrow C = \frac{540}{30} \qquad \therefore C = 18\ \mu F$$

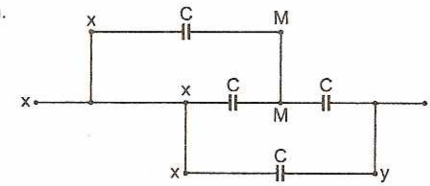
13. La figura muestra un sistema de condensadores. ¿Cuál será la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y" cuando se conecte un alambre conductor entre los puntos A y B? Todos los condensadores son iguales a C = 3 μF.



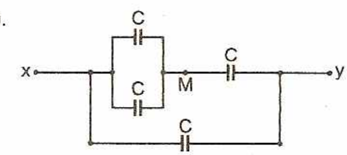
Resolución:

Al conectar un alambre conductor entre A y B se establece un corto circuito, es decir el condensador C entre A y B no almacena carga (no funciona). Entonces el circuito equivalente es:

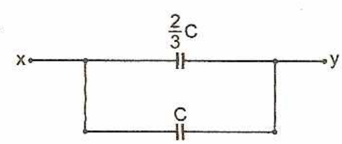
a.



b.



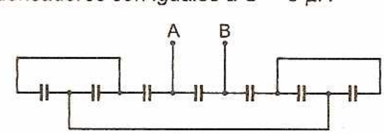
c.



Siguiendo los pasos (a), (b) y (c) obtenemos la capacidad equivalente:

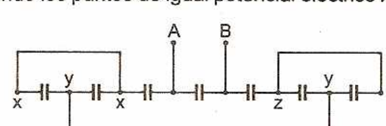
$$C_{eq} = \frac{5}{3}C \qquad\qquad C_{eq} = 5\ \mu F$$

14. En el sistema eléctrico mostrado, determinar la capacidad equivalente entre los puntos A y B. Los condensadores son iguales a C = 9 μF.

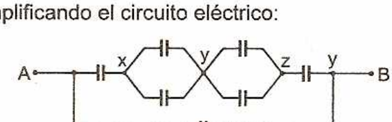


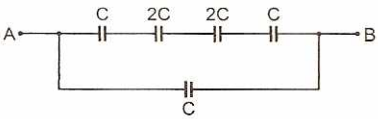
Resolución:

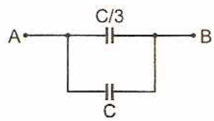
Uniendo los puntos de igual potencial eléctrico x; y; z.



Simplificando el circuito eléctrico:



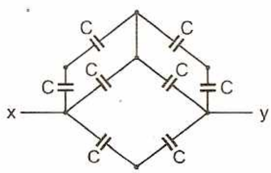




La capacidad equivalente es:

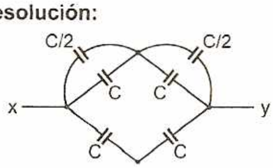
$C_{eq} = \frac{4}{3}C \Rightarrow C_{eq} = 12\ \mu F$

15. Halla la capacidad equivalente del sistema entre los terminales "x" e "y".
Todos los condensadores son iguales a $C = 12\ \mu F$.

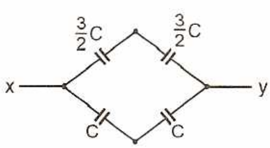


Resolución:

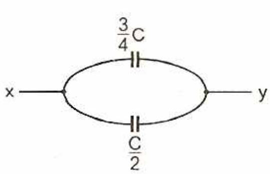
a.



b.



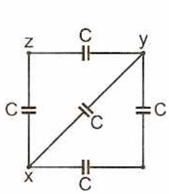
c.



Siguiendo los pasos (a), (b) y (c) obtenemos la capacidad equivalente:

$C_{eq} = \frac{5}{4}C \quad \therefore\ C_{eq} = 15\ \mu F$

16. Calcular la capacidad C de los condensadores, si se sabe que la capacidad equivalente entre "x" e "y" es 2 μF más que la capacidad equivalente entre "z" e "y".

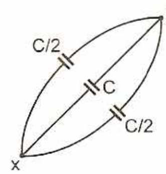


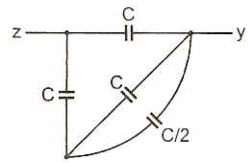
Resolución:

Cálculo de la capacidad equivalente entre "x" e "y":

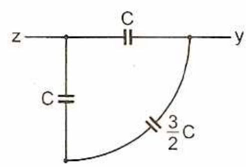
$C_{xy} = \frac{C}{2} + C + \frac{C}{2} \Rightarrow C_{xy} = 2\,C \qquad ...(1)$

Cálculo de la capacidad equivalente entre "z" e "y":





$C_{zy} = C + \frac{3}{5}C = \frac{8}{5}C \qquad ...(2)$



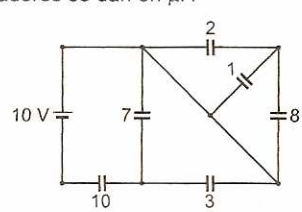
Pero: $C_{xy} = C_{zy} + 2\ \mu F \qquad ...(3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3) tenemos:

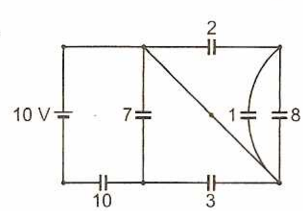
$2C = \frac{8}{5}C + 2\ \mu F$

$\therefore\ C = 5\ \mu F$

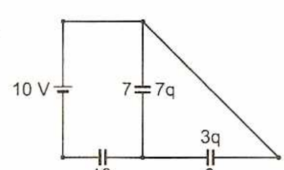
17. Hallar la carga en el capacitor de 3 μF. Todos los condensadores se dan en μF.



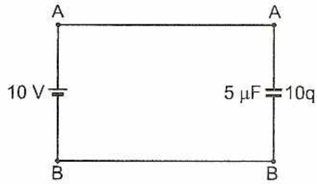
a.



b.



c.



Resolución:

Los condensadores de 1; 2 y 8 F están en corto circuito, es decir no almacenan cargas eléctricas, por consiguiente se pueden retirar y el sistema no se altera, como muestra la figura (b).

Siguiendo los pasos (a), (b) y (c) deducimos que la capacidad equivalente es:

$C_{eq} = 5\ \mu F$

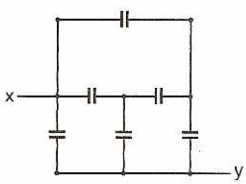
La carga neta es: $q_{neta} = C_{eq}V_{AB}$

$(10q) = (5)(10)$

$q = 5\ \mu C$

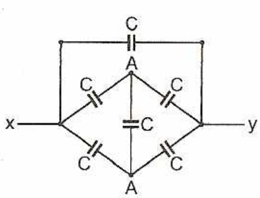
$\therefore 3q = 15\ \mu C$

18. Hallar la capacidad equivalente del sistema de condensadores mostrado en la figura. Todos los condensadores son iguales a $C = 4\ \mu F$.

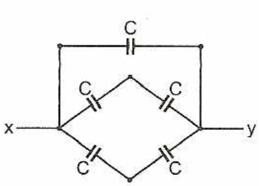


Resolución:

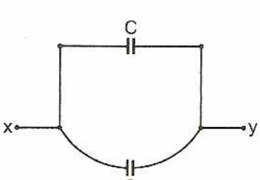
a.



b.



c.

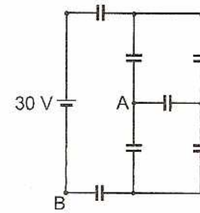


Analizando el circuito identificamos el efecto puente, retiramos imaginariamente el condensador que no almacena carga eléctrica, como indica el gráfico (b).

Siguiendo los pasos (a); (b) y (c) obtenemos la capacidad equivalente.

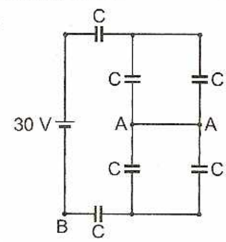
$C_{eq} = 2C \quad \therefore\ C_{eq} = 8\ \mu F$

19. En el circuito eléctrico mostrado halla la capacidad equivalente y la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Todas las capacidades son iguales a $C = 12\ \mu F$.

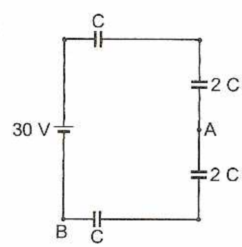


Resoluciones:

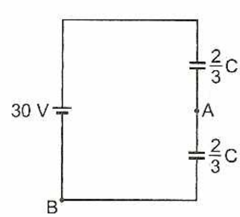
a.



b.



c.



Identificando el efecto puente retiramos imaginariamente el condensador que no almacena carga y unimos los puntos de igual potencial eléctrico como muestra el gráfico (a).

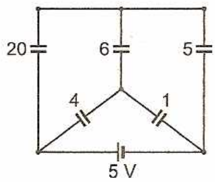
Siguiendo los pasos (a); (b) y (c) obtenemos la capacidad equivalente:

$$C_{eq} = \frac{C}{3} = 4\ \mu F$$

En el gráfico (c) la caída de potencial es igual en cada condensador de capacidad 2C/3, entonces la diferencia de potencial entre los puntos A y B es:

$V_{AB} = 15\ V$

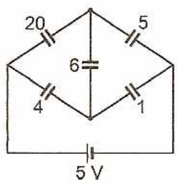
20. Halle la energía que almacena el circuito eléctrico mostrado. La capacidad de los condensadores están expresados en μF.



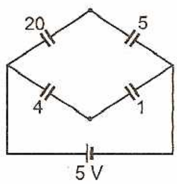
Resolución:

Reduciendo el circuito, observamos que el condensador de 6 μF se encuentra haciendo puente, es decir, no almacena carga eléctrica. Si retiramos el condensador de 6 μF, la energía almacenada del sistema no se altera.

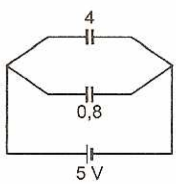
a.



b.



c.



Luego, la capacidad equivalente es:
$C_{eq} = 4{,}8\ \mu F$

La energía almacenada es: $W = \dfrac{1}{2}CV^2$

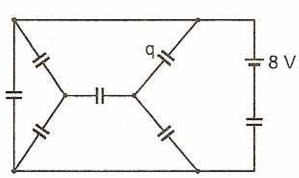
$W = \dfrac{1}{2}(4{,}8 \times 10^{-6})(5)^2$

$\Rightarrow W = 60\ \mu J$

21. En el circuito eléctrico mostrado, todos los condensadores tienen igual capacidad C = 3 μF. Halla:

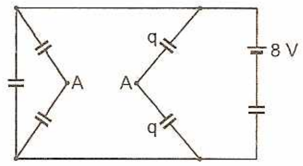
a) La capacidad equivalente.

b) La carga "q" que almacena el condensador indicado.

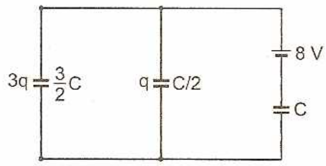


Resolución:

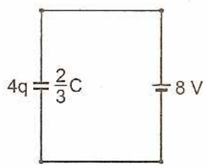
a.



b.



c.



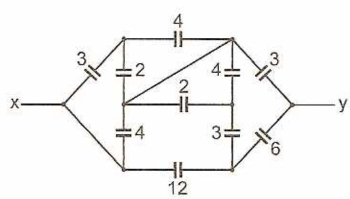
Identificando el efecto puente retiramos imaginariamente el condensador que no almacena carga, como muestra el gráfico (a).

Siguiendo los pasos (b) y (c) deducimos que la capacidad equivalente es: $C_{eq} = \dfrac{2}{3}C = 2\ \mu F$

Sabemos que: $q_{neta} = C_{eq}V$

$\Rightarrow 4q = (2)(8) \quad \therefore\ q = 4\ \mu C$

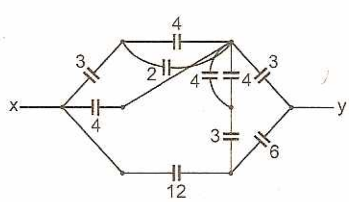
22. Halla la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y". Todos los condensadores están expresados en μF.



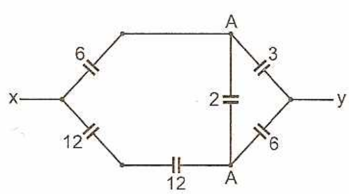
Resolución:

Reducimos el circuito siguiendo los pasos (a), (b) y (c)

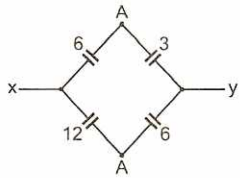
a.



b.

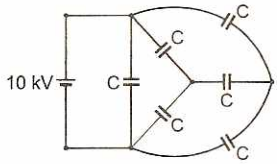


c.



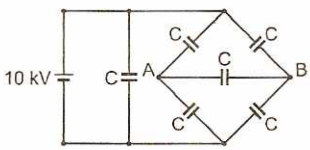
En el paso (b), identificamos el efecto puente, retiramos el condensador de 2 μF. Del paso (c) obtenemos la capacidad equivalente: $C_{eq} = 6\ \mu F$

23. Encuentre la energía que almacena el circuito, la capacidad de cada condensador es $C = 5\ \mu F$.

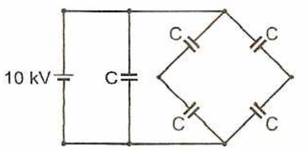


Resolución:

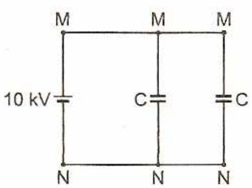
a.



b.



c.



Analizando el circuito, identificamos el efecto puente, como muestra la figura (a), el condensador que se encuentra entre los puntos A y B no almacena carga eléctrica, por consiguiente, si es sustraído no altera la energía que almacena el sistema.
Siguiendo los pasos (a); (b) y (c) obtenemos la capacidad equivalente:

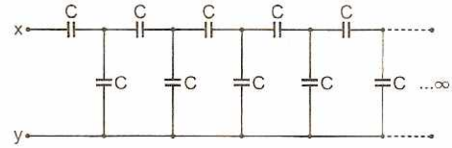
$C_{eq} = 2C = 10\ \mu F$

La energía almacenada por el sistema es:

$W = \frac{1}{2}C_{eq}\,V_{MN}^2 \quad W = \frac{1}{2}(10^{-5})(10^{4})^2$

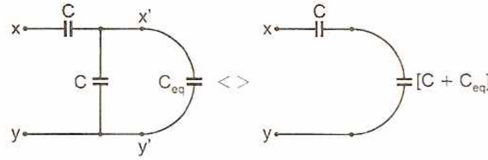
$\therefore\ W = 500\ J$

24. La figura muestra una red de condensadores de un número ilimitado. Si cada condensador tiene valor igual a C, determinar la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y".



Resolución:

Sea C_{eq} la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y". Si a la red ilimitada le quitamos tres condensadores su valor no se altera, entonces tenemos el siguiente circuito equivalente:



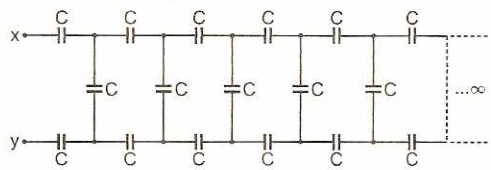
La capacidad equivalente entre los puntos xy e x'y' son iguales, luego:

$$C_{eq} = \frac{C(C + C_{eq})}{C + (C + C_{eq})} \Rightarrow C_{eq}(2C + C_{eq}) = C^2 + CC_{eq}$$

$$\Rightarrow\ C_{eq}^2 + CC_{eq} - C^2 = 0$$

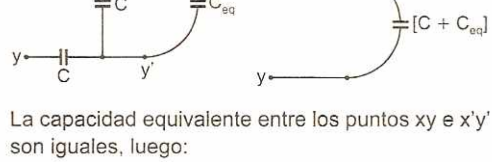
Resolviendo la ecuación tenemos: $C_{eq} = C\dfrac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$

25. La figura muestra una red de condensadores de un número ilimitado. Si cada condensador tiene capacidad C, determinar la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y".



Resolución:

Sea C_{eq} la capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y". Si a la red ilimitada le quitamos tres condensadores su valor no se altera, entonces tenemos el siguiente equivalente:



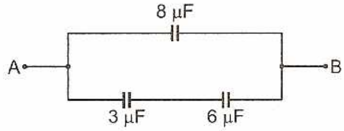
La capacidad equivalente entre los puntos xy e x'y' son iguales, luego:

$$C_{eq} = \frac{\frac{C}{2}(C + C_{eq})}{\frac{C}{2} + (C + C_{eq})} \Rightarrow \frac{C}{2}C_{eq} + C_{eq}(C + C_{eq}) = \frac{C}{2}(C + C_{eq})$$

$$2C_{eq}^2 + 2CC_{eq} - C^2 = 0$$

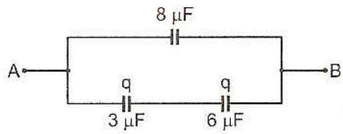
Resolviendo la ecuación tenemos: $C_{eq} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)}{2}C$

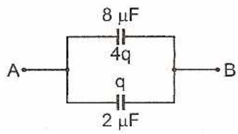
26. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la carga acumulada por el capacitor de 6 μF, sabiendo que la diferencia de potencial entre los extremos A y B es 10 voltios.



Resolución:

Los condensadores de capacidad 3 μF y 6 μF están instalados en serie, por consiguiente almacenan igual cantidad de carga "q".



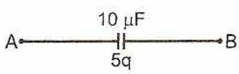


Los condensadores de capacidad 2 y 8 μF están instalados en paralelo, por consiguiente las cargas acumuladas serán "q" y 4q respectivamente.

Analizando el condensador equivalente:

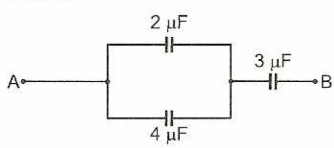
$q_{neto} = V_{AB}C_{eq}$

$5q = (10)(10) \Rightarrow q = 20\ \mu C$

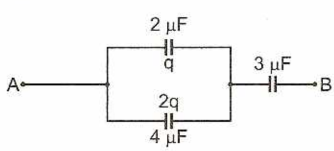


Luego, la carga acumulada en cada placa, por el condensador de 6 μF, es 20 μC.

27. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la carga acumulada por el capacitor de 3 μF, sabiendo que la diferencia de potencial entre los puntos A y B es 30 voltios.



Resolución:



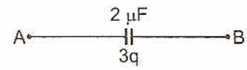
Cuando dos (o más) condensadores están instalados en paralelo, las cargas acumuladas son directamente proporcionales a sus capacidades.

Cuando dos (o más) condensadores están instalados en serie, todos los condensadores en serie almacenan igual cantidad de carga independientemente de sus capacidades.

Luego, la capacidad equivalente, $C_{eq} = 2\ \mu F$, almacena en cada placa una carga de magnitud 3q.

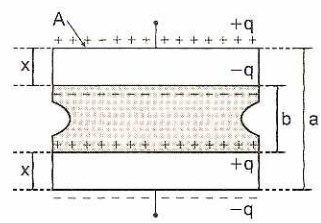
$q_{neta} = V_{AB} = C_{eq}$

$3q = (30)(2) \Rightarrow 3q = 60\ \mu C \Rightarrow q = 20\ \mu C$



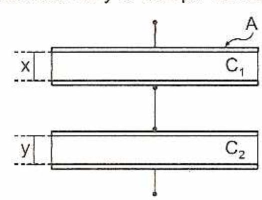
Finalmente, el condensador de 3 μF almacena en cada placa una carga de magnitud 60 μC.

28. Entre las placas de un condensador plano de área A y distancia de separación a entre las placas. Existe un perfil metálico de altura "b" cuyas bases tienen igual área que las placas del condensador, dicho perfil se desplaza verticalmente sin ponerse en contacto con ninguna de las placas. Determinar la capacidad equivalente del sistema así formado.



Resolución:

El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores instalados en serie. El perfil metálico se polariza, tal que, en su interior el potencial eléctrico es constante y el campo eléctrico es nulo.



$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \quad ...(1)$$

donde: $C_1 = \varepsilon_0\left(\frac{A}{x}\right)$ y $C_2 = \varepsilon\left(\frac{A}{y}\right)$

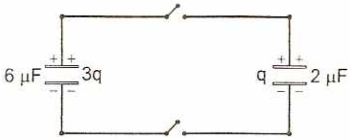
$x + y = (a - b)$

Reemplazando en (1): $C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{(x + y)}$

Luego: $C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{(a - b)}$

29. Un condensador de placas paralelas de capacidad 6 μF es cargado con 12 μC. Este condensador se conecta a un condensador de capacidad 2 μF des-

cargado, como indica la figura. La carga que al final adquiere el condensador de 2 μF será:



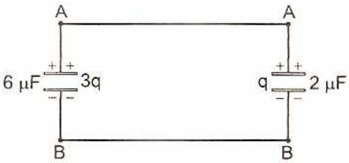
Resolución:

Al cerrar los interruptores, se establece un flujo de cargas eléctricas entre las armaduras de los condensadores, debido a la diferencia de potencial. El flujo de cargas cesa cuando las armaduras alcanzan igual potencial eléctrico. Por consiguiente los condensadores están sometidos a la misma diferencia de potencial V. Entonces las cargas almacenadas por cada condensador serán directamente proporcional a sus capacitadores.

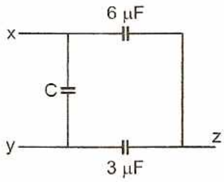
Principio de conservación de las cargas eléctricas:

$q_{(inicial)} = q_{(final)} \Rightarrow 12\ \mu C = q + 3q$

carga almacenada por el capacitor 2 μF: $q = 3\ \mu C$



30. En el sistema mostrado, la capacidad equivalente entre los extremos "x" e "y" es 14 μF. Calcular la capacidad equivalente entre los puntos "z" e "y".

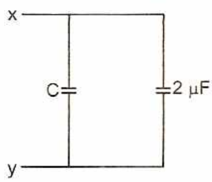


Resolución:

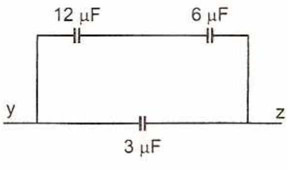
Los capacitores 6 μF y 3 μF están en serie; su capacidad equivalente es 2 μF.

La capacidad equivalente entre los puntos "x" e "y":

$C_{xy} = C + 2 = 14 \Rightarrow C = 12\ \mu F$

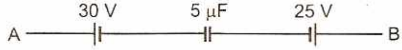


Los capacitores 12 μF y 6 μF están conectados en serie; su capacidad equivalente es 4 μF.



La capacidad equivalente entre los puntos "z" e "y" es: $C_{yz} = 4 + 3 = 7\ \mu F$

31. Se muestra un tramo de un circuito. Si la diferencia de potencial entre los puntos A y B es ($V_A - V_B = 50$ V), determinar la cantidad de carga acumulada en la placa de condensador.



Resolución:

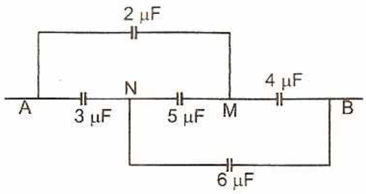
Aplicamos al circuito el teorema de la trayectoria. Llevamos la partícula electrizada +q de A a B.

$V_A - \varepsilon_1 - \frac{q}{C} + \varepsilon_2 = V_B \Rightarrow V_A - 30 - \frac{q}{5} + 25 = V_B$

$(V_A - V_B) - 30 + 25 = \frac{q}{5} \Rightarrow 50 - 30 + 25 = \frac{q}{5}$

$\Rightarrow q = 225\ \mu C$

32. En el circuito mostrado, determinar la capacidad equivalente entre los extremos A y B.

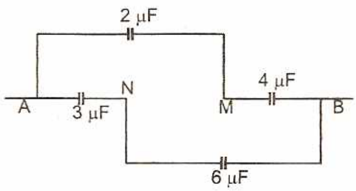


Resolución:

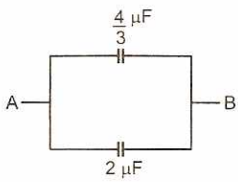
Reconociendo el efecto puente, nos damos cuenta que:

$(3)(4) = (2)(6) \Rightarrow V_M = V_N$

El capacitor de 5 μF que se encuentra entre los puntos M y N no funciona, por consiguiente al retirarlo la capacidad del sistema no se altera.



Reduciendo el sistema anterior, tenemos dos capacitores en paralelo:

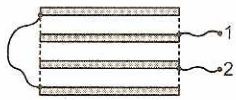


$C_{eq} = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}\ \mu F$

33. Hallar la capacidad del sistema de condensadores idénticos entre los puntos 1 y 2. Las cuatro lámi-

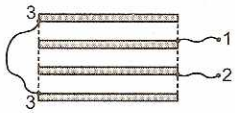
nas son idénticas de área A y separadas la misma distancia "d".

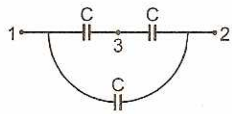
Además: $C = \varepsilon_0\left(\dfrac{A}{d}\right)$



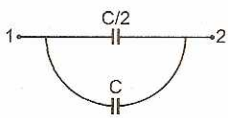
Resolución:

Analizando la diferencia de potencial entre las placas.





Con cuatro láminas se puede formar tres (3) capacitores.

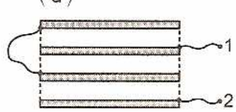


La capacidad equivalente: $C_{eq} = \dfrac{C}{2} + C$.

Luego: $C_{eq} = \dfrac{3}{2}C$

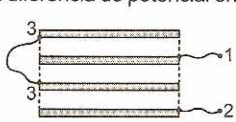
34. Hallar la capacidad del sistema de condensadores idénticos entre los puntos 1 y 2. Las cuatro láminas son idénticas de área A y separadas la misma distancia "d".

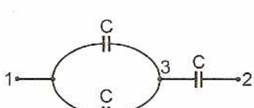
Además: $C = \varepsilon_0\left(\dfrac{A}{d}\right)$



Resolución:

Analizando la diferencia de potencial entre las placas:



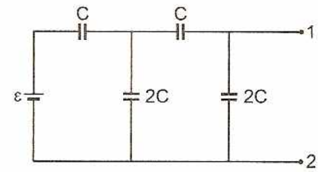


Con cuatro láminas se puede formar tres (3) condensadores.

Luego, la capacidad equivalente:

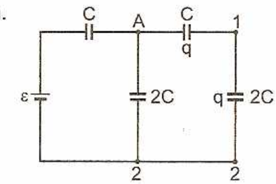
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{2}{3}C$$

35. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 del circuito, si la fem es $\varepsilon = 110$ V.

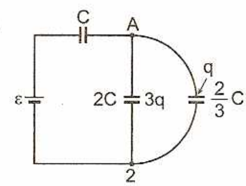


Resolución:

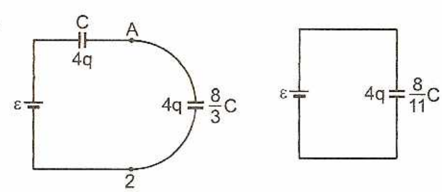
a.



b.



c.



La diferencia de potencial entre 1 y 2 es:

$V_{12} = \dfrac{q}{2C}$ ...(1)

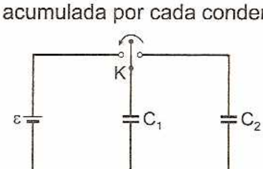
Los condensadores en serie, acumulan igual cantidad de carga. Los condensadores en paralelo, acumulan cargas cuya magnitud es directamente proporcional a sus capacidades.

La capacidad equivalente es: $C_{eq} = \dfrac{8}{11}C$

Luego: $\varepsilon = \dfrac{4q}{C_{eq}} \Rightarrow 110 = \dfrac{4q}{\frac{8}{11}C} \Rightarrow \dfrac{q}{C} = 20$ V

Reemplazando (2) en (1): $V_{12} = 10$ V

36. Un condensador de capacidad $C_1 = 3\ \mu F$ se conecta, por medio del conmutador K, primero con una batería de fem $\varepsilon = 7$ V y después, con un condensador sin carga de capacidad $C_2 = 6\ \mu F$. Hallar la carga final acumulada por cada condensador.



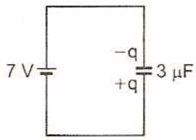
Resolución:

Primer caso: C_1 instalado con la batería $\varepsilon = 7$ V.

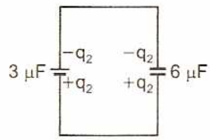
Cálculo de la carga acumulada:

$q = \varepsilon C_1$

$q = 7(3) = 21\ \mu C$



Segundo caso: C_1 instalado con el condensador C_2. La carga "q" se reparte directamente proporcional a las capacidades C_1 y C_2, debido a que la diferencia de potencial entre las placas es el mismo para ambos capacitores.

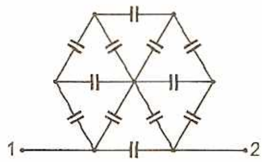


$$V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{3\mu F} = \frac{q_2}{6\mu F} \Rightarrow q_2 = 2q_1$$

Por principio de conservación de las cargas eléctricas: $q = q_1 + q_2 \Rightarrow 21 = q_1 + 2q_1$

Luego: $q_1 = 7\ \mu C$ y $q_2 = 14\ \mu C$

37. La figura muestra un hexágono regular junto con sus diagonales, en cada segmento se insta un condensador de capacidad igual a C. El hexágono se conecta a un circuito entre los puntos 1 y 2 como se indica en la figura. Encontrar la capacidad equivalente al sistema.



Resolución:

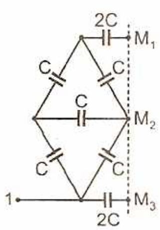


Fig. (a)

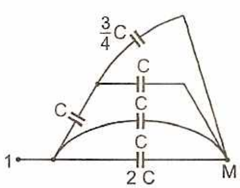
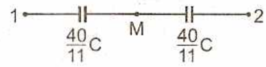


Fig. (b)

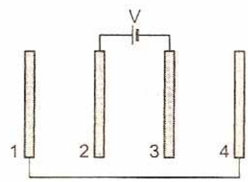
En el caso dado es fácil observar que el esquema posee un eje de simetría. En la figura se representa por medio de una línea punteada. Según el criterio de simetría, todos los puntos contenidos en el eje O plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico. Por consiguiente los puntos M_1, M_2 y M_3 tienen igual potencia e igual a la semisuma de los potenciales de los puntos 1 y 2.

De acuerdo a la regla establecida estos tres puntos, M_1, M_2, y M_3, se pueden unir en uno solo llamado punto M, como resultado de esto la asociación de condensadores considerado se descompone en dos sectores unidos en serie uno de los cuales se indica en la figura (a).



Cálculo de la capacidad equivalente entre los puntos 1 y 2: $C_{eq} = \frac{20}{11}C$

38. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales "d" una de otra. El área de cada una de las placas es igual a A. Las placas extremas están unidas entre sí y las de en medio, conectadas a una batería de fem V. La distancia "d" entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de éstas. Hallar las cargas en cada placa, si: $C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$



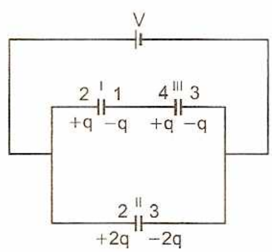
Resolución:

El condensador complejo que se forma, puede reemplazarse por un equivalente de tres condensadores de igual capacidad C: el condensador I (placas 2 y 1), el condensador II (placas 3 y 2) y el condensador III (placas 3 y 4).

Los condensadores I y III están acoplados en serie, las placas 1 y 4 tienen potenciales iguales (ya que están unidas por un conductor), y el condensador II está acoplado en paralelo a este par.

Los condensadores I y III acoplados en serie, acumulan igual cantidad de carga "q". El condensador II acumula una cantidad 2q, debido a la mayor diferencia de potencial. En el condensador II: VC = (2q)

Luego: $q = \frac{VC}{2}$



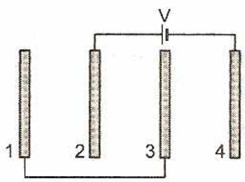
Carga en la placa 1: $q_1 = -q = -VC/2$

Carga en la placa 2: $q_2 = +q + 2q = 3q = 3VC/2$

Carga en la placa 3: $q_3 = -q - 2q = -3q = -3VC/2$

Carga en la placa 4: $q_4 = +q = VC/2$
Debe observarse que las placas 1 y 4 solamente se polarizan.

39. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales de una de la otra. El área de cada una de las placas es igual a A. Las placas 1 y 3 están unidas por un alambre conductor que no ofrece resistencia y las placas 2 y 4 están conectadas a una batería de fem V. La distancia "d" entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de éstas. Hallar la carga en las placas, sabiendo que: $C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$



Resolución:

El condensador complejo que se forma se puede reemplazar por un equivalente formado por tres condensadores de igual capacidad C: el condensador I (placas 2 y 3), el condensador II (placas 1 y 2) y el condensador III (placas 3 y 4). Los condensadores I y II están acoplados en paralelo: las placas 1 y 3 tienen potenciales iguales (ya que están unidos por un conductor) y la placa 2 es común; el condensador III está acoplado en serie con este par.

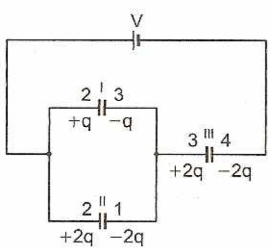
La capacidad equivalente será:

$C_{eq} = \frac{2}{3}C$ y $q_{(total)} = 2q$

Pero: $q_{(total)} = VC_{eq}$

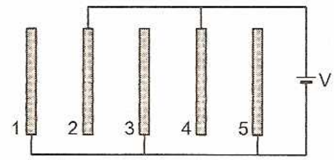
Luego: $2q = V\left(\frac{2}{3}\right)C$

$\therefore\ q = \frac{1}{3}VC$



Cálculo de la carga en cada placa:
Placa 1: $q_1 = -q = -VC/3$
Placa 2: $q_2 = q + q = 2q = 2\ VC/3$
Placa 3: $q_3 = -q + 2q = q = VC/3$
Placa 4: $q_4 = -2q = -2\ VC/3$
Nota: Las placas 1 y 3 se polarizan.

40. Cinco placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales "d" una de otra. El área de cada placa es igual a A. Las placas 1; 3 y 5 están unidas por medio de un alambre al polo negativo de una batería y las placas 2 y 4 al polo positivo. La fem de la batería es V, además la distancia "d" entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de éstas. Hallar las cargas en cada placa, sabiendo que: $C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$



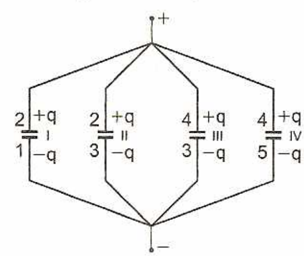
Resolución:

El condensador complejo que se forma se puede reemplazar por un equivalente formado por cuatro condensadores de igual capacidad C: el condensador I (placas 1 y 2), el condensador II (placas 3 y 2), el condensador III (placas 3 y 4), el condensador IV (placas 5 y 4).

Las placas 2 y 4 tienen potenciales iguales, del mismo modo la placa 1, 3 y 5 tienen igual potencial, por consiguiente los cuatro condensadores están instalados en paralelo.

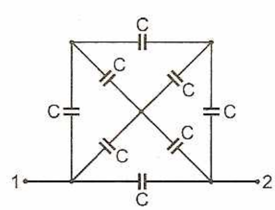
En cada condensador se cumple que: $q = VC$

Cálculo de la carga en cada placa:



Placa 1: $q_1 = -q = -VC$
Placa 2: $q_2 = q + q = 2q = 2VC$
Placa 3: $q_3 = -q - q = -2q = -2VC$
Placa 4: $q_4 = q + q = 2q = 2\ VC$
Placa 5: $q_5 = -q = -VC$

41. La figura muestra un cuadrado con sus diagonales, en cada lado se encuentra instalado un condensador de capacidad C. Hallar la capacidad equivalente del conjunto, entre los puntos 1 y 2.



Resolución:

Fig. (a)

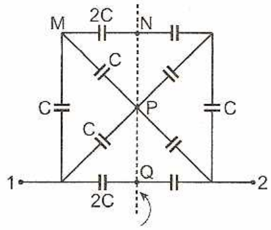
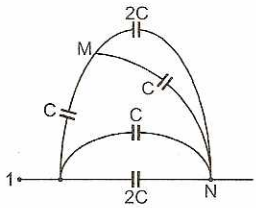


Fig. (b)



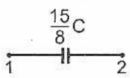
Hay que encontrar los puntos de igual potencial eléctrico. En el caso dado es fácil observar que el esquema posee un eje o plano de simetría. En la figura se representa por medio de una línea punteada, figura (a).

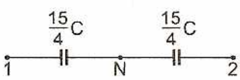
Claramente que todos los puntos, que descansan sobre el eje de simetría deben tener el mismo potencial, igual a la semisuma de los potenciales de los puntos 1 y 2.

$$V_N = V_P = V_Q = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

De esta manera, los potenciales de los puntos N, P, Q son iguales. De acuerdo a la regla establecida, estos tres puntos se pueden unir en uno solo y, como resultado de esto, la combinación de resistencias considerada entre 1 y 2 se descompone en dos sectores en serie uno de los cuales se indica en la figura (b).

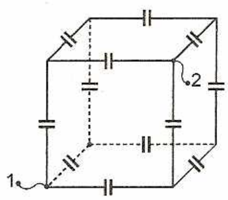
Cálculo de la capacidad equivalente:



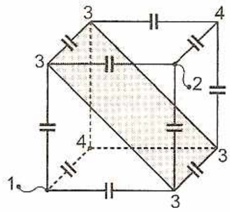


Luego: $C_{eq} = \frac{15}{8}C$

42. Doce (12) condensadores iguales de capacidad C cada uno se encuentran instalados en cada arista del cubo. Hallar la capacidad equivalente del conjunto entre los puntos 1 y 2.



Resolución:

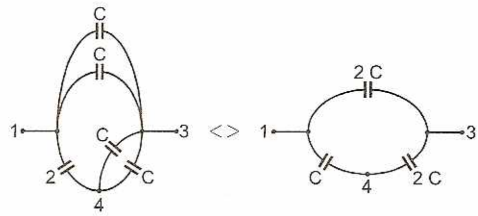


Criterio de simetría:

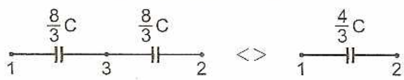
"Todos los puntos del plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico".

Por consiguiente, los condensadores entre los puntos 3 no almacenan carga, no funcionan, por lo tanto al suprimir no se altera el conjunto de capacitores.

Reduciendo, tenemos:

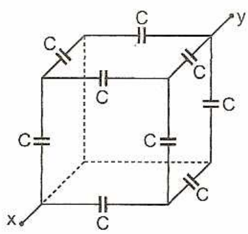


Cálculo de la capacidad equivalente:

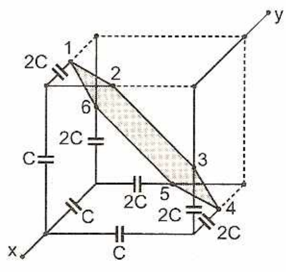


Luego: $C_{eq} = \frac{4}{3}C$

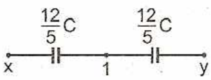
43. Doce (12) condensadores iguales de capacidad C constituyen un armazón en forma de cubo. Hallar la capacidad equivalente del conjunto, entre los puntos 1 y 2.

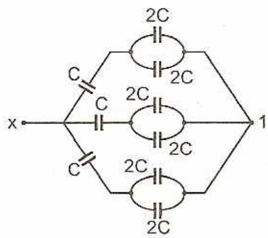


Resolución:



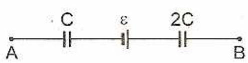
1. Todos los puntos del plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico.
2. Los puntos que descansan sobre el plano de simetría; 1; 2; 3; 4; 5 y 6; deben tener el mismo potencial, igual a la semisuma de los puntos "x" e "y".
3. De acuerdo a la regla establecida estos seis puntos se pueden unir en uno solo como resultado de esto la asociación de condensadores se descompone en dos sectores unidos en serie uno de los cuales se indica en la figura (b).
4. Cálculo de la capacidad equivalente:





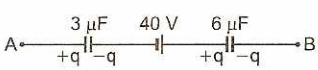
Luego: $C_{eq} = \frac{6}{5}C$

44. La figura muestra un tramo de un circuito. Si, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es $(V_A - V_B) = 20$ voltios, determinar la carga acumulada en cada condensador de capacidad C y 2C. $C = 3\ \mu F$; $E = 40\ V$.



Resolución:

Aplicando el teorema de la trayectoria: llevamos una carga de prueba desde A hasta B. Cuando la carga de prueba atraviesa el condensador de la placa positiva a la placa negativa de un condensador, disminuye su potencial en: $V = \frac{q}{C}$



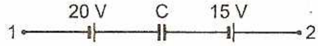
$$V_A - \frac{q}{3\mu} + 40\ V - \frac{q}{6\mu} = V_B$$

$$(V_A - V_B) + 40\ V = \frac{q}{2\mu}$$

Despejando tenemos: $q = 120\ \mu C$

Ambos condensadores almacenan igual cantidad de carga, están instalados en serie.

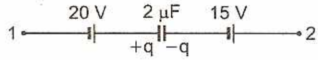
45. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la carga acumulada por el capacitor $C = 2{,}0\ \mu F$, sabiendo que la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos 1 y 2 es:



$V_1 - V_2 = 30\ V$

Resolución:

Teorema de la trayectoria $(1 \to 2)$

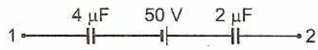


$$V_1 + 20 - \frac{q}{C} + 15 = V_2$$

$$(V_1 - V_2) + 35 = \frac{q}{C}$$

Reemplazando: $q = 130\ \mu C$

46. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la carga acumulada por cada condensador, sabiendo que la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 es:



$V_1 - V_2 = 40\ V$

Resolución:

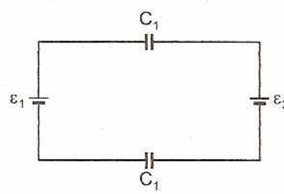
Teorema de la trayectoria $(1 \to 2)$.

Los condensadores acumulan igual magnitud de carga "q":

$$V_1 - \frac{q}{4} + 50 - \frac{q}{2} = V_2 \Rightarrow (V_1 - V_2) + 50 = \frac{3q}{4}.$$

Reemplazando: $q = 120\ \mu C$

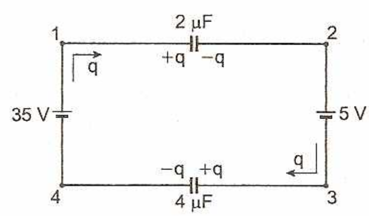
47. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la carga acumulada por cada condensador.



$C_1 = 2\ \mu F$; $C_2 = 4\ \mu F$

$\varepsilon_1 = 35\ V$; $\varepsilon_2 = 5\ V$

Resolución:



Aplicamos el teorema de la trayectoria al circuito simple, llevamos la carga de prueba "q" siguiendo un camino cerrado:

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

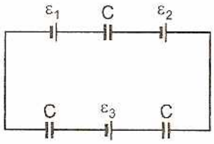
$$V_1 - \frac{q}{C_1} - \varepsilon_2 - \frac{q}{C_2} + \varepsilon_1 = V_1$$

Luego: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \dfrac{q}{C_1} + \dfrac{q}{C_2}$

Reemplazando: $35\text{ V} - 5\text{ V} = \dfrac{q}{2} + \dfrac{q}{4}$

La carga acumulada: $q = 40\ \mu C$

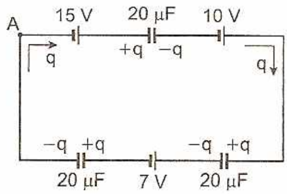
48. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la carga acumulada por cada condensador de capacidad C.



$C = 20\ \mu F$ $\qquad E_2 = 10\text{ V}$

$E_1 = 15\text{ V}$ $\qquad E_3 = 7\text{ V}$

Resolución:



En todo circuito simple los capacitores acumulan igual cantidad de carga independientemente de sus capacidades eléctricas.

La carga de prueba "q" se lleva de mayor a menor potencial.

$$\sum \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{C_i}$$

Tomando como referencia el punto A del circuito, llevamos la carga de prueba en sentido horario:

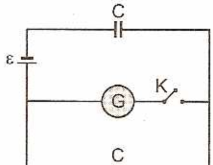
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{q}{C} + \frac{q}{C} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow 15 + 10 - 7 = 3\left(\frac{q}{20}\right)$$

La carga acumulada será:

$q = 120\ \mu C$

49. ¿Qué cantidad de carga pasará por el, G, galvanómetro después de cerrar el interruptor K? En el circuito representado en la figura la fuerza electromotriz en la batería es $\varepsilon = 8$ V, y la capacidad de cada condensador, igual a $C = 5\ \mu F$.

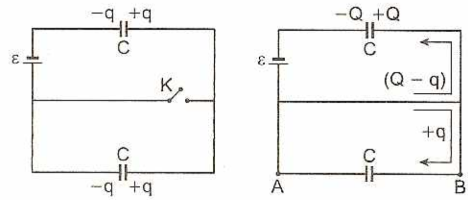


Resolución:

Antes de cerrar el interruptor K, los condensadores están conectados en serie, la carga total de las placas derechas de los condensadores era nula. La carga en cada placa es "q". De la 2.ª ley de Kirchhoff:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{q}{C} = 2\frac{q}{C}$$

Luego: $q = \dfrac{\varepsilon C}{2} \Rightarrow q = -20\ \mu C$



Después de cerrar el interruptor, el condensador inferior está descargado, los puntos A y B se encuentran a igual potencial, y el superior se carga con magnitud Q siendo positiva en la placa de la derecha. La carga que pasa por el galvanómetro es:

$G = (Q - q) + q = Q$

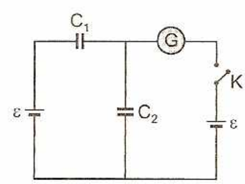
De la 2.ª ley de Kirchhoff:

$\varepsilon = \dfrac{Q}{C} \Rightarrow C\varepsilon = Q = 40\ \mu C$

La carga que pasa por el galvanómetro hacia las placas derechas de los condensadores es igual a: $Q = 40\ \mu C$

50. ¿Qué cantidad de carga pasará por el galvanómetro G cuando cerramos el interruptor K en el circuito representado en la figura?

$C_1 = 3\ \mu F$; $C_2 = 6\ \mu F$; $\varepsilon = 5$ V



Resolución:

Antes de cerrar el interruptor K los condensadores C_1 y C_2 estaban acoplados en serie y conectados a la batería como muestra la figura (1). Sus cargas eran iguales a:

De la 2.ª ley de Kirchhoff:

$$\varepsilon = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow Q = \varepsilon\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Luego: $Q = 10\ \mu C$

En la placa derecha del condensador C_1 y en la placa superior del condensador C_2, las cargas tenían signos distintos; la carga total de estas placas era nula:

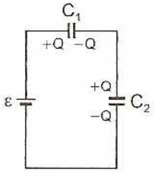


Fig. (1)

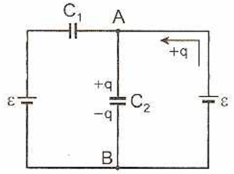


Fig. (2)

Después de cerrar la interrupción K, la diferencia de potencial entre las placas del condensador C_1 y las cargas en ellas, se anularon, y las placas del condensador C_2 adquirieron las cargas $\pm q$; en el condensador C_2 :

$$V_{AB} = \varepsilon = \frac{q}{C_2} \Rightarrow q_2 = \varepsilon C_2$$

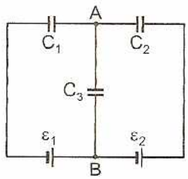
Luego: $q = 30\ \mu C$

La placa superior de C_2 se carga positivamente. De este modo, la carga total de la placa derecha del condensador C_1 y la placa superior del condensador C_2 se hizo igual a $+q$. Esta carga pasó por el galvanómetro al cerrar el interruptor K.

51. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

$C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 2\ \mu F$; $C_3 = 3\ \mu F$

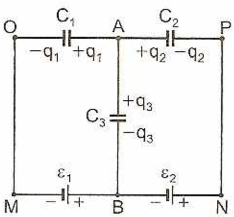
$\varepsilon_1 = 10\ V$; $\varepsilon_2 = 20\ V$



Resolución:

Asumimos arbitrariamente las cargas q_1, q_2 y q_3 en las placas. Por principio de conservación de las cargas eléctricas, en el nudo A:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \qquad ...(1)$$



Teorema de la trayectoria en la malla: MBAOM

$$V_M + \varepsilon_1 + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} = V_M$$

$$\Rightarrow\ q_1 = \left(\varepsilon_1 + \frac{q_3}{C_3}\right)C_1 \qquad ...(2)$$

Teorema de la trayectoria en la malla: BNPAB

$$q_2 = \left(\frac{q_3}{C_3} - \varepsilon_2\right)C_2 \qquad ...(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\varepsilon_1 C_1 + \left(\frac{q_3}{C_3}\right)C_1 + \left(\frac{q_3}{C_3}\right)C_2 - \varepsilon_2 C_2 + q_3 = 0$$

$$q_3 = \left(\frac{\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}\right)C_3$$

$$\Rightarrow\ V_A - V_B = \frac{(\varepsilon_2 C_2 - \varepsilon_1 C_1)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

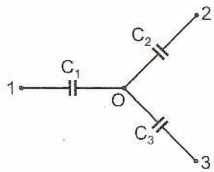
Reemplazando datos tenemos:

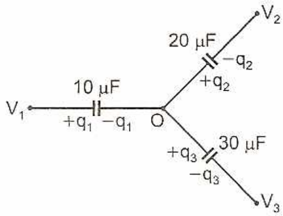
$q_3 = 15\ \mu C$; $q_2 = -30\ \mu C$; $q_1 = 15\ \mu C$

El signo $(-)$ de q_2 significa que la placa del condensador C_2 del lado izquierdo tiene carga con signo $(-)$ y el de la derecha positivo $(+)$, por consiguiente opuesto al considerado inicialmente.

Luego: $V_A - V_B = +5\ V$

52. Determinar la carga acumulada por cada capacitor $C_1 = 10\ \mu F$; $C_2 = 20\ \mu F$; $C_3 = 30\ \mu F$ en el circuito mostrado, sabiendo que los potenciales eléctricos, en los puntos 1, 2 y 3 son iguales a $V_1 = 10\ V$; $V_2 = 7\ V$ y $V_3 = 8\ V$.





Resolución:

Teorema de la trayectoria $(1 \to 0 \to 2)$:

$$V_1 - \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = V_2$$

$$\Rightarrow\ 10 - \frac{q_1}{10} - \frac{q_2}{20} = 7$$

Luego: $2q_1 + q_2 = 60\ \mu C$ ...(1)

Teorema de la trayectoria $(1 \to 0 \to 3)$:

$$V_1 - \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = V_3$$

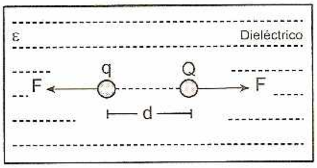
$$\Rightarrow\ 10 - \frac{q_1}{10} - \frac{q_3}{30} = 8$$

Luego: $3q_1 + q_3 = 60\ \mu C$ ...(2)

Ley de nudos: $-q_1 + q_2 + q_3 = 0$ ...(3)

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3):

LEY DE COULOMB EN UN MEDIO DIELÉCTRICO



Fue enunciado por primera vez por el físico francés Carlos Agustín de Coulomb (1736 - 1806):
La fuerza de atracción o repulsión eléctrica que experimentan dos cargas eléctricas puntuales es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

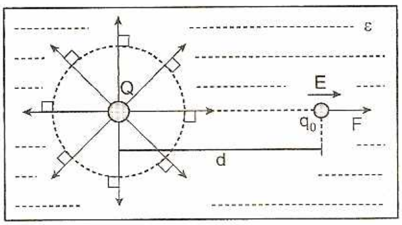
$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{d^2}\right)} \qquad ...(15.44)$$

También se puede escribir así:

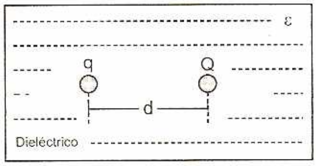
$$\boxed{F = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{qQ}{d^2}\right)} \qquad ...(15.45)$$

ε: constante dieléctrica del medio. $\varepsilon \geq 1$
La fuerza F es menor en un medio dieléctrico comparado con el medio aire o vacío. En el vacío: $\varepsilon = 1$.

INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO EN UN MEDIO DIELÉCTRICO

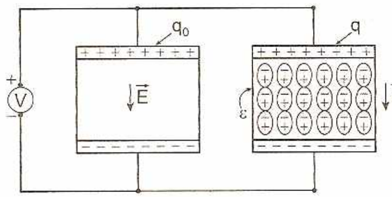


1. La intensidad del campo eléctrico se define como la razón de la fuerza eléctrica por cada unidad de carga eléctrica positiva:
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad ...(\alpha)$$
2. Ley de Coulomb: $F = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{qQ}{d^2}\right)$ $\qquad ...(\beta)$
3. Reemplazando (β) en (α): $E = \dfrac{\frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{qQ}{d^2}\right)}{q} \Rightarrow E = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{Q}{d^2}\right)$
4. La permitividad ε de un medio es la magnitud física que indica cuántas veces es menor la intensidad $\vec{E}$ del campo eléctrico dentro del dieléctrico homogéneo, que la intensidad $\vec{E}_0$ del campo en el vacío.
$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$$
5. El potencial eléctrico es un punto debido a una carga puntual en medio dieléctrico, será:
$V = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{Q}{d}\right)$ "Se considera el signo de la carga".
6. La energía de interacción electrostática de dos cargas puntuales en un medio dieléctrico tendrá la siguiente forma:
$$E_P = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{qQ}{d}\right)$$



CONDENSADORES CON DIELÉCTRICO

1. Se denomina dieléctrico a toda aquella sustancia que ofrece una gran dificultad al desplazamiento de las cargas eléctricas a través de su masa. Estrictamente vienen a ser toda sustancia que no poseen cargas eléctricas libres, de tal manera que cuando un dieléctrico es instalado entre las placas de un condensador los valores de la capacidad, intensidad de campo y diferencia de potencial son alterados.



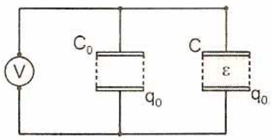
2. Todo dieléctrico es identificado por un número que es característica de cada material, denominado constante dieléctrica ε.

Sustancia	Constante dieléctrica ε
Aire (a 0°C y 760 mmHg)	1,000594
Ebonita	2,7 - 2,9
Cuarzo	4,5
Vidrio	5 -10
Alcohol etílico	27
Agua (pura)	81

3. La relación entre un condensador sin dieléctrico (vacío) entre sus placas de capacidad C_0 y la de un condensador con dieléctrico de constante ε y capacidad C, es:
$C = \varepsilon C_0$ $\qquad ...(1)$
Pero: $C_0 = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$ $\qquad ...(2)$
Reemplazando (2) en (1):
$C = \varepsilon\varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right)$ $\qquad ...(3)$

Donde:
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m; constante eléctrica
ε : constante dieléctrica o permitividad, sin unidades dimensionales.
A : área (m^2)
d : distancia (m)

4. La figura anterior muestra dos condensadores de igual forma geométrica instalados en paralelo, uno sin dieléctrico y el otro con dieléctrico. La relación con las cargas almacenadas en sus placas será:
$q = \varepsilon q_0$
q = carga con dieléctrico
q_0 = carga sin dieléctrico
Prueba:

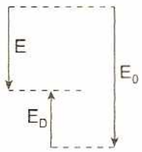


I. Sabemos que: $\varepsilon = \dfrac{C}{C_0}$ ...(α)
II. V = constante
III. Carga almacenada: $q = VC$ ...(β)
$q_0 = VC_0$ ...(γ)
(β) entre (γ): $\dfrac{q}{q_0} = \dfrac{C}{C_0}$
de (α): $q = \varepsilon q_0$

5. Cuando colocamos un dieléctrico entre las placas de un condensador que genera un campo eléctrico de intensidad $\vec{E}_0$, el dieléctrico se polariza generando un campo de menor intensidad opuesto al campo externo. Por consiguiente el campo resultante entre las placas del condensador será:

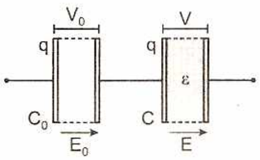
$$\vec{E}_{(\text{resultante})} = \vec{E}_0 - \vec{E}_D$$

Donde: $\vec{E}_0$ = intensidad sin dieléctrico
$\vec{E}_D$ = intensidad inducida



6. Conclusión, si introducimos un dieléctrico entre las placas de un condensador su capacidad eléctrica aumenta y la intensidad del campo eléctrico entre las placas disminuye.

7. Cuando dos condensadores de igual forma geométrica, uno con dieléctrico y el otro sin dieléctrico instalados en serie se cumple:



I. Almacenan igual cantidad de carga:
q = constante y $\varepsilon = \dfrac{C}{C_0}$

II. $q = C_0V_0 = CV$
$\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{C_0}{C} = \dfrac{1}{\varepsilon}$
$\therefore\ \varepsilon \geq 1 \Rightarrow V \leq V_0$
Luego: $V = \dfrac{V_0}{\varepsilon}$ ...(a)

III. Pero: $V = Ed$
Reemplazando en (a): $Ed = \dfrac{E_0 d}{\varepsilon}$
Luego: $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$ $\quad \varepsilon \geq 1 \Rightarrow E \leq E_0$

Tensión de perforación

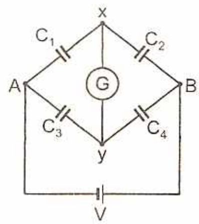
Todos los tipos de condensadores se caracterizan por su tensión disruptiva o tensión de perforación V_0, que es la diferencia de potencial entre las armaduras con la cual se produce una descarga eléctrica (rayo) a través de la capa del dieléctrico del condensador. La magnitud de la tensión disruptiva depende de las propiedades del dieléctrico, de su espesor y de la forma de las armaduras.

Rigidez eléctrica (dieléctrica)

Es la mínima intensidad del campo eléctrico E_0 para la cuál comienza la ruptura del dieléctrico, los valores de la rigidez eléctrica depende de la temperatura, humedad, del espesor del dieléctrico y para la tensión alterna la rigidez eléctrica es menor que para la tensión continua.

EFECTO PUENTE

Cuatro capacitores están dispuestos como muestra la figura. Se aplica una diferencia de potencial V entre los terminales A y B y se conecta un electrómetro G entre los puntos "x" e "y" para determinar la diferencia de potencial entre ellos. El electrómetro marca "cero", si:
$C_1C_4 = C_2C_3$
$V_x = V_y$



Esta es una disposición en puente que permite determinar la capacitancia de un capacitor en función de un capacitor patrón y del cociente entre dos capacitancias.

$$C_1 = \left(\frac{C_2}{C_4}\right)C_3$$

Ejemplo:

Cinco capacitores están dispuestos como muestra la figura (1), todos ellos tienen igual capacidad C. Hallar la capacidad equivalente entre los puntos A y B.

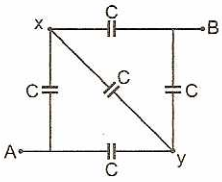


Fig. (1)

Resolución:

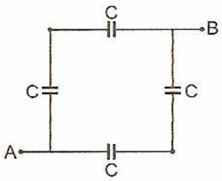
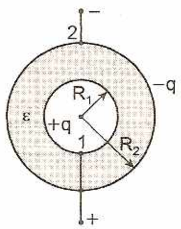


Fig. (2)

1. Del efecto puente, los potenciales en los puntos "x" e "y" son iguales, por consiguiente el condensador en la diagonal no acumula carga, o sea no funciona, entonces si retiramos éste condensador el sistema no se altera, teniendo su equivalente en la figura (2).
2. De la figura (2), podemos deducir fácilmente la capacidad equivalente:
   $C_{eq} = C$ Fig.(2)

CONDENSADOR ESFÉRICO

El condensador esférico consta de dos armaduras metálicas concéntricas cuyos radios son, respectivamente, iguales a R_1 y R_2. Los cuerpos conductores esféricos están cargados con igual magnitud "q" pero de signos diferentes. El campo de una esfera cargada superficialmente solo existe fuera de la esfera. Por esto, en la región entre las armaduras, el campo electrostático está creado únicamente por la carga de la armadura interior de radio R_1 y fuera del condensador, los campos de las armaduras de radios R_1 y R_2, con cargas de signos distintos, se destruyen mutuamente.



Por definición de condensadores:

$$C = \frac{q}{(V_1 - V_2)} \quad ...(1)$$

Pero sabemos que el potencial en superficies esféricas, están definidas así:

Para 1: $V_1 = k\left(\frac{q}{R_1}\right) + k\frac{(-q)}{R_2} = kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$
...(2)

Para 2: $V_2 = k\left(\frac{q}{R_2}\right) + k\frac{(-q)}{R_2} = 0$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$C = \frac{q}{kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{1}{k}\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

En el sistema internacional:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{(R_2 - R_1)}$$

Considerando un material dieléctrico de permitividad ε entre las placas del condensador esférico, la fórmula tendrá la siguiente forma:

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{(R_2 - R_1)} \quad \text{(en el SI)}$$

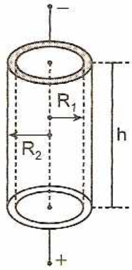
CONDENSADOR CILÍNDRICO

Está constituido por dos cilindros metálicos huecos y coaxiales de altura "h" y radios R_1 y R_2. Los cuerpos conductores cilíndricos tienen igual magnitud de carga "q" pero con signos diferentes. La fórmula de la capacidad del condensador cilíndrico tiene la forma:

$$C = \frac{\varepsilon}{2k}\frac{h}{\text{Ln}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

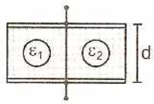
En el sistema internacional (SI):

$$C = 2\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon h}{\text{Ln}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

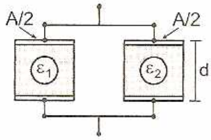


PROBLEMAS RESUELTOS

1. La capacidad del condensador mostrado en la figura, en el vacío es $C = 10\ \mu F$. ¿Cuál es la capacidad si los medios dieléctricos son $\varepsilon_1 = 3$ y $\varepsilon_2 = 5$?



Resolución:



Consideremos un condensador plano de área A y distancia "d" entre sus placas. Si el medio es vacío, su capacidad es: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = 10\ \mu F$

El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores en paralelo, siendo el área de las placas A/2.

Si el medio es $\varepsilon_1 = 3$, su capacidad es: C_1

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1(A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \frac{\varepsilon_1 C}{2} = 15\ \mu F$$

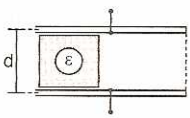
Si el medio es $\varepsilon_2 = 5$, su capacidad es: C_2.

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2(A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_2}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \frac{\varepsilon_2 C}{2} = 25\ \mu F$$

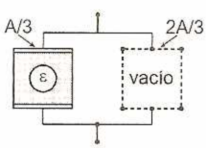
La capacidad equivalente es:

$C_{eq} = C_1 + C_2 = 15\ \mu F + 25\ \mu F \quad \therefore\ C_{eq} = 40\ \mu F$

2. La capacidad del condensador mostrado en la figura, en el vacío es $C = 36\ \mu F$. ¿Cuál es su capacidad si la tercera parte del espacio entre las armaduras está lleno con dieléctrico de constante $\varepsilon = 4$?



Resolución:



El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores C_1 y C_2 de áreas A/3 y 2A/3 respectivamente, conectados en paralelo.

La capacidad del condensador en el vacío es:

$$C = \varepsilon_0\left(\frac{A}{d}\right) = 36\ \mu F$$

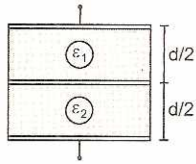
Cálculo de C_1: $C_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0(A/3)}{d} = \dfrac{\varepsilon}{3}\left(\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \dfrac{\varepsilon}{3}C = 48\ \mu F$

Cálculo de C_2: $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0(2A/3)}{d} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \dfrac{2}{3}C = 24\ \mu F$

La capacidad equivalente es:

$C_{eq} = C_1 + C_2 = 48\ \mu F + 24\ \mu F \quad \therefore\ C_{eq} = 72\ \mu F$

3. La capacidad del condensador mostrado, en el vacío es $C = 8\ \mu F$. ¿Cuál es su capacidad si los medios dieléctricos son $\varepsilon_1 = 3$ y $\varepsilon_2 = 5$?



Resolución:

Consideremos un condensador plano de área A y distancia "d" entre las placas.

Si el medio es el vacío, su capacidad es:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 8\ \mu F$$

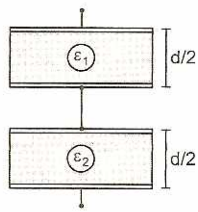
Si el medio es $\varepsilon_1 = 3$, su capacidad es:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 A}{d/2} = 2\varepsilon_1 C = 48\ \mu F$$

Si el medio es $\varepsilon_2 = 5$, su capacidad es:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 A}{d/2} = 2\varepsilon_2 C = 80\ \mu F$$

El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores en serie, siendo las capacidades parciales C_1 y C_2:

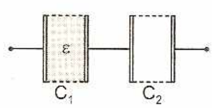


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(48)(80)}{48 + 80} \quad \therefore\ C_{eq} = 30\ \mu F$$

4. Un condensador de aire de capacidad $C_0 = 8\ \mu F$ se llena de un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 5$. ¿Qué capacidad debe tener el condensador que hay que conectar en serie con el dado, para que el sistema formado por ellos vuelva a tener la capacidad C_0?

Resolución:



1. Cuando el capacitor de capacidad C_0, se llena con el líquido dieléctrico ε su capacidad aumenta, teniendo el siguiente valor: $C_1 = \varepsilon C_0$ ...(1)
2. De la condición del problema la capacidad equivalente al sistema es C_0:

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)} = C_0$$

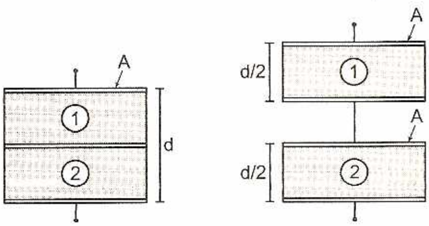
Despejando: $C_2 = \dfrac{C_0C_1}{(C_0 + C_1)}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $C_2 = \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)}C_0$ ...(3)

De los datos en (3): $C_2 = 10\ \mu F$

5. Determinar la capacidad equivalente al sistema mostrado en el sistema de unidades MKS, siendo ε_1 y ε_2 las constantes dieléctricas de los materiales dieléctricos instalados hasta la mitad en el condensador plano de área A y distancia "d" de separación entre las placas.

Sistema Real Sistema Equivalente



Resolución:

1. El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores en serie, siendo la distancia de separación entre las placas d/2. En el sistema real se puede observar que en cada dieléctrico el campo eléctrico resultante parcial es diferente.
2. Luego:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \quad ...(\alpha)$$

3. Cálculo C_1 :

$$C_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0\left(\frac{A}{d/2}\right) \Rightarrow C_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0\left(\frac{2A}{d}\right) \quad ...(\beta)$$

4. Cálculo de C_1:

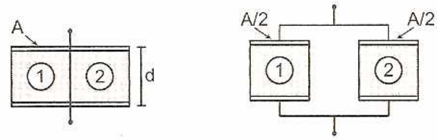
$$C_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0\left(\frac{A}{d/2}\right) \Rightarrow C_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0\left(\frac{2A}{d}\right) ...(\gamma)$$

5. Reemplazando (β) y (γ) en (α):

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0\left(\frac{2A}{d}\right)\varepsilon_2\varepsilon_0\left(\frac{2A}{d}\right)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0\left(\frac{2A}{d}\right)} \quad \therefore\ C_{eq} = 2\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{A}{d}\right)$$

6. Determinar la capacidad equivalente al sistema mostrado en el sistema de unidades MKS, siendo ε_1 y ε_2 las constantes dieléctricas, de los dieléctricos instalados hasta la mitad en el condensador plano de área A y distancia de separación entre las placas "d".

Sistema Real Sistema Equivalente



Resolución:

El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores en paralelo, siendo el área de las placas A/2. En el sistema real se puede observar que la diferencia de potencial es el mismo para ambos dieléctricos.

Luego: $C_{eq} = C_1 + C_2$ ..(α)

Cálculo de C_1: $C_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0\left(\dfrac{A/2}{d}\right) \Rightarrow C_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0\left(\dfrac{A}{2d}\right)$ ...(β)

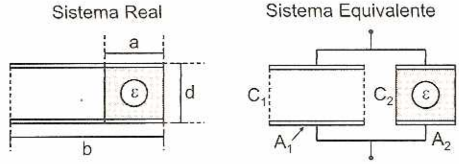
Cálculo de C_2: $C_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0\dfrac{A/2}{D} \Rightarrow C_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0\dfrac{A}{2d}$ ...(γ)

Reemplazando (β) y (γ) en (α) :

$$C_{eq} = \varepsilon_1\varepsilon_0\left(\frac{A}{2d}\right) + \varepsilon_2\varepsilon_0\left(\frac{A}{2d}\right) \quad \therefore\ C_{eq} = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_0A}{d}\right)$$

7. Parte del espacio entre las armaduras de un condensador plano está lleno de dieléctrico con constante dieléctrica ε, como muestra la figura. El área de las placa del condensador es A. Determinar la capacidad del condensador así formando.

Sistema Real Sistema Equivalente



Resolución:

El sistema equivalente es igual a la asociación de dos condensadores en paralelo, siendo el área de las placas A_1 y A_2:

$$A_1 = \frac{(b - a)}{b}A \ \text{ y } \ A_2 = \frac{a}{b}A \quad ...(1)$$

Luego: $C_{eq} = C_1 + C_2$ ...(2)

Calculamos: $C_1 = \varepsilon_0\left(\dfrac{A_1}{d}\right) \Rightarrow C_1 = \varepsilon_0\left[\dfrac{A(b - a)}{db}\right]$ ...(3)

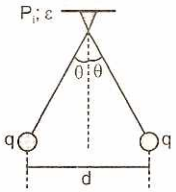
Calculamos: $C_2 = \varepsilon\varepsilon_0\left(\dfrac{A_2}{d}\right) \Rightarrow C_2 = \varepsilon\varepsilon_0\left(\dfrac{Aa}{db}\right)$ ...(4)

Reemplazando (3) y (4) en (2):

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0A}{d}\left[1 + \frac{a}{b}(\varepsilon - 1)\right]$$

8. Dos esferitas de masas "m", radios, cargas "q" iguales y de densidad ρ_C, que penden de un mismo punto y de hilos de igual longitud se sumergen en un dieléctrico líquido, cuya permeabilidad eléctrica es igual a ε y su densidad ρ_L. Sabiendo que los hilos forman un ángulo θ respecto de la vertical y las

esferitas están separadas una distancia "d", hallar la magnitud de las cargas.



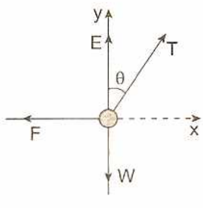
Resolución:

Realizamos el diagrama del cuerpo libre de la esferita de la izquierda, donde:

$E = g\rho_L V$ (empuje)

$W = g\rho_C V$ (peso); V = volumen

$F = \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{q^2}{d^2}\right)$, T = tensión



De la primera condición de equilibrio:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\text{sen}\theta = F$ ...(1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta + E = W$

$\Rightarrow T\cos\theta = W - E$ ...(2)

Dividiendo las ecuaciones, (1) entre (2):

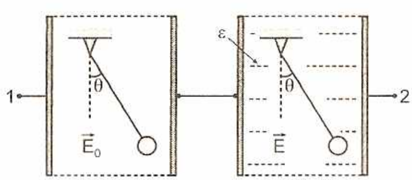
$$\tan\theta = \frac{F}{W - E} = \frac{Kq^2}{\varepsilon d^2}\left[\frac{1}{gV(\rho_C - \rho_L)}\right]$$

pero: $\rho_C = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho_C} \Rightarrow \tan\theta = \frac{Kq^2}{\varepsilon d^2}\left[\frac{\rho_C}{mg(\rho_C - \rho_L)}\right]$

Despejando: $q^2 = \frac{\varepsilon}{k}d^2(mg)\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_C}\right)\tan\theta$

$$\Rightarrow q = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon mg\tan\theta\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_C}\right)}$$

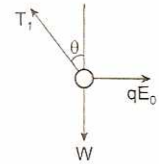
9. La figura muestra dos condensadores de igual forma geométrica instalados en serie sometidos a una diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2. Dos esferillas cargadas con igual magnitud "q", de igual radio y peso, suspendidos de hilos de seda de igual longitud, se encuentran entre las placas del capacitor.



El primer condensador no tiene dieléctrico (vacío) y el segundo contiene entre sus placas, un dieléctrico líquido de permitividad ε, y densidad D. ¿Cuál debe ser la densidad "d" del material de las esferillas para que los ángulos de desviación de los hilos en el vacío y en el dieléctrico sean iguales?

Resolución:

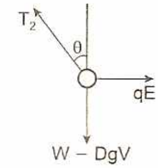
Realizamos el DCL (esfera) en el vacío:



$\Sigma F = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{qE_0}{W}$ ...(α)

Realizamos el DCL (esfera) en el dieléctrico:



$\Sigma F = 0$

$\tan\theta = \frac{qE}{W - DgV}$ ...(β)

Igualando (α) y (β): $\frac{E_0}{E} = \frac{W}{W - DgV}$

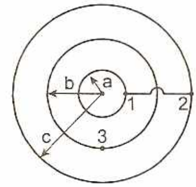
donde: $W = dgV \Rightarrow \frac{E_0}{E} = \frac{d}{d - D}$ ...(I)

La intensidad E_0 y E se relacionan del siguiente modo:

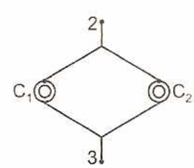
$\frac{E_0}{E} = \varepsilon$ ...(II)

Igualando (I) y (II): $d = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)}D_{liq}$

10. Un condensador complejo está hecho de tres cascarones esféricos de radio de curvatura "a", "b" y "c". Los cascarones inferior (a) y exterior (c) son conectados mediante un alambre aislado el cual pasa a través de un agujero en el cascarón de radio "b". Los tres cuerpos esféricos son concéntricos y conductores (a < b < c). Calcular la capacidad equivalente del sistema entre los puntos 2 y 3.



Resolución:



El conductor complejo se puede reemplazar por un condensador equivalente, formado por dos condensadores C_1 y C_2 instalados en paralelo. Los cascarones esféricos de radios "a" y "c" tienen igual potencial eléctrico.

El capacitor 1 (cascarones a y b), el capacitor 2 (cascarones b y c).

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{eq} = 4\pi\varepsilon_0\left[\frac{ab}{(b - a)} + \frac{bc}{(c - b)}\right]$$

En la figura puede observarse que la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 3 es igual a la diferencia de potencial entre los puntos 2 y 3, por consiguiente los capacitores C_1 y C_2 están sometidos a la misma diferencia de potencial.

11. Si un condensador esférico de aire (entre las placas) se conecta con una fuente de alta tensión, dicho condensador se perfora (rayo) cuando la diferencia de potencial $V_0 = 40$ kV. Determinar la rigidez eléctrica del aire en las condiciones del experimento. El radio de la armadura interna del condensador es $r = 3$ cm y el de la armadura externa, $R = 9$ cm.

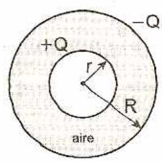
Observación

Se llama rigidez eléctrica a la intensidad E_0 del campo eléctrico con la cual se produce la perforación del dieléctrico.

Resolución:

Si el condensador esférico tiene una carga Q en cada placa, pero signos diferentes, el potencial de la armadura interior será:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{-Q}{R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R-r}{Rr}\right) \qquad ...(1)$$



El potencial es máximo en la armadura interior.
El potencial de la armadura exterior es nulo. Por consiguiente, para la capacidad del condensador esférico se obtiene: $C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{Rr}{R-r}\right)$

La intensidad del campo es máxima cerca de la superficie de la armadura interior del condensador:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r^2}\right] \qquad ..(2)$$

La diferencia del potencial entre las armaduras será: $V_1 - V_2 = V_1 - 0 = V_1$

Del dato: $V_1 = V_0 = 40$ kV

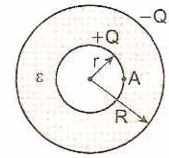
De las ecuaciones (1) y (2): $E_0 = V_0\,\frac{R}{(R-r)r}$

Reemplazando datos:

$$E_0 = 40\left(\frac{9}{6\times 3}\right) = 20 = 2000\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

12. La armadura interna de un condensador esférico, de aire, cuyo radio es $r = 2$ cm, está rodeada de una capa esférica dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 2$. El radio exterior de la capa dieléctrica es de $R = 4$ cm. ¿Qué carga máxima puede comunicarse a este condensador? La rigidez eléctrica del aire, igual a la del dieléctrico, es $E_0 = 90\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$

Resolución:



La intensidad del campo eléctrico es máxima cerca de la superficie de la armadura interior del condensador:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r^2}\right) \qquad ...(1)$$

Cálculo del potencial en la superficie de la armadura interior:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{(-Q)}{R}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R-r}{Rr}\right) \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2): $V_1 = E_0\left(\frac{R-r}{R}\right)r$

El potencial en la superficie de la armadura exterior es cero: $V_2 = 0$

La capacidad del condensador es: $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\,\frac{Rr}{(R-r)}$

De la definición de capacidad: $C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$

Luego:

$$Q = C(V_1 - V_2) = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{Rr}{R-r}\right)E_0\left(\frac{R-r}{R}\right)r$$

$$\Rightarrow Q = \pi\varepsilon_0\varepsilon E_0 r^2$$

Reemplazando datos:

$$E_0 = 40\left(\frac{9}{6\times 3}\right) = 20 = 2000\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$Q = \frac{1}{9\times 10^9}(2)(90\,000)4\times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow Q = 8\times 10^{-7}\ \text{C} = 0{,}8\ \mu\text{C}$$

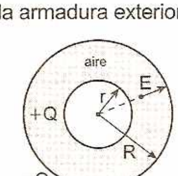
13. El radio de la armadura externa de un condensador esférico de aire (entre las armaduras) es $R = 4$ cm y el de la armadura interna "r" se elige de manera que el condensador no se perfore (rayo) con la referencia de potencial máxima V_0. La rigidez eléctrica del aire es $E_0 = 3\times 10^4$.

Observación:

Se llama rigidez eléctrica a la intensidad E_0 del campo eléctrico con la cual se produce la perforación del dieléctrico.

Resolución:

El condensador esférico tiene igual magnitud de carga Q en sus armaduras pero con signos diferentes. El potencial en la armadura exterior es igual a cero.



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + \frac{(-Q)}{R}\right] = 0$$

El potencial en la armadura interior es:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{(-Q)}{R}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(R-r)}{Rr}\right] \quad ...(1)$$

La diferencia de potencial entre las armaduras será:

$$V_1 - V_2 = V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(R-r)}{Rr}\right]$$

La intensidad de campo eléctrico es máxima cerca de la superficie de la armadura interior del condensador:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r^2}\right) \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$V_1 = E_0\left[\frac{(R-r)}{R}\right]r \quad ...(3)$$

Completando cuadrados:

$$V_1 = \frac{E_0}{R}\left[\frac{R^2}{4} - \left(r - \frac{R}{2}\right)^2\right] \quad ...(4)$$

El potencial V_1 será máximo cuando:

$$r - \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{R}{2} \quad ...(5)$$

Reemplazando (5) en (3):

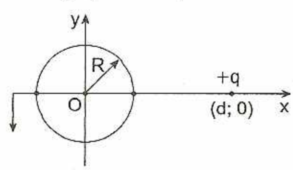
$$V_0 = E_0\left(\frac{R}{4}\right) = (3\times 10^4)(1)$$

$$\therefore\ V_0 = 3\times 10^4\ \text{V}$$

IMÁGENES ELECTROSTÁTICAS

Carga puntual y esfera conductora

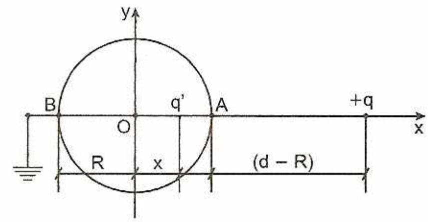
Se tiene una esfera conductora de radio R conectado a tierra. A una distancia "d" de su centro ($R < d$) se coloca una carga puntual "q". Hallar la posición de la carga imagen, su magnitud y la fuerza eléctrica resultante que actúa sobre la carga puntual "q".



Resolución:

La presencia de la carga puntual +q origina una distribución de cargas en el cuerpo esférico, cargándose el cuerpo con una carga neta "q" cuyas cargas se encuentran distribuidas en la superficie heterogéneamente, el sistema equivalente será imaginar a la carga q' en un punto del eje X debido a la simetría, como muestra la figura siguiente. A este modo de cargar el cuerpo esférico se denomina: método de inducción.

Si q' no estuviera en el eje X, se tendría componente tangencial del campo eléctrico $\vec{E}$ en los puntos A y B. La carga imagen q' está ubicada en la posición (x; 0).



Para hallar el valor de q' y su posición x, tengamos presente que el potencial eléctrico en los puntos A y B es igual a cero, debido a la conexión de la esfera a tierra.

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(d-R)} + \frac{q'}{(R-x)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow q' = -\left(\frac{R-x}{d-R}\right)q \quad ...(1)$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(d+R)} + \frac{q'}{(R+x)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow q' = -\left(\frac{R+x}{d+R}\right)q \quad ...(2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2): $\dfrac{(R-x)}{(d-R)} = \dfrac{(R+x)}{(D+R)}$

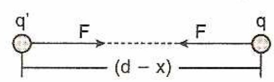
Resolviendo tenemos: $x = \dfrac{R^2}{d}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1): $q' = -\dfrac{R}{d}q$ ...(4)

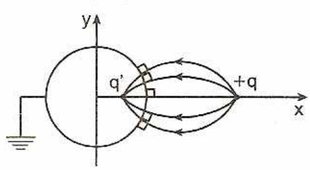
Luego el sistema se reduce a dos cargas puntuales q y q':

De la ley de Coulomb: $F = k\left[\dfrac{qq'}{(d-x)^2}\right]$ ...(5)

Reemplazando (3) y (4) en (5): $F = k\left[\dfrac{Rdq^2}{(d^2-R^2)^2}\right]$

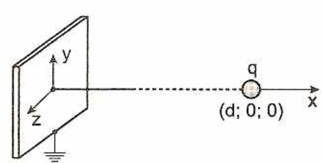


La superficie de la esfera de radio R se comporta como una superficie equipotencial, por consiguiente las líneas de fuerza intersectan perpendicularmente a la superficie.



Placa conductora infinita y carga puntual

Se tiene una placa conductora infinita conectada a tierra y a una distancia "d" se coloca una carga puntual "q". Hallar la fuerza eléctrica resultante que ejerce "q" sobre la placa conductora infinita.

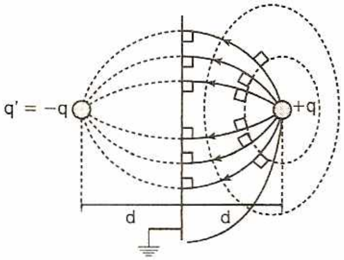


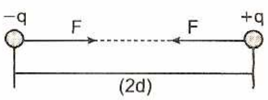
Resolución:

La tierra y la placa conductora infinita forman un solo gran conductor neutro. Al colocar la carga "q" cerca del plano las cargas libres de este gran conductor se redistribuyen quedando el plano cargado con carga de signo contrario a la carga inductora "q". Las líneas de fuerza del campo eléctrico salen de la carga puntual "q" y terminan en el plano conductor infinito (si "q", es positivo). El plano conductor se comporta como una superficie equipotencial, debido a la simetría de las líneas de fuerza podemos imaginar que las líneas de fuerza convergen en un punto donde se encuentra la carga imagen:

$$q' = -q$$

Por consiguiente la distancia de separación entre la carga puntual "q" y la carga imagen "q" es igual a: (2d).





Luego el sistema inicial se reduce a la interacción de dos cargas puntuales "q" y q':

De la ley de Coulomb; la fuerza F, que la carga "q" ejerce sobre la placa es del mismo valor pero de sentido contrario a la fuerza que la placa (o la carga imagen q') ejerce sobre la carga "q":

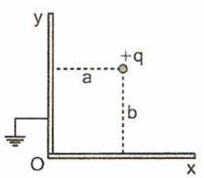
$$F = k\left|\frac{qq'}{(2d)^2}\right| \Rightarrow F = \frac{k}{4}\left(\frac{q^2}{d^2}\right)$$

En la región ($x < 0$), detrás del plano infinito, no hay líneas de fuerza ($E = 0$) y el potencial eléctrico es cero, como también lo es en la superficie del plano: $V_{(x=0)} = 0$.

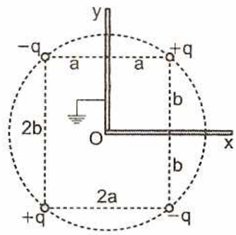
El criterio de carga imagen es un sistema equivalente, o artificio físico.

Carga puntual y dos semiplanos infinitos

Se tiene una armadura de dos semiplanos conductores infinitos que se intersectan formando un ángulo recto. La armadura se encuentra conectada a tierra. Si colocamos una carga puntual "q" en la posición (a; b; 0), hallar la posición de las cargas imagen.



Resolución:



La armadura a tierra puede ser reemplazada por tres cargas imagen:

$q_1 = -q$, posición: ($-a$; b; 0)

$q_2 = +q$, posición: ($-a$; $-b$; 0)

$q_3 = -q$, posición: (a; $-b$; 0)

La carga puntual "q" y las cargas imagen q_1, q_2 y q_3 se encuentran contenidos en una misma circunferencia, con centro en el vértice de la armadura, punto O.

La tierra y los dos semiplanos infinitivos forman un solo gran conductor neutro, al colocar la carga puntual "q" cerca de los semiplanos las cargas libres de este gran conductor se redistribuyen quedando la armadura cargada. Realmente las cargas se encuentran en los semiplanos, el criterio de las cargas imagen en un sistema equivalente de la distribución real de las cargas. Si la armadura no estaría conectado a tierra la distribución de cargas sigue siendo el mismo, dado que la carga excedente se distribuye en el infinito.

CARGA PUNTUAL ENTRE DOS PLANOS CONDUCTORES

La presencia de una carga puntual entre dos planos conductores que forman un ángulo α entre sí origina una redistribución de las cargas eléctricas libres en los planos conductores, el cual se puede reemplazar por un sistema equivalente, es decir, por las cargas imagen. Si, $360°/\alpha$ es un número entero, entonces el número de cargas imagen será: $\dfrac{360°}{\alpha} - 1$

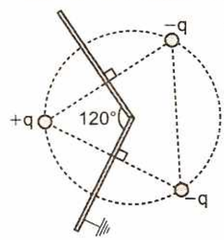
Es decir: $n = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow n = 3; 4; 5; 6; ...$

Número de cargas imagen $= n - 1$

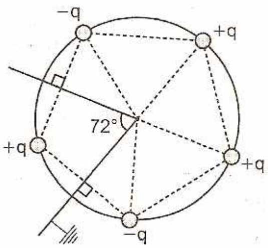
1. Si $\alpha = 120° \Rightarrow n = 3$

   Cuando la carga puntual se encuentra a igual distancia de los planos conductores, "n" es el número de lados del polígono regular en cuyos vértices se encuentran ubicados la carga puntual y las cargas imagen.

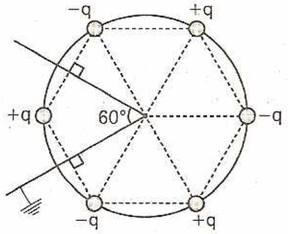
   En este caso tenemos un triángulo equilátero.



2. Si, $\alpha = 72° \Rightarrow n = 5$
la carga puntual y las cargas imagen se encuentran ubicadas en los vértices de un pentágono regular.



3. Si, $\alpha = 60° \Rightarrow n = 6$
La carga puntual y las cargas imagen se encuentran ubicadas en los vértices de un hexágono regular.



POTENCIAL DE TIERRA

Consideremos tierra como un conductor esférico de radio R muy grande ($R \to \infty$), para valores de carga comunes en electrostática (microcoulomb a lo más) el potencial de este gran conductor esférico es igual a cero:

$$V_{(\text{tierra})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R}\right) \approx 0$$

Cualquier cuerpo conductor conectado al gran conductor esférico, tierra, tomará de (o cederá) tierra las cargas necesarias para que el potencial eléctrico de ambos sea igual a cero. El potencial de tierra no se modifica cuando gana o pierde electrones. Luego, el potencial eléctrico de cualquier cuerpo conductor conectado a tierra es cero.

1. La figura 1 un cuerpo conductor A, con carga inicial q_0, alrededor del cual no hay otras cargas, se conecta a tierra, entonces al final su carga es igual a cero, entonces decimos que el cuerpo A se ha descargado.

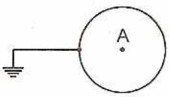


Fig. 1

2. La figura 2 muestra un cuerpo conductor B, inicialmente neutro alrededor del cual hay un cuerpo C cargado con magnitud Q, puede haber más cuerpos cargados, luego B se conecta a tierra. Entonces el cuerpo B y tierra forman un solo gran conductor neutro y debido a la presencia de C cerca de B, las cargas del conductor (B + tierra) se redistribuyen de tal manera que en B hay cargas de signo contrario a Q y en la tierra cargas del mismo signo de Q pero muy alejadas, o sea, neutralizadas. El cuerpo B conectado a tierra y, por lo tanto, con potencial eléctrico cero tiene ,entonces, carga neta "no" nula.

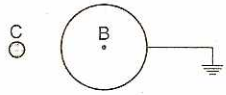


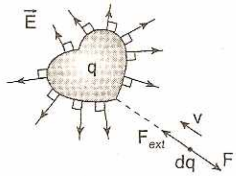
Fig. 2

Hemos explicado así que un conductor conectado a tierra (B) siempre el potencial es nulo, pero la carga neta no es necesariamente nula.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA U

La energía de un cuerpo conductor aislado con carga "q", es igual al trabajo realizado por un agente externo para cargar el cuerpo trasladando las cargas dq desde el infinito.

Para comunicar una carga eléctrica a un conductor hay que realizar un trabajo en vencer las fuerzas repulsivas de *Coulomb* entre las cargas de igual signo.



El trabajo se gasta en aumentar la energía eléctrica del cuerpo cargado. El trabajo que realizan las fuerzas externas, al trasladar la carga dq desde el infinito al conductor aislado es:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)$$

Demostración:

1. Sabemos que:
$dW_{A \to B} = dq(V_B - V_A)$, pero A está en el infinito.
Luego: $V_A = 0 \Rightarrow dW_{\infty \to B} = dqV_B$, B está en el cuerpo conductor
Además: $V = \frac{q}{C} \Rightarrow dW_{\infty \to B} = \frac{q}{C}dq$
Integrando, tenemos:
$$W_{\infty \to B} = \int_0^q \frac{1}{C}qdq = \frac{1}{2}\int_0^q qdq = W_{\infty \to B} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)$$
De la definición: $U = W_{\infty \to B} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)$

Para el caso particular de una esfera conductora aislada de radio R, su capacidad eléctrica es:
$C = R/k$, entonces su energía electrostática será igual a:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}\right)q^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

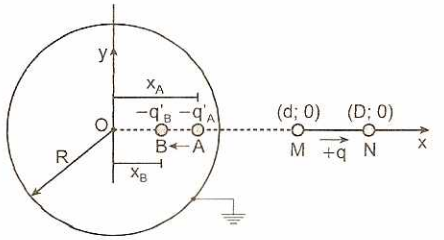
1. Se tiene una esfera conductora de radio R, conectada a tierra. A una distancia "d" se encuentra una carga puntual +q. ¿Qué trabajo se necesita realizar contra las fuerzas eléctricas para alejar lentamente esta carga hasta una distancia D?

Resolución:

Cuando la carga puntual se encuentra en la posición M(d; 0) su carga imagen se ubica en la posición A(X_A; 0), donde: $X_A = \frac{R^2}{d}$. Su carga imagen es: $q'_A = -\frac{R}{d}q$

La carga imagen q'_A genera un potencial sobre la carga puntual +q en M.

Luego: $V_M = \frac{kq'A}{(d - x_A)} \Rightarrow V_M = -\frac{kqR}{(d^2 - R^2)}$



Cuando la carga +q se encuentra en la posición N(D; 0) su carga imagen se ubica en la posición B(X_B; 0), donde: $X_B = \frac{R^2}{D}$

Su carga imagen es: $q'_B = -\frac{R}{D}q$

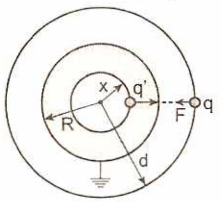
La carga imagen q'_B genera un potencial sobre la carga puntual +q en N.

Luego: $V_N = \frac{kq'_B}{(D - x_B)} \Rightarrow V_N = -\frac{kqR}{(D^2 - R^2)}$

El trabajo realizado, para trasladar +q, contra las fuerzas externas será:

$$W_{M\to N} = q(V_N - V_M) \Rightarrow W_{M\to N} = \frac{kq^2R(D^2 - d^2)}{(D^2 - R^2)(d^2 - R^2)}$$

2. Se tiene una esfera conductora de radio R = 0,4 m, conectado a tierra, a su alrededor gira con velocidad angular constante una carga puntual de masa $m = 10^{-18}$ kg y carga $q = +8 \times 10^{-13}$ C, con radio de curvatura d = 0,8 m. Hallar la velocidad angular ω. Desprecie la acción del campo gravitatorio.



Resolución:

Debido al desplazamiento de la carga puntual, la carga imagen también describe una trayectoria circular de radio de curvatura x igual a:

$$x = \frac{R^2}{d} \Rightarrow x = 0,2 \qquad ...(1)$$

La magnitud de la carga imagen es:

$$q' = -\frac{R}{d}q \Rightarrow q' = -4 \times 10^{-13}\,C$$

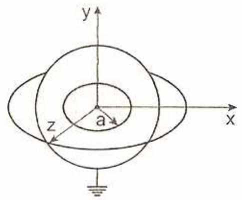
Cálculo de la fuerza de *Coulomb* entre q y q':

$$F = \frac{kqq'}{(d - x)^2} \Rightarrow F = 8 \times 10^{-15}\,N$$

Dinámica circular, para la carga puntual:

$$\Sigma F_{radiales} = m\omega^2 d \Rightarrow F = m\omega^2 d$$

Luego: $\omega = \sqrt{\frac{F}{md}} \Rightarrow \omega = 100$ rad/s



De este problema se puede deducir que, un anillo de radio "d" cargado "q" uniformemente con densidad lineal λ, cuando está colocado concéntricamente a una esfera conductora, conectada a tierra, de radio R, la carga imagen es un anillo de radio "a" y carga "q" uniformemente distribuido:

Radio del anillo imagen = a = R^2/d

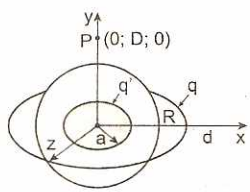
Carga imagen = $q' = \frac{R}{d}q$

3. Hallar el potencial eléctrico en el punto P(0; D; 0) del eje de un anillo de radio "d" cargado con magnitud +q uniformemente distribuido, cuando éste está colocado concéntricamente a una esfera conductora neutra de radio R (R < d). El anillo se encuentra contenido en el plano X-Z.

Resolución:

El anillo imagen tiene una carga de magnitud:

$q' = \frac{R}{d}q$, uniformemente distribuido, y el radio de curvatura es: $a = \frac{R^2}{d}$ ...(1)



De la condición del problema, la esfera es neutra y no está conectado a tierra. Del principio de conservación de las cargas eléctricas:

$q' + q'' = 0 \Rightarrow q'' = -q'$

Luego: $q'' = +\dfrac{R}{d}q$ ...(2)

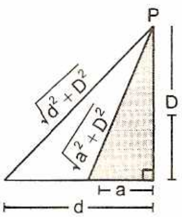
q", es la carga complementaria, ubicada en el centro de la esfera. Por consiguiente tenemos dos cargas imagen: q' y q".

El potencial eléctrico en el punto P se debe a la superposición de potenciales producidos por: +q, q' y q".

$$V_P = k\left(\frac{q}{\sqrt{d^2+D^2}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2+D^2}} + \frac{q''}{D}\right)$$

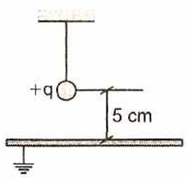
Reemplazando (1) y (2):

$$V_P = kq\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+D^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^4+(dD)^2}} + \frac{R}{dD}\right)$$

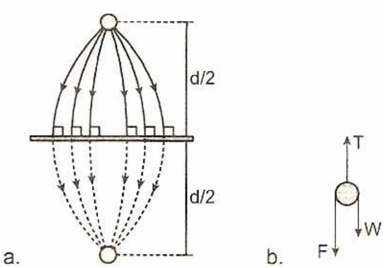


Si la esfera conductora estaría conectado a tierra, entonces: $q'' = 0$

4. Sobre un plano conductor ilimitado conectado a tierra, se encuentra colgado una pequeña esfera de peso 30 N y carga eléctrica q = 10 μC, a 5 cm distante del plano horizontal. Halla la tensión en la cuerda.



Resolución:



La carga +q induce en la placa una carga de igual magnitud pero de signo contrario −q, también se le denomina carga imagen, haciendo analogía con un espejo plano.

La fuerza de atracción entre las cargas es:

$$F = k\frac{qq}{d^2} = 9\times10^9\left[\frac{(10^{-5})^2}{10^{-2}}\right] \Rightarrow F = 90\text{ N}$$

Analizando el DCL de la carga +q: $\Sigma F_y = 0$

$T = W + F = 30\text{ N} + 90\text{ N} \quad \therefore\ T = 120\text{ N}$

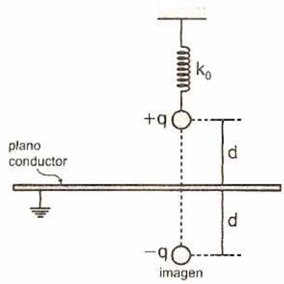
5. Sobre un plano conductor ilimitado conectado a tierra cuelga de un resorte aislante de rigidez k_0 = 1000 N/m, una pequeña bola. Una vez que la bola se cargó esta descendió Δx = 1 cm, y la distancia hasta el plano conductor llegó a ser igual a d = 3 cm. Determinar la carga de la bola.

Resolución:

El resorte incrementa su deformación en Δx debido a la fuerza de atracción entre la carga de la bola y su carga imagen. La carga de la bola y la carga imagen tienen igual magnitud de carga pero signos opuestos, equidistantes del plano ilimitado. Por consiguiente:

$$k_0 = \Delta x = F_{eléct} \Rightarrow k_0 = \Delta x = k\frac{q^2}{4d^2}$$

Despejando: $q = 2d\sqrt{\dfrac{k_0\Delta x}{k}}$ ...(1)

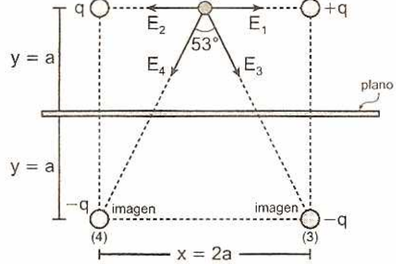


Reemplazando datos en (1):

$$q = (2)(3\times10^{-2})\sqrt{\frac{10^3\times10^{-2}}{9\times10^9}} \Rightarrow q = 2\ \mu\text{C}$$

6. Las cargas puntuales "q" y +q se sitúan a la distancia x = 60 cm una de otra y a unas distancias idénticas y = 30 cm de un mismo lado de un plano conductor ilimitado. Sabiendo que la magnitud q = $\sqrt{5}$ μC. Hallar la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto medio del segmento que determinan las posiciones de las cargas "q" y +q.

Resolución:



La placa conductora infinita es un gran conductor neutro, al colocar las cargas puntuales "q" y +q cerca del plano las cargas libres de este gran conductor se redistribuyen quedando el plano cargado con carga de signo opuesto igual a $-2q$, representado por las cargas imagen. Del principio de conservación de las cargas, el complemento de la carga en el plano $+2q$ se distribuye en el infinito, por consiguiente, se desprecia su influencia sobre las cargas puntuales q y +q.

Llevamos una carga de prueba q_0 en el punto medio del segmento que determinan las posiciones de las cargas "q" y +q. Cálculo de las intensidades de campo eléctrico:

$$E_1 = E_2 \quad \text{y} \quad E_3 = E_4 = \frac{kq}{(a\sqrt{5})^2} = \frac{kq}{5a^2} \qquad ...(1)$$

Se puede observar que E_1 y E_2 se destruyen, por consiguiente la intensidad resultante será:

$$E_R^2 + E_3^2 + E_4^2 + 2E_3E_4\cos 53° \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2): $E_R = \frac{4\sqrt{5}}{25}\left(\frac{kq}{a^2}\right)$ ...(3)

Reemplazando valores en (3), tenemos:

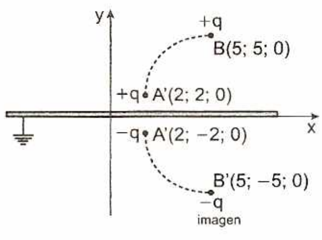
$E_R = 8 \times 10^4$ N/C

7. En el espacio tridimensional, en el plano X − Z se encuentra contenido una lámina conductora infinita, conectada a tierra. En la posición A(2; 2; 0) se encuentra una carga puntual q = 40 μC. ¿Qué trabajo necesitan realizar las fuerzas eléctricas para llevar lentamente esta carga hasta la posición B(5; 5; 0) cm?

Resolución:

El trabajo realizado por un agente externo para trasladar la carga puntual "q" es igual al producto de la carga en movimiento por la diferencia de potencial entre la posición B y la posición A:

$W_{A\to B} = q(V_B - V_A)$ ...(1)



Ubicamos nuestro sistema de referencia sobre la carga imagen −q. La carga imagen genera un potencial eléctrico sobre la carga +q en las posiciones A y B:

$$V_A = k\frac{(-q)}{d_A} = -9 \times 10^6 \text{ V}$$

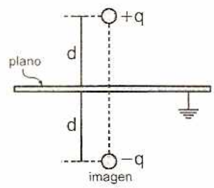
$$V_B = k\frac{(-q)}{d_B} = -3{,}6 \times 10^6 \text{ V} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$W_{A\to B} = 40 \times 10^{-6}(5{,}4 \times 10^6) \Rightarrow W_{A\to B} = 216$ J

8. A la distancia d = 30 cm de un plano conductor ilimitado, conectado a tierra, se encuentra una carga puntual q = 20 μC. ¿Qué trabajo se necesita realizar contra las fuerzas eléctricas para separar lentamente esta carga a una gran distancia del plano?

Resolución:



El trabajo realizado por un agente externo para trasladar la carga puntual "q" es igual al producto de la carga en movimiento por la diferencia de potencial entre la posición final y la posición inicial.

$W_{A\to B} = q(V_B - V_A)$ ...(1)

Ubicamos nuestro sistema de referencia sobre la carga imagen −q. La carga imagen genera un potencial eléctrico sobre la carga +q en el punto A:

$$V_A = \frac{k(-q)}{(2d)} = \frac{kq}{2d} \qquad ...(2)$$

La velocidad de alejamiento entre la carga puntual "q" y la carga imagen −q es lento (tiende a cero) de la condición del problema, por consiguiente nuestro sistema de referencia en −q es inercial.

Cuando la distancia de separación es muy grande ($d \leftrightarrow \infty$) el potencial generado por la carga imagen sobre "q" es cero: $V_B = 0$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), tenemos:

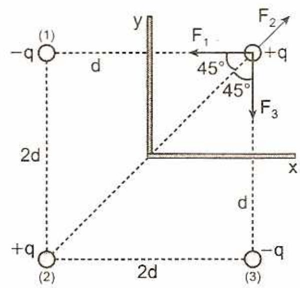
$$W_{A\to B} = q\left[0 - \frac{k(-q)}{2d}\right] \quad \therefore W_{A\to B} = \frac{kq^2}{2d} \quad ...(4)$$

Reemplazando datos en (4):

$$W_{A\to\infty} = \frac{9\times 10^9(400 \times 10^{-12})}{2(3\times 10^{-1})} = 6 \text{ J} \Rightarrow W_{A\to\infty} = 6 \text{ J}$$

9. Entre dos semiplanos conductores mutuamente perpendiculares se encuentra una carga puntual "q", distante "d" de estos. Hallar el módulo del vector fuerza que actúa sobre la carga puntual "q". La posición de la carga "q" en coordenadas cartesianas será: (d; d; O)

Resolución:



En este caso los semiplanos no están conectados a tierra, pero la distribución de cargas sigue siendo el mismo, debido a la carga inductora "q". La figura anterior muestra la posición de las cargas imagen, el cual es nuestro sistema equivalente.

Cálculo de las fuerzas que actúan sobre la carga inductora +q:

$F_1 = F_3 = \dfrac{kq^2}{4d^2}$, además: $F_2 = \dfrac{kq^2}{8d^2}$ ...(1)

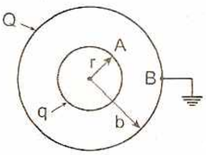
La fuerza resultante será:

$F = 2F_1(\cos 45°) - F_2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $F = F_1\sqrt{2} - F_2$

$\therefore\ F = \dfrac{kq^2}{8d^2}(2\sqrt{2} - 1)$

10. Una esfera conductora metálica de radio "a" y cargado con magnitud +q, se rodea con una envoltura esférica conductora de radio "b" sin carga. Hallar el nuevo potencial de la esfera de radio "a", cuando la envoltura de radio "b" se conecta a tierra.



Resolución:

El potencial en la superficie de la envoltura es igual a cero, por estar conectado a tierra, entonces, la carga +q induce una carga neta Q en la superficie de la envoltura pero de signo opuesto a la carga +q.

$V_B = k\dfrac{q}{b} + k\dfrac{Q}{b} = 0.$

Luego, la carga inducida: $Q = -q$ ...(1)

El nuevo potencial, en la superficie de la esfera de radio "a" será igual a la superposición de potenciales:

$V_A = k\dfrac{q}{a} + k\dfrac{Q}{b}$ ...(2)

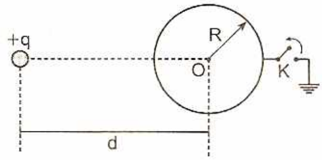
Reemplazando (1) en (2), tenemos:

$V_A = kq\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ $\quad\therefore\ V_A = kq\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)$

El potencial eléctrico inicial de la esfera era igual a $V_0 = kq/a$, esto significa que su potencial disminuye cuando la envoltura se conecta a tierra: $V_A = V_0\left(1 - \dfrac{a}{b}\right)$

11. La figura muestra un sistema que sirve para cargar una esfera conductora de radio R por el método de inducción. La carga puntual "q" se encuentra a una distancia "d" del centro del cuerpo esférico. El interruptor K está cerrado inicialmente, luego se abre. Determinar la carga neta de la esfera.

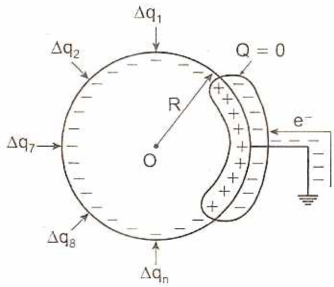
Sugerencia: el potencial eléctrico de la tierra es igual a cero.



Resolución:

La presencia de la carga puntual "q" origina una distribución de cargas en el cuerpo esférico. La cara +q induce cargas de signo opuesto (−) y en la otra zona cargas de signo (+), polarizando el cuerpo esférico.

Las cargas inducidas de signo positivo se neutralizan con los electrones que vienen de la tierra, por consiguiente la esfera se carga con signo opuesto a la carga inductora. Después que se abre el interruptor K la esfera conductora no podrá descargarse.



Pero sabemos que el potencial de tierra es igual a cero, entonces el potencial de la superficie esférica es igual a cero, por consiguiente el potencial en el centro de la esfera también es igual a cero, cuando el interruptor K está cerrado:

$$V_{\text{centro(O)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \frac{\Delta q_1}{R} + \frac{\Delta q_2}{R} + \frac{\Delta q_3}{R} + \ldots + \frac{\Delta q_n}{R}\right) \quad ...(1)$$

La carga neta del cuerpo esférico será la sumatoria de las cargas superficiales:

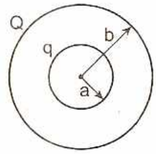
$q' = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + \ldots + \Delta q_n$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$V_{\text{centro(O)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \frac{q'}{R}\right) \quad ...(3)$$

De (3) igualando a cero: $q' = -\left(\dfrac{R}{d}\right)q \Leftrightarrow R < d$

12. Un sistema se compone de dos cascarones metálicos concéntricos delgados de radios "a" y "b" con cargas "q" y Q correspondientes. Hallar la energía propia de cada uno de los cascarones U_1 y U_2; la energía de interacción entre éstas U_{12} y la energía total eléctrica U del sistema.



Resolución:

La energía electrostática de todo cuerpo cargado es:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)$$

Para el caso de un cuerpo esférico: $U = \frac{k}{2}\left(\frac{q^2}{R}\right)$, entonces, para nuestro caso:

$$U_1 = \frac{k}{2}\left(\frac{q^2}{a}\right) \text{ y } U_2 = \frac{k}{2}\left(\frac{Q^2}{b}\right) \qquad ...(1)$$

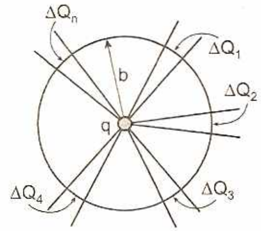
Para efectos externos al cascarón de radio "a" se puede considerar que toda la carga está concentrado en el centro de curvatura, entonces el sistema se reduce a la interacción de una carga puntual "q" con el cascarón de radio "b" cargado con magnitud Q.

$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \ ... + \Delta Q_n$

U_{12} : Energía de interacción electrostática:

$$U_{12} = \frac{kq}{b}(\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + ... + \Delta Q_n)$$

$$\Rightarrow U_{12} = k\left(\frac{qQ}{b}\right) \qquad ...(2)$$



La energía eléctrica total del sistema es igual a:

$$U = U_1 + U_2 + U_{12} \Rightarrow U = \frac{k}{2}\left(\frac{q^2}{a} + \frac{Q^2}{b} + \frac{2qQ}{b}\right)$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

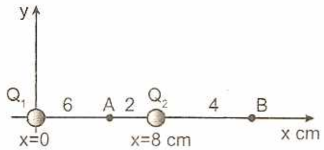
Dos cargas puntuales, $Q_1 = 10\ \mu C$ y $Q_2 = 4\ \mu C$ están colocadas sobre el eje X, Q_1 en $x = 0$ y Q_2 en $x = 8$ cm. Calcule en kV, la diferencia de potencial V(6 cm) – V(12 cm), entre los puntos x = 6 cm y x = 12 cm. ($1\ \mu C = 10^{-8}$ C)

$$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)$$

A) –150 B) –90 C) –30 D) 90 E) 150

Resolución:

De la información del problema tenemos:



$$V_A + V_{1A} + V_{2A} = \frac{kQ_1}{d_{1A}} + \frac{kQ_2}{d_{2A}}$$

$$V_A = 9\times10^9 \times\left(\frac{10\times10^{-6}}{6\times10^{-2}} - \frac{4\times10^{-6}}{2\times10^{-2}}\right) = -3\times10^5\ V$$

$$V_B = V_{1A} + V_{2B} = \frac{kQ_1}{d_{1B}} + \frac{kQ_2}{d_{2B}}$$

$$V_B = 9\times10^9\left(\frac{10\times10^{-6}}{12\times10^{-2}} - \frac{4\times10^{-6}}{4\times10^{-2}}\right) = -1,5\times10^5\ V$$

$$V_A - VB = -1,5\times10^5 = -150\ kV$$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Un conductor tiene una densidad de carga superficial de 1,2 nC/m². Hallar el módulo del campo eléctrico, en N/C, sobre la superficie del conductor.

($\varepsilon_0 = 8,85\times10^{-12} C^2/Nm^2$, 1 nC = 10^{-9} C)

A) 125,6 B) 135,6 C) 145,6
D) 155,6 E) 165,6

Resolución:

En la superficie de un cuerpo conductor el módulo de la intensidad de campo eléctrico se determina por: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

σ : Densidad de carga superficial.

ε_0 : Permitividad eléctrica del vacío.

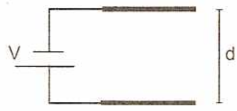
Con los datos del problema, reemplazamos:

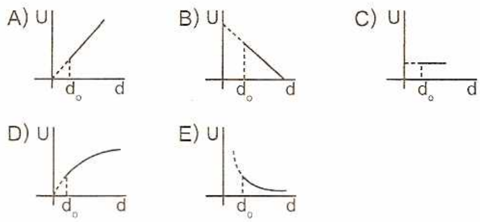
$$E = \frac{1,2\times10^{-9}}{8,85\times10^{-12}} \Rightarrow E = 135,6\ N/C$$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Las placas de un condensador de placas paralelas son conectadas a una batería V como se indica en la figura. Sea "d" la distancia entre las placas y sea U la energía electrostática almacenada en el condensador. Sin desconectar la batería, "d" se aumenta a partir de un valor inicial d_o. Diga cuál de los siguientes gráficos representa mejor la dependencia de U con "d".





Resolución:

Sea U la energía electrostática almacenada en el condensador plano y vacío se determina:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \ldots(I)$$

Además sabemos que la capacitancia de un condensador plano y vacío se determina:

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d} \qquad \ldots(II)$$

Por lo tanto, reemplazando (II) en (I):

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o \frac{A}{d}\right)V^2$$

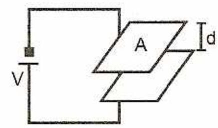
De los datos se considera:

V: constante

A: constante

ε_o: constante

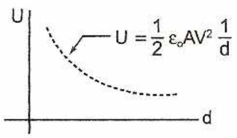
d: variable



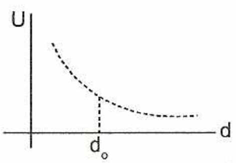
Por lo tanto:

U es inversamente proporcional a "d"

$$U = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_o AV^2\right)}_{\text{cte}}\frac{1}{d}$$



⇒ como "d_o" es para la condición inicial, entonces la gráfica es:



Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Para almacenar energía eléctrica se usan 2000 condensadores de 5 μF conectados en paralelo. Calcule cuánto cuesta cargar este sistema en soles hasta 50 kV, si el costo de 1 kW–h es S/. 0,36 soles.

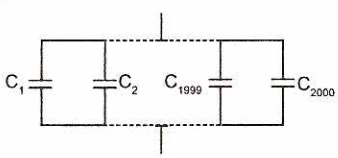
A) 1,00 B) 1,25 C) 1,50

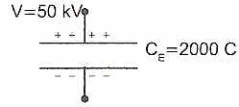
D) 1,75 E) 2,00

Resolución:

Del gráfico:

$V = 50$ kV





$C_1 = C_2 = C_3 \ldots = C_{2000} = 5\ \mu F$

Por lo tanto, la energía almacenada en los capacitadores es: $U_{CE} = \frac{1}{2}C_E V^2$

Reemplazando:

$$U_{CE} = \frac{1}{2}(2000 \times 5 \times 10^6)(50 \times 10^3)^2$$

$$U_{CE} = 125 \times 10^5\ J$$

Calculando cuánto cuesta cargar el sistema.

$$125 \times 10^5\ J\left(\frac{0,36}{1kw-h} \times \frac{1K}{1000} \times \frac{1h}{3600\ s}\right) = 1,25 \text{ soles}$$

⇒ Cargar el sistema cuesta 1,25 soles.

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Dos cargas de igual signo se colocan a lo largo de una recta con 2 m de separación. La relación de cargas es 4. Calcule (en nC) la carga menor si el potencial eléctrico en el punto sobre la recta que se encuentra a igual distancia de las cargas es de 9 V.

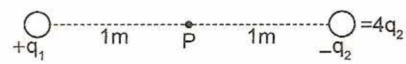
($k = 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2$; $1\ nC = 10^{-9}\ C$)

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3

D) 0,4 E) 0,5

Resolución:

Del gráfico



Datos: $q_1 = 4q_2$

$V_P = 9$ V

Sabemos: $V_1 + V_2 = 9 \qquad \ldots(1)$

En (1): $\dfrac{9 \times 10^9 (q_1)}{1} + \dfrac{9 \times 10^9 (q_2)}{1} = 9$

Resolviendo:

$q_1 + q_2 = 10^{-9} \Rightarrow q_1 + q_2 = 1$ nC

$4q_2 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 0,2$ nC

$q_1 = 0,8$ nC

$\therefore q_2 = 0,2$ nC

Clave: B

PROBLEMA 6 (UNI 2014 - I)

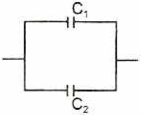
Cuando se conectan en paralelo los condensadores C_1 y C_2, la capacitancia equivalente es 2 μF. Pero cuando se conectan en serie los mismos condensadores la capacitancia equivalente es 0,25 μF. Calcule $|C_1 - C_2|$ en μF

A) 1,00 B) 1,41 C) 1,72

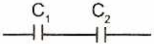
D) 2,00 E) 2,31

Resolución:

Sabemos por condiciones del problema:



$$C_E = C_1 + C_2 = 2\ \mu F \qquad ...(1)$$



$$C_E = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}25\ \mu F$$

$$C_1C_2 = 0{,}5\ \mu F \qquad ...(2)$$

De la expresión (1) y (2), tenemos:

$$C_1(2 - C_1) = 0{,}5$$

$$C_1^2 - 2C_1 + 0{,}5 = 0$$

Resolviendo: $C_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ C_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore\ |C_1 - C_2| = \sqrt{2} = 1{,}41$$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos esferas conductoras de radios iguales (mucho menores de 3 cm) y con cargas de $+8 \times 10^{-9}$ C y -40×10^{-9} C, respectivamente, se ponen en contacto y posteriormente se las separa 3 cm. La fuerza, en Newton, que actúa después sobre cada una de ellas es:
$(k = 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2)$

A) 256×10^{-5} B) 400×10^{-5} C) 125×10^{-5}
D) 256×10^{-5} E) 400×10^{5}

2. Se tiene un objeto conductor neutro que contiene una cavidad esférica en cuyo centro se encuentra una carga "q". De los siguientes enunciados:
I. Se introduce una carga "q" en la superficie interna del conductor.
II. Se crea un campo eléctrico diferente de cero en el interior del conductor.
III. En la superficie exterior hay una carga "q".
IV. La carga total en el conductor es cero.
¿Cuáles son correctas?

A) I, II y III B) III y IV C) I y III
D) I, II y IV E) II y IV

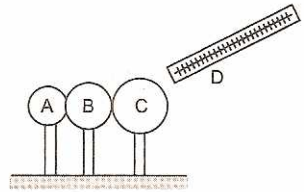
3. Indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
I. La carga eléctrica es una cantidad física fundamental en cualquier sistema de unidades.
II. La carga eléctrica es una cantidad física de naturaleza escalar.
III. La carga eléctrica de una partícula es $16{,}16 \times 10^{-18}$ C; esta puede dividirse en dos partes iguales cada una de $8{,}08 \times 10^{-18}$ C.

A) FVV B) VVF C) FVF D) VFF E) VVV

4. Indique cual(es) de las siguientes proposiciones es verdadera:
I. El número de cargas elementales negativas y positivas que tiene un cuerpo neutro es el mismo.
II. No es posible obtener un objeto con carga eléctrica de $7{,}8 \times 10^{-19}$ C.
III. Al frotar dos cuerpos es posible simultáneamente con cargas de igual magnitud y de signos opuestos.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) Todas E) Ninguna

5. Se tiene tres esferas metálicas A, B y C idénticas en contacto y sostenidas por barras aislantes, inicialmente neutras como se muestra en la figura. Si acercamos la barra D cargada positivamente logrando tocar la esfera C por cierto tiempo y luego la alejamos. Indicar la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones siguientes al ser separadas las esferas.



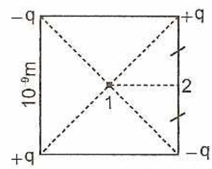
I. A tiene carga positiva, B permanece neutro C tiene carga negativa.
II. A tiene carga negativa, B permanece neutro, C tiene agua positiva.
III. Las tres A, B y C tienen carga positiva.
IV. Las tres A, B y C tienen carga negativa.

A) FVFV B) FFFV C) FFFF
D) FFVF E) VFFF

6. Si una esfera conductora es tocada por una barra cargada positivamente, la esfera adquiere una carga de 4 nC. Calcule el número de cargas elementales o fundamentales que son transferidas debido al contacto.

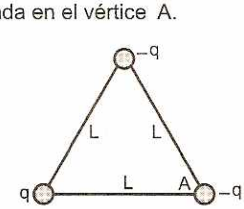
A) La esfera gana 25×10^{9} protones.
B) La esfera pierde 50×10^{9} electrones.
C) La esfera pierde 25×10^{9} electrones.
D) La esfera gana 25×10^{18} protones.
E) La esfera gana 25×10^{9} electrones.

7. Cuatro cargas son $q = 3{,}2 \times 10^{-19}$ C se disponen tal como muestra la figura. Una quinta carga $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C se coloca en el punto 1 experimentó la fuerza F_1, luego se desplaza hasta el punto 2 experimentando F_2. Determine (F_1/F_2)



A) 1 B) 0,64 C) 0,32
D) 0,08 E) 0

8. En la figura se muestran tres cargas en los vértices de un triángulo equilátero. Determine aproximadamente la dirección de la fuerza resultante sobre la carga ubicada en el vértice A.

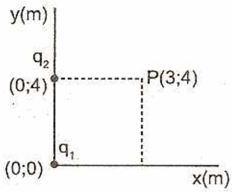


A) ↗ B) ↖ C) ↓
D) ↙ E) →

9. Dos cargas Q se colocan cada una en dos vértices opuestos de un cuadrado, y otras dos cargas "q" se colocan cada una en los otros dos vértices. Si la fuerza eléctrica resultante sobre Q es nula, determine la relación de magnitudes de Q en función de "q".

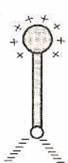
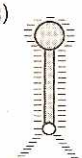
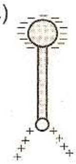
A) $Q = \sqrt{2}\,q$ B) $Q = -2\sqrt{2}\,q$ C) $Q = 2\sqrt{3}\,q$
D) $Q = 2q$ E) $Q = 1{,}5q$

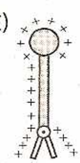
10. En la gráfica se muestran las cargas; $q_1 = 1\ \mu C$ y $q_2 = 2\ \mu C$. ¿Qué carga en (μC) debe colocarse en el punto P(3; 4) m para que la fuerza resultante sobre q_2, sea igual a $(-6 \times 10^{-3} i + 1{,}125 \times 10^{-3} j)$ N?



A) 1 B) 2 C) 3
D) 1,5 E) 2,5

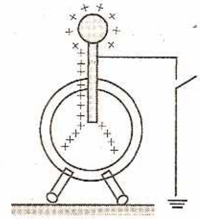
11. Si a un electroscopio descargado se le acerca una varilla cargada positivamente sin tocarlo. Indique la disposición de las láminas y distribución de cargas.

A)  B)  C) 

D)  E) 

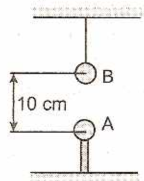
12. Indique las afirmaciones correctas, si el electroscopio mostrado en la figura cargado positivamente se conecta a tierra.

I. Cargas positivas se mueven a tierra.
II. El electroscopio se carga negativamente.
III. Cargas negativas se mueven de tierra hacia el electroscopio.



A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

13. La esferita A de carga $Q_A = 1\ \mu C$ esta fija a la tierra, mientras que la esferita B de carga $Q_B = -1\ \mu C$ pende de una cuerda que esta fijo al techo como se muestra en la figura. Si la tensión en la cuerda es de 1,9 N, determine la masa de la esferita B en gramos. ($g = 10\ m/s^2$).



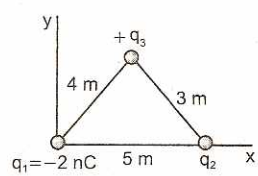
A) 150 B) 100 C) 200
D) 250 E) 300

14. Respecto a la Ley de Coulomb cuales de las siguientes proposiciones son incorrectas.

I. Está definida solo para cargas puntuales.
II. La presencia de una tercera carga produce un cambio en la fuerza eléctrica entre las dos primeras.
III. El valor de la constante depende exclusivamente del sistema de unidades.

A) I B) I y II C) I y III
D) Todas E) II

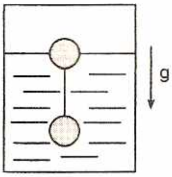
15. Considere las 3 cargas puntuales de la figura, determine la carga q_2, si la fuerza electrostática resultante sobre q_3 (en nC) es únicamente vertical y hacia abajo.



A) −1,5 B) +3,5 C) −4,5
D) +5,5 E) −6,5

16. Hállese la tensión del hilo que une dos bolas idénticas de radio "r", en cuyo centro se encuentran cargas iguales Q. Una de las bolas flota en la superficie de cierto líquido con densidad ρ y la segunda bola tiene una masa "m" y está suspendida del hilo

permaneciendo dentro del líquido. La distancia entre los centros de las bolas es L.



A) mg B) $mg + \dfrac{Q^2}{4 \in L^2}$

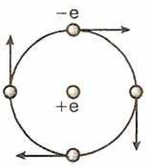
C) $2mg + \dfrac{Q^2}{4 \in L^2}$ D) $mg - \dfrac{Q^2}{4 \in L^2}$

E) $mg + \dfrac{Q^2}{4\pi \in L^2}$

17. Un electrón se mueve alrededor de un protón pesado a la rapidez angular describiendo una órbita circular. La carga de electrón es $-e$; su masa m_e; mientras que la carga del pronto, $+e$. Hallar (en cm) el radio de la órbita. ($w = 1016$ rad/s).

A) 10^{-8} B) 5×10^{-8} C) 7×10^{-8}
D) $2{,}2 \times 10^{-8}$ E) $1{,}4 \times 10^{-8}$

18. Cuatro electrones, situados en los ángulos de un cuadrado con lado "a", giran describiendo una órbita circular alrededor del protón. Este se encuentra en el centro de dicho cuadrado. Determinar la velocidad angular del movimiento de los electrones por la órbita.

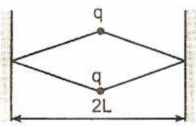


A) $\dfrac{e^-}{2a}\sqrt{\dfrac{1}{\pi a m \varepsilon_o}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)}$ B) $\dfrac{e^-}{2a}\sqrt{\dfrac{1}{4\pi a m \varepsilon_o}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)}$

C) $\dfrac{e^-}{2a}\sqrt{\dfrac{1}{6\pi a m \varepsilon_o}(\sqrt{2})}$ D) $\dfrac{e^-}{2a}\sqrt{\dfrac{1}{\pi a m \varepsilon_o}}$

E) $\dfrac{e^-}{2a}\sqrt{\dfrac{4}{\pi a m \varepsilon_o}}$

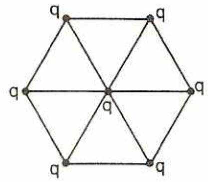
19. ¿A qué distancia se encontraran dos cargas "q", unidas a dos paredes inmóviles mediante cordones de goma de la manera ilustrada en la figura? La separación de los cordones, provocada por la interacción de las cargas, es mucho menor que su longitud L. La distancia entre las paredes es 2L. La rigidez de los cordones de goma es "k".



A) $\sqrt[5]{\dfrac{2q^2L^2}{k\pi\varepsilon_o}}$ B) $\sqrt[5]{\dfrac{q^2L^2}{k\pi\varepsilon_o}}$ C) $\sqrt[5]{\dfrac{3q^2L^2}{k\pi\varepsilon_o}}$

D) $\sqrt[5]{\dfrac{4q^2L^2}{k\pi\varepsilon_o}}$ E) $\sqrt[5]{\dfrac{6q^2L^2}{k\pi\varepsilon_o}}$

20. Siete cargas idénticas "q" están unidas mediante iguales hilos elásticos de la manera expuesta en la figura. Después de dejar las cargas libres, las longitudes de los hilos resultaron iguales a L. Determinar la tensión de cada hilo.



A) $\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_o L^2}\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B) $\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_o L^2}\left(\dfrac{9}{7} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

C) $\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_o L^2}(\sqrt{3})$ D) $\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_o L^2}$

E) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L^2}$

21. Una pequeña esfera posee 5×10^{20} electrones en exceso. Calcular su carga eléctrica.
(Carga de un electrón = $1{,}6 \times 10^{-19}$ coulomb)

A) +80 C B) +160 C C) −160 C
D) −80 C E) −8 C

22. Calcular la carga eléctrica, de un cuerpo que posee 2×10^{21} electrones en defecto.

A) +32 C B) −32 C C) +160 C
D) −320 C E) +320 C

23. Dos pequeñas esferas idénticas poseen cargas eléctricas de -4 μC y $+20$ μC, se ponen en contacto y se separan.
Indicar el número de electrones en exceso o defecto que tendrá cada esfera.

A) 2×10^{13} electrones en exceso.
B) 5×10^{13} electrones en defecto
C) 2×10^{13} electrones en exceso.
D) 8×10^{13} electrones en defecto.
E) 5×10^{13} electrones en exceso.

24. Se tiene un pequeño cuerpo con una carga eléctrica de -4×10^{-9} C. Calcular el número de electrones que posee:

A) 25×10^{9} B) 40×10^{10} C) 5×10^{9}
D) $6{,}4 \times 10^{9}$ E) 4×10^{10}

25. Dos cargas eléctricas: $q_1 = +4 \times 10^{-5}$ C; $q_2 = -5 \times 10^{-4}$ están ubicadas en una misma recta. Y separadas

por una distancia de 6 m. Calcular la fuerza de interacción entre las cargas.

A) 3 N B) 5 N C) 7 N
D) 9 N E) 10 N

26. Calcular la fuerza de repulsión entre dos cargas eléctricas de $+2\ \mu C$ y $+4\ \mu C$ separadas por una distancia de 4 cm.

A) 15 N B) 25 N C) 45 N
D) 9 N E) 180 N

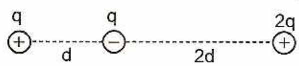
27. Dos cargas eléctricas $Q = 15\ \mu C$ y $q = -3\ \mu C$ se atraen con una fuerza de 50 N. Calcular la distancia que los separa.

A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm
D) 9 cm E) 10 cm

28. Se sabe que la fuerza de atracción entre dos cargas de valor "q" y 2q es 20 N. Si están separadas por 6 m. Hallar "q".

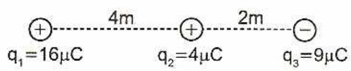
A) 2×10^{-4} C B) 3×10^{-4} C C) 6×10^{-4} C
D) 4×10^{-8} C E) 2×10^{-8} C

29. Calcular la fuerza resultante sobre la carga central.



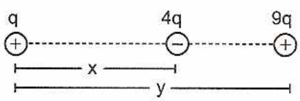
A) $k\dfrac{3q^2}{2d^2}$ B) $k\dfrac{q^2}{2d^2}$ C) $k\dfrac{2q^2}{3d^2}$
D) $k\dfrac{q^2}{d^2}$ E) $k\dfrac{2q^2}{d^2}$

30. Calcular la fuerza resultante sobre q_3.



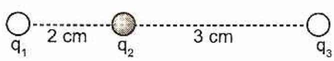
A) 36×10^{-3} N B) 81×10^{-3} N
C) 117×10^{-3} N D) 45×10^{-3} N
E) 54×10^{-3} N

31. Encontrar la relación $\dfrac{x}{y}$ para que la carga "q" se mantenga en equilibrio.



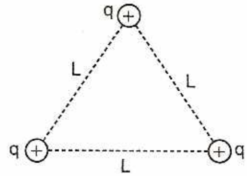
A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3
D) 2/5 E) 4/9

32. Hallar el valor y signo de q_3, para que q_2 se mantenga en equilibrio: $q_1 = -8\ \mu C$.



A) $+12\ \mu C$ B) $-12\ \mu C$ C) $+9\ \mu C$
D) $-9\ \mu C$ E) $-18\ \mu C$

33. Hallar la fuerza resultante sobre una de las cargas.



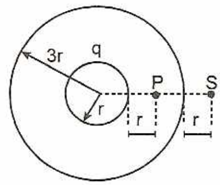
A) $k\dfrac{2q^2\sqrt{3}}{L^2}$ B) $k\dfrac{3q^2}{2L^2}$ C) $k\dfrac{2q^2}{L^2}$
D) $k\dfrac{q^2\sqrt{3}}{L^2}$ E) $k\dfrac{q^2\sqrt{3}}{L^2}$

34. De las proposiciones que se indican a continuación, indique verdadero (V) o falso (F) respecto a un conductor en equilibrio electrostático.

I. La intensidad del campo eléctrico en el interior del conductor es nula.
II. El potencial eléctrico de un punto interior del conductor es igual al potencial en su superficie.
III. Las líneas de fuerza son perpendiculares a la superficie del conductor.

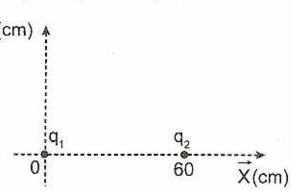
A) FVF B) FVV C) FFV
D) FFF E) VVV

35. A continuación se muestra dos cascarones (conductores) concéntricos electrizados. Si el potencial eléctrico en P es $\dfrac{kq}{6r}$, ¿Cuál es el módulo de la intensidad del campo eléctrico en P y en S?



A) $\dfrac{kq}{4r^2}; \dfrac{kq}{8r^2}$ B) $\dfrac{kq}{2r^2}; \dfrac{kq}{4r^2}$ C) $\dfrac{kq}{r^2}; \dfrac{kq}{9r^2}$
D) $\dfrac{kq}{4r^2}; 0$ E) $\dfrac{kq}{3r^2}; \dfrac{kq}{6r^2}$

36. Para el sistema formado por q_1 y q_2 ambas fijas, ¿en qué posiciones el potencial eléctrico puede ser nulo? ($q_1 = 1\ \mu C$; $q_2 = -2\ \mu C$).



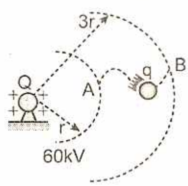
A) +10 cm; +80 cm
B) −20 cm; +40 cm
C) −30 cm; +70 cm
D) −50 cm; +90 cm
E) −60 cm; +20 cm

37. A continuación se muestra el trayecto de una partícula de 16 mg electrizada ($|q| = 1\mu C$). Despreciando efectos gravitatorios, indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

I. Si $q < 0$ y es desplazada lentamente desde A hasta B, la cantidad de trabajo A hasta B, la cantidad de trabajo del agente externo es 40 mJ.

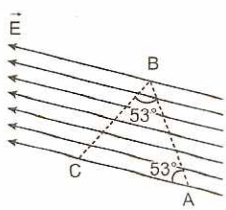
II. Si $q < 0$ e inicia su movimiento en A de tal forma que al pasar por B presenta una rapidez de 100 m/s, la cantidad de trabajo del agente externo es 120 mJ.

III. Si $q > 0$, y es soltada en B, entonces, la máxima rapidez que alcanza es de 50 m/s.



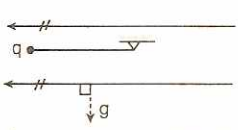
A) VFF
B) VFV
C) FVV
D) FFV
E) VVV

38. El potencial eléctrico en B es 47 kV, determine el potencial en C y en A, si el campo eléctrico es homogéneo y de intensidad 50 kN/C (AC = 50 cm).



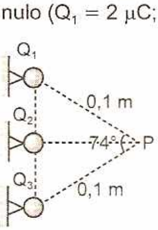
A) 7 kV; 18 kV B) 54 kV; 63 kV C) 40 kV; 18 kV
D) 7 kV; 63 kV E) 40 kV; 65 kV

39. Un péndulo de 50 cm de longitud, 40 g de masa y 500 μC de cantidad carga eléctrica se abandona en la posición mostrada. Si E = 600 N/C, Halle la máxima rapidez que adquiere la pequeña esfera ($g = 10\ m/s^2$)



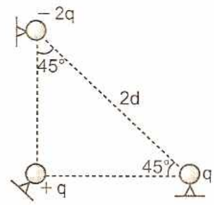
A) 4 m/s
B) $\sqrt{5}$ m/s
C) 8 m/s
D) 1 m/s
E) 10 m/s

40. Determine la cantidad de carga Q_3, si el potencial eléctrico en P es nulo ($Q_1 = 2\ \mu C$; $Q_2 = -8\ \mu C$).



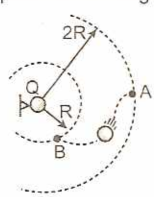
A) +2 μC B) +4 μC C) +6 μC
D) +8 μC E) +10 μC

41. Se muestra un sistema de partículas en reposo. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto donde el potencial eléctrico sea nulo.



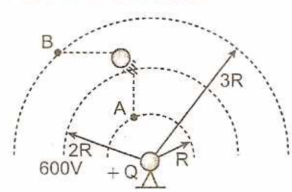
A) $\frac{kq}{d^2}$ B) $\frac{kq}{d^2}\sqrt{10}$ C) $\frac{kq}{d^2}\sqrt{5}$
D) $\frac{2kq}{d^2}$ E) $\frac{3kq}{d^2}$

42. Determine el trabajo que realizará un agente externo para trasladar lentamente una partícula de 1 μC desde A hasta B, tal como se muestra (Q = 4 μC; R = 10 cm). Desprecie efectos gravitatorios.



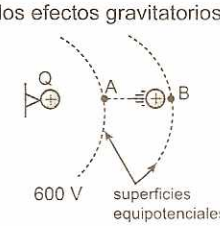
A) 0,42 J B) 0,24 J C) 0,18 J
D) 0,32 J E) 0,25 J

43. Determine el trabajo desarrollado por el campo eléctrico para trasladar una partícula electrizada con +1 nC, desde A hasta B.



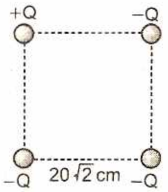
A) 0,2 μJ B) 0,4 μJ C) 0,6 μJ
D) 0,8 μJ E) 1 μJ

44. Una partícula electrizada con 5 μC es soltada en A. Si cuando llega a B su energía cinética es 25×10^{-4} J, determine el potencial eléctrico en B .(Desprecie los efectos gravitatorios)



A) 50 V B) 200 V C) −100 V
D) 20 V E) 100 V

45. Si a una partícula electrizada con $+2\ \mu C$ se le traslada lentamente desde el centro del cuadrado hasta un lugar muy alejado, ¿cuánto trabajo se desarrolla el agente externo? Desprecie efectos gravitatorios ($|Q| = 5$ mC).

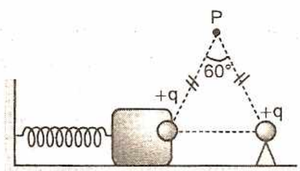


A) 800 J B) −800 J C) −500 J
D) 900 J E) −900 J

46. Una partícula electrizada con +q se traslada desde un lugar alejado hasta el centro de un anillo de radio R electrizado uniformemente con +Q. Determine la cantidad de trabajo necesario desarrollado por el agente externo para lograr su objetivo (Desprecie los efectos gravitatorios)

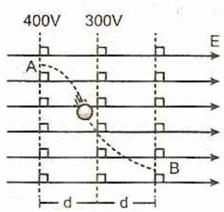
A) $\frac{kQq}{R}$ B) $\frac{-kQq}{2R}$ C) $\frac{kQq}{2R}$
D) $\frac{-3kQq}{2R}$ E) $\frac{-kQq}{R}$

47. En el gráfico, el bloque de madera esta en reposo y el resorte deformado 50 cm. Si el bloque tiene incrustada una esfera electrizada, Determine el potencial eléctrico en P Considere superficies lisas y aislantes (k = 5 N/m).



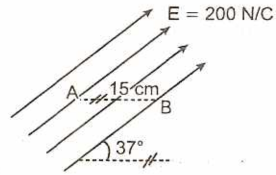
A) 3×10^5 V B) $1{,}5 \times 10^5$ V C) 3×10^4 V
D) 6×10^5 V E) 6×10^4 V

48. Una partícula electrizada con 1 μC es trasladada en el interior de un campo eléctrico homogéneo, tal como se muestra. Determine la cantidad de trabajo que realiza el campo eléctrico sobre la partícula desde A hasta B.



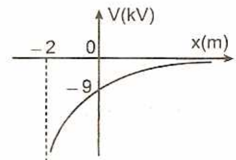
A) 2×10^{-4} J B) 4×10^{-5} J C) 6×10^{-6} J
D) 7×10^{-4} J E) 3×10^{-5} J

49. El potencial eléctrico en B es de 80 V. Determine el potencial eléctrico en A.



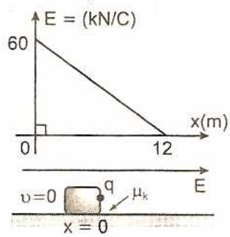
A) 100 V B) 104 V C) 200 V
D) 220 V E) 250 V

50. El potencial eléctrico para una partícula ubicada sobre el eje X varia como se muestra en la gráfica. Determine a que distancia de esta se debe ubicar una segunda partícula sobre el eje X con cantidad de carga 6 μC para que el potencial eléctrico en x = 1m sea nulo.



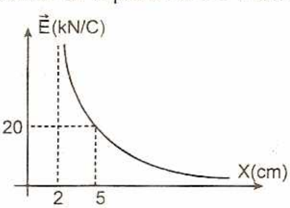
A) 3 m B) 6 m C) 9 m
D) B y E E) 12 m

51. El bloque de madera de 20 kg que tiene incrustada una partícula electrizada con 5 mC, es soltado en el interior de un campo eléctrico cuya intensidad cambia como muestra en la gráfica. Determine la máxima rapidez que adquiere el bloque de madera ($\mu_k = 0{,}5$; $g = 10\ m/s^2$)



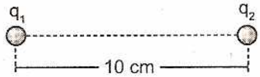
A) 3 m/s B) $5\sqrt{10}$ m/s C) $\sqrt{10}$ m/s
D) 10 m/s E) $4\sqrt{5}$ m/s

52. La intensidad del campo eléctrico asociado a una partícula a lo largo del eje X varía con la posición según la gráfica adjunta. ¿Cuál es la cantidad de carga de la partícula? ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en la posición x = 8 cm?



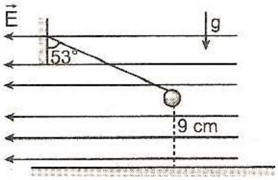
A) -3×10^{-8} C; 2 kN/C
B) 4×10^{-9} C; 3 kN/C
C) -6×10^{-9} C; 4 kN/C
D) 2×10^{-9} C; 5 kN/C
E) -10^{-9} C; 6 kN/C

53. Indique en qué posición, la intensidad del campo eléctrico del sistema formado por las dos partículas fijas es nula ($q_1 = 8\ \mu C$; $q_2 = -32\ \mu C$).



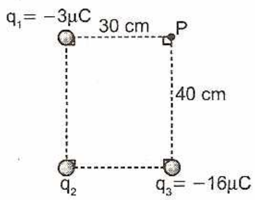
A) a 5 cm a la derecha de q_1
B) a 10 cm a la izquierda de q_1
C) a 5 cm a la derecha de q_2
D) a 10 cm a la derecha de q_1
E) a 20 cm a la derecha de q_2

54. A continuación se muestra una pequeña esfera electrizada con una cantidad de carga de $-4\ \mu C$; unida a la pared mediante un hilo aislante y ubicada en el interior de un campo eléctrico homogéneo de intensidad 100 kN/C. Si el hilo se rompe, ¿con qué rapidez impactará en el piso?



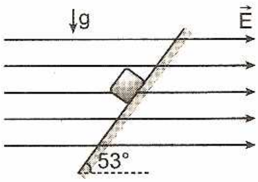
A) 1 m/s
B) $\sqrt{2}$ m/s
C) $\sqrt{3}$ m/s
D) 2 m/s
E) $\sqrt{5}$ m/s

55. Determine el módulo de la intensidad del campo eléctrico en P, la cual es vertical.



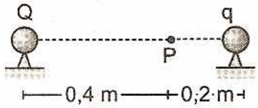
A) 100 kN/C B) 200 kN/C C) 300 kN/C
D) 400 kN/C E) 500 kN/C

56. Un pequeño bloque de 8 g electrizado con 1 μC se encuentra sobre un plano inclinado aislante. Determine qué valor máximo podrá tomar la intensidad del campo eléctrico sin que el bloque deslice sobre el plano inclinado ($\mu_s = 0{,}5$; $g = 10\ m/s^2$)



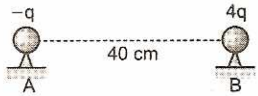
A) 40 KN/C
B) 320 KN/C
C) 440 KN/C
D) 520KN/C
E) 580KN/C

57. Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico en el punto P. ($Q = -4\ \mu C$; $q = 2\ \mu C$)



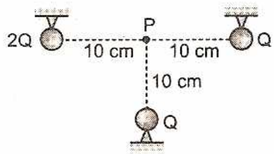
A) 2×10^5 N/C B) $2{,}5 \times 10^5$ N/C
C) $4{,}65 \times 10^5$ N/C D) $6{,}75 \times 10^5$ N/C
E) $2{,}7 \times 10^5$ N/C

58. Determine a qué distancia de A la intensidad de campo eléctrico es nula.



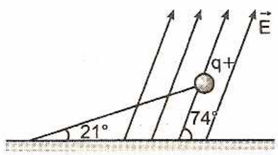
A) 10 cm B) 20 cm C) 40 cm
D) 50 cm E) 55 cm

59. Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico en P($Q = +10\ \mu C$)



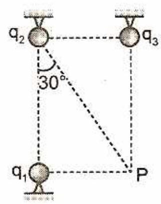
A) 3×10^6 N/C B) 3×10^4 N/C
C) $18\sqrt{2} \times 10^6$ N/C D) 9×10^6 N/C
E) $9\sqrt{2} \times 10^6$ N/C

60. Se muestra una esfera electrizada con $q = +1\ \mu C$, en reposo, tal como se muestra. Determine E, si el módulo de la tensión en la cuerda es 70 N.



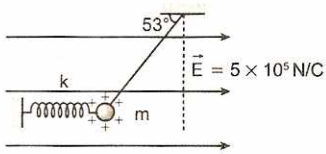
A) 20 kN/C B) 15 kN/C C) 234 kN/C
D) 117 kN/C E) 115 kN/C

61. Determine la cantidad de carga q_1, si la intensidad de campo en P debido al sistema de cargas tiene dirección vertical ($q_2 = 1\ \mu C$).



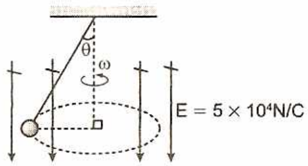
A) $-0{,}025\ \mu C$ B) $-0{,}035\ \mu C$ C) $-0{,}025\ \mu C$
D) $-0{,}125\ \mu C$ E) $-0{,}145\ \mu C$

62. En el gráfico mostrado, la esfera de 4 kg se encuentra electrizada con q = 60 μC. Determine la deformación del resorte, si la esfera se encuentra en reposo. (k = 15 N/cm).



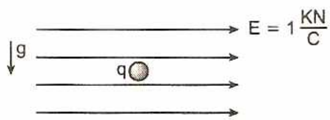
A) 2 cm B) 4 cm C) 5 cm
D) 10 cm E) 20 cm

63. Un péndulo cónico de longitud 25 cm tiene una masa de 50 g y esta electrizada con −6 μC. Halle la rapidez angular ω de su movimiento para que la cuerda forme un ángulo de 37°, con la vertical (g = 10 m/s²).



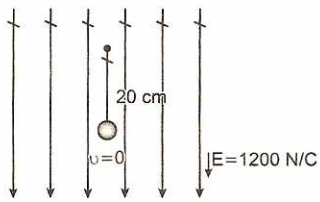
A) 2 rad/s B) $2\sqrt{3}$ rad/s
C) 4 rad/s D) 8 rad/s
E) $2\sqrt{5}$ rad/s

64. Una partícula electrizada con 0,32 mC y de masa 24 g se abandona en un campo eléctrico homogéneo. Determine la rapidez que adquiere luego de 6 s de haberse abandonado (g = 10 m/s²).



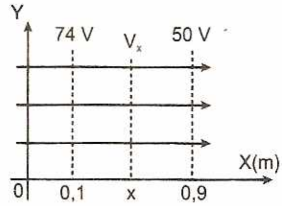
A) 20 m/s B) 30 m/s C) 40 m/s
D) 50 m/s E) 100 m/s

65. A partir del gráfico, determine la menor rapidez que se le debe comunicar a la esfera de 1 kg y electrizada con +5 mC, para que pueda completar una vuelta (g = 10 m/s²).



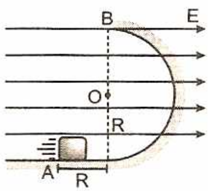
A) 5 m/s B) 1 m/s C) 2 m/s
D) 4 m/s E) 8 m/s

66. Determine el potencial eléctrico a una distancia x del origen de coordenadas.



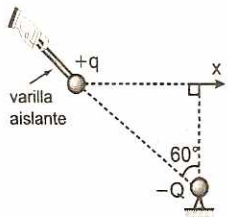
A) $V_x = 74 - 20x$ B) $V_x = 74 - 30x$
C) $V_x = 77 - 20x$ D) $V_x = 77 - 30x$
E) $V_x = 80 - 20x$

67. Determine la rapidez con la que fue lanzado, desde A, el bloque de 200 g y electrizado con $q = 156 \times 10^{-6}$ C, si cuando pasa por B tiene una rapidez de 10 m/s y debido a la fricción se disipa 10 J. Considere que la diferencia de potencial entre A y B es 10^5 V (R = 0,5 m; g = 10 m/s²).



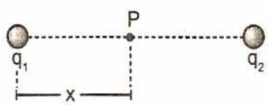
A) 2 m/s B) 4 m/s C) 6 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

68. La partícula electrizada con +q puede desplazarse sobre el eje x. Si en el instante mostrado la fuerza electrostática de atracción es de 1 N, ¿cuál es el máximo valor de la atracción electrostática entre las partículas?



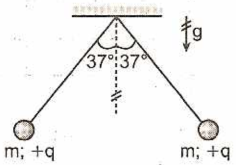
A) 2 N B) 4 N C) $2\sqrt{3}$ N
D) $4\sqrt{3}$ N E) 8 N

69. Se muestran dos partículas electrizadas separadas 6 cm. Determinar x (en cm), de modo que la fuerza electrostática resultante sobre otra partícula electrizada y ubicada en P sea nula. (q_1 = 1 μC; q_2 = 4 μC)



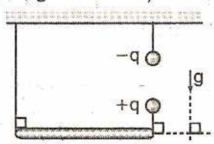
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

70. Dos esferas pequeñas de 30 g, electrizadas con igual cantidad de carga $+q$ y separadas 20 cm, permanecen en equilibrio, tal como se muestra. ¿Cuál es el valor de q? ($g = 10$ m/s^2)



A) 1 μC B) 2 μC C) 3 μC
D) 4 μC E) 5 μC

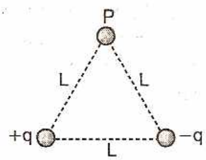
71. Una barra homogénea de masa "m" permanece en equilibrio. Si las esferas están separadas 30 cm y son de masa despreciable, ¿cuál es el valor de "m"? ($q = 20$ μC; $g = 10$ m/s^2)



A) 4 kg B) 5 kg C) 6 kg
D) 7 kg E) 8 kg

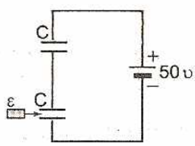
72. Se muestran dos partículas electrizadas fijas. Si las partículas se atraen con una fuerza electrostática de 3 N, ¿cuál será el módulo de la fuerza electrostática resultante sobre una tercera partícula electrizada con $+2q$ colocada en el punto P?

A) 3 N
B) $3\sqrt{3}$ N
C) $3\sqrt{2}$ N
D) 6 N
E) 12 N



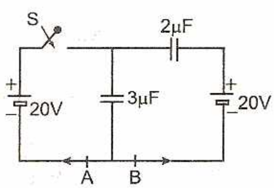
73. Calcule el trabajo necesario para introducir una placa dieléctrica de constante $\varepsilon = 7$ en uno de los capacitores de igual capacidad $C = 0,1$ μF. (El dieléctrico ocupa toda la región entre las armaduras del capacitor).

A) 22,5 μJ
B) 20 μJ
C) 18,75 μJ
D) 9,25 μJ
E) 4,45 μJ



74. ¿Qué cargas circulan después de cerrar el interruptor S a través de las secciones A y B en los sentidos marcados por las flechas?

A) 60 μC y 24μC
B) 30 μC y -12 μC
C) 30 μC y -36 μC
D) 60 μC y -24 μC
E) -60 μC y 24 μC



75. A las armaduras de un capacitor plano con dieléctrico se les comunica con un generador una diferencia de potencial y almacena 0,02 mJ. Luego desconectamos el capacitor de la fuente y retiramos el dieléctrico, del modo que hacemos 0,05 mJ de trabajo para vencer el campo eléctrico. Halle el valor de la constante dieléctrica del aislante.

A) 1,5 B) 2,0 C) 2,5 D) 3,0 E) 3,5

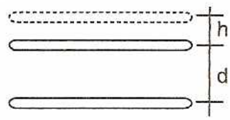
76. Dos capacitadores de capacidades $C_1 = 4$ μF y $C_2 = 5$ μF se conectan en forma independiente a una fuente ideal de 20 V. Si luego son conectados en paralelo con polaridad contraria, el voltaje de C_2, en el momento del equilibrio electrostático es:

A) 20 V B) 10 V C) $\left(\frac{20}{9}\right)$V
D) $\left(\frac{10}{9}\right)$V E) $\left(\frac{8}{9}\right)$V

77. Se tiene 3 capacitadores de 2 μF, 3 μF y 6 μF y una fuente de 30 V. ¿Cuál es la máxima energía que se puede almacenar con dichos capacitadores?

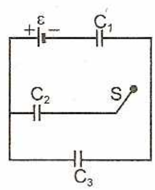
A) 4,4 mJ B) 9,9 mJ C) 1,1 mJ
D) 4,99 mJ E) 6,2 mJ

78. A las placas de un capacitor se aplican fuerzas para aumentar su separación en h ($h << d$). El trabajo necesario que se realiza mediante estas fuerzas sobre el capacitor cuya capacidad y cargas iniciales eran C y Q, es:



A) $\frac{Q^2h}{2dC}$ B) $-\frac{Q^2h}{2dC}$ C) $\frac{Qh}{2dC^2}$
D) $-\frac{Q^2}{2C}$ E) $-\frac{QCh}{2d}$

79. Indique la alternativa incorrecta respecto del siguiente circuito capacitivo.

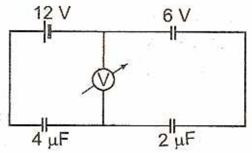


A) Cuando el interruptor está abierto, los capacitores C_1 y C_3 almacenan igual cantidad de carga eléctrica.
B) Al cerrar el interruptor el capacitor C_1 almacena mayor carga.
C) Al cerrar el interruptor el voltaje en C_1 aumenta.
D) Al cerrar el interruptor el voltaje en C_3 disminuye.
E) Al cerrar el interruptor el capacitor C_3 aumenta su carga almacenada.

80. Un capacitor con dieléctrico ($\varepsilon = 4$) es conectado a una fuente de tensión cuya fem. es 12 V. Si se mantiene el capacitador conectado a la fuente y retiramos el dieléctrico, luego lo incorrecto es:

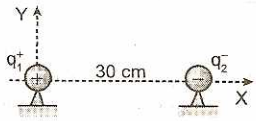
A) La capacidad del capacitor disminuye.
B) Por la fuente no circulan partículas electrizadas.
C) El voltaje entre las armaduras del capacitor se mantiene constante.
D) El campo eléctrico entre las armaduras mantiene su intensidad.
E) Las armaduras experimentan variación en su cantidad de carga eléctrica.

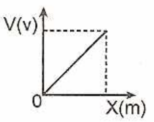
81. ¿Cuánto indica el voltímetro ideal, en el circuito capacitivo?

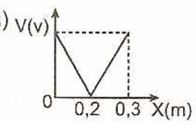


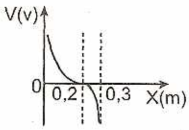
A) 10 V B) 8 V C) 6 V
D) 5 V E) 3 V

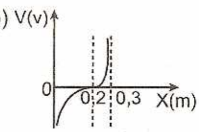
82. Indique la gráfica que corresponde al potencial eléctrico (V) en función a la posición (x). $x \in \langle 0; 0{,}3m\rangle$. Considere $|q_1| = 2|q_2|$

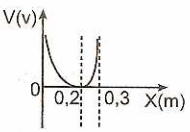


A)


B)


C)


D)


E)


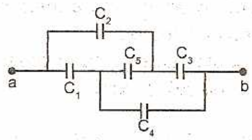
83. ¿Qué carga se induce en la superficie de una esfera metálica, de radio R, puesta a tierra, por un carga puntual "q" que dista L del centro de aquella? (L > R)

A) $-q\left(\frac{R}{L}\right)$ B) $-\left(\frac{R}{L}\right)^2 q$ C) $-L\left(\frac{q}{R}\right)$
D) $\left(\frac{R}{L}\right)q$ E) cero

84. En el problema anterior determine el módulo de la fuerza de atracción entre la carga puntual y la esfera conductora.

A) $\frac{kq^2}{L^2}$ B) $\frac{kq^2R^2}{L^4}$ C) $\frac{kq^2}{R^2}$
D) $\frac{kq^2RL}{(L^2-R^2)^2}$ E) $\frac{kq^2}{(L^2-R^2)}$

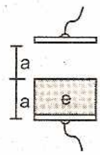
85. Halle la capacidad equivalente entre "a" y "b".
$C_1 = 6\ \mu F$; $C_2 = 3\ \mu F$; $C_3 = 3\ \mu F$; $C_4 = 6\ \mu F$



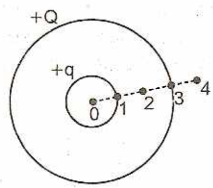
A) 2,2 μF B) 2,5 μF C) 3,6 μF
D) 4,5 μF E) 5 μF

86. Si la capacidad eléctrica del capacitor que se muestra es 6 μF sin el dieléctrico, ¿qué capacidad tendrá el sistema mostrado? ($\varepsilon = 2$)

A) 3 μF
B) 4 μF
C) 8 μF
D) 16 μF
E) 30 μF



87. Los cascarones concéntricos están electrizados con Q y "q" (Q > q) y tienen radios R y 2R. Indique lo incorrecto.



A) $E_0 < E_1$ B) $V_2 > V_3$ C) $E_3 < E_4$
D) $V_2 > V_4$ E) $V_0 > V_3$

88. Un capacitor de 10 μF se cargó con una batería de 90 V y se le conecta luego a un capacitor descargado de 5 μF de capacidad. Después el capacitor de 5 μF se desconecta de dicho capacitor y se vuelve a unir, pero ahora se conectan entre sí las placas de diferente signo de los mismo capacitores. Halle la diferencia de potencia en estas condiciones.

A) 8 V B) 10 V C) 15 V
D) 20 V E) 30 V

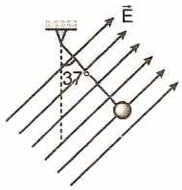
89. Determine la capacidad eléctrica en nanofaradios (nF) de un capacitor esférico de 18 cm y 20 cm de radios (1 nF <> 10^{-9} F)

A) 0,01 B) 0,02 C) 0,1
D) 0,2 E) 0,5

90. En un campo eléctrico homogéneo se coloca una lámina dieléctrica perpendicular al campo. Indique la afirmación errónea.

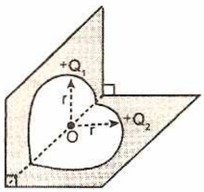
A) Las moléculas se polarizan y constituyen los llamados dipolos.
B) Los dipolos generan un campo eléctrico opuesto al campo eléctrico exterior.
C) El campo eléctrico resultante dentro del dieléctrico es de menor intensidad que el campo eléctrico externo.
D) El número de líneas de fuerzas dentro del dieléctrico disminuye.
E) Los dipolos se orientan perpendicularmente al campo eléctrico externo.

91. Determine el mínimo módulo de $\vec{E}$, de tal manera que la partícula electrizada con $q_o = 10\ \mu C$ y $m = 50$ g, se encuentre en equilibrio en la posición mostrada ($g = 10\ m/s^2$)



A) 30 kN/C B) 40 kN/C C) 50 kN/C
D) 60 kN/C E) 70 kN/C

92. Calcule la intensidad del campo eléctrico en el punto O, que originan los conductores semicircunferenciales cargados uniformemente con $Q_1 = 3q$ y $Q_2 = 4q$ ambos tienen igual radio y están situados en planos mutuamente perpendiculares entre sí.

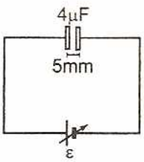


A) $k\frac{q}{r^2}$ B) $2k\frac{q}{r^2}$ C) $3k\frac{q}{r^2}$

D) $4k\frac{q}{r^2}$ E) $5k\frac{q}{\pi r^2}$

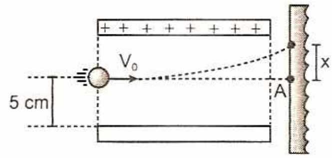
93. ¿Cuál es la máxima cantidad de carga eléctrica que puede almacenar el capacitor plano mostrado, si se encuentra en el aire, cuya rigidez dieléctrica es 3×10^6 N/C? La tensión en la fuente es variable.

A) 10 mC
B) 20 mC
C) 30 mC
D) 40 mC
E) 60 mC

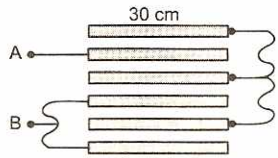


94. Dentro de un tubo de rayos catódicos se tiene un capacitor de placas paralelas y horizontales separadas 10 cm a un voltaje de 0,9 voltios. Entre las placas ingresa un electrón con 106 m/s horizontalmente, tal como se muestra. ¿A qué distancia de A impacta el electrón en la pantalla fluorescente? El área de las placas cuadradas es $4 \times 10^{-2} m^2$. Desprecie efectos gravitatorios. ($m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg)

A) 1,6 cm
B) 1,2 cm
C) 3,2 cm
D) 2,4 cm
E) 6,4 cm



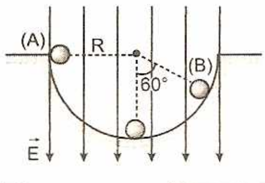
95. Seis laminas metálicas idénticas distantes de una de la otra se sitúan en el aire. El área de cada lámina es igual a S. Calcule la capacidad eléctrica entre los puntos A y B del sistema, si las láminas se conectan como muestra la figura.



A) $\frac{2}{3}\varepsilon_o\frac{S}{d}$ B) $\frac{4}{3}\varepsilon_o\frac{S}{d}$ C) $\frac{6}{5}\varepsilon_o\frac{S}{d}$

D) $\frac{5}{6}\varepsilon_o\frac{S}{d}$ E) $\frac{2}{5}\varepsilon_o\frac{S}{d}$

96. Determine la rapidez de la esfera, de masa "m" y cantidad de carga "q", al pasar por B, si fue soltada en A, considere la superficies lisas.



A) $\sqrt{\frac{R}{m}(E+g)}$ B) $\sqrt{\frac{R}{m}(qE+2g)}$

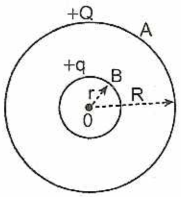
C) $\sqrt{\frac{R}{2m}(qE+mg)}$ D) $\sqrt{\frac{R}{m}(qE+mg)}$

E) $\sqrt{R(qE+mg)}$

97. Un capacitor electrizado tiene entre sus láminas aire como dieléctrico y sus terminales están libres. Si introducimos entre sus laminas porcelana–dieléctrica, entonces podemos afirmar que:

A) Su carga eléctrica disminuirá.
B) La intensidad de campo eléctrico entre las láminas no se alterará.
C) La capacidad eléctrica del capacitor disminuirá.
D) La diferencia de potencial entre sus placas disminuirá.
E) La energía almacenada aumentará.

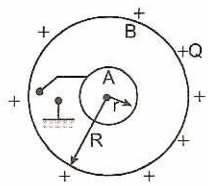
98. Calcule la relación entre los módulos de intensidades de campo eléctrico en los puntos A y B (E_A / E_B) sabiendo que los cascarones están electrizados con +Q y +q.



A) $\frac{Q}{q}\left(\frac{r}{R}\right)^2$ B) $\frac{q}{Q}\left(\frac{R}{r}\right)^2$ C) $\left(\frac{Q+q}{q}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^2$

D) $\left(\frac{Q-q}{Q}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2$ E) cero

99. Se muestra dos cascarones esféricos, uno electrizado y el otro neutro. Al cerrar el interruptor, ¿qué cantidad de carga presentarán los cascarones A y B?



A) −Q; 0 B) +Q; −Q C) −Q; +Q

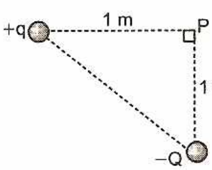
D) $-\frac{QR}{r}$; 0 E) $-\frac{QR}{R}$; +Q

100. Una esfera metálica de radio R_1 tiene un potencial eléctrico V. Si luego se ubica concéntricamente con un cascaron metálico esférico de radio R_2 y neutro ($R_2 > R_1$); y finalmente las unimos mediante un hilo metálico, ¿a qué potencial eléctrico estarán las esferas al final?

A) V B) $V\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ C) $V\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

D) $V\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$ E) 0

101. Dos partículas electrizadas con +3 μC y −4 μC están fijadas en una superficie horizontal, tal como se muestra en la figura. Si en P colocamos una partícula electrizada con +1 μC y de 9 g, para que esta partícula permanezca en equilibrio es necesario que:

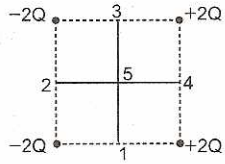


A) $\mu_s = 0{,}10$ B) $\mu_s > 0{,}12$

C) $\mu_s > 0{,}28$ D) $\mu_s = 0{,}30$

E) $\mu_s \geq 0{,}50$

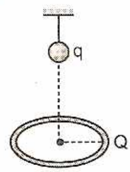
102. Cuatro cargas positivas y negativas, de igual magnitud, están ubicadas en los vértices de un cuadrado con centro en el punto 5. ¿En cuál de los puntos, entre los señalados con los números 1; 2; 3; 4; y 5 deberíamos colocar una partícula electrizada con +Q, si queremos que la fuerza eléctrica sobre esta sea máxima?



A) Solo en 3 B) Solo en 5 C) En 3 ó en 5

D) En 4 ó en 2 E) En 1 ó en 3

103. La partícula está suspendida de un hilo aislante y posee q = +2 μC. El anillo de 3 cm de radio reposa en el aire cuando su centro se sitúa a 4 cm de la partícula. El anillo esta electrizado uniformemente con Q = −2 μC. Determine la masa del anillo



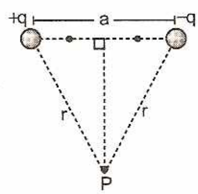
A) 1,152 kg B) 3,450 kg C) 27,648 kg

D) 2,650 kg E) 0,576 kg

104. Una partícula electrizada con $+Q_3$ está ubicada en el origen de coordenadas, otra partícula con $+Q_1$ está en el punto (2i + 0j) m, y una tercera partícula con $+Q_2$ está ubicada en el punto (2i + 3j) m. Determine la relación $\frac{Q_1}{Q_2}$ de tal modo que la fuerza eléctrica resultante sobre Q_3 sea colineal al vector (4i + 6j) m.

A) 2/3 B) 3/2 C) 27/8 D) 8/27 E) 9/4

105. La figura muestra a un dipolo eléctrico. Si en "p" se coloca una partícula electrizada con $+q_0$ y se la impulsa con una velocidad $\vec{v}$ perpendicularmente al dipolo, en ese momento, ¿cuál es el radio de curvatura de la trayectoria seguida por la partícula de masa m?



A) $\frac{mr^2v^2}{2kq_0a}$ B) $\frac{r^2v^2m}{kq_0a}$ C) $\frac{kq_0}{mr^2}$

D) $\frac{2r^2v^2}{3kq_0q}$ E) $\frac{mr^2v^2}{kq_0q}$

CLAVES

1. A	15. A	29. B	43. D	57. D	71. E	85. D	99. E
2. C	16. E	30. D	44. E	58. C	72. D	86. C	100. B
3. C	17. E	31. C	45. D	59. E	73. A	87. C	101. E
4. D	18. A	32. E	46. A	60. C	74. D	88. D	102. E
5. D	19. A	33. E	47. A	61. D	75. E	89. D	103. E
6. C	20. A	34. E	48. A	62. B	76. C	90. E	104. D
7. E	21. D	35. D	49. B	63. E	77. D	91. A	105. B
8. D	22. E	36. D	50. D	64. E	78. B	92. E	
9. B	23. B	37. E	51. E	65. D	79. E	93. E	
10. C	24. A	38. E	52. D	66. E	80. B	94. C	
11. C	25. B	39. B	53. B	67. D	81. A	95. C	
12. C	26. C	40. D	54. E	68. B	82. C	96. D	
13. B	27. D	41. B	55. C	69. B	83. A	97. D	
14. D	28. A	42. C	56. C	70. A	84. D	98. C	

Electrodinámica

16 capítulo

Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (Como, 18 de febrero de 1745-Italia, 5 de marzo de 1827) fue un físico famoso principalmente por haber desarrollado la pila eléctrica. La unidad de fuerza electromotriz del Sistema Internacional de Unidades lleva el nombre de voltio en su honor. Desde muy temprano se interesó en la física y a pesar del deseo de su familia de que estudiara una carrera jurídica, él se las ingenió para estudiar ciencias. Recibió una educación básica medianamente humanista, pero al llegar a la enseñanza superior optó por una formación científica.

En 1774 fue nombrado profesor de Física de la Escuela Real de Como. Un año después, Volta realizó su primer invento: un aparato relacionado con la electricidad que tenía dos discos metálicos separados por un conductor húmedo, pero unidos con un circuito exterior. De esta forma logra, por primera vez, producir corriente eléctrica continua, inventando el electróforo perpetuo, un dispositivo que una vez que se encuentra cargado puede transferir electricidad a otros objetos y que genera electricidad estática. Volta, en 1800, dirigió una carta a Joseph Banks, el presidente de la Royal Society, en la que le anunció el descubrimiento «de una pila voltaica». Esta carta fue leída ante esa sociedad científica y tras varias reproducciones del invento efectuadas por los miembros de la sociedad, se confirmó este y se le otorgó el crédito.

Fuente: Wikipedia

ELECTRODINÁMICA

Se llama electrodinámica la parte fundamental de la teoría de la electricidad en que se estudian los fenómenos y los procesos relacionados con el movimiento de las cargas eléctricas o de los cuerpos macroscópicos cargados. El concepto más importante de la electrodinámica es el de corriente eléctrica.

CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA

Se da el nombre de corriente eléctrica a todo movimiento ordenado de las cargas eléctricas. Cuando logramos establecer un campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior de un alambre conductor, comprobaremos que los electrones libres iniciarán un movimiento en sentido opuesto al campo eléctrico.

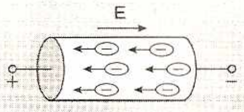
Si una carga negativa se mueve en cierto sentido, equivale a otra carga positiva de igual valor que se mueve en sentido contrario. Esto permite establecer el sentido convencional de la corriente que usaremos de aquí en adelante.

Corriente eléctrica, es el flujo de cargas eléctricas a través de un cuerpo conductor debido a la diferencia de potencial que se establece entre sus extremos, estableciéndose un campo eléctrico constante si la corriente es continua.

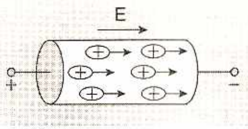
Convencionalmente en el desarrollo del capítulo consideraremos cargas eléctricas libres a las cargas positivas, esto significa que el flujo de las cargas eléctricas será de mayor a menor potencial eléctrico, por consiguiente el sentido de la intensidad de corriente será de mayor a menor potencial, además la corriente es continua.

Sentido de la corriente

A) Sentido real



B) Sentido convencional
Convencionalmente consideramos que el sentido de la corriente está dada por el sentido del movimiento de las cargas positivas.



INTENSIDAD DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA (I)

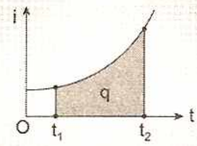
Es aquella magnitud física escalar que expresa la cantidad de carga neta que atraviesa la sección recta de un conductor en cada unidad de tiempo. La corriente eléctrica se dice que es continua, si su intensidad y sentido no varían en el tiempo.

$$\boxed{i = \frac{q}{t}} \qquad \text{...(16.1)}$$

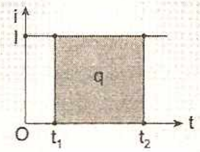
La intensidad de corriente se mide en ampere (A) en honor al físico francés Andrés María Ampere (1775-1836).

Gráfica i-t

En toda gráfica, intensidad de corriente (i) versus tiempo (t), el área bajo la curva es igual a la cantidad de carga (q).



Si la corriente i es continua, entonces:



RESISTENCIA ELÉCTRICA (R)

Es la dificultad que ofrece un cuerpo conductor al desplazamiento de las cargas eléctricas a través de su masa. La resistencia eléctrica de un conductor se mide en ohm (Ω) en honor al físico alemán Jorge Simón Ohm (1787-1854).

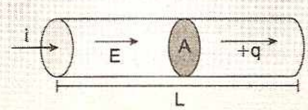
LEY DE POULLIET

La resistencia eléctrica que ofrece un conductor al paso de la corriente es directamente proporcional a la longitud del conductor **L** e inversamente proporcional al área **A** de la sección recta.

$$\boxed{R = \rho\frac{L}{A}} \qquad \text{...(16.2)}$$

Donde ρ representa a la resistividad eléctrica del conductor, se mide en ohm metro (Ω.m)

Conductor



RESISTIVIDAD ELÉCTRICA (ρ)

Llamada también resistencia específica de un conductor. Expresa la capacidad de formar dentro de unas sustancias una corriente eléctrica bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$.
La resistividad caracteriza las propiedades eléctricas de los conductores.
La resistencia varía con la temperatura. El mejor conductor metálico es la plata (Ag).

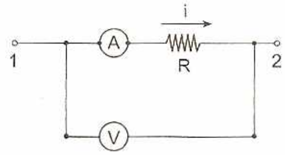
Resistividad de algunos conductores a 20 °C

Conductor	$\rho(\Omega.m)$
Plata	$1,6\times10^{-8}$
Cobre	$1,8\times10^{-8}$
Alumínio	$2,7\times10^{-8}$
Tungsteno	$5,6\times10^{-8}$
Plomo	$2,1\times10^{-7}$
Constantan	$4,5\times10^{-7}$
Carbón	$3,5\times10^{-7}$
Agua de mar	$2,0\times10^{-1}$
Germanio	$5,0\times10^{-1}$
Óxido de cobre	$1,0\times10^{3}$
Agua destilada	$5,0\times10^{3}$
Agua pura	$1,0\times10^{6}$

LEY DE OHM

La diferencia de potencial V que se establece entre los extremos de una resistencia R es directamente proporcional a la intensidad de corriente i que la atraviesa.

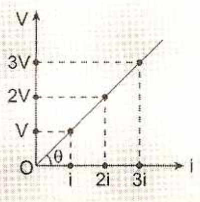
$$\boxed{i = \frac{V}{R}} \qquad ...(16.3)$$



Ⓐ: Amperímetro Ⓥ: Voltímetro

Todos los conductores o resistencias que cumplen con la ley de Ohm se denominan conductores óhmicos y se caracterizan por mantener su resistencia R constante, independientemente de la tensión, V, aplicada.

Gráfica: V–i



$$R = \tan\theta = \frac{V}{i}$$

La pendiente de la recta es igual al módulo de la resistencia.

VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA CON LA TEMPERATURA

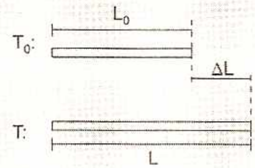
Todo conductor que transporta energía eléctrica experimenta una elevación de su temperatura lo cual le produce el fenómeno térmico de dilatación longitudinal, considerando conductores muy delgados.

$$\boxed{R = R_0(1 + \alpha\Delta T)} \qquad ...(16.4)$$

Donde, R_0 es la resistencia inicial, R la resistencia final, ΔT variación de la temperatura y α el coeficiente de dilatación lineal.

Dilatación lineal

$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$
$R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$



ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

La resistencia equivalente, R_{eq}, es aquella única resistencia capaz de reemplazar a un conjunto de resistencias limitado por dos puntos, disipando la misma cantidad de energía que el conjunto reemplazado. La resistencia equivalente debe estar sometida a la misma tensión que los dos puntos que limitan al conjunto de resistencias.

En serie

Cuando las resistencias se conectan una a continuación de otra. Por todas ellas circula la misma intensidad de corriente, por principio de conservación de las cargas eléctricas.

$$\boxed{i = i_1 = i_2 = i_3} \qquad ...(16.5)$$

Del principio de conservación de la energía, se cumple que:

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + V_3} \qquad ...(16.6)$$

Aplicando la ley de Ohm a cada resistencia:

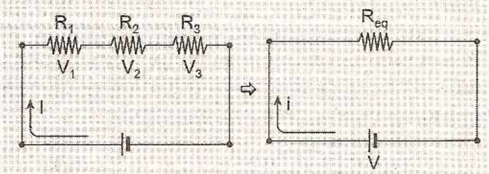
$$\boxed{V_1 = iR_1;\quad V_2 = iR_2;\quad V_3 = iR_3;\quad V = iR_{eq}} \qquad ...(16.7)$$

Reemplazando 16.7 en 16.6 tenemos:

$$iR_{eq} = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(16.8)$$

Asociación en serie Resistencia equivalente



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

En paralelo

Todas las resistencias están sometidas a la misma diferencia de potencial. La corriente **i** que llega al nudo se reparte inversamente proporcional a la magnitud de cada resistencia.
La caída de tensión en cada resistencia es la misma:

$$\boxed{V = V_1 = V_2 = V_3} \qquad ...(16.9)$$

Del principio de conservación de las cargas:

$$\boxed{i = i_1 + i_2 + i_3} \qquad ...(16.10)$$

Aplicando la ley de Ohm a cada resistencia:

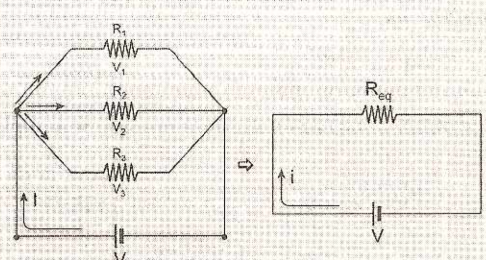
$$\boxed{i_1 = \frac{V}{R_1};\quad i_2 = \frac{V}{R_2};\quad i_3 = \frac{V}{R_3};\quad i = \frac{V}{R_{eq}}} \qquad ...(16.11)$$

Reemplazando 16.11 en 16.10 tenemos:

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \qquad ...(16.12)$$

Asociación en paralelo: Resistencia equivalente:

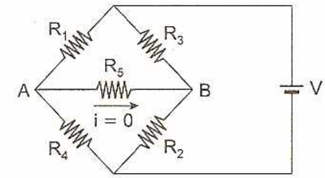


$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

PUENTE WHEATSTONE

En esta disposición especial de las cinco resistencias, ver figura, si se cumple que:

$$\boxed{R_1R_2 = R_3R_4} \qquad ...(16.13)$$



Entonces los potenciales en los puntos A y B son iguales:

$$V_A = V_B \;\Rightarrow\; (V_A - V_B) = 0$$

Por consiguiente, por la resistencia R_5 entre los puntos A y B, no pasa corriente, es decir no funciona. De la ley de Ohm:

$$i = \frac{(V_A - V_B)}{R} = 0$$

Esto quiere decir también que la resistencia R_5 puede retirarse, o sea juntar los puntos A y B.

Casos particulares

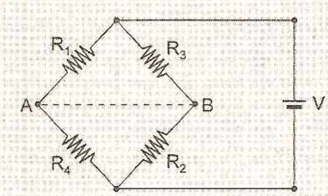
a) Dos resistencias instaladas en paralelo:

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

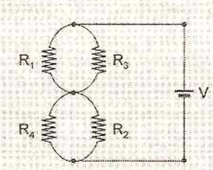
b) Dos resistencias iguales a R instaladas en paralelo:

$$R_{eq} = \frac{R}{2}$$

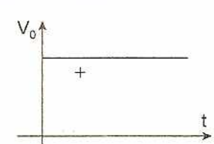
Sale el quinto



Uniendo A y B tenemos:



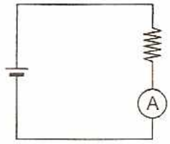
CORRIENTE CONTINUA



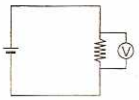
Representación de la tensión en corriente continua.

La corriente continua o corriente directa (CC en español, en inglés DC, de Direct Current) es el flujo continuo de electrones a través de un conductor entre dos puntos de distinto potencial. A diferencia de la corriente alterna (CA en español, AC en inglés), en la corriente continua las cargas eléctricas circulan siempre en la misma dirección, es decir, los terminales de mayor y de menor potencial son siempre los mismos. Aunque comúnmente se identifica la corriente continua con la corriente constante, por ejemplo la suministrada por una batería, es continua toda corriente que mantenga siempre la misma polaridad.

AMPERÍMETRO Y VOLTÍMETRO



El amperímetro debe conectarse en serie en el circuito. Para no falsear la medida, debe tener una resistencia eléctrica interna muy pequeña. Hay que prestar atención a la colocación de estos aparatos de medida. Si colocamos un amperímetro en paralelo, puede llegar a estropearse, pues, como su resistencia es muy pequeña, la intensidad de corriente en él será más elevada.



El voltímetro debe conectarse en paralelo en el circuito. Para no falsear la medida, debe tener una resistencia eléctrica interna muy grande. De esta manera, por la rama del voltímetro la intensidad de corriente será muy reducida.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un alambre conductor ($\rho = 1,7 \times 10^{-11}$ Ω.m) de 10 m de longitud tiene una sección transversal de 10^{-5} mm^2 y una diferencia de potencial entre sus extremos de 68 V. ¿Cuál será la corriente que circula por dicho conductor?

Resolución:

Cálculo de la resistencia mediante la ley de Poulliet:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow R = 1,7\times10^{-11}\left[\frac{10}{10^{-11}}\right] = 17\,\Omega$$

Cálculo de la corriente mediante la ley de Ohm:

$$i = \frac{V}{R} \Rightarrow i = \frac{68}{17} \qquad \therefore\ i = 4\text{ A}$$

2. Un alambre tiene una resistencia de 8 Ω. Otro alambre del mismo material tiene doble de longitud y la mitad de la sección transversal del primero. ¿Cuál es la resistencia?

Resolución:

Cálculo de la resistencia mediante la ley de Poulliet:

$$R_1 = \rho\frac{L}{A} = 8\,\Omega \Rightarrow R_2 = \rho\frac{2L}{(A/2)} = 4\left(\frac{\rho L}{A}\right)$$

$$R_2 = 4R_1 \qquad \therefore\ R_2 = 32\,\Omega$$

3. Un alambre conductor de sección recta constante tiene una resistencia eléctrica de 6 Ω. Si el alambre es estirado hasta triplicar su longitud, calcular la nueva resistencia del alambre.

Resolución:

Consideremos inicialmente un alambre de longitud L y sección recta A, entonces su resistencia eléctrica es:

$$R_1 = \rho\frac{L}{A} = 6\,\Omega$$

En el segundo caso el alambre tiene longitud 3L y sección recta A/3, debido al principio de conservación de la masa:

$$R_2 = \rho\frac{(3L)}{(A/3)} = 9\rho\frac{L}{A} \Rightarrow R_2 = 9R_1 \qquad \therefore\ R_2 = 54\,\Omega$$

4. Halla la resistencia de un alambre de plata de 4 m de longitud y 0,6 mm^2 de sección transversal. Resistividad eléctrica de la plata = $3,3 \times 10^{-5}$ Ω.m

Resolución:

La sección recta es: $A = 0,6\ mm^2 = 6 \times 10^{-7}\ m^2$

De la ley de Poulliet:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow R = 3,3\times10^{-5}\left[\frac{4}{6\times10^{-7}}\right] \quad \therefore\ R = 220\,\Omega$$

5. Un alambre de 10 km de longitud y 8 mm^2 de sección tiene una resistencia eléctrica de 150 Ω. Entonces otro alambre del mismo material, pero de 1 km de longitud y 6 mm^2 de sección poseerá una resistencia eléctrica de:

Resolución:

Cálculo de la resistividad eléctrica, mediante la ley de Poulliet:

$$\rho = \frac{RA}{L} \Rightarrow \rho = \frac{(150)(8\times10^{-6})}{10^4} = 1,2\times10^{-7}\,\Omega.\text{m}$$

Cálculo de la resistencia, mediante la ley de Poulliet:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow R = 1,2\times10^{-7}\left[\frac{10^3}{6\times10^{-6}}\right]$$

$$\therefore\ R = 20\,\Omega$$

6. Por la sección recta de un conductor pasa una corriente de 6 A durante media hora. ¿Cuántos electrones han pasado? (1 coulomb = $6{,}25 \times 10^{18}$ electrones)

Resolución:

Sabemos que: $i = \frac{q}{t} \Rightarrow 6 = \frac{q}{1800} \Rightarrow q = 10\,800$ C

Pero de la condición:

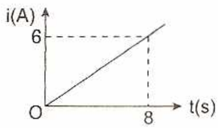
1 C ----------- $6{,}25 \times 10^{18}$ electrones
10 800 C ----------- x

De la regla de tres simple directa:

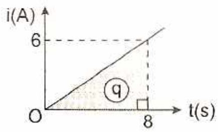
$x = (10\,800)(6{,}25 \times 10^{18})$

$\therefore\ x = 6{,}75 \times 10^{22}$ electrones

7. A través de un conductor la intensidad de corriente en dependencia con el tiempo viene dada por la gráfica i-t. ¿Cuál es la carga que pasa por una sección recta del conductor en los 8 primeros segundos de la circulación?



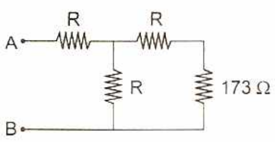
Resolución:



En todo diagrama i-t, la carga **q** que atraviesa la sección recta es igual al área bajo la recta:

$q = \text{Área}\ \triangle = \frac{1}{2}bh \Rightarrow q = \frac{1}{2}(8)(6) \qquad \therefore\ q = 24$ C

8. En el circuito, cuál es el valor de R aproximadamente de manera que la resistencia de entrada entre los terminales A y B sea de 173 Ω.



Resolución:

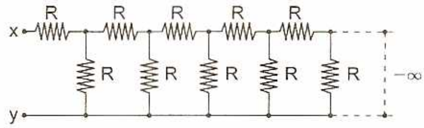
La resistencia equivalente del circuito es:

$$R_{AB} = \frac{(173 + R)R}{173 + 2R} + R = 173$$

Resolviendo la ecuación tenemos: $R = \frac{173}{\sqrt{3}}$

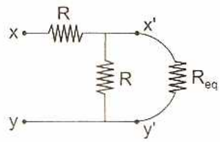
$\therefore\ R \approx 100\ \Omega$

9. La figura muestra una red de resistencias de un número ilimitado. Si cada resistencia tiene valor igual a R, determinar la resistencia equivalente entre los puntos **x** e **y**.



Resolución:

Sea R_{eq} la resistencia equivalente entre todos los puntos **x** e **y**. Si a la red ilimitada le quitamos dos resistencias su valor no se altera, entonces queda el siguiente circuito equivalente:



La resistencia equivalente entre los puntos xy e x´y´son iguales, luego:

$$R_{eq} = R + \frac{RR_{eq}}{(R + R_{eq})}$$

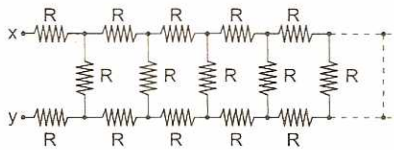
$$\Rightarrow R_{eq}(R + R_{eq}) = R(R + R_{eq}) + RR_{eq}$$

$$\Rightarrow R^2_{eq} - RR_{eq} - R^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

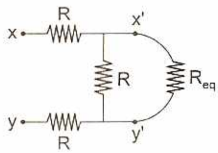
$$R_{eq} = R\frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

10. La figura muestra una red de resistencias de un número ilimitado. Si cada resistencia tiene valor igual a R, determinar la resistencia equivalente entre los puntos x e y.



Resolución:

Sea R_{eq} la resistencia equivalente entre los puntos x e y. Si a la red ilimitada le quitamos tres resistencias su valor no se altera, entonces tenemos el siguiente circuito equivalente:



La resistencia equivalente entre los puntos xy e x'y' son iguales, luego:

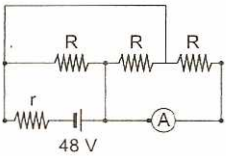
$$R_{eq} = R + \frac{RR_{eq}}{(R + R_{eq})} + R$$

$R_{eq}(R_{eq} + R) = 2R(R + R_{eq}) + RR_{eq}$

$R^2_{eq} - 2RR_{eq} - 2R^2 = 0$

Resolviendo la ecuación tenemos: $R_{eq} = R(1 + \sqrt{3})$

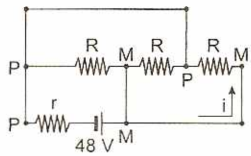
1. En el circuito mostrado, la resistencia r de la fuente es de 1 Ω y las resistencias R son de 45 Ω. Hallar la lectura en el amperímetro ideal A.



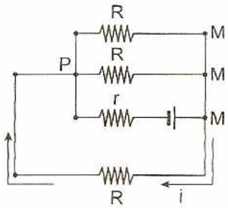
Resolución:

Analizamos el sistema equivalente:

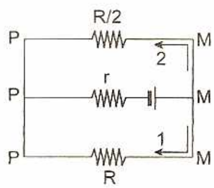
a)



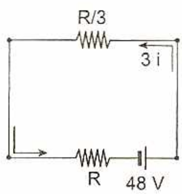
b)



c)



d)



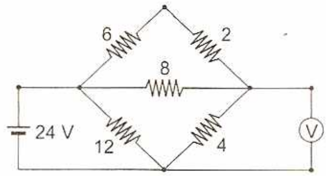
Aplicando la ley de Ohm al circuito equivalente:

$\varepsilon = (3i)R_{eq} \Rightarrow \varepsilon = (3i)\left(\dfrac{R}{3} + r\right)$

$48 = (3i)(16) \Rightarrow i = 1\text{ A}$

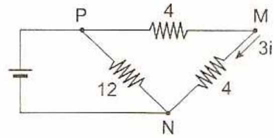
Por lo tanto el amperímetro marca 1 A.

2. En el circuito mostrado, hallar la lectura en el voltímetro ideal. Las resistencias están expresadas en ohms.



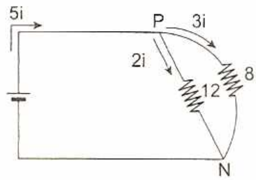
Resolución:

a)



Analizamos el circuito equivalente: las resistencias de 6; 2 y 8 Ω se reemplazan por la resistencia equivalente de 4 Ω, entre los puntos P y M.

b)



La corriente que llega al nudo P se divide inversamente proporcional al valor de cada resistencia, entonces la corriente que atraviesa la resistencia de 4 Ω entre los puntos M y N es 3i.

c)

Aplicamos la ley de Ohm en el sistema equivalente (c):

$\varepsilon = (5i)R_{eq} \Rightarrow 24 = (5i)(4{,}8)$

$i = 1\text{ A}$ ...(1)

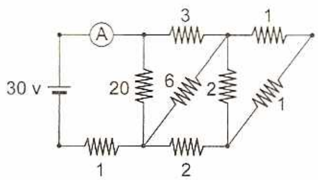
En el tramo MN aplicamos la ley de Ohm: $V = iR$

$V_{MN} = (3i)(4)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

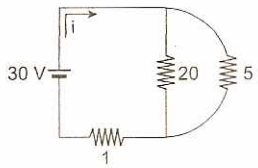
$V_{MN} = 12\text{ V}$

13. En el circuito mostrado, hallar la lectura en el amperímetro ideal. Todas las resistencias están expresadas en ohmios.

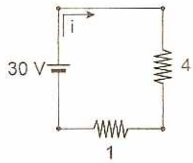


Resolución:

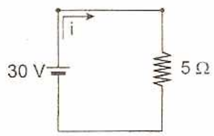
a)



b)

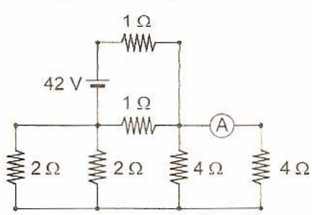


c)



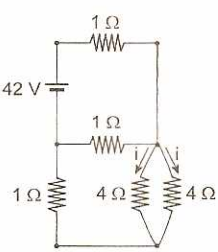
Simplificamos el circuito siguiendo los pasos a; b y c.
La resistencia equivalente es: 5 Ω.
Aplicamos la ley de Ohm al circuito equivalente:
$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 30 = i(5) \Rightarrow i = 6\text{ A}$
Por lo tanto el amperímetro indica: 6 A.

14. Hallar la lectura del amperímetro ideal A en el circuito eléctrico mostrado.

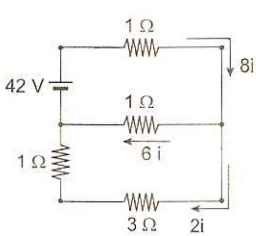


Resolución:

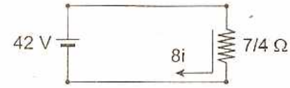
a)



b)

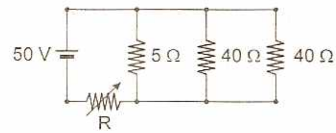


c)



Simplificamos el circuito siguiendo los pasos: a; b; c.
Aplicamos la ley de Ohm al circuito equivalente (c):
$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 42 = 8i\left(\frac{7}{4}\right) \Rightarrow i = 3\text{ A}$
Por lo tanto la lectura en el amperímetro es: 3 A

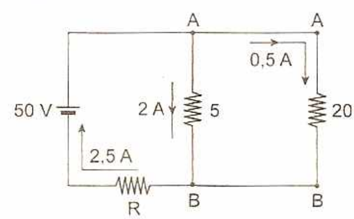
15. Calcular el valor a la cual debe ajustarse la resistencia variable mostrada R para que la resistencia de 5 Ω disipe solamente 20 W.



Resolución:
Analizando la resistencia de 5 Ω, hallamos la corriente **i** que la atraviesa y la diferencia de potencial entre sus extremos, sabiendo que disipa 20 W de potencia.

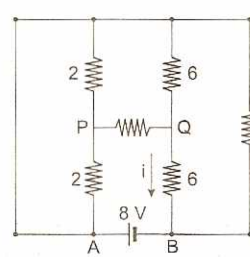
$P = i^2R \Rightarrow 20 = i^2(5) \Rightarrow i = 2\text{ A}$
$V = iR \Rightarrow V = (2)(5) \Rightarrow V = 10\text{ voltios}$

Aplicando la ley de Ohm al circuito equivalente deducimos que la corriente que atraviesa a R es igual a 2,5 A y la diferencia de potencial entre sus extremos es 40 V.



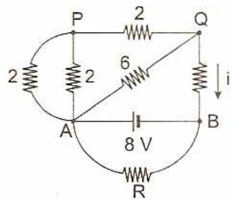
Calculamos el valor de R aplicando la ley de Ohm:
$V = iR \Rightarrow 40 = 2{,}5R$
$\therefore\ R = 16\ \Omega$

16. En el circuito mostrado, hallar el valor de la corriente **i**. Todas las resistencias están expresadas en ohmios.

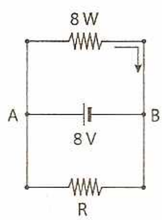


Resolución:

a)



b)

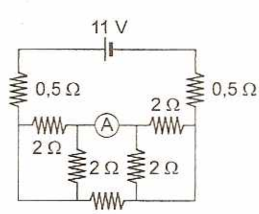


Simplificamos el circuito siguiendo los pasos a y b.
Aplicamos la ley de Ohm al circuito equivalente.
$\varepsilon = ir \Rightarrow 8 = i(8) \quad \therefore i = 1\ A$

Nota

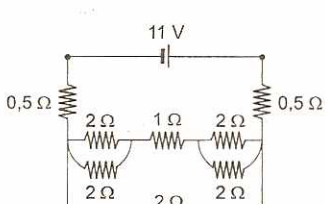
Para el cálculo de i no es necesario conocer el valor de R.

17. En el circuito mostrado, hallar la lectura del amperímetro real A sabiendo que tiene una resistencia interna de 1 Ω.

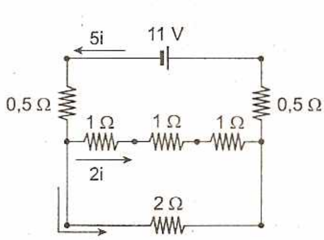


Resolución:

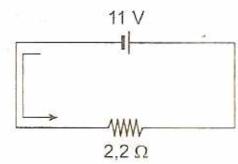
a)



b)



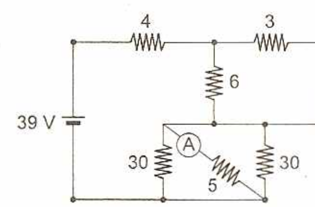
c)



Simplificamos el circuito siguiendo los pasos a; b y c.
Aplicamos la ley de Ohm al circuito equivalente:
$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 11 = (5i)(2{,}2) \Rightarrow i = 1\ A$

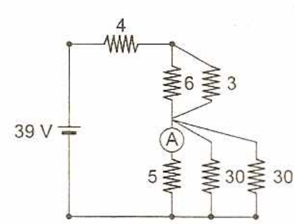
Luego, la lectura en el amperímetro real es:
$2i = 2\ A$.

18. Hallar la lectura del amperímetro ideal A mostrado en la figura. Las resistencias están expresadas en ohmios.

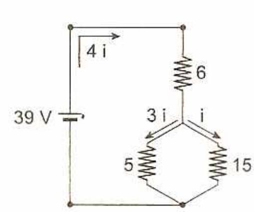


Resolución:

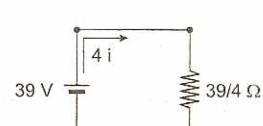
a)



b)



c)



Simplificamos el circuito siguiendo los pasos: a; b y c.

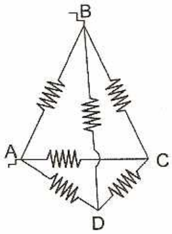
Aplicamos la ley de Ohm al circuito equivalente:
$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 39 = (4i)\left(\frac{39}{4}\right) \Rightarrow i = 1\ A$

Luego, la lectura en el amperímetro ideal es:
$3i = 3\ A$.

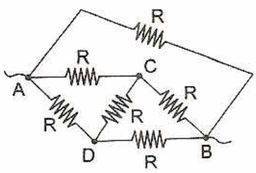
19. Si cada arista de un tetraedro tiene una resistencia R, hallar la resistencia equivalente entre dos vértices del tetraedro.

Resolución:

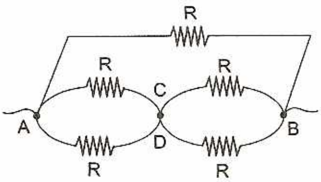
Sea el tetraedro:

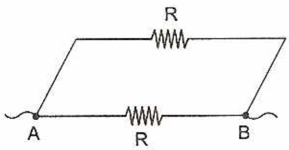


Ordenando el circuito para observar mejor el arreglo puente:



Ya que el producto en cruz es igual, los puntos C y D se cortocircuitan.

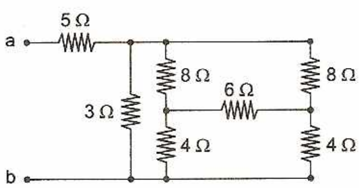




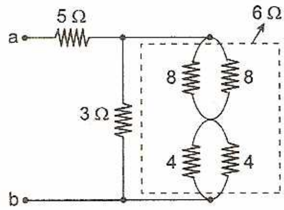
Reduciendo:

La resistencia equivalente: $R_{eq} = R/2$

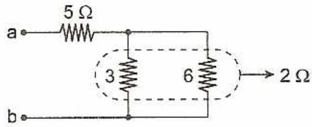
20. Encuentre la resistencia equivalente entre los terminales a y b.



Resolución:

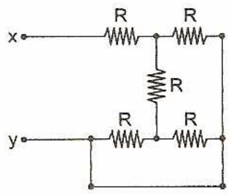


Usamos el arreglo puente en un lado del circuito total, observe que la resistencia de 6 Ω puede tener cortocircuito.

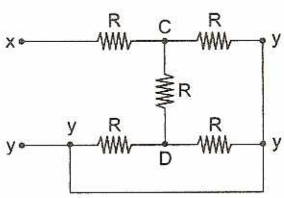


Reducimos: $R_{eq} = 5 + 2 \quad \therefore\ R_{eq} = 7\ \Omega$

21. Hállese la resistencia equivalente entre los terminales **x** e **y**. R = 10 Ω.



Resolución:



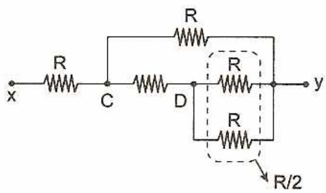
Cuando no se observe el arreglo en serie ni en paralelo se busca los puntos de igual potencial.

Observaciones:

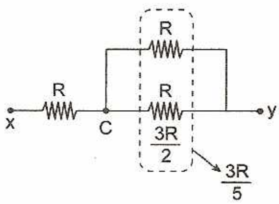
1. Si a través del conductor no hay resistencias, el potencial es el mismo.
2. El potencial en el punto C es diferente al potencial en los puntos **x**, **y** o D debido a que entre ellos hay resistencias.

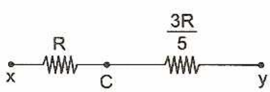
Ordenamos el circuito ubicando los terminales **x** e **y** en los extremos:

Las resistencias se van trasladando de acuerdo a los bornes a la que están conectadas.



En este nuevo circuito se han juntado los puntos de igual potencial (y), observándose claramente los arreglos en paralelo y en serie.

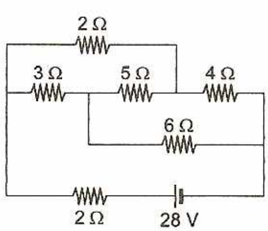




Reduciendo el circuito: $R_{eq} = R + \frac{3R}{5}$

$R_{eq} = \frac{8R}{5} \Rightarrow R_{eq} = \frac{8(10)}{5} \quad \therefore R_{eq} = 16\,\Omega$

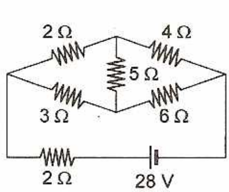
22. En el circuito calcule la intensidad de corriente que la fuente entrega al circuito.



Resolución:

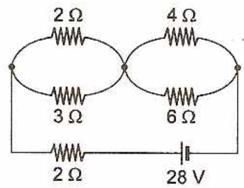
En muchos circuitos, el arreglo puente no es observable directamente, por ello los circuitos tratan de arreglarse buscando este puente:

a)



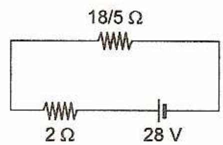
Observe que se puede cortocircuitar la resistencia de 5 Ω ya que el producto cruz es igual [2(6) = 3(4)]

b)



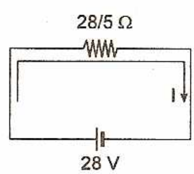
Reduciendo:

c)



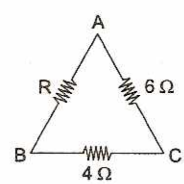
Sumando en serie:

d)

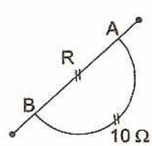


$\therefore$ Ley de Ohm: $i = \frac{28}{\frac{28}{5}} = 5\text{ A}$

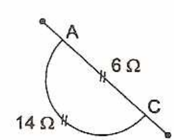
23. La resistencia equivalente entre A y B es 5 Ω. Calcular la resistencia equivalente entre A y C.



Resolución:



a)



b)

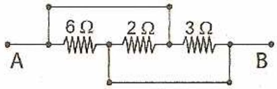
Resistencia equivalente entre los puntos A y B:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 10\,\Omega$

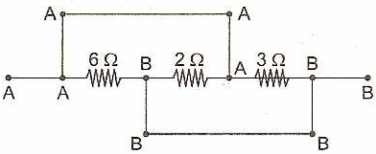
Resistencia equivalente entre los puntos A y C:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \quad \therefore R_{AC} = 4{,}2\,\Omega$

24. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

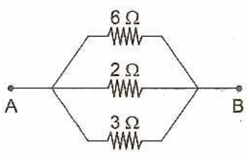


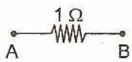
Resolución:



En principio, consideramos que todos los alambres de conexión tienen resistencia eléctrica despreciable. Entonces todos los puntos de un mismo alambre de conexión constituyen una línea equipotencial, es decir el potencial es el mismo en todos estos puntos.

Uniendo los puntos de igual potencial eléctrico, entre los puntos A y B están:





$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \therefore R_{eq} = 1\ \Omega$

25. Se tiene un alambre conductor de aleaciones muy especiales llamado NICHRON empleado para artefactos calefactores, su resistividad es $1,1\ \Omega.mm^2/m$; si su sección transversal es de $0,5\ mm^2$ y tiene una longitud de 10 m, calcular la resistencia eléctrica del conductor en ohmios.

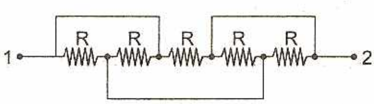
Resolución:

De la ley de Poulliet: $R = \rho\frac{L}{A}$ ...(1)

Reemplazando datos en (1):

$R = 1,1\left[\frac{10}{0,5}\right] \quad \therefore R = 22\ \Omega$

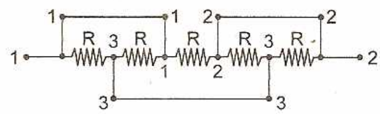
26. Determinar la resistencia equivalente entre los puntos 1 y 2, sabiendo que el valor de cada resistencia es R.



Resolución:

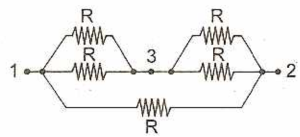
Puesto que en el problema dado las resistencias de los alambres son iguales a cero, entonces todos los puntos de un alambre conductor ideal poseen un potencial eléctrico constante.

a)

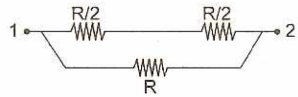


Haciendo coincidir los puntos de igual potencial eléctrico:

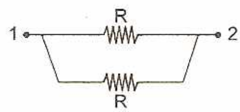
b)



c)

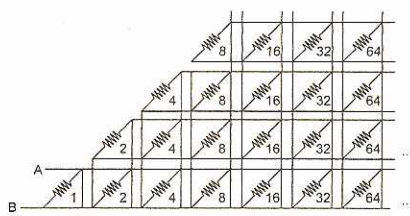


d)



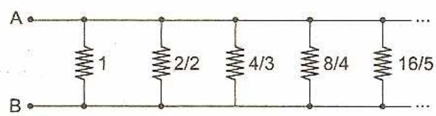
Finalmente: $R_{eq} = \frac{R}{2}$

27. Hallar la resistencia equivalente entre A y B (todas las resistencias se miden en ohmios). La cantidad de resistencias es ilimitada.



Resolución:

Reduciendo el conjunto de resistencias iguales, en la vertical, instalados en paralelo:

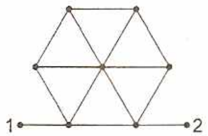


Cálculo de la resistencia equivalente:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + ...$

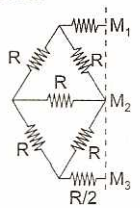
Resolviendo: $R_{eq} = \frac{1}{4}\ \Omega$

28. Un hexágono regular junto con sus diagonales está hecho de alambres. La resistencia de cada alambre es igual a R. El hexágono se conecta a un circuito entre los puntos 1 y 2 como se indica en la figura. Encontrar la resistencia total del hexágono.

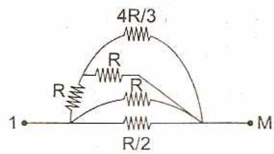


Resolución:

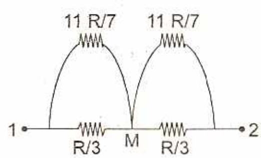
a)



b)



c)



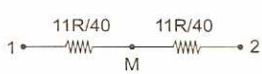
Criterio de simetría:

Todos los puntos del plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico. En la figura (a) se representa por medio de una línea punteada.

Los puntos M_1, M_2 y M_3 que descansan sobre el plano de simetría deben tener el mismo potencial eléctrico e igual a la semisuma de los potenciales en los puntos 1 y 2.

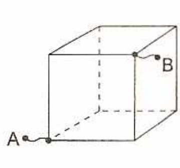
De acuerdo a la regla establecida, estos tres puntos, M_1, M_2 y M_3, se pueden unir en uno solo; como resultado de esto la asociación de resistencias considerada se descompone en dos sectores unidos en serie uno de los cuales se indica en la figura (a).

Cálculo de la resistencia equivalente:



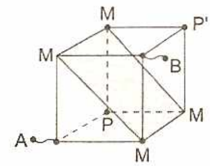
$\therefore\ R_{eq} = \dfrac{11}{20}R$

29. Doce (12) alambres iguales de resistencia R constituyen un armazón en forma de cubo. Hallar la resistencia equivalente del conjunto, sabiendo que la corriente ingresa por el vértice A y sale por el vértice B.



Resolución:

a)

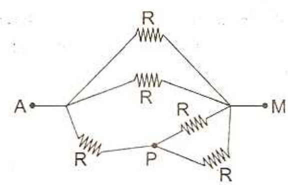


Criterio de simetría:

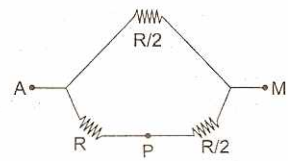
Todos los puntos del plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico.

Por consiguiente las resistencias entre los puntos M no funcionan. Reduciendo tenemos:

b)

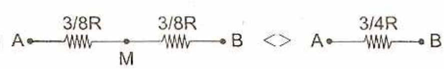


c)



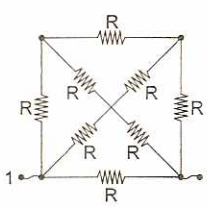
Cálculo de la resistencia equivalente:

d)



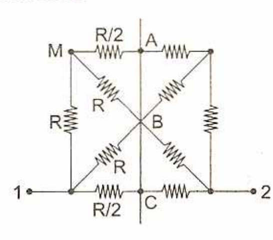
Luego: $R_{eq} = \dfrac{3}{4}R$

30. La figura muestra un cuadrado con sus diagonales, en cada lado se encuentra instalado una resistencia de magnitud R. Hallar la resistencia equivalente de conjunto, sabiendo que la corriente ingresa por el vértice 1 y sale por el vértice 2.

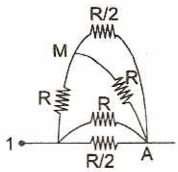


Resolución:

a)



b)

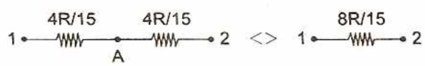


1. Hay que encontrar los puntos de igual potencial eléctrico. En el caso dado es fácil observar que el esquema posee un eje de SIMETRÍA. En la figura se representa por medio de una línea punteada, figura (a).
2. Claramente que todos los puntos que descansan sobre el eje de simetría, deben tener el mismo potencial, igual a la semisuma de los potenciales de los puntos 1 y 2.

$$V_A = V_B = V_C = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

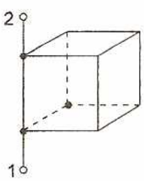
3. De esta manera, los potenciales de los puntos A, B y C, son iguales de acuerdo a la regla establecida, estos tres puntos se pueden unir en uno solo, y como resultado de esto, la combinación de resistencias considerada se descompone en dos sectores unidos en serie uno de los cuales se indica en la figura (b).
4. Cálculo de la resistencia equivalente:

c)



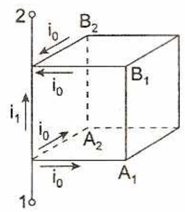
Luego: $R_{eq} = \frac{8}{15}R$

31. Doce alambres iguales de resistencia R cada uno constituyen un armazón en forma de cubo. Hallar la resistencia equivalente del conjunto, sabiendo que la corriente ingresa por el vértice 1 y sale por el vértice 2.

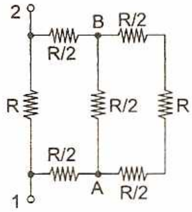


Resolución:

a)

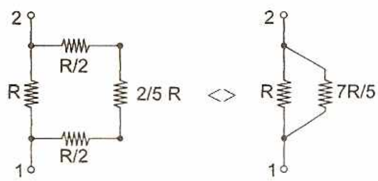


b)



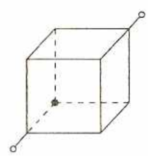
1. Se puede observar en la figura (a) que los puntos B_1 y B_2 se encuentran a igual potencial eléctrico debido a la simetría del esquema.
   Entonces: $B_1 = B_2 = B$.
2. Del mismo modo los puntos A_1 y A_2 se encuentran a igual potencial debido a la simetría del esquema. Entonces: $A_1 = A_2 = A$
3. De acuerdo a la regla establecida los puntos A_1 y A_2, se pueden unir en uno solo llamado punto A. Del mismo modo los puntos B_1 y B_2 se pueden unir en uno solo llamado punto B.
4. Por consiguiente la asociación de resistencias adopta la forma indicada en la figura (b).
5. Cálculo de la resistencia equivalente:

c)



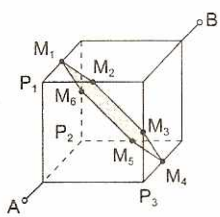
$\therefore\ R_{eq} = \frac{7}{12}R$

32. Doce (12) alambres iguales de resistencia R constituyen un armazón en forma de cubo. Hallar la resistencia equivalente del conjunto, sabiendo que la corriente ingresa por el vértice A y sale por el vértice B.

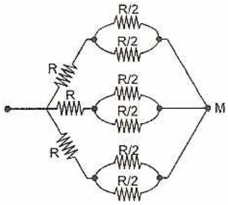


Resolución:

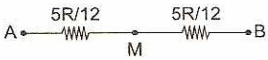
a)



b)



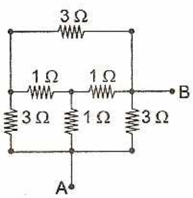
1. Criterio de simetría:
   Todos los puntos del plano de simetría se encuentran a igual potencial eléctrico.
2. Todos los puntos que descansan sobre el plano de SIMETRÍA, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6 deben tener el mismo potencial, igual a la semisuma de los potenciales de los puntos A y B.
3. De acuerdo a la regla establecida estos seis puntos; M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6, se puede unir en uno solo, como resultado de esto la asociación de resistencias considerada se descompone en dos sectores unidos en serie uno de los cuales se indica en la figura (b).



4. Cálculo de la resistencia equivalente:

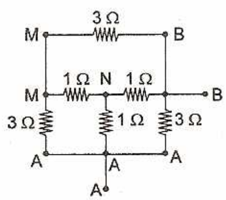
$$\therefore\ R_{eq} = \frac{5}{6}R$$

33. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

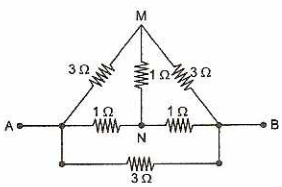


Resolución:

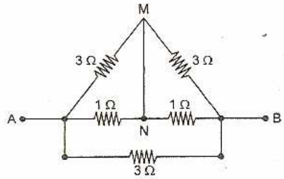
a)



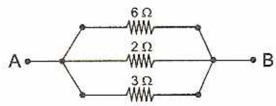
b)



c)



1. Todos los puntos de un mismo alambre de conexión constituyen una línea equipotencial: (fig. a).
2. Uniendo los puntos de igual potencial eléctrico: (fig. b)
3. Identificando el efecto puente, la resistencia que se encuentra entre los puntos M y N, no funciona, entonces puede ser retirado sin alterar al sistema: (fig. c)
4. Reduciendo tenemos:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \therefore\ R_{eq} = 1\ \Omega$$

34. Si por un alambre conductor circula una corriente de intensidad 16 mA, determinar el número de electrones que atraviesan la sección transversal del conductor en 0,1 s.

Resolución:

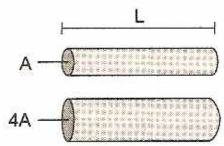
Cantidad de carga: $q = iT = (16 \times 10^{-3})0{,}1$

$q = 16 \times 10^{-4}$ C

Número de electrones: n.° de e: $\frac{q}{e}$

n.° de e: $\frac{16 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-20}} = 10^{16}$ $\quad\therefore$ n.° de e: 10^{16}

35. Un cable de cobre tiene una resistencia de 10 Ω, ¿qué resistencia tendrá un cable de la misma longitud, pero del doble de diámetro?



Resolución:

$L_1 = L_2 = L$; $\quad A_1 = \frac{\pi(d)^2}{4}$; $\quad A_2 = \frac{\pi}{4}(2d)^2 = \pi d^2$

$$R_1 = \rho\frac{L^2}{A_1};\quad R_2 = \rho\frac{L^2}{A_2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho\dfrac{L^2}{A_1}}{\rho\dfrac{L^2}{A_2}} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \frac{10}{R_2} = \frac{\pi d^2}{\frac{\pi}{4}d^2} \Rightarrow \frac{10}{R_2} = 4$$

$$\therefore\ R_2 = 2{,}5\ \Omega$$

36. Un alambre de 1000 m de longitud y resistividad de 5×10^{-6} Ω.m, está conectado a un voltaje de 100 V. ¿Cuál debe ser el área de su sección recta transversal (en cm^2) si queremos que circule una corriente de 2 A por el alambre?

Resolución:

Ley de Ohm: $R = \frac{V}{i}$

$R = \frac{100}{2} \Rightarrow R = 50\,\Omega$

Ley de Poulliet: $R = \rho\frac{L}{A}$

$A = \frac{\rho L}{R} \Rightarrow A = \frac{(5\times10^{-6})10^3}{50}$

$A = 10^{-4}\,m^2 \quad \therefore A = 1\,cm^2$

37. Si 100 m de alambre de sección transversal 5 mm^2 tiene una resistencia eléctrica de 0,34 Ω. Determinar de que material esta hecho el alambre, si se conoce la siguiente tabla.

Material	ρ(Ω.m) a 20 °C
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$
Aluminio	$2,8 \times 10^{-8}$
Hierro	10×10^{-8}
Plomo	22×10^{-8}

Resolución:

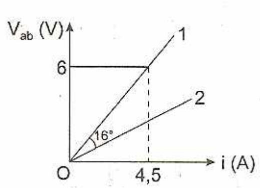
Cálculo de la resistividad: $R = \rho\frac{L}{A}$

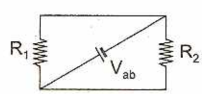
$\rho = \frac{RA}{L} \Rightarrow \rho = \frac{0,34(5\times10^{-6})}{100} = 1,7\times10^{-8}$

$\rho = 1,7 \times 10^{-8}\,\Omega.m$

Por lo tanto, el alambre esta hecho de cobre.

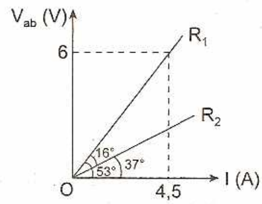
38. En la figura se describe el voltaje en función de la intensidad de corriente que afecta a los resistores ohmicos. Además en el circuito mostrado la batería es ideal y tiene una diferencia de potencial de 12 V entre sus terminales. Determinar la intensidad de corriente que circula en R_2





Resolución:

$R_1 = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}$

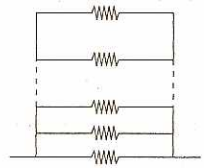


$R_2 = \tan37° = \frac{3}{4} = 0,75\,\Omega$

Ley de Ohm: $V_{ab} = i_2R_2$

$12 = i_2\frac{3}{4} \quad \therefore i_2 = 16\,A$

39. Determinar el número de resistencias de 160 Ω cada una, que son necesarias disponer en paralelo, para que circule 5 A por una línea de 100 V.



Resolución:

Conexión en paralelo: $R_{eq} = \frac{R}{n}$

Ley de Ohm: $V = iR_{eq}$

Reemplazando: $100 = 5\left(\frac{160}{n}\right)$

$n = \frac{800}{100} = 8 \quad \therefore n = 8$

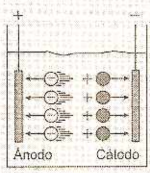
FUENTES DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Se denomina así a todo aquel dispositivo que se emplea para convertir alguna forma de energía (térmica, química, mecánica, nuclear) en energía eléctrica aprovechable por las cargas eléctricas libres para desplazarse a lo largo de un tramo del circuito eléctrico.

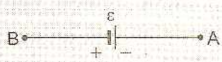
Toda fuente de energía eléctrica (corriente continua) tiene dos zonas bien definidas denominados bornes o polos, llamándose polo positivo (+) al que se encuentra a mayor potencial y polo negativo (−) al que se encuentra a menor potencial.

En las pilas voltaicas o acumuladores durante la transformación de energía ocurren ciertas reacciones químicas, la corriente eléctrica se debe al movimiento ordenado de los iones positivos y negativos en la solución iónica.

Pila voltaica



Representación de una fuente de energía eléctrica:



FUERZA ELECTROMOTRIZ (fem ε)

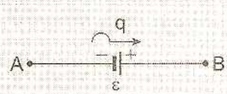
Su valor se define como el trabajo realizado por la fuente de energía (pila, batería, generador) sobre cada unidad de carga libre positiva para trasladar desde el polo negativo (−) hacia el polo positivo (+), en este caso la unidad de carga gana energía $+\varepsilon$. Para un desplazamiento contrario, la unidad de carga pierde energía $-\varepsilon$.

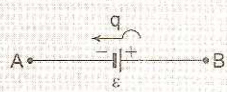
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\text{trabajo}}{\text{carga}} = \frac{W_{A\to B}}{q}} \qquad ...(16.14)$$

El trabajo realizado por la pila o batería sobre las cargas será igual a:

$$\boxed{W_{A\to B} = q\varepsilon} \qquad ...(16.15)$$

Desplazamiento

a) 

b) 

Si la carga libre q se desplaza de A hacia B, gana una energía: $+\varepsilon$

Si la carga libre q se desplaza de B hacia A, pierde una energía: $-\varepsilon$

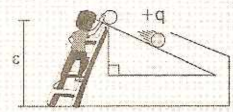
PILA O BATERÍA

La batería se puede simular como un obrero que lleva las cargas eléctricas libres positivas de menor a mayor potencial eléctrico.

La fuerza electromotriz ε será directamente proporcional a la altura que eleva la carga libre q.

Obrero - Pila

Eleva el potencial eléctrico de la carga +q, continuamente.



POTENCIA ELÉCTRICA (P)

Se define como la rapidez con que realiza trabajo la fuente de energía (pila). La fuente de energía realiza trabajo sobre las cargas eléctricas libres para llevar del polo negativo hasta el polo positivo.

$$\boxed{P = \frac{W_{A\to B}}{t}} \qquad ...(16.16)$$

Reemplazando (16.15) en (16.16) tenemos:

$$P = \frac{q\varepsilon}{t} = \left[\frac{q}{t}\right]\varepsilon$$

$$\boxed{P = i\varepsilon} \qquad ...(16.17)$$

La potencia que entrega la pila al circuito, se mide en watts, en honor al físico inglés James Watt, inventor de la máquina de vapor.

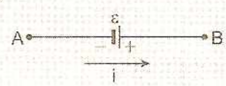
Representación de una pila

La potencia que entrega la pila es: $P = i\varepsilon$

P: potencia (watt)

i: corriente (ampere)

ε = FEM (volt)



POTENCIA CONSUMIDA

De la ley de Ohm, la corriente eléctrica **i** atraviesa la resistencia R debido a una diferencia de potencial entre los puntos A y B.

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{W_{A\to B}}{q}} \qquad ...(16.18)$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y B, se define como el trabajo realizado por el campo eléctrico, $\vec{E}$, en el conductor (resistencia) por cada unidad de carga libre positiva q.

$$W_{A\to B} = (V_A - V_B)q$$

La potencia consumida por la resistencia R al paso de la corriente **i**, es:

$$P = \frac{W_{A-B}}{t} = \frac{(V_A - V_B)q}{t}$$

Haciendo: $V = V_A - V_B \Rightarrow P = V\left[\frac{q}{t}\right]$

$$\boxed{P = Vi} \qquad ...(16.19)$$

De la ley de Ohm: $V = iR$, en (16.19)

$$P = Vi = (iR)i$$

$$\boxed{P = i^2R} \qquad ...(16.20)$$

De la ley de Ohm: $i = \frac{V}{R}$, en (16.19)

$$P = Vi = V\left[\frac{V}{R}\right]$$

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R}} \qquad ...(16.21)$$

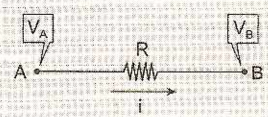
La potencia consumida se puede expresar como:

$$\boxed{P = Vi = i^2R = \frac{V^2}{R}} \qquad ...(16.22)$$

Ley de Ohm

La diferencia de potencial entre los puntos A y B es:

$V = V_A - V_B$



LEY DE JOULE-LENZ

Por principio de conservación de la energía, la potencia consumida por la resistencia al paso de la corriente, la resistencia lo libera al medio ambiente en forma de energía calorífica, como ocurre por ejemplo con la plancha eléctrica.

$$\boxed{P = \frac{Q}{t}} \qquad ...(16.23)$$

$$\boxed{Q = Pt} \qquad ...(16.24)$$

La cantidad de calor Q liberada por la resistencia R debido al paso de la corriente i, es igual al producto de la potencia consumida por el intervalo de tiempo t en funcionamiento.

Reemplazando (16.22) en (16.24) tenemos:

$$\boxed{Q = Vit = i^2Rt = \frac{V^2}{R}t} \qquad ...(16.25)$$

En (16.25) la cantidad de calor Q se mide en *joules*, donde:

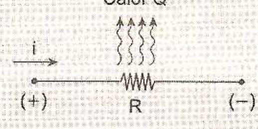
1 *joule* = 0,24 calorías.

A esta misma conclusión, sobre la base de experimentos llegaron independientemente, el uno del otro, el científico inglés James P. Joule y el ruso Emilio Lenz, por esta causa el principio o ley enunciado anteriormente lleva el nombre de ley de Joule-Lenz.

La cantidad de calor Q expresado en calorías es:

I	$Q = 0{,}24\ Vit$
II	$Q = 0{,}24\ i^2Rt$
III	$Q = 0{,}24\ \frac{V^2}{R}t$

Plancha eléctrica



La cantidad de calor Q expresado en *joules* es:

I.	$Q = Vit$
II.	$Q = i^2Rt$
III.	$Q = \frac{V^2}{R}t$

La potencia consumida es:

P: potencia (watt)
V: diferencia de potencial (volt)
i: corriente (ampere)
R: resistencia (ohm)

I	$P = Vi$
II	$P = i^2R$
III	$P = \frac{V^2}{R}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un cable de transmisión de energía eléctrica conduce corriente de intensidad 30 A. Si existe una caída de potencial de 12,5 V entre los extremos del cable, ¿en qué cantidad de calor se ha disipado la energía perdida durante 5 min?

Resolución:

Calculamos la cantidad de calor disipado en calorías aplicando la Ley de Joule-Lenz:

$Q = 0{,}24(Vit) \Rightarrow Q = 0{,}24(12{,}5)(30)(300)$

$\Rightarrow Q = 27\,000 \text{ cal} \quad \therefore\ Q = 27 \text{ kcal}$

2. Una resistencia de 20 Ω está sometido a una tensión de 100 V. Determinar la cantidad de calor (en calorías) disipado en 3 min.

Resolución:

Calculamos la cantidad de calor disipado en calorías aplicando la ley de Joule-Lenz:

$$Q = 0{,}24\frac{V^2}{R}t \Rightarrow Q = 0{,}24\left(\frac{100^2}{20}\right)(180)$$

$Q = 21\,600 \text{ cal} \quad \therefore\ Q = 21{,}6 \text{ kcal}$

3. Por una resistencia de 4 Ω atraviesa una corriente de intensidad 5 A. Determinar la cantidad de calor disipado en 2 minutos.

Resolución:

Aplicando a la resistencia la ley de Joule-Lenz:

$Q = i^2Rt \Rightarrow Q = (5)^2(4)(120)$

$Q = 12\,000 \text{ J} \quad \therefore\ Q = 12 \text{ kJ}$

4. Cuando la intensidad de corriente **i** atraviesa una resistencia eléctrica R esta disipa una potencia de 800 W. Si la corriente disminuye un 50%, determinar la nueva potencia disipada por la resistencia.

Resolución:

Sea P_1 la potencia disipada inicialmente:

$P_1 = i^2R = 800\ \Omega \qquad ...(1)$

Sea P_2 la nueva potencia disipada:

$P_2 = (0{,}5i)^2(R) = 0{,}25i^2R \qquad ...(2)$

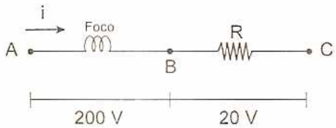
Reemplazando (1) en (2) tenemos que:

$P_2 = 0{,}25P_1$

$\therefore\ P_2 = 200 \text{ W}$

5. Un foco tiene las siguientes características: 100 W y 200 V. Determinar el valor de la resistencia de protección que debe instalarse en serie con el foco, cuando al conjunto se le aplica una tensión de 220 voltios. Suponer que la resistencia del foco es constante.

Resolución:



Si la diferencia de potencial entre los extremos del conjunto es 220 V, entonces el foco debe consumir 200 V y la resistencia de protección 20 V.

Calculamos la corriente i que atraviesa el foco y la resistencia de protección. De la característica del foco:

$P = Vi \Rightarrow 100 \text{ W} = (200)i \Rightarrow i = 0{,}5 \text{ A}$

Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de protección:

$$R = \frac{V}{i} \Rightarrow R = \frac{20}{0{,}5} \quad \therefore\ R = 40\ \Omega$$

6. Once foquitos de navidad se conectan en serie a un tomacorriente doméstico de 220 V, entonces cada uno disipa 16 W. Luego se conectan en paralelo al mismo tomacorriente y se observa que se queman. Se compran luego otros once foquitos iguales y se los vuelve a conectar pero protegido cada uno con una resistencia R. Si brillan ahora como los foquitos originales, ¿cuánto vale cada resistencia de protección?

Resolución:

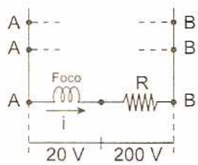
Cuando los once foquitos se conectan en serie, cada uno está sometido a una tensión de:

$$\frac{220}{11} = 20 \text{ voltios}$$

Cuando los focos están conectados en paralelo, cada foco debe consumir 20 V y cada resistencia de protección 200 V.

Calculamos la corriente que atraviesa cada foquito, para que brillen como los foquitos originales:

$P = Vi \Rightarrow 16 = (20)i \Rightarrow i = 0{,}8 \text{ A}$



Aplicamos la ley de Ohm a la resistencia de protección: $V = iR \Rightarrow 200 = (0{,}8)R \quad \therefore R = 250\ \Omega$

7. Empleando un ohmímetro encontramos que la resistencia de un conductor de hierro es de 400 Ω a la temperatura de 320 °C. ¿Cuál es el valor de la resistencia a 420 °C? Coeficiente de dilatación lineal del hierro es igual a $2 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$.

Resolución:

La resistencia de un conductor varía con la temperatura, mediante la relación siguiente:

$R_F = R_o(1 + \alpha\Delta T) \Rightarrow R_F = 400[1 + 2 \times 10^{-3}(100)]$

$\therefore R_F = 480\ \Omega$

8. El bobinado de un motor eléctrico es de alambre de cobre, si su resistencia antes de comenzar a trabajar es de 80 Ω y después de trabajar 6 h continuas su resistencia es de 120 Ω, determinar el incremento de temperatura en el bobinado. Coeficiente de dilatación lineal del cobre $= 4 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$.

Resolución:

Debido al incremento de temperatura, el alambre de cobre experimenta una dilatación longitudinal, por consiguiente la resistencia aumenta.

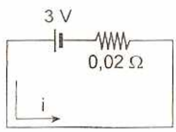
$R_F = R_o(1 + \alpha\Delta T) \Rightarrow 120 = 80[1 + 4 \times 10^{-3}(\Delta T)]$

$\therefore \Delta T = 125\ °C$

9. En una pila seca de 3 V de FEM, se determinó que el valor de su resistencia interna es de 0,02 Ω. ¿Cuál será la potencia que disipará dicha fuente al cortocircuitarse? ¿Qué corriente circula?

Resolución:

Al cerrar el circuito, la intensidad de corriente **i** que circula es: $\varepsilon = iR$



$3 = i(0{,}02) \Rightarrow i = 150\ A$

La potencia que disipa es:

$P = i\varepsilon \Rightarrow P = (150)(3) \Rightarrow P = 450\ W$

10. Una lámpara incandescente tiene las siguientes especificaciones: 300 W, 200 V. Si se conecta a una fuente de 100 V, la potencia disipada será:

Resolución:

Calculamos la resistencia de la lámpara:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 300 = \frac{(200)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{400}{3}\ \Omega$$

La potencia disipada será:

$$P' = \frac{(V')^2}{R} \Rightarrow P' = \frac{(100)^2}{\frac{400}{3}} \quad \therefore P' = 75\ W$$

11. Colocar los siguientes objetos en orden de mayor a menor resistencia: FOCO de 60 W a 12 V; PLACA caliente que consume 1200 W cuando pasan por ella 10 A de corriente; BATERÍA de 3 V que suministra 2 A de corriente cuando se unen sus terminales.

Resolución:

$$\text{FOCO: } P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 60 = \frac{(12)^2}{R} \Rightarrow R = 2{,}4\ \Omega$$

PLACA: $P = i^2R \Rightarrow 1200 = (10)^2R \Rightarrow R = 12\ \Omega$

BATERÍA: $V = iR \Rightarrow 3 = R(2) \Rightarrow R = 1{,}5\ \Omega$

Por lo tanto el ordenamiento es:

PLACA, FOCO, BATERÍA.

12. Calcular el costo de funcionamiento de una lámpara que durante 24 horas está conectada a una fuente de 100 voltios y absorbe una corriente de 5 A. Sabiendo que el precio de cada kW hora es $0,02 (dólar).

Resolución:

La potencia disipada por la lámpara es:

$P = Vi \Rightarrow P = (100)(5) = 500\ W \Rightarrow P = 0{,}5\ kW$

La energía consumida es:

$E = Pt \Rightarrow E = (0{,}5)(24) = 12\ kW.h$

El costo de funcionamiento es:

$C = 12(0{,}02) = 0{,}24 \quad \therefore \$0{,}24$

13. Calcular el costo de funcionamiento de un equipo de sonido de 1500 W de potencia, durante 8 horas continuas. Sabiendo que cada kW hora vale $0,03 (dólar).

Resolución:

La potencia en kilowatts es: $P = 1{,}5\ kW$

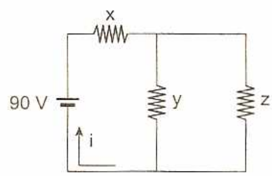
La energía consumida es:

$E = Pt \Rightarrow E = 1{,}5(8) = 12\ kW.h$

El costo de funcionamiento es:

$C = 12(0{,}03) = 0{,}36 \quad \therefore \$0{,}36$

14. En el circuito eléctrico mostrado las resistencias son: $x = 10\ \Omega$, $y = 30\ \Omega$, $z = 60\ \Omega$, y disipan las siguientes potencias: 90 W; 120 W y 60 W respectivamente. Halla la intensidad de corriente **i** que entrega la fuente de 90 V.



Resolución:

La potencia eléctrica es una magnitud física escalar, por consiguiente la potencia que entrega la fuente de 90 V es igual a la suma de potencias

parciales disipadas por cada resistencia.

$P_{(neta)} = P_{(x)} + P_{(y)} + P_{(z)} = 90 + 120 + 60 = 270$

La potencia neta que entrega la fuente es:

$P_{(neta)} = i\varepsilon \Rightarrow 270 = i(90) \quad \therefore\ i = 3\ A$

15. Cuando en una casa se tienen funcionando una tostadora de 1200 W, un foco de 120 W y una plancha de 600 W, el fusible se quema rato después que se enciende otro foco de 60 W. ¿Cuál es aproximadamente el amperaje del fusible de la línea de entrada? Considere que la tensión en los tomacorrientes es de 220 V.

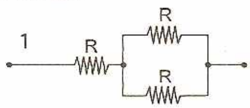
Resolución:

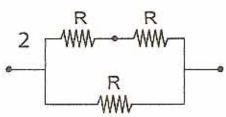
La potencia total disipada es igual a la suma de potencias parciales:

$P = 1200 + 120 + 600 + 60 = 1980$

La potencia total que entrega la fuente de energía es: $P = i\varepsilon \Rightarrow 1980 = i(220) \quad \therefore\ i = 9\ A$

16. Dos cocinas eléctricas (1) y (2) de igual número de resistencias instaladas como muestra la figura. Ambas cocinas se conectan a una fuente de 220 V. Si la cocina (1) hace hervir el agua en 18 min, ¿en cuánto tiempo hará hervir la misma cantidad de agua la cocina (2)?





Resolución:

La resistencia equivalente de cada cocina es:

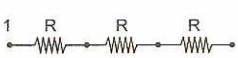
$R_1 = \frac{3}{2}R \quad y \quad R_2 = \frac{2}{3}R$

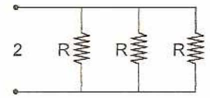
En ambos casos, el agua necesita igual cantidad de calor Q para hervir. De la ley Joule-Lenz:

$$Q = \frac{V^2}{R_1}t_1 = \frac{V^2}{R_2}t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2} \Rightarrow \frac{18}{\frac{3}{2}R} = \frac{t_2}{\frac{2}{3}R}$$

$\therefore\ t_2 = 8$ min

17. Dos cocinas eléctricas (1) y (2) cuyas resistencias se encuentran instalados como indica la figura, en serie y en paralelo respectivamente. Ambas cocinas se conectan a una tensión de 220 voltios. Si la cocina (1) hace hervir el agua en 9 min, ¿en cuánto tiempo hará hervir la misma cantidad de agua la cocina (2)?





Resolución:

La resistencia equivalente de cada cocina es:

$$R_1 = 3R \quad y \quad R_2 = \frac{R}{3}$$

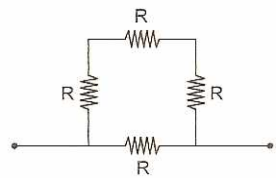
En ambos casos, el agua necesita igual cantidad de calor Q par hervir. De la ley Joule-Lenz:

$$Q = \frac{V^2}{R_1}t_1 = \frac{V^2}{R_2}t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2} \Rightarrow \frac{9}{3R} = \frac{t_2}{\frac{R}{3}}$$

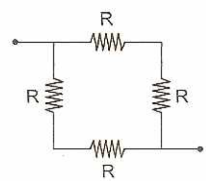
$\therefore\ t_2 = 1$ min

18. Se tiene dos hornillos a y b con igual número de resistencias como muestra la figura. Si en a el agua hierve en 2 min, ¿en cuánto tiempo hervirá una cantidad igual de agua en el hornillo b? En ambos casos están conectados a igual tensión.

a)



b)



Resolución:

La resistencia equivalente en cada caso es:

$$R_a = \frac{R}{4} \quad y \quad R_b = R$$

En ambos casos, el agua necesita igual cantidad de calor Q para hervir. De la ley de Joule-Lenz:

$$Q = \frac{V^2}{R_a}t_a = \frac{V^2}{R_b}t_b \Rightarrow \frac{t_a}{R_a} = \frac{t_b}{R_b} \Rightarrow \frac{2}{\frac{R}{4}} = \frac{t_b}{R}$$

$\therefore\ t_b = 8$ min

19. Hallar la resistencia de un calentador eléctrico empleado para elevar la temperatura de 28 °C hasta 100 °C de 500 cm^3 de agua en 2 minutos. La resistencia está conectada a una tensión de 100 V.

Resolución:

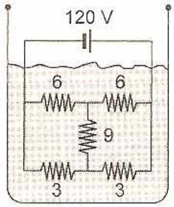
La cantidad de calor Q que necesita 500 g de agua para elevar la temperatura en 72 °C es:

$Q = mC_e\Delta t \Rightarrow Q = (500)(1)(72) = 36\ 000$ cal

Ley de Joule-Lenz: $Q = 0{,}24\frac{V^2}{R}t$

$36\,000 = 0{,}24\,\frac{(100)^2}{R}(120) \quad \therefore\ R = 8\ \Omega$

20. Una terma eléctrica usa un sistema resistivo como se muestra en la figura. ¿Qué tiempo debe circular la corriente para lograr calentar 1080 gramos de agua de 20 °C hasta 100 °C? Las resistencias se expresan en ohmios.



Resolución:

Analizando el circuito identificamos el efecto puente y obtenemos la resistencia equivalente, $R_{eq} = 4\ \Omega$.

La cantidad de calor Q que necesita el agua para elevar su temperatura en 80 °C es:

$Q = mC_e\Delta T \Rightarrow Q = (1080)(1)(80) = 86\,400$ cal

La energía que disipan las resistencias se determina aplicando la ley de Joule-Lenz:

$Q = 0{,}24\frac{V^2}{R}t \Rightarrow 86\,400 = 0{,}24\frac{(120)^2}{4}t$

$\therefore\ t = 100$ s

21. Se tiene un hornillo de resistencia 5 Ω por el cuál circula una corriente de 10 A. ¿En cuánto tiempo se podrá calentar 240 cm^3 de agua de 20 °C hasta 70 °C?

Resolución:

La cantidad de calor Q que necesita 240 g de agua para elevar la temperatura en 50°C es:

$Q = mC_e\Delta T \Rightarrow Q = (240)(1)(50) = 12\,000$ cal

El calor absorbido por el agua es igual al calor disipado por la resistencia. De la ley de Joule-Lenz:

$Q = 0{,}24i^2Rt \Rightarrow 12\,000 = 0{,}24(10)^2(5)t$

$\therefore\ t = 100$ s

22. Se tiene un hornillo de resistencia 20 Ω, conectado a una fuente de 100 voltios. Para 240 gramos de hielo a 0 °C, ¿en cuánto tiempo se podrá obtener 240 g de agua a 100 °C?

Resolución:

Sea Q_1 la cantidad de calor que necesita para cambiar la fase: $Q_1 = mL_F = (240)(80) = 19\,200$ cal

Sea Q_2 la cantidad de calor que necesita para elevar la temperatura:

$Q_2 = mC_e\Delta T = (240)(1)(100) \Rightarrow Q_2 = 24\,000$ cal

La cantidad de calor total es $(Q_1 + Q_2) = 43\,200$ cal

El calor absorbido por el agua es igual al calor disipado por la resistencia.

De la ley de Joule-Lenz: $Q = 0{,}24\frac{V^2}{R}\ t$

$43\,200 = 0{,}24\left[\frac{(100)^2}{20}\right]t \quad \therefore\ t = 6$ min

23. La resistencia de una estufa es de 12 Ω y sus terminales son conectados a una diferencia de potencial de 40 V, empleando esta estufa, en cuánto tiempo se hará hervir 2,4 litros de agua. La temperatura ambiente es de 20 °C.

Resolución:

Calor entregado por la estufa (disipado):

$Q = 0{,}24\frac{V^2}{R}t \qquad ...(1)$

Calor necesario para hervir el agua: $Q = mC_e(t_f - t_0)$

En 2,4 litros de agua hay: $m = 2400$ g

$Q = (2400)(1)(100 - 20)$

$\Rightarrow Q = 192\,000$ cal $\qquad ...(2)$

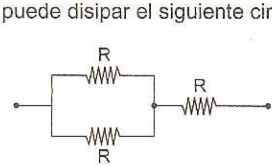
Consideramos que el calor no se pierde:

Igualamos (1) y (2): $0{,}24\frac{V^2}{R}t = 192\,000$ cal

Reemplazando datos:

$0{,}24\frac{(40)^2}{12}t = 192\,000$ cal $\quad \therefore\ t = 6000$ s

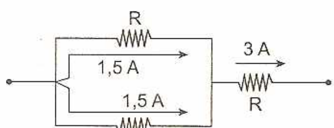
24. En la figura, si la resistencia R = 1,0 Ω puede disipar hasta una potencia máxima de 9,0 watts sin calentarse excesivamente, hallar la potencia máxima que puede disipar el siguiente circuito:



Resolución:

Analizando la resistencia R, de la ecuación del problema: $P_{(máx)} = i^2_{(máx)}R \Rightarrow 9 = i^2(1)$

$i = 3$ A $\qquad ...(1)$



Analizando al circuito mostrado en la figura:

$R_{eq} = \frac{R}{2} + R = 1{,}5\,\Omega$

Cálculo de la potencia máxima que disipa el circuito:

$P = i^2R_{eq} \Rightarrow P = (9)(1{,}5) \Rightarrow P = 13{,}5\text{ W}$

25. Una bombilla eléctrica presenta la siguiente especificación técnica: 50 W-100 V. Determinar la potencia eléctrica que disipará la bombilla cuando la conectemos a una fuente de 20 V.

Resolución:

Cálculo de la resistencia: $P = \frac{V^2}{R}$

$R = \frac{V^2}{P} = \frac{100^2}{50} = 200 \Rightarrow R = 200\,\Omega$

$P = \frac{V^2}{R} = \frac{20(20)}{200} = 2 \quad \therefore\ P = 2\text{ W}$

26. Tres resistencias iguales se conectan en serie. Cuando se aplica una cierta diferencia de potencial a la combinación, esta consume una potencia total de 10 W. Si las tres resistencias se conectan en paralelo a la misma diferencia de potencial, calcular la nueva potencia.

Resolución:

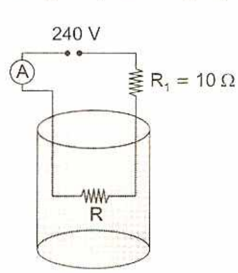
En serie: 3R; ΔV = constante diferencia de potencial

En paralelo: $\frac{R}{3}$

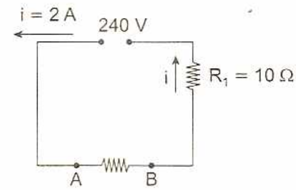
$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{V^2}{3R} = 10 \qquad P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{V^2}{\frac{R}{3}} = x$

$(1) \div (2)$: $\frac{\frac{V^2}{3R}}{\frac{V^2}{\frac{R}{3}}} = \frac{10}{x} \quad \therefore\ x = 90\text{ W}$

27. La figura representa un calentador de agua, en el cual se hace hervir 1 litro de agua que posee una temperatura inicial de 4 °C, el amperímetro mide 2 A que pasa por el sistema. Hallar el tiempo necesario para hervir el agua. (1 cal = 4,2 J)



Resolución:



$V_{AB} = 240 - iR_1 \Rightarrow V_{AB} = 240 - 2(10)$

$V_{AB} = 220\text{ V}$

$Q = 0{,}24Vit$, ademas $Q = mC_e\Delta T$

Energía que libera la resistencia R

i) Igualando: $0{,}24Vit = mC_e\Delta T$

$0{,}24(220)(2)t = 1000(1)(96) \Rightarrow t = 909{,}09\text{ s}$

ii) $Vit = 4{,}2mC_e\Delta T$

$220(2)t = 4{,}2(1000)(1)(96) \Rightarrow t = 916{,}36\text{ s}$

28. Un hervidor eléctrico cuya resistencia es 800 Ω se conecta a una fuente de 220 V. Determinar el tiempo que se necesita para que 0,5 litros de agua eleve su temperatura en 24 °C (1 J = 0,24 cal)

Resolución:

Ley de Joule-Lenz: $Q = \frac{V^2}{R}t$

Cantidad de calor: $Q = mC_e\Delta T$

Igualando ambas ecuaciones

$0{,}24\frac{V^2}{R}t = mC_e\Delta T \Rightarrow 0{,}24\left(\frac{200^2}{800}\right)t = 500(1)24$

$0{,}24(50t) = 500(24) \quad \therefore\ t = 1000\text{ s}$

29. Un transformador recibe una tensión de 220 V. Si tiene una eficiencia del 90%. Hallar la potencia eléctrica en el secundario cuando la corriente en el primario es de 1000 mA

Resolución:

$V_2 = 90\%V_1 = 0{,}9(220) \Rightarrow V_2 = 198\text{ V}$

La potencia de salida

$P_2 = V_2i_2 \Rightarrow P_2 = 198(1) \quad \therefore\ P_2 = 198\text{ W}$

TEOREMA DE LA TRAYECTORIA

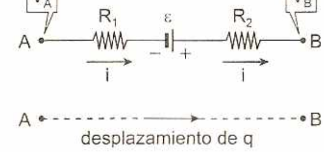


Fig. 16.1

Consiste en el desplazamiento imaginario de una carga de prueba convencional positivo q a través del tramo (A → B) de un circuito. La corriente i se desplaza de

mayor a menor potencial eléctrico ($V_A > V_B$), por consiguiente si la carga de prueba q atraviesa una resistencia R, en el mismo sentido de la corriente, pierde un potencial igual a: $-iR$. Cuando la carga de prueba atraviesa la resistencia R en sentido opuesto a la corriente gana un potencial igual a: $+iR$

Cuando la carga de prueba q atraviesa la fuente de energía (FEM.) en el sentido, desde el polo negativo hacia el polo positivo, gana un potencial igual a: $+\varepsilon$; cuando lo hace desde el polo positivo hacia el polo negativo pierde un potencial igual a: $-\varepsilon$.

Respecto de la figura 16.1, llevamos la carga de prueba q en el sentido de la corriente i, desde A hasta B:

$$\boxed{V_A - iR_1 + \varepsilon - iR_2 = V_B} \qquad ...(16.26)$$

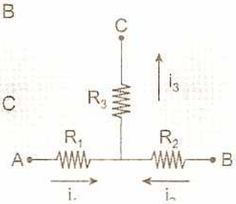
Desplazamiento sobre R

1. Trayectoria: A → M → B

   $V_A - i_1R_1 + i_2R_2 = V_B$

2. Trayectoria: A → M → C

   $V_A - i_1R_1 - i_3R_3 = V_C$



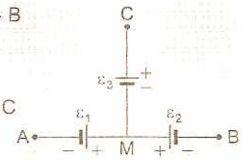
Desplazamiento sobre ε

1. Trayectoria : A → M → B

   $V_A + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = V_B$

2. Trayectoria: A → M → C

   $V_A + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = V_C$



LEYES DE KIRCHHOFF

En 1848 el físico alemán Gustavo Roberto Kirchhoff, establece las reglas generales para el cálculo de circuitos eléctricos complejos que determinan íntegramente su estado eléctrico, aportando de esta manera dos leyes de gran trascendencia en la electricidad.

1.ª Ley de nudos o de corrientes

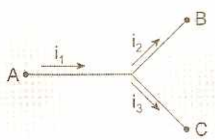
Tienen como fundamento el principio de conservación de las cargas eléctricas, y establece que: La suma de corrientes que ingresan a un nudo cualquiera del circuito, es igual, a la suma de corrientes que salen de dicho nudo.

$$\boxed{\Sigma i_{(llegan)} = \Sigma i_{(salen)}} \qquad ...(16.26)$$

Nudo

Principio de conservación de las cargas eléctricas:

$i_1 = i_2 + i_3$



2.ª Ley de mallas o de voltajes

Tiene como fundamento el principio de conservación de la energía, establece que: En cualquier contorno cerrado (malla) elegido arbitrariamente en un circuito bifurcado, la suma algebraica de las FEM., es igual, a la suma algebraica de caídas de tensión en cada resistencia.

$$\boxed{\Sigma\varepsilon = \Sigma iR} \qquad ...(16.27)$$

La ecuación (16.27) se demuestra aplicando el teorema de la trayectoria, en cualquier contorno cerrado o malla.

Malla

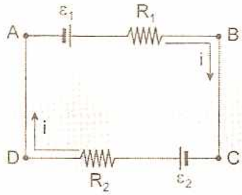
Teorema de la trayectoria en:

A → B → C → D → A

$V_A + \varepsilon_1 - iR_1 - \varepsilon_2 - iR_2 = V_A$

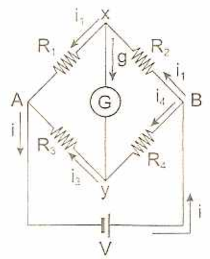
$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = iR_1 + iR_2$

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

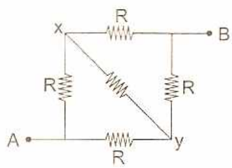


Ejemplo:

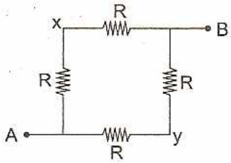
Cinco resistencias están dispuestos como muestra la figura, todos ellos tienen igual magnitud R. Hallar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.



Resolución:



1. Del efecto puente, los potenciales en los puntos **x** e **y** son iguales, por consiguiente por la resistencia en la diagonal no pasa corriente ($i = 0$), o sea no funciona, entonces si retiramos esta resistencia R el sistema no se altera, teniendo su equivalente en la figura de abajo.



2. De la figura, podemos deducir fácilmente la resistencia equivalente.

$$R_{eq} = R$$

◀ MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN

Transformación de triángulo a estrella

Datos: R_1; R_2; R_3

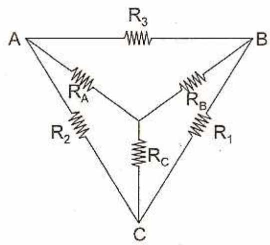
Incógnitas: R_A; R_B; R_C

Resolución:

$$R_A = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$



Transformación de estrella a triángulo

Datos: R_1; R_2; R_3

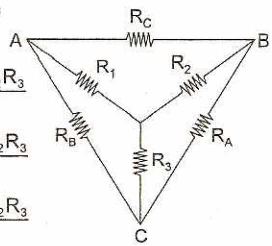
Incógnitas: R_A; R_C; R_B

Resolución:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

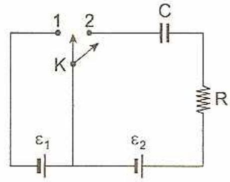
$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$



◀ LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Elegimos arbitrariamente un condensador o sistema de condensadores como nuestro sistema físico en estudio el cual almacena energía debido al campo eléctrico entre sus placas. La energía electrostática inicial W_1 del campo eléctrico varía, si el interruptor K cambia de posición, o si cambian sus cargas eléctricas en las placas del condensador.



En nuestro caso particular las baterías y pilas realizan trabajo sobre nuestro sistema físico. Cuando el interruptor K cambia de posición, de 1 a 2 o viceversa, en el condensador se establece un reordenamiento de cargas, si las cargas positivas pasan del polo positivo hacia el polo negativo de la pila, entonces dicha pila realiza un trabajo negativo sobre el sistema, en caso contrario el trabajo tendrá signo positivo. El trabajo realizado por el conjunto de pilas, debido al desplazamiento de cargas, sobre el sistema de condensadores se puede invertir en aumentar la energía del sistema y/o disipar a través de la resistencia R en forma de calor al medio ambiente. Sea W_2 la energía final del conjunto de condensadores, entonces, del principio de conservación de la energía:

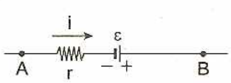
El trabajo realizado por el conjunto de pilas (FEM) es igual a la variación de la energía del conjunto de condensadores, más la cantidad de calor disipado al medio ambiente.

$$W_{baterías} = \Delta W + Q$$
$$W_{baterías} = W_2 - W_1 + Q$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La fuerza electromotriz de una batería es 12 V y su resistencia interna 0,02 Ω. Cuando la corriente dada por la batería pasa a una resistencia externa R es 100 A. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los terminales de la batería?

Resolución:

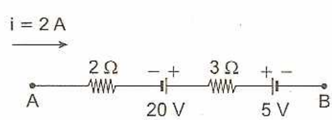


Teorema de la trayectoria:

$V_B = V_A - ir + \varepsilon \Rightarrow V_B - V_A = \varepsilon - ir$

$V_B - V_A = 12 - 100(0{,}02) \quad \therefore V_{BA} = 10\ V$

2. En la figura se muestra una rama que es parte de un circuito eléctrico. El potencial en el punto A es 10 V, determinar el potencial en el punto B.



Resolución:

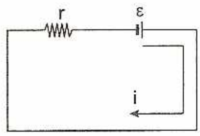
Teorema de la trayectoria

$V_A - i(2) + 20 - i(3) - 5 = V_B$

$10 - 2(2) + 20 - 2(3) - 5 = x \quad \therefore x = 15\ V$

3. En una pila seca de FEM 3 V y resistencia interna de 0,02 W; hallar la potencia que disipa al conectarse en corto circuito.

Resolución:



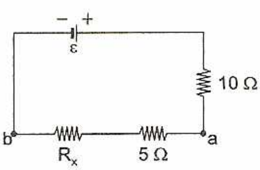
Ley de Ohm: $\varepsilon = ir$

$3 = i(0,02) \Rightarrow i = 150\ A$

Potencia disipada: $P = i^2r$

$P = (150)^2(0,02) \quad \therefore\ P = 450\ W$

4. En el circuito de la figura la resistencia incógnita R_x está conectado como se indica. El voltaje entre a y b es de 12 V y en el circuito circula una corriente de 0,6 A. Calcular el valor de la resistencia R_x.

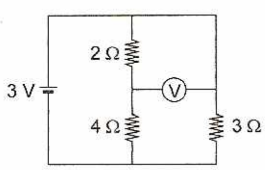


Resolución:

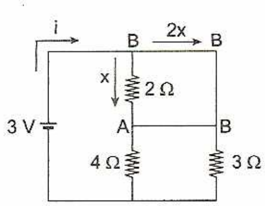
Ley de Ohm: $V_{ab} = i(R_x + 5)$

$12 = 0,6(R_x + 5) \quad \therefore\ R_x = 15\ \Omega$

5. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, ¿cuál es la lectura del voltímetro ideal?



Resolución:



Ley de voltajes: $\varepsilon = iR_{eq}$

$3 = i(2) \Rightarrow i = 1,5\ A$

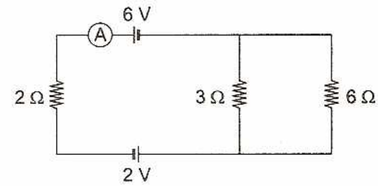
Ley de corrientes: $i = x + 2x$

$1,5 = 3x \Rightarrow x = 0,5\ A$

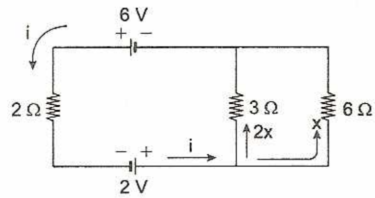
Ley de Ohm: $V_{BA} = iR$

$V_{BA} = (0,5)(2) \quad \therefore\ V_{AB} = 1\ V$

6. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, calcular la lectura del amperímetro ideal y la corriente que pasa por la resistencia de 3 Ω.



Resolución:



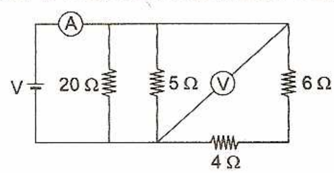
Ley de voltajes: $\Sigma\varepsilon = iR_{eq}$

$6 + 2 = i(2 + 2) \Rightarrow i = 2\ A$

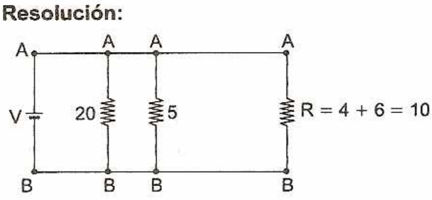
Ley de corrientes: $i = 2x + x$

$2 = 3x \quad \therefore\ x = \frac{2}{3}\ A$

7. En el circuito eléctrico que se muestra en la figura, se conoce que el voltímetro ideal indica 20 V. Determinar la lectura del amperímetro ideal.



Resolución:



La fuerza electromotriz: V = 20 voltios

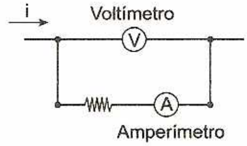
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1 + 4 + 2}{20} = \frac{7}{20}$$

$$R_{eq} = \frac{20}{7}\ \Omega$$

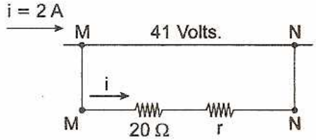
Ley de Ohm: $V = iR_{eq}$

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{20}{\frac{20}{7}} = 7 \quad \therefore\ i = 7A$$

8. En la figura se muestra parte de un circuito. Si el voltímetro ideal marca 41 voltios, determinar la resistencia interna del amperímetro, si este indica 2 amperios.



Resolución:



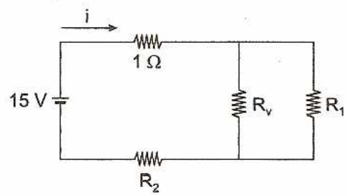
Teorema de la trayectoria: $V_M - i(20 + r) = V_N$

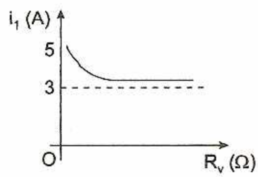
$V_M - V_N = i(20 + r)$

$\Rightarrow 41 = 2(20 + r)$

$\therefore\ r = 0{,}5\ \Omega$

9. En el circuito mostrado en la figura R_V es una resistencia variable. Determinar las resistencias fijas R_1 y R_2. La grafica muestra la variación de la intensidad de corriente en función de la resistencia variable R_v.





Resolución:

$R_v = 0 \Rightarrow R_1$ no funciona

$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 15 = 5(1 + R_2) \Rightarrow R_2 = 2\ \Omega$

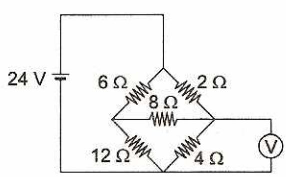
$R_v = \infty \Rightarrow R_1$ y R_2 en serie

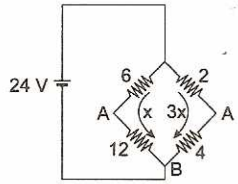
Ley de Ohm: $\varepsilon = i_2R_{eq}$

$15 = 3(R_1 + R_2 + 1)$

$\therefore\ R_1 = 2\ \Omega$

10. El circuito mostrado en la figura se denomina puente Wheastone. Determinar la lectura del voltímetro ideal.





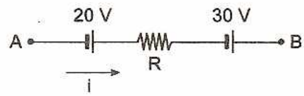
Resolución:

Ley de Ohm: $i = \dfrac{V}{R} \Rightarrow x = \dfrac{24}{(6 + 12)} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{4}{3}\,A$

$V_{AB} = iR \Rightarrow V_{AB} = \dfrac{4}{3}(12) = 16 \qquad \therefore\ V_{AB} = 16\ V$

12. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrado en la figura. Sabiendo que la diferencia de potencial entre los puntos A y B es de 10 voltios, hallar la tensión en los extremos de la resistencia $R = 5\ \Omega$ y la corriente que circula por él.



Resolución:

Teorema de la trayectoria:

$V_A + 20 - iR + 30 = V_B$

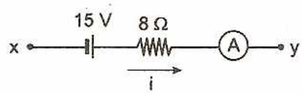
$(V_A - V_B) + 50 = iR$

$10 + 50 = i(5) \Rightarrow i = 12\ A$

Aplicando la Ley de Ohm a la resistencia R:

$V = iR \Rightarrow V = 12(5) = 60 \qquad \therefore\ V = 60\ V$

13. En cierto circuito se tiene la sección xy, mostrado en la figura. El amperímetro A indica una lectura de 5 A. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos x e y.



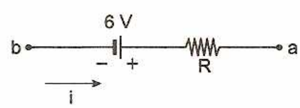
Resolución:

Teorema de la trayectoria:

$V_x + 15 - i(8) = V_y \Rightarrow V_x + 15 - (5)(8) = V_y$

$V_x - V_y = 25 \qquad \therefore\ V_x - V_y = 25\ V$

14. Cierta batería tiene una fuerza electromotriz de 6 V y resistencia interior de 0,4 Ω. Si proporciona una corriente de 0,5 A determinar la diferencia de potencial entre los puntos extremos a y b.

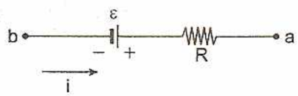


Resolución:

Teorema de la trayectoria: $V_b + 6 - iR = V_a$

$6 - (0{,}5)(0{,}4) = V_a - V_b \Rightarrow V_a - V_b = 5{,}8$ voltios

15. Cierta batería de resistencia interna $R = 0{,}4\ \Omega$ proporciona una corriente de intensidad $i = 5$ A. Si la diferencia de potencial entre los puntos a y b es 10 V, determinar la FEM (ε).



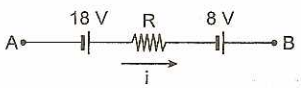
Resolución:

Teorema de la trayectoria: $V_b + \varepsilon - iR = V_a$

$\varepsilon - iR = (V_a - V_b) \Rightarrow \varepsilon - (5)(0{,}4) = 10$

$\therefore \varepsilon = 12$ V

16. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrado en la figura. Sabiendo que la diferencia de potencial entre A y B es 20 voltios, determinar la potencia de disipación de la resistencia $R = 6\ \Omega$.



Resolución:

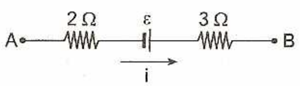
Teorema de la trayectoria: $V_A + 18 - iR - 8 = V_B$

$(V_A - V_B) + 10 = iR \Rightarrow 20 + 10 = i(6) \Rightarrow i = 5$ A

Cálculo de la potencia eléctrica:

$P = i^2R \Rightarrow P = (5)^2(6) \quad \therefore P = 150$ W

17. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrado en la figura. La corriente que circula de A hacia B es $i = 3$ A. Si la diferencia de potencial entre A y B es de 10 V, determinar la potencia que entrega la FEM ε



Resolución:

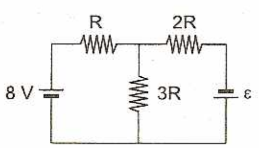
Teorema de la trayectoria: $V_A - 2(i) + \varepsilon - 3(i) = V_B$

$(V_A - V_B) + \varepsilon = 5i \Rightarrow 10 + \varepsilon = 5(3) \Rightarrow \varepsilon = 5$ voltios

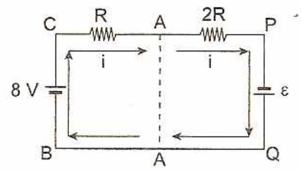
Cálculo de la potencia entregada por la FEM:

$P = i\varepsilon \Rightarrow P = 3(5) \quad \therefore P = 15$ W

18. En el circuito eléctrico mostrado hallar el valor de la FEM ε, para que por la resistencia 3R no pase corriente.



Resolución:



De la ley de Ohm, los extremos de la resistencia 3R se encuentran a igual potencial eléctrico.

Teorema de la trayectoria en el tramo:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

$V_A + 8 - iR = V_A \Rightarrow iR = 8$ V ...(1)

Teorema de la trayectoria en el tramo:

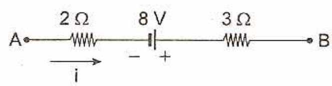
$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow A$:

$V_A - i(2R) + \varepsilon = V_A \Rightarrow \varepsilon = 2(iR)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$\varepsilon = 2(8) \quad \therefore \varepsilon = 16$ V

19. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrada en la figura. Sabiendo que la diferencia de potencial entre A y B es 12 voltios ($V_A - V_B = 12$ V), determinar la intensidad de corriente que circula por la sección AB.



Resolución:

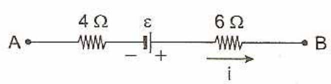
Teorema de la trayectoria:

$V_A - i(2) + 8 - i(3) = V_B \Rightarrow (V_A - V_B) + 8 = 5i$

Del dato: $12 + 8 = 5i$

Resolviendo: $i = 4$ A

20. En cierto circuito eléctrico se tiene la sección AB, mostrada en la figura, sabiendo que la diferencia de potencial entre A y B es 36 voltios determinar la FEM ε, además la intensidad de corriente que circula por la sección AB es igual a 5 A.



Resolución:

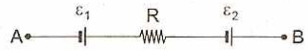
Teorema de la trayectoria:

$V_A - 4i + \varepsilon - 6i = V_B \Rightarrow (V_A - V_B) + \varepsilon = 10i$

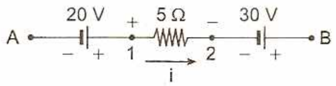
Del dato: $i = 5$ A $\Rightarrow 36 + \varepsilon = 50$

Luego $\varepsilon = 14$ V

21. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrada en la figura. La FEM. de la fuente $\varepsilon_1 = 20$ V; $\varepsilon_2 = 30$ V y la resistencia del tramo $R = 5\ \Omega$. Sabiendo que la diferencia de potencial entre A y B es de 10 V, hallar la tensión entre los extremos de la resistencia R.

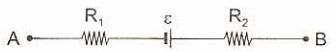


Resolución:

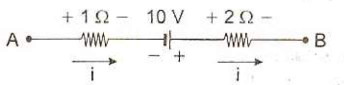


1. En el tramo del circuito AB la corriente que circula es único.
2. Del teorema de la trayectoria:
   $A \to 1 \to 2 \to B$
   $V_A + 20 - 5i + 30 = V_B$
   Luego:
   $(V_A - V_B) + 50 = 5i \quad \Rightarrow i = 12\ A$ ...(α)
3. De la ley de Ohm: $V_1 - V_2 = 5i$ ...(β)
   Reemplazando (α) en (β): $V_{12} = 60\ V$

22. En cierto circuito se tiene la sección AB, mostrada en la figura. La FEM. de la fuente es $\varepsilon = 10$ V y las resistencias $R_1 = 1\ \Omega$ y $R_2 = 2\ \Omega$. Sabiendo que la diferencia de potencial entre A y B es de 50 V, hallar la intensidad de corriente que circula por las resistencias.

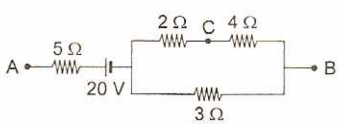


Resolución:
Aplicando el teorema de la trayectoria:
$V_A - 1i + 10 - 2i = V_B \Rightarrow (V_A - V_B) + 10 = 3i$

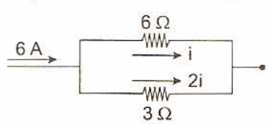


Del dato: $V_A - V_B = 50$ V
Reemplazando: $i = 20$ A

23. En el siguiente sector circuital de A hacia B circula una intensidad de corriente de 6 A. Hallar la diferencia de potencial entre A y C.

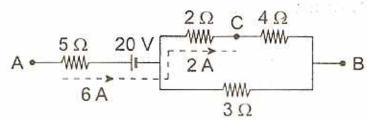


Resolución:
Analizamos primeramente el arreglo en paralelo:



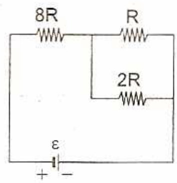
$i + 2i = 6\ A \Rightarrow i = 2\ A$

Analizamos las caídas de potencial en el sector circuital; seguiremos el camino punteado [Teorema de la Trayectoria]:

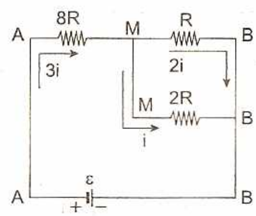


$V_A - 6(5) - 20 - 2(2) = V_C$
$\therefore V_A - V_C = 54$ V

24. La caída de tensión en la resistencia R es de 0,5 V. Determinar la tensión en la fuente de energía ε.



Resolución:



Las resistencias R y 2R están instaladas en paralelo, por consiguiente las corrientes que circulan por ellas son inversamente proporcionales al módulo de cada resistencia, 2i e i respectivamente.

De la 1.ª ley de Kirchhoff, la corriente que atraviesa la resistencia 8R es 3i.

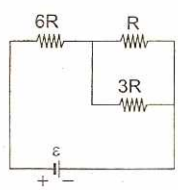
Aplicando la ley de Ohm a la resistencia R:
$V_{MB} = (2i)(R) = 0{,}5 \Rightarrow iR = 0{,}25$ V ...(1)

Aplicando la ley de Ohm a la resistencia 8R:
$V_{AM} = 3i(8R) = 24(iR)$ ...(2)

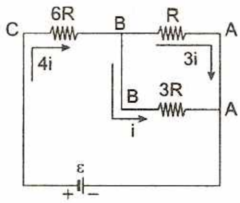
Reemplazando (1) en (2) tenemos:
$V_{AM} = 6$ V ...(4)

Del principio de conservación de la energía se cumple que:
$\varepsilon = V_{AM} + V_{MB} \Rightarrow \varepsilon = 6 + 0{,}25$
$\therefore \varepsilon = 6{,}25$ V

25. La caída de potencial en la resistencia 3R es de 18 V. Determinar la caída de tensión en la resistencia de 6R.

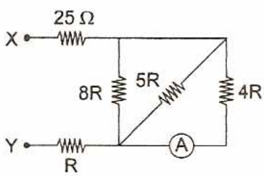


Resolución:

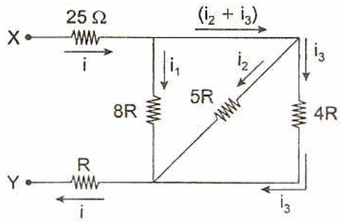


Las resistencias R y 3R están instaladas en paralelo, por consiguiente las corrientes que circulan por ellas son inversamente proporcionales al módulo de cada resistencia, 3i e i respectivamente.
De la 1.ª ley de Kirchhoff, la corriente que atraviesa la resistencia 6R es 4i.
Aplicando la ley de Ohm a la resistencia 3R:
$18 = (i)(3R) \Rightarrow iR = 6$ voltios ...(1)
Aplicando la ley de Ohm a la resistencia 6R:
$V_{CB} = 4i(6R) \Rightarrow V_{CB} = 24(iR)$ ...(2)
Reemplazando (1) en (2) tenemos que:
$V_{CD} = 144$ V

26. La figura muestra un tramo de un circuito eléctrico. Si el amperímetro ideal A indica una lectura de 2 A, determinar la potencia disipada por la resistencia de magnitud 25 Ω.



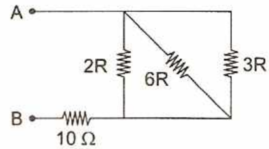
Resolución:



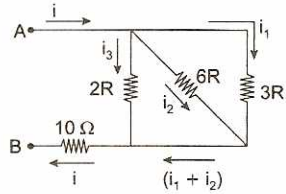
Las resistencias: 8R; 5R y 4R se encuentran instaladas en paralelo, por consiguiente la corriente i que ingresa por el borne **X** se reparte inversamente proporcional a la magnitud de cada resistencia.

$i_1(8R) = i_2(5R) = i_3(4R)$
$i_1 = 1$ A; $i_2 = 1,6$ A; $i_3 = 2$ A
De la 1.ª ley de Kirchhoff:
$i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow i = 1 + 1,6 + 2 = 4,6$ A
La potencia disipada por la resistencia de 25 Ω es:
$P = i^2R \Rightarrow P = (4,6)^2(25) \quad \therefore\ P = 529$ W

27. La figura muestra un tramo de un circuito eléctrico. Si por la resistencia de 3R atraviesa una corriente de intensidad 2 A, determinar la potencia disipada por la resistencia de 10 Ω.

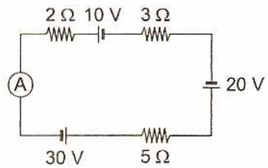


Resolución:

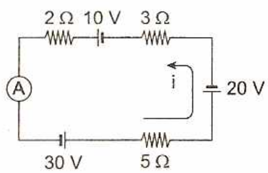


Las resistencias: 2R; 6R y 3R se encuentran instaladas en paralelo, por consiguiente la corriente i que ingresa por el borne A se reparte inversamente proporcional a la magnitud de cada resistencia.
$i_1(3R) = i_2(6R) = i_3(2R)$
$i_1 = 2$ A; $i_2 = 1$ A; $i_3 = 3$ A
De la 1.ª ley de Kirchhoff:
$i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow i = 2 + 1 + 3 = 6$ A
La potencia disipada por la resistencia de 10 Ω es:
$P = i^2R \Rightarrow P = 6^2(10) \quad \therefore\ P = 360$ W

28. En el circuito de una sola malla hallar la lectura del amperímetro ideal.

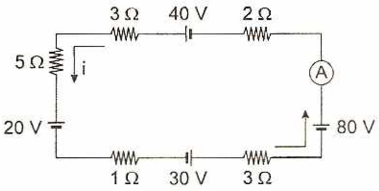


Resolución:
Observamos los valores de las fuentes, se aprecia que predomina el sentido antihorario.



$\Sigma V = \Sigma iR \Rightarrow 10 + 30 - 20 = i(2) + i(5) + i(3)$
$20 = (10)i \quad \therefore\ i = 2$ A

29. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la lectura en el amperímetro ideal.



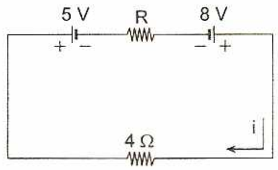
Resolución:

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = iR_{eq}$

$(80 + 40 - 20 - 30) = i(2 + 3 + 5 + 1 + 3)$

$70 = i(14) \quad \therefore\ i = 5\ A$

30. Calcular R si la intensidad de la corriente en el circuito es 300 mA.



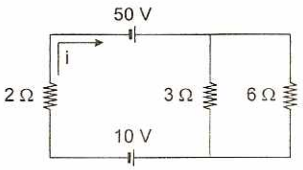
Resolución:

2.ª ley de Kirchhoff, para el circuito simple (una sola corriente).

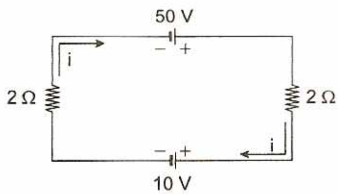
$\Sigma\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow (8 - 5) = i(R + 4)$

$3 = 3 \times 10^{-1}(R + 4) \quad \therefore\ R = 6\ \Omega$

31. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la intensidad de corriente i que circula por la resistencia de 2 Ω.



Resolución:



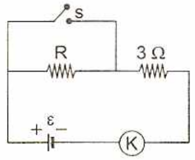
Las resistencias de 3 Ω y 6 Ω, están instaladas en paralelo, por consiguiente se puede reemplazar por su equivalente:

2.ª ley de Kirchhoff, para el circuito simple:

$\Sigma\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow (50 - 10) = i(2 + 2)$

Luego: $i = 10\ A$

32. La fuente de energía ε tiene resistencia interna despreciable. Calcular R sabiendo que, cuando el interruptor S está abierto, el amperímetro ideal K indica una lectura 3 A y cuando S está cerrado indica 8 A.



Resolución:

Cuando S está abierto, las resistencias están conectadas en serie.

2.ª ley de Kirchhoff: $\varepsilon = i_1R_1$

$\varepsilon = 3(R + 3)$ ...(1)

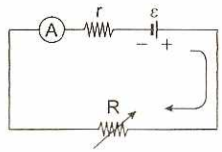
Cuando S está cerrado, se produce corto circuito, por consiguiente la resistencia R no funciona.

$\varepsilon = i_2R_2 \Rightarrow \varepsilon = 8(3) = 24$ voltios

Reemplazando en (1): $24 = 3(R + 3)$

Luego: $R = 5\ \Omega$

33. Para determinar la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una pila, se conecta en serie con un amperímetro y una resistencia variable. Cuando la corriente es de 1 A, la resistencia exterior es de 1,55 Ω y cuando la corriente es de 0,5 A, dicha resistencia es de 3,35 Ω. ¿Cuánto valen las características de la pila mencionada?



Resolución:

1. En el circuito simple, aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff: $\varepsilon = i(r + R)$ ...(1)
2. Usando dos veces la fórmula (1) para los dos casos:

   1.er caso: $\varepsilon = 1(r + 1,55)$ ...(2)

   2.° caso: $\varepsilon = 0,5(r + 3,35)$ ...(3)

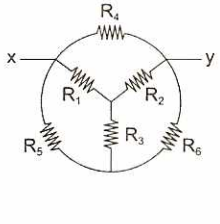
Resolviendo (2) y (3): $\varepsilon = 1,8$ V; $r = 0,25\ \Omega$

34. En el circuito eléctrico mostrado hallar la resistencia equivalente entre los extremos X e Y.

$R_1 = 1\ \Omega$; $R_4 = 12\ \Omega$

$R_2 = 2\ \Omega$; $R_5 = 4\ \Omega$

$R_3 = 2\ \Omega$; $R_6 = 8\ \Omega$



Resolución:

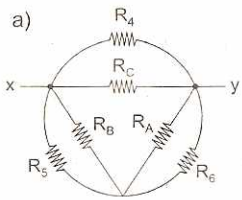
Realizamos la transformación de estrella a triángulo:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

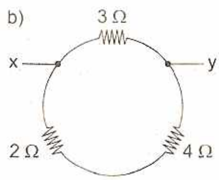
$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$

Reemplazando los datos tenemos:
$R_A = 8\ \Omega$; $R_B = 4\ \Omega$; $R_C = 4\ \Omega$

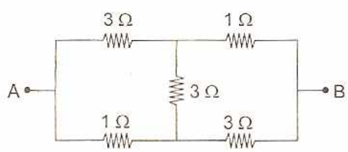


Reduciendo en (a) las resistencias en paralelo, tenemos (b): R_4 y R_C: $3\ \Omega$; R_5 y R_B: $2\ \Omega$; R_6 y R_A: $4\ \Omega$



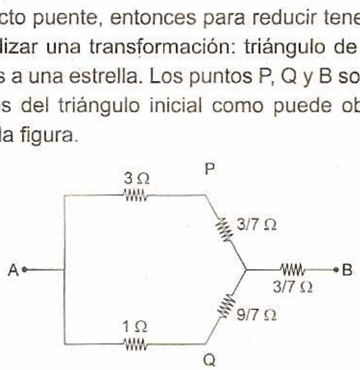
Finalmente, la resistencia equivalente entre X e Y es: $2\ \Omega$.

35. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

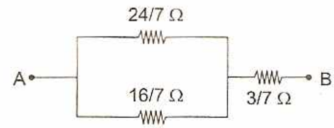


Resolución:

En principio en el circuito dado no se produce el efecto puente, entonces para reducir tenemos que realizar una transformación: triángulo de resistencias a una estrella. Los puntos P, Q y B son los vértices del triángulo inicial como puede observarse en la figura.

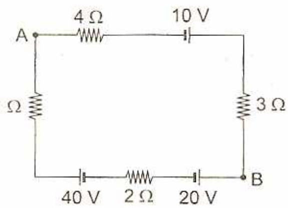


Reduciendo tenemos:

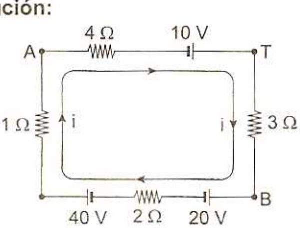


$R_{eq} = \frac{96}{70} - \frac{3}{7} = \frac{126}{70} \qquad \therefore\ R_{eq} = 1{,}8\ \Omega$

36. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Resolución:



Para determinar la corriente i aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff:

$\Sigma\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow (40 + 10 - 20) = i(1 + 2 + 3 + 4)$

$\Rightarrow 30 = i(10) \Rightarrow i = 3\ A$

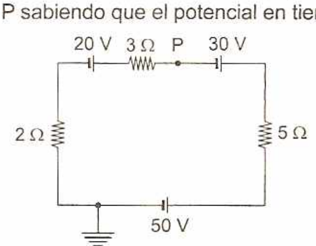
Aplicamos el teorema de la trayectoria en:

$A \rightarrow T \rightarrow B \Rightarrow V_A - 4i + 10 - 3i = V_B$

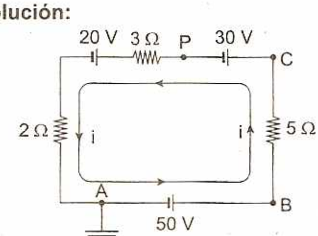
$V_A - 4(3) + 10 - 3(3) = V_B \Rightarrow V_A - 11 = V_B$

$\therefore\ (V_A - V_B) = 11\ V$

37. En el circuito mostrado determinar el potencial en el punto P sabiendo que el potencial en tierra es nulo.



Resolución:



Para determinar la corriente i aplicamos la segunda ley de Kirchhoff:

$\Sigma\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow (50 + 30 - 20) = i(5 + 3 + 2)$

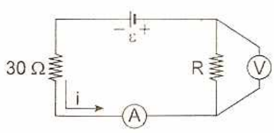
$\Rightarrow 60 = i(10) \Rightarrow i = 6\text{ A}$

El teorema de la trayectoria en A → B → C → P

$V_A + 50 - 5i + 30 = V_P$; pero: $V_A = 0$

$0 + 50 - 5(6) + 30 = V_P \quad \therefore V_P = 50\text{ V}$

38. En el circuito mostrado cuánto vale la fuerza electromotriz de la fuente, si el voltímetro indica 40 V y el amperímetro (ideales) 10 A.



Resolución:

Aplicamos la ley de Ohm a la resistencia R:

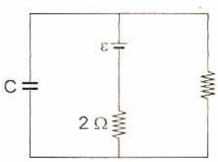
$V = iR \Rightarrow 40 = 10(R) \Rightarrow R = 4\,\Omega$

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff al circuito:

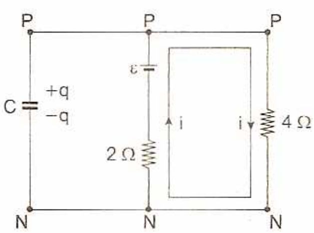
$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow \varepsilon = iR + i(30)$

$\varepsilon = 10(4) + 10(30) \quad \therefore \varepsilon = 340\text{ V}$

39. Si el condensador de capacidad $C = 5\ \mu F$ almacena en cada placa una carga de módulo $q = 80\ \mu C$, hallar la FEM en la fuente de energía.



Resolución:



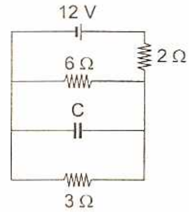
Hallamos la diferencia de potencial entre las placas del condensador:

$V_{PN} = \dfrac{q}{C} = \dfrac{80}{5} \Rightarrow V_{PN} = 16\text{ voltios}$

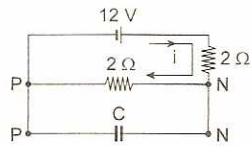
- Aplicamos la ley de Ohm en la resistencia de 4 Ω:
  $V_{PN} = iR \Rightarrow 16 = i(4) \Rightarrow i = 4\text{ A}$
- En la malla de la derecha aplicamos la segunda ley de Kirchhoff: $\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow \varepsilon = 4(2 + 4) \Rightarrow \varepsilon = 24\text{ V}$

Por lo tanto el valor de la FEM es: 24 voltios.

40. En el circuito R-C mostrado en la figura, calcular la energía acumulada en el condensador de capacidad $C = 5\ \mu F$.



Resolución:



Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff al sistema equivalente:

$\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 12 = i(2 + 2) \Rightarrow i = 3\text{ A}$ ...(1)

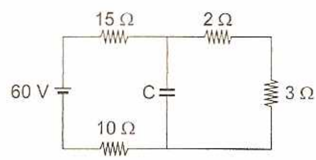
Entre los puntos P y N aplicamos la ley de Ohm:

$V_{PN} = iR \Rightarrow V_{PN} = (3)(2) \Rightarrow V_{PN} = 6\text{ V}$ ...(2)

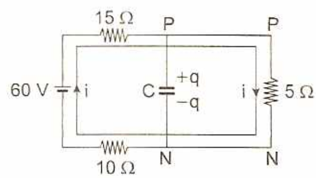
La energía almacenada en el condensador es:

$W = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(5\mu)(6)^2 \quad \therefore W = 90\ \mu J$

41. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la carga acumulada en cada placa del condensador de capacidad $C = 6\ \mu F$.

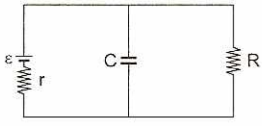


Resolución:

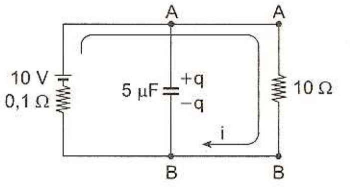


- En el circuito equivalente calculamos la corriente i aplicando la segunda ley de Kirchhoff:
  $\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 60 = i(15 + 5 + 10) \Rightarrow i = 2\text{ A}$ ...(1)
- Para determinar la diferencia de potencial entre los puntos P y N, aplicamos la ley de Ohm:
  $V = iR$
  $V = (2)(5) \Rightarrow V = 10\text{ V}$ ...(2)
- La carga q acumulada en cada placa del condensador es:
  $q = VC \Rightarrow q = (10)(6\mu) \quad \therefore q = 60\ \mu C$

42. En el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde $R = 10\ \Omega$, la capacidad del condensador $C = 5\ \mu F$, se pide encontrar la carga q en las armaduras del capacitor, si la FEM. de la fuente de energía es igual a $\varepsilon = 101$ V y su resistencia interna $r = 0{,}1\ \Omega$.



Resolución:



De la 2.ª ley de Kirchhoff: $\varepsilon = (R + r)i$

$101 = (10{,}1)i \Rightarrow i = 10$ A ...(1)

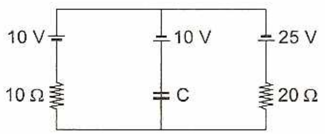
Ley de Ohm:

$V_{AB} = iR \Rightarrow V_{AB} = 100$ V ...(2)

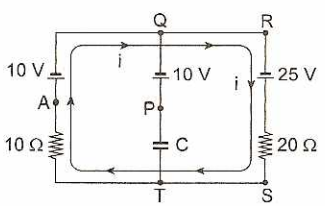
Cálculo de la carga acumulada en el condensador:

$q = V_{AB}C \quad \therefore\ q = 500\ \mu C$

43. En el circuito eléctrico mostrado determinar la carga en cada placa del condensador $C = 10\ \mu F$.



Resolución:



Calculamos la corriente i aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow (25 - 10) = i(20) + i(10)$

$15 = 30i \Rightarrow i = 0{,}5$ A

Aplicamos el teorema de la trayectoria:

$A \to Q \to R \to S \to T$

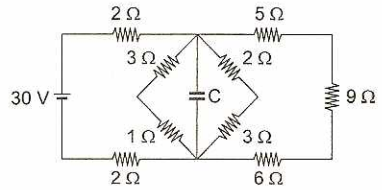
$\Rightarrow V_A - 10 + 25 - 20i = V_T$

$V_A + 15 - 20\,(0{,}5) = V_T \Rightarrow V_T - V_A = 5$ voltios

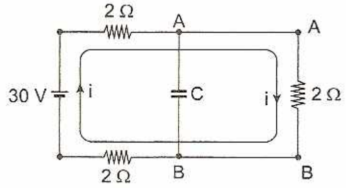
La diferencia de potencial entre las placas del condensador es 5 V. La carga acumulada es:

$q = V_{TA}C \Rightarrow q = (5)(10\mu) \quad \therefore\ q = 50\ \mu C$

44. En el circuito mostrado determinar la carga en cada placa del condensador $C = 6\ \mu F$.



Resolución:



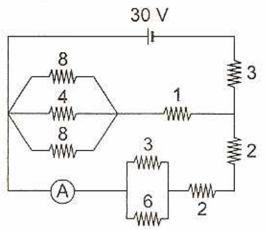
Calculamos la corriente i aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 30 = i(6) \Rightarrow i = 5$ A

Aplicamos la ley de Ohm a la resistencia de $2\ \Omega$ entre A y B: $V_{AB} = iR \Rightarrow V_{AB} = 5(2) = 10$ voltios

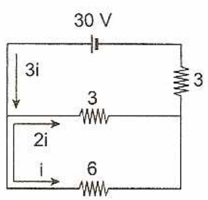
La diferencia de potencial entre las placas del condensador es 10 V. La carga acumulada es:

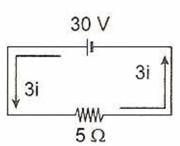
$q = V_{AB}C \Rightarrow q = 10(6\mu) \quad \therefore\ q = 60\ \mu C$

45. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la lectura en el amperímetro ideal A.



Resolución:



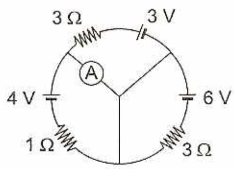


Simplificamos el circuito siguiendo los pasos anteriores. La resistencia equivalente es: $5\ \Omega$.

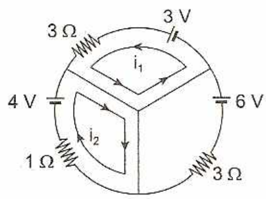
Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff al circuito equivalente: $\varepsilon = iR_{eq} \Rightarrow 30 = 3i(5) \Rightarrow i = 2$ A

Por lo tanto el amperímetro indica: 2 A

46. En el circuito eléctrico mostrado hallar la lectura en el amperímetro ideal A.



Resolución:



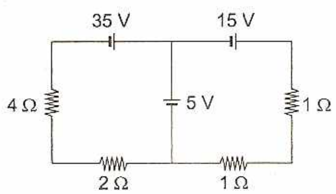
Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a cada malla:

$\varepsilon = iR \Rightarrow 3 = i_1(3) \Rightarrow i_1 = 1$ A ...(1)

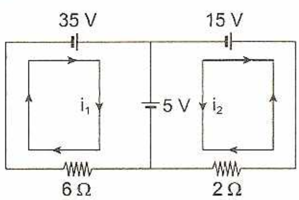
$4 = i_2(1) \Rightarrow i_2 = 4$ A ...(2)

De (1) y (2) la lectura en el amperímetro es:
$i_1 + i_2 = 5$ A.

47. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la potencia que entrega la FEM. de magnitud 5 V.



Resolución:



Calculamos i_1 e i_2 en el circuito equivalente, aplicando la segunda ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = iR$

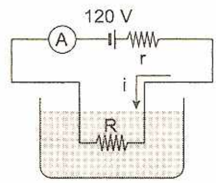
En la malla izquierda:
$(35 - 5) = i_1(6) \Rightarrow i_1 = 5$ A ...(1)

En la malla derecha:
$(15 - 5) = i_2(2) \Rightarrow i_2 = 5$ A ...(2)

Entonces la corriente neta que atraviesa la FEM de 5 V es: $i = i_1 + i_2 = 10$ A.

Debido al sentido de la corriente **i** la FEM. de 5 V absorbe la potencia de: $P = i\varepsilon \Rightarrow P = -(10)(5)$
Luego: $P = -50$ W

48. En la figura se muestra una batería de 120 V, cuya resistencia interna es $r = 10\ \Omega$. Sabiendo que R es la resistencia del calentador y el amperímetro A indica 2 A, ¿cuánto tiempo tarda en calentar de 10 °C hasta 100 °C, 0,24 litros de agua?



Resolución:

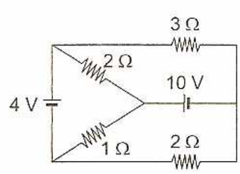
Aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff, calculamos la resistencia R del calentador: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 120 = iR_{eq}$
$120 = i(r + R) \Rightarrow 120 = 2(10 + R) \Rightarrow R = 50\ \Omega$

La cantidad de calor Q para calentar el agua elevando su temperatura en 90 °C de masa 240 g es:
$Q = mC_e\,\Delta T \Rightarrow Q = (240)(1)(90) = 21\ 600$ cal

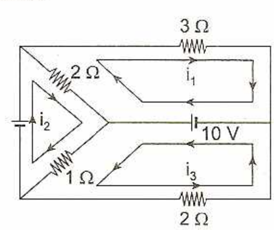
El calor absorbido por el agua es igual al calor disipado por la resistencia R del calentador. De la ley de Joule-Lenz:

$Q = 0{,}24i^2Rt \Rightarrow 21\ 600 = 0{,}24(2)^2(50)t$
$\Rightarrow t = 450$ s $\quad \therefore\ t = 7{,}5$ min

49. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la potencia que disipa la resistencia de 3 Ω.



Resolución:



Analizando las mallas I, II, y III, y aplicando la segunda ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

Malla I: $10 = 5i_1 - 2i_2$ ...(1)

Malla II: $4 = 3i_2 - 2i_1 + i_3$ ...(2)

Malla III: $10 = i_2 + 3i_3$ ...(3)

Resolviendo las tres ecuaciones:

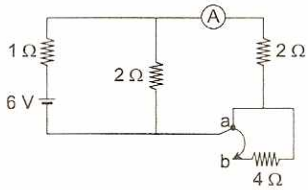
$I_1 = 3\ A$; $I_2 = 2,5\ A$; $I_3 = 2,5\ A$

La potencia que disipa la resistencia de 3 Ω es:

$P = i_1^2 R = 3^2(3)$

$\therefore\ P = 27\ W$

50. En el circuito mostrado la llave pasa de la posición **a** a la posición **b**. ¿En cuánto cambiará la lectura en el amperímetro ideal A?

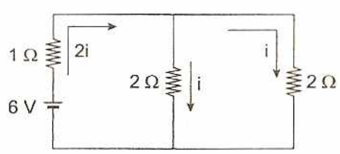


Resolución:

Analizando el circuito en la posición a, aplicamos la segunda ley de Kirchhoff en la malla de la izquierda:

$\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 6 = 2i(1) + i(2)$

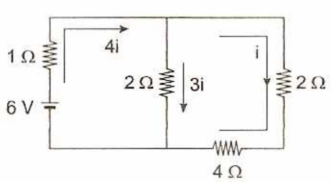
$6 = 4i \Rightarrow i_a = 1,5\ A$ ...(1)



Analizando el circuito en la posición b, aplicamos la segunda ley de Kirchhoff en la malla izquierda:

$\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 6 = (4i)(1) + (3i)(2)$

$6 = 10i \Rightarrow i_b = 0,6\ A$ ...(2)

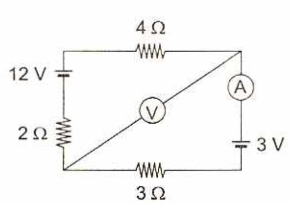


Luego, el cambio de lectura en el amperímetro es:

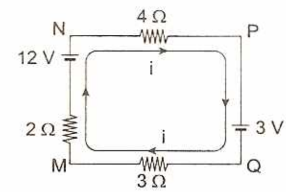
$\Delta i = i_a - i_b \Rightarrow \Delta i = 1,5 - 0,6$

$\therefore\ \Delta i = 0,9\ A$

51. En el circuito eléctrico mostrado hallar la lectura en el amperímetro y voltímetro. Los instrumentos de medición son ideales.



Resolución:



El amperímetro ideal tiene resistencia nula y el voltímetro ideal resistencia infinita.

Aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

$(12 - 3) = i(2 + 4 + 3) \Rightarrow i = 1\ A$

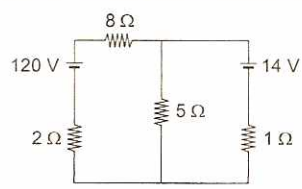
Aplicamos el teorema de la trayectoria:

$M \rightarrow N \rightarrow P \Rightarrow V_M - 2i + 12 - 4i = V_P$

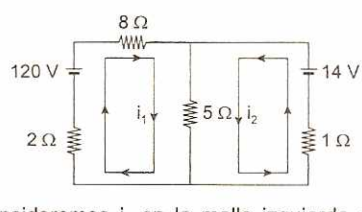
$12 - 6i = V_P - V_M \Rightarrow V_P - V_M = 6\ V$

$\therefore$ El amperímetro marca 1 A y el voltímetro 6 V.

52. En el circuito eléctrico mostrado determinar la corriente que atraviesa la resistencia de 5 Ω.



Resolución:



Consideremos i_1 en la malla izquierda e i_2 en la malla derecha, por consiguiente la corriente que atraviesa 5 Ω es la suma $i_1 + i_2$.

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla izquierda:

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 120 = 10i_1 + 5(i_1 + i_2)$

$24 = 3i_1 + i_2$ ...(1)

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla derecha:

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 14 = (1)i_2 + 5(i_1 + i_2)$

$14 = 5i_1 + 6i_2$ ...(2)

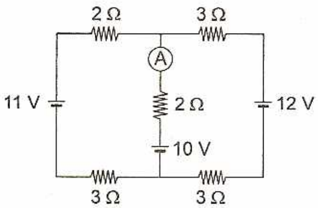
Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$i_1 = 10\ A$ e $i_2 = -6\ A$

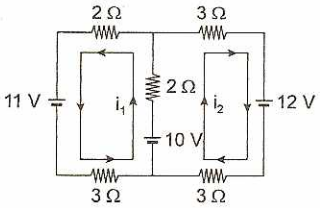
El signo negativo significa que el sentido de i_2 es horario, es decir el opuesto:

$\therefore\ (i_1 + i_2) = 4\ A$

53. En el circuito eléctrico mostrado, hallar la lectura en el amperímetro ideal.



Resolución:



Consideremos i_1 en la malla izquierda e i_2 en la malla derecha, por consiguiente la corriente que atraviesa la fuente de 10 V es la suma $(i_1 + i_2)$.

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla izquierda: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow -1 = 5i_1 + 2(i_1 + i_2)$

$-1 = 7i_1 + 2i_2$ ...(1)

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla derecha: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 22 = 6i_2 + 2(i_1 + i_2)$

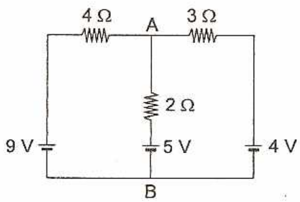
$11 = i_1 + 4\,i_2$ ...(2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

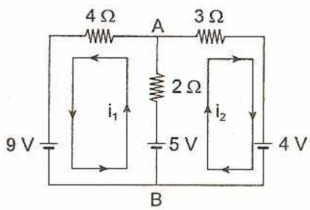
$i_1 = -1\text{ A}$ é $i_2 = 3\text{ A}$

el signo negativo significa que el sentido de i_1 es horario, es decir el opuesto: $\therefore\ i_1 + i_2 = 2\text{ A}$

54. El circuito eléctrico mostrado, hallar la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Resolución:



Consideremos la corriente i_1 en la malla izquierda e i_2 en la malla derecha, por consiguiente la corriente que atraviesa el tramo AB es la suma $(i_1 + i_2)$.

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla izquierda: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 14 = 4(i_1) + 2(i_1 + i_2)$

$7 = 3i_1 + i_2$ ...(1)

Aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff en la malla derecha: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 9 = 3(i_2) + 2(i_1 + i_2)$

$9 = 2i_1 + 5i_2$ ...(2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

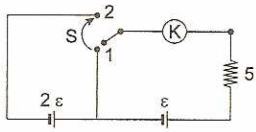
$i_1 = 2\text{ A}$ é $i_2 = 1\text{ A}$

Teorema de la trayectoria, en el tramo AB:

$V_A - 2(i_1 + i_2) + 5 = V_B \Rightarrow V_A - 6 + 5 = V_B$

$\therefore\ V_A - V_B = 1\text{ V}$

55. En el circuito eléctrico mostrado, cuando la llave S se encuentra en la posición (1) el amperímetro ideal K indica una lectura de 2 A. Hallar la lectura en el amperímetro cuando la llave S pasa a la posición (2). Desprecie las resistencias internas de las fuentes de energía.



Resolución:

Cuando la llave S está en la posición (1), funciona solo la FEM ε. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow \varepsilon = iR \Rightarrow \varepsilon = 2(5)$

$\Rightarrow \varepsilon = 10\text{ V}$ ...(1)

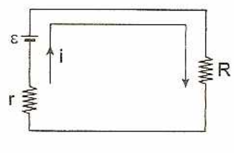
Cuando la llave S está en la posición (2), funcionan las dos fuentes de energía. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR \Rightarrow 2\varepsilon + \varepsilon = i_2(R)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$30 = i_2(5) \quad \therefore\ i_2 = 6\text{ A}$

56. Determinar la potencia que entrega la batería de fuerza electromotriz ε y resistencia interna **r** en el circuito mostrado.



Resolución:

Cálculo de la intensidad de corriente **i**, aplicando la segunda ley de Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

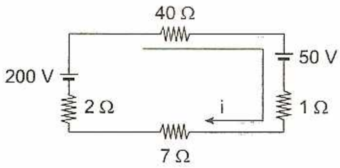
$\varepsilon = i(r + R) \Rightarrow i = \dfrac{\varepsilon}{(r+R)}$ ... (1)

Cálculo de la potencia entregada por la FEM.:

$P = i\varepsilon - i^2r$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2): $P = \dfrac{\varepsilon R}{(r+R)^2}$

57. Determinar el valor de la potencia eléctrica que se entrega o absorbe en cada una de las fuentes eléctricas reales en el circuito que se muestra.



Resolución:

Cálculo de la intensidad de corriente i, aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

$(200 - 50) = i(40 + 7 + 1 + 2) \Rightarrow i = 3\text{ A}$ ...(1)

Cálculo de la potencia entregada por la fuente de 200 V:

$P_1 = i\varepsilon - i^2r$

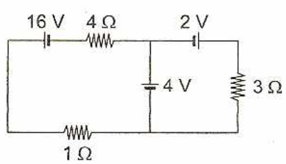
$P_1 = (3)(200) - 9(2) \Rightarrow P_1 = 582\text{ W}$

Cálculo de la potencia que absorbe la fuente de 50 V:

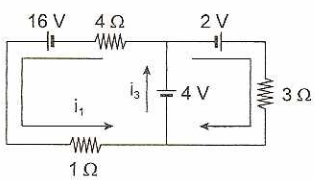
$P_2 = -i\varepsilon - i^2r \Rightarrow P_2 = -(3)(50) - (9)(1)$

$P_2 = -159\text{ W}$

58. Las corrientes, en A, que pasan por las resistencias de 1 Ω y 3 Ω son:



Resolución:



Aplicando la Segunda Ley de Kirchhoff a cada malla:

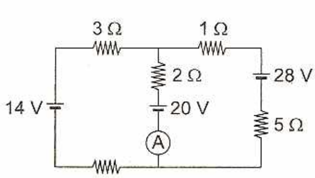
Malla Izquierda: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

$(16 + 4) = i_1(4 + 1) \Rightarrow i_1 = 4\text{ A}$

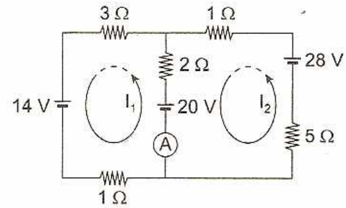
Malla derecha: $\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$

$(4 + 2)v = i_2(3) \Rightarrow i_2 = 2\text{ A}$

59. Hallar la lectura del amperímetro, en el circuito eléctrico mostrado.



Resolución:



Representamos el sentido predominante en cada malla:

Malla izquierda: $\Sigma V = i_p(\Sigma R) - i_s(R_c)$

$20 - 14 = i_1(2 + 3 + 1) - i_2(2)$

$i_2 = 3i_1 - 3$ ...(1)

Malla derecha: $\Sigma V = i_p(\Sigma R) - i_s(R_c)$

$28 - 20 = i_2(1 + 2 + 5) - i_2(2)$

$i_2 = \dfrac{4 + i_1}{4}$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $3i_1 - 3 = \dfrac{4 + i_1}{4} \Rightarrow i_1 = \dfrac{16}{11}\text{ A}$

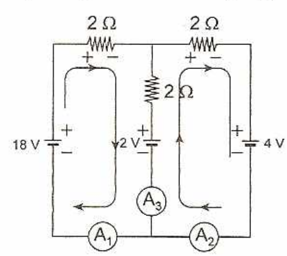
En (1) $i_2 = \dfrac{15}{11}\text{ A}$

* Lectura del amperímetro:

Cuando los sentidos de las corrientes a través del amperímetro son contrarios a la lectura en el amperímetro será la diferencia de intensidades, predominando el sentido de la mayor intensidad.

$A = i_1 - i_2 \Rightarrow A = \dfrac{16}{11} - \dfrac{15}{11} \quad \therefore A = \dfrac{1}{11}\text{ A}$

60. En el circuito eléctrico mostrado, hallar las lecturas en los amperímetros ideales A_1, A_2 y A_3.



Resolución:

Corriente de mallas (malla izquierda)

Suponemos que:

$i_1 > i_2 \quad 16 = 2i_1 + 2(i_1 - i_2)$ ...(1)

Corriente de mallas (malla derecha)

$-2 = 2i_2 - 2(i_1 - i_2)$ ...(2)

Ordenando las ecuaciones (1) y (2):

$2i_1 - 1i_2 = 8$ ...(α)

$-1i_1 + 2i_2 = -1$ ...(β)

Resolviendo las ecuaciones α y β:

$i_1 = 5\text{ A}; i_2 = 2\text{ A}$

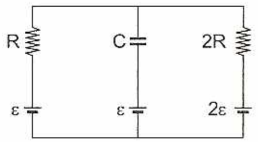
Lectura en el amperímetro A_3:

$i_3 = i_1 - i_2$ ...(3)

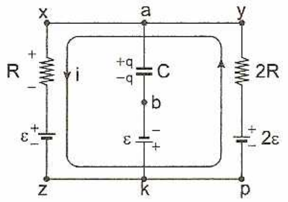
Reemplazando en (3): $i_3 = 5 - 2 = 3\text{ A}$

Luego: $i_1 = 5\text{ A}; i_2 = 2\text{ A}; i_3 = 3\text{ A}$

61. Determinar la diferencia de potencial y la carga acumulada en el condensador C = 5 μF. Los valores de las resistencias se indica en la figura. Desprecie las resistencias internas de las baterías de FEM: ε = 6 V. ¿Qué signo tendrá la carga en la armadura del condensador acoplada a las resistencias?



Resolución:



1. Cálculo de la intensidad de corriente en el circuito. 2.ª Ley de Kirchhoff: $2\varepsilon - \varepsilon = i(2R + R)$

   $i = \dfrac{\varepsilon}{3R}$ ...(1)

   Por el tramo: $a \to b \to k$: no circula corriente, debido al condensador.

2. Teorema de la Trayectoria:
   $A \to x \to z \to k \to b$
   $\Rightarrow V_a - iR - \varepsilon - \varepsilon = V_b$
   $V_a - V_b = 2\varepsilon + iR$ ...(2)

   Reemplazando (1) en (2):

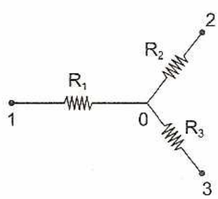
   $(V_a - V_b) = \dfrac{7\varepsilon}{3}$ de los datos: $(V_a - V_b) = 14$ V

   $\Rightarrow V_a > V_b$ = por consiguiente, el potencial en la armadura del condensador unida a las resistencias es más elevado que el potencial de la armadura unida con la batería, es decir, esta armadura está cargada positivamente.

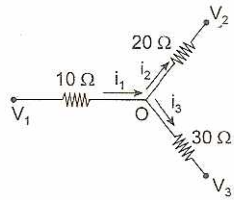
3. La carga acumulada en cada placa será:
   $q = (V_a - V_b)C \quad \therefore\ q = 70\ \mu C$

62. Determinar la corriente que fluye por cada resistencia: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$ y $R_3 = 30\ \Omega$, del tramo del circuito, si los potenciales en los puntos 1, 2 y 3, son:

$V_1 = 10$ V; $V_2 = 6$ V; $V_3 = 5$ V.



Resolución:



De la primera ley de Kirchhoff

Ley de nudos: en O $i_1 = i_2 + i_3$ ...(α)

Teorema de la trayectoria: $1 \to 0 \to 2$

$V_1 - 10i_1 - 20i_2 = V_2$

$\Rightarrow i_2 = 0{,}2 - 9{,}5i_1$ ...(β)

Teorema de la trayectoria:

$1 \to 0 \to 3 \Rightarrow V_1 - 10i_1 - 30i_3 = V_3$

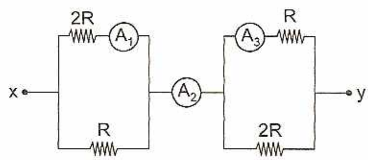
$i_3 = (1 - 2i_1)/6$ ...(γ)

Reemplazando (β) y (γ) en (α):

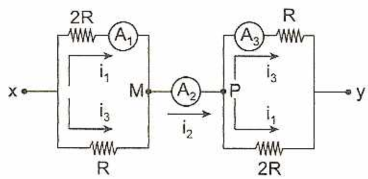
$i_1 = 0{,}2$ A; $i_2 = 0{,}1$ A; $i_3 = 0{,}1$ A

63. En el circuito eléctrico mostrado A_1, A_2, A_3 son amperímetros ideales, que indican las siguientes lecturas i_1, i_2, i_3, respectivamente, debido a la diferencia de potencial que se establece entre los puntos **x** e **y**. Si se cumple la siguiente relación:

$\dfrac{i_1}{a} = \dfrac{i_2}{b} = \dfrac{i_3}{c}$. Hallar: a, b y c.



Resolución:

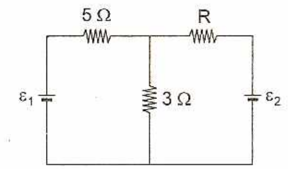


1. Debido a la simetría del esquema se puede observar que por la resistencia 2R circula una corriente i_1 y por la resistencia R circula una corriente i_3.
2. De la Ley de Ohm, analizamos la diferencia de potencial entre los puntos **x** y M o P e **y**:
   $i_1(2R) = i_3R \Rightarrow i_3 = 2i_1 \Rightarrow i_1 = \dfrac{i_3}{2}$ ...(α)
3. El amperímetro A_2 indicará:
   $i_2 = i_1 + i_3$ ...(β)
   Reemplazando (α) en (β):
   $i_2 = i_1 + 2i_1 \Rightarrow i_2 = 3i_1 \Rightarrow i_1 = \dfrac{i_2}{3}$ ...(γ)
   Igualando (α) y (γ) tenemos que:
   Luego: $\dfrac{i_1}{1} = \dfrac{i_2}{3} = \dfrac{i_3}{2}$
   Identificando términos tenemos:
   a = 1; b = 3; c = 2.

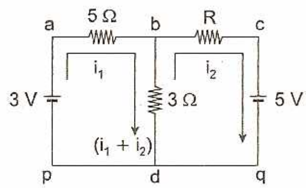
64. Un circuito eléctrico, formando por las resistencias $5\,\Omega$; $3\,\Omega$ y R, está conectado a dos fuentes de FEM:

$$\varepsilon_1 = 3\text{ V} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = 5\text{ V}$$

¿Para qué valor de R la corriente a través de la resistencia $5\,\Omega$ será nula?



Resolución:



1. Segunda ley de Kirchhoff, en la malla pabdp:

   $3 = 5i_1 + 3(i_1 + i_2) \Rightarrow i_2 = \dfrac{3 - 8i_1}{3}$ ...(α)

2. En la segunda Ley de Kirchhoff, si el desplazamiento de la cara de prueba en opuesto al desplazamiento de la corriente, entonces la caída de potencial será negativo.

   Malla pabcqdp: $3 - 5 = 5i_1 - Ri_2$ ...(β)

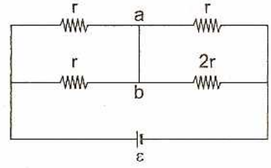
   Reemplazando (α) en (β) y despejando:

   $i_1 = \dfrac{6 - 3R}{15 + 8R}$, entonces:

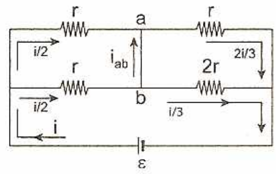
   $i_1 = 0$ será cierto cuando:

   $6 - 3R = 0 \Rightarrow R = 2\,\Omega$

65. Hallar la corriente que pasa por el puente ab en el circuito representado por la figura. Las resistencias del puente, de los conductores de alimentación y la interna de la batería se desprecian. $r = 1$; $\varepsilon = 7$ V.



Resolución:



Cálculo de la resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{r}{2} + \frac{2}{3}r = \frac{7}{6}r$$

De la Ley de Ohm: $\varepsilon = iR_{eq} = i\left(\dfrac{7}{6}\right)r$.

Luego: $i = \dfrac{6}{7}\left[\dfrac{\varepsilon}{r}\right]$ ...(1)

Cuando dos resistencias están conectados en serie la corriente que llega a ellos se reparte inversamente proporcional a la magnitud de las resistencias.

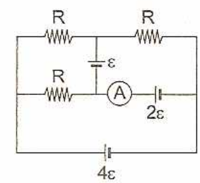
Ley de nodos en b:

$\dfrac{i}{2} = i_{ab} + \dfrac{i}{3} \Rightarrow i_{ab} = \dfrac{1}{6}$ ...(2)

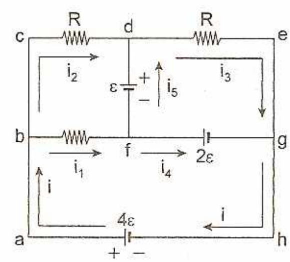
Reemplazando (1) en (2): $i_{ab} = \dfrac{\varepsilon}{7r}$

De los datos: $i_{ab} = 1$ A

66. En el circuito eléctrico mostrado hallar la lectura en el amperímetro A ideal. Las resistencias internas de las baterías se desprecian.



Resolución:



1. El amperímetro marcará la intensidad I_4 considerado en el gráfico.

   Nudo b: $i = i_1 + i_2$ ...(α)

   Nudo g: $i = i_3 + i_4$ ...(β)

   Luego: $i_4 = i_1 + i_2 - i_3$ ...(1)

2. De la 2.ª Ley de Kirchhoff en Malla:

   $a \to b \to f \to g \to h \to a$

   $4\varepsilon - 2\varepsilon = i_1R \Rightarrow i_1 = \dfrac{2\varepsilon}{R}$ ...(2)

   Malla: $a \to b \to c \to d \to f \to g \to h \to a$

   $4\varepsilon - \varepsilon - 2\varepsilon = i_2R \Rightarrow i_2 = \dfrac{\varepsilon}{R}$ ...(3)

   Malla: $d \to e \to g \to f \to d$

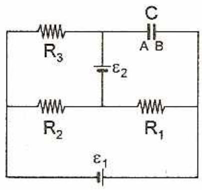
   $2\varepsilon + \varepsilon = i_3R \Rightarrow i_3 = \dfrac{3\varepsilon}{R}$ ...(4)

3. Reemplazando (2), (3) y (4) en (1) :

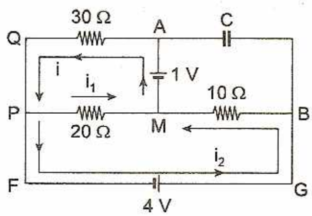
   $i_4 = \dfrac{2\varepsilon}{R} + \dfrac{\varepsilon}{R} - \dfrac{3\varepsilon}{R} = 0 \quad \therefore\ i_4 = 0$

67. Hallar la diferencia de potencial ($V_A - V_B$) entre las armaduras A y B del condensador C del esquema, si la FEM de las fuentes valen: $\varepsilon_1 = 4$ V; $\varepsilon_2 = 1$ V y

las resistencias: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 30\ \Omega$; las resistencias internas de las fuentes son despreciables.



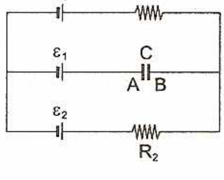
Resolución:



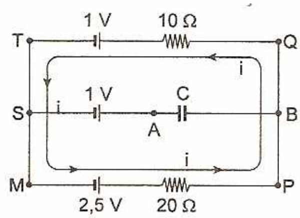
1. A través del condensador no hay fluyo de cargas eléctricas, por consiguiente no pasa corriente.
2. 1.ª ley de Kirchhoff; nudo M: $i = i_1 + i_2$ ...(1)
3. Malla; MAQPM: $1 = 20i_1 + 30i$
   Luego: $i_1 = (1 - 30i)/20$ ...(2)
4. Malla, FGBMAQPF: $4 + 1 = 10i_2 + 30i$
   Luego: $i_2 = (5 - 30i)/10$ ...(3)
5. Reemplazando (2) y (3) en (1):
   $i = \frac{1 - 30i}{20} + \frac{5 - 30i}{10} \Rightarrow i = 0{,}1\text{ A}$

   De (2) y (3): $i_1 = -0{,}1$ A; $i_2 = 0{,}2$ A
   El signo (−) indica que el sentido de la corriente i_1 es opuesto al indicado en el dibujo, por consiguiente el sentido correcto es $M \to P$.
6. Teorema de la trayectoria:
   $B \to M \to A$
   $\Rightarrow V_B - 10i_2 + 1 = V_A$
   $\therefore V_A - V_B = -1$ V

68. En el esquema la FEM de las fuentes $\varepsilon_1 = 1$ V, $\varepsilon_2 = 2{,}5$ V y las resistencias: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$. Las resistencias internas de las fuentes son despreciables. Calcular la diferencia de potencial $(V_A - V_B)$ entre las armaduras A y B de condensador C.

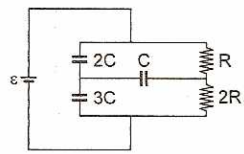


Resolución:

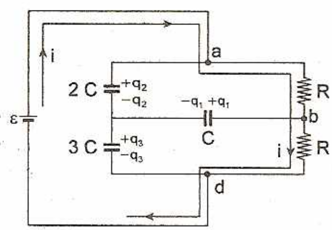


1. A través del condensador no hay flujo de cargas eléctricas ($i = 0$), no pasa corriente.
2. Malla: MPBQTSM, 2.ª ley de Kirchhoff:
   $(2{,}5 - 1) = 20i + 10i$
   $\Rightarrow i = \frac{1}{20}\text{ A} = 0{,}05\text{ A}$ ...(1)
3. Teorema de la trayectoria: $A \to S \to M \to B$
   $V_A - 1{,}0 + 2{,}5 - 20 - i = V_B$ ...(2)
4. Reemplazando (1) en (2): $(V_A - V_B) = -0{,}5$ V

69. Determinar la carga en cada condensador C, 2C y 3C en el circuito representado en la figura. Despréciese la resistencia interna de la batería. Considere: ($C = 1$ F; $\varepsilon = 9$ V)



Resolución:



1. Aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff en el circuito:
   $\varepsilon = i(R + 2R) \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{3R}$ ...(α)
2. Ley de nudos, en e :
   $q_1 + q_2 = q_3$ ...(β)
3. Teorema de la trayectoria: $a \to e \to b$
   $V_{ab} = \frac{q_2}{2C} + \frac{(-q_1)}{C} = iR = \frac{\varepsilon}{3}$
   $q_2 = 2q_1 + \frac{2}{3}\varepsilon C$ ...(I)
4. Teorema de la trayectoria: $b \to e \to d$
   $V_{bd} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{3C} = i(2R) = \frac{2}{3}\varepsilon$
   $q_3 = 2\varepsilon C - 3q_1$ ...(II)

5. Reemplazando (I) y (II) en (β):

$q_1 = \frac{2}{9}\varepsilon C$ ...(III)

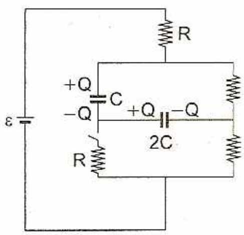
De los datos:

$q_1 = 2\ \mu C \Rightarrow q_2 = 10\ \mu C \Rightarrow q_3 = 12\ \mu C$

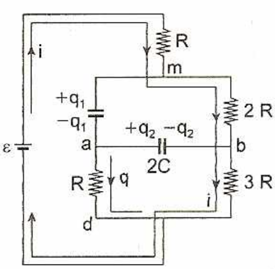
70. Determinar la carga que pasa por el interruptor K, cuando se cierra, en el circuito representado en la figura.

$C = 1\ \mu F$; $\varepsilon = 6\ V$.

Desprecie la resistencia interna en la batería.



Resolución:



Antes de cerrar el interruptor K la carga total de la placa inferior del condensador C y la placa izquierda del condensador 2C será igual a cero.

Después de cerrar el interruptor K se establece un reordenamiento de cargas en los condensadores, como puede apreciarse en la figura. La resistencia R entre los puntos a y d no funciona en el tiempo, se comporta como un conductor ideal, en un intervalo de tiempo pequeño se produce una descarga eléctrica a través de esta resistencia cuando se cierra K.

Aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff al circuito:

$\varepsilon = i(R + 2R + 3R) \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{6R}$ ...(1)

Teorema de la trayectoria:

$m \to a \to d \Rightarrow \frac{q_1}{C} = i(2R + 3R) = 5iR$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $q_1 = \frac{5}{6}\varepsilon C$ ...(α)

Teorema de la trayectoria:

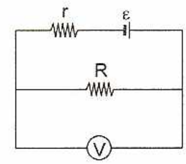
$b \to a \to d \Rightarrow \frac{q_2}{2C} = i(3R) = 3iR$ ...(3)

Reemplazando (1) en (3): $q_2 = \varepsilon C$ ...(β)

Del principio de conservación de las cargas deducimos, que por el interruptor K pasa una cantidad de carga: $q = q_1 + q_2 = \frac{11}{6}\varepsilon C$

De los datos: $q_1 = 5\ \mu C$; $q_2 = 6\ \mu C$ ∴ $q = 11\ \mu C$

71. En el circuito eléctrico mostrado, la fuerza electromotriz $\varepsilon = 22{,}1$ V tiene una resistencia interna $r = 1\ \Omega$, además $R = 10\ \Omega$ la resistencia del voltímetro es $R_v = 200\ \Omega$. Calcular la diferencia de lecturas en el voltímetro cuando consideramos un voltímetro ideal de resistencia interna infinitamente grande y el voltímetro real de la figura.



Resolución:

1. En el 1.^{er} caso: $R_v = \infty$

   2.ª ley de Kirchhoff: $\varepsilon = i(R + r)$ ...(α)

   De la ley de Ohm: $V_{AB} = V_1 = iR$ ...(β)

   Reemplazando (α) en (β):

   $V_1 = \varepsilon\frac{R}{(R+r)} \Rightarrow V_1 = 20{,}09$ voltios

2. En el 2.° caso: $R_v = 200\ \Omega$

   2.ª ley de Kirchhoff: $\varepsilon = i\left[r + \frac{RR_v}{(R+R_v)}\right]$ ...(γ)

De la ley de Ohm: $V_{AB} = V_2 = i\frac{RR_v}{(R+R_v)}$ ...(θ)

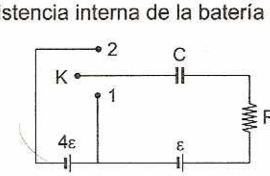
Reemplazando (γ) en (θ): $V_2 = \varepsilon\,\frac{RR_v}{[rR + RR_v + rR_v]}$

Reemplazando valores: $V_2 = 20$ voltios

3. La diferencia de lecturas:

   $\Delta V = V_1 - V_2 = 0{,}09$ V

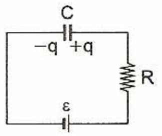
72. ¿Qué cantidad de calor se desprende en la resistencia R cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2? $C = 100\ \mu F$; $\varepsilon = 100$ V. La resistencia interna de la batería se desprecia.



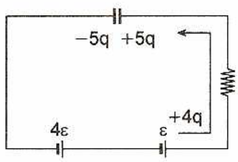
Resolución:

1. Cuando el conmutador K está en la posición 1, la energía almacenada por el condensador es:

   $W_1 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow$ del dato: $W_1 = 0{,}5$ J ...(α)

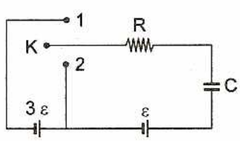


2. Cuando el conmutador K está en la posición 2, la energía almacenada por el condensador es:
$W_2 = \frac{1}{2}C(5\varepsilon)^2 = \frac{25}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow W_2 = 12{,}4\ \text{J}$ ...(β)

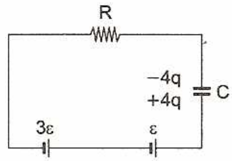


3. La carga acumulada por el condensador es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada en el condensador. En el primer caso (K:1) la carga acumulada es igual a:
$$q = C\varepsilon = 0{,}01\ \text{C}$$
En el segundo caso (K:2) la carga acumulada por el condensador es: $5q = 0{,}05$ C
Entonces cuando el conmutador K pasa de la posición 1 a la posición 2, por la resistencia R atraviesa una cantidad de carga igual a $+4q$, luego, el trabajo realizado por la batería será positivo, dado que las cargas se desplazan desde el polo negativo hacia el polo positivo.
$W_{\text{batería}} = (4q)(4\varepsilon) + (4q)\varepsilon = 20q\varepsilon$
Reemplazando datos:
$W_{\text{batería}} = 20C\varepsilon^2 = 20\ \text{J}$ ...(γ)
4. Del principio de conservación de la energía: El trabajo realizado por la batería, es igual a la variación de la energía del condensador C, más, la cantidad de calor disipado.
$W_{\text{batería}} = (W_2 - W_1) + Q$ ...(δ)
Reemplazando (α), (β) y (γ) en (δ): $Q = 8$ J

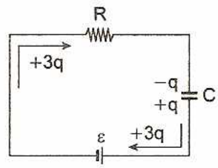
73. ¿Qué cantidad de calor se desprende a través de la resistencia R, cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2? La resistencia interna de las baterías se desprecia. ($\varepsilon = 10$ V; $C = 2\ \mu$F)



Resolución:
1. Cuando K está en la posición 1, la energía almacenada por el condensador es igual a:
$W_1 = \frac{1}{2}C(4\varepsilon)^2 = 8C\varepsilon^2 \Rightarrow W_1 = 1600\ \mu\text{J}$ ...(α)

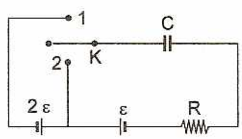


2. Cuando K está en la posición 2, la energía almacenada por el condensador es igual a:
$W_2 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow W_2 = 100\ \mu\text{J}$ ...(β)



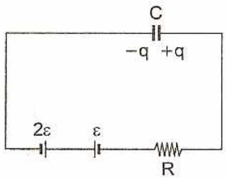
3. La carga acumulada por el condensador es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada al condensador. Para K en 1:
$4q = C(4e)$
$q = C\varepsilon \Rightarrow q = 20\ \mu\text{C}$ ...(1)
4. Cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2, se experimenta un reordenamiento de cargas en las placas del condensador, entonces por la resistencia R atraviesa una cantidad de carga igual a $+3q$. Luego, la batería realiza un trabajo negativo, debido a que las cargas se desplazan del polo positivo al polo negativo.
$W_{\text{batería}} = -(3q)\varepsilon = -3q\varepsilon$
$\Rightarrow W_{\text{pila}} = -600\ \mu\text{J}$ ...(γ)
5. Del principio de conservación de la energía: El trabajo realizado por la batería, es igual a la variación de la energía del condensador, más, la cantidad de calor disipado
$W_{\text{pila}} = (W_2 - W_1) + Q$ ...(2)
Reemplazando (α), (β) y (γ) en (2), tenemos:
$-600\mu = -1500\mu + q \quad \therefore\ q = 900\ \mu\text{J}$

74. ¿Que cantidad de calor se desprende en el circuito cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2? ($C = 5\ \mu$F ; $\varepsilon = 10$ V)
La resistencia interna de la batería se desprecia.

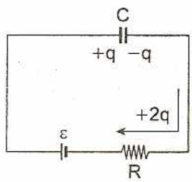


Resolución:
1. Cuando el conmutador K pasa a la posición 1, el condensador C almacena una carga q, la armadura derecha se carga positivamente.
2.ª ley de Kirchhoff: $2\varepsilon - \varepsilon = \frac{q}{C} \Rightarrow q = \varepsilon C$ ...(1)

Del dato, obtenemos: $q = 50\ \mu C$



2. Cuando el conmutador K pasa a la posición 2 el condensador C almacena igual cantidad de carga que en el caso anterior: $q = \varepsilon C$, pero la armadura derecha se carga negativamente. Por consiguiente cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2 por la resistencia R atraviesa una cantidad de carga igual a $+2q$.



3. La energía almacenada por el condensador, cuando el conmutador K está en la posición 1 y en la posición 2 son iguales:

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{C}\right]$$

Luego: $W_1 = W_2 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = 250\ \mu J$ ...(2)

4. Cuando las cargas $+2q$ atraviesan la resistencia, la FEM, realiza un trabajo positivo sobre las cargas igual a: $W_{pila} = \varepsilon(2q) = 2q\varepsilon = 2C\varepsilon^2$

$W_{pila} = 1000\ \mu J$ ...(3)

5. Por el principio de conservación de la energía se cumple que: El trabajo realizado por la FEM es igual a la variación de la energía del sistema (circuito eléctrico), más, que el calor disipado.

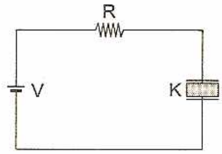
$W_{pila} = (W_2 - W_1) + Q$ ...(4)

Reemplazando (2) y (3) en (4) tenemos:

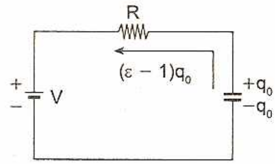
$1000\mu = (250\mu - 250\mu) + Q$

Luego, el calor disipado a través de la resistencia R es: $Q = 10^3\ \mu J = 1\ mJ$

75. Entre las armaduras de un condensador plano se encuentra una lámina dieléctrica ($K = 3$) que llena todo el espacio del condensador. El capacitor está acoplado a través de una resistencia R a una batería de FEM, $V = 100$ voltios. La lámina se saca rápidamente de manera que la carga en el condensador no tiene tiempo de variar. ¿Qué energía, en forma de calor, se desprenderá después de esto en el circuito? La capacidad del condensador sin el dieléctrico es $C_0 = 100\ \mu F$.



Resolución:



1. La carga acumulada por el condensador con el dieléctrico es: $q = \varepsilon C_0 V$

Luego: $q = 30\ 000\ \mu C$. Esta misma carga, por condición del problema, se conserva en el instante inicial en el condensador al quitar el dieléctrico, en este preciso instante la energía en el condensador es:

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{C_0}\right] \Rightarrow W_1 = 4{,}5\ J \qquad ...(\alpha)$$

2. Instante después se produce un reordenamiento de cargas en el condensador, ahora sin dieléctrico. Al final la carga en el condensador es:

$q_0 = C_0 V \Rightarrow q_0 = 10\ 000\ \mu C$ ...(1)

En estas condiciones la energía almacenada será:

$$W_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{q_0^2}{C_0}\right] \Rightarrow W_2 = 0{,}5\ J \qquad ...(\beta)$$

3. En este proceso a través de la resistencia R atraviesa una cantidad de carga igual a:

$(q - q_0) = (\varepsilon - 1)q_0 = 20\ 000\ \mu C$ ...(2)

Entonces, las cargas $+(q - q_0)$ se desplazan del polo positivo al polo negativo de la FEM por consiguiente la batería realiza un trabajo negativo:

$W_{batería} = -(q - q_0)V \Rightarrow W_{batería} = -2\ J$ ...(γ)

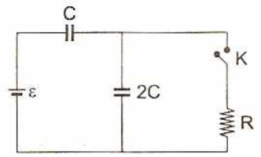
4. Del principio de conservación de la energía: el trabajo realizado por la batería es igual a la variación de la energía del condensador más la cantidad de calor disipado.

$W_{batería} = W_2 - W_1 + Q$ ...(3)

Reemplazando (α), (β), (γ) en (3), tenemos:

$-2 = 0{,}5 - 4{,}5 + Q \quad \therefore Q = 2\ J$

76. ¿Qué cantidad de calor se desprende en la resistencia R una vez que se cierra el interruptor K? La resistencia interna de la batería se desprecia. ($\varepsilon = 10\ V$; $C = 3\ \mu F$)

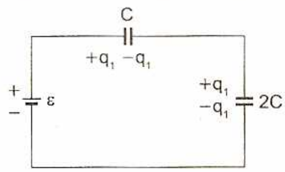


Resolución:

1. Cuando el interruptor K está abierto los condensadores de capacidad C y 2C se encuentran instalados en serie, y la carga acumulada en cada placa es q_1, entonces aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff:

   $$\varepsilon = \frac{q_1}{C} + \frac{q_1}{2C} \Rightarrow q_1 = \frac{2}{3}C\varepsilon$$

   De los datos tenemos: $q_1 = 20\ \mu C$ ...(1)

   La energía acumulada por los condensadores será:

   $$W_1 = \frac{1}{2}C_{eq}\varepsilon^2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}C\right)\varepsilon^2 \Rightarrow W_1 = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

   $W_1 = 100\ \mu J$ ...(α)

2. Después de cerrar K, el condensador C se carga hasta la tensión ε, su carga en cada placa es q_2; de la 2.ª ley de Kirchhoff:

   $\varepsilon = \frac{q_2}{C} \Rightarrow q_2 = C\varepsilon \Rightarrow q_2 = 30\ \mu C$ ...(2)

   La energía almacenada será:

   $W_2 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow W_2 = 150\ \mu J$ ...(β)

3. Cuando se cierra el interruptor K, se origina un reordenamiento de cargas en los capacitores, entonces por la resistencia atraviesa una cantidad de carga igual a $(q_2 - q_1)$, debe observarse que el condensador 2C queda descargado, entonces el trabajo realizado por la batería será:

   $W_{batería} = (q_2 - q_1)\varepsilon$ ...(3)

   Reemplazando (1) y (2) en (3):

   $W_{batería} = 100\ \mu J$ ...(γ)

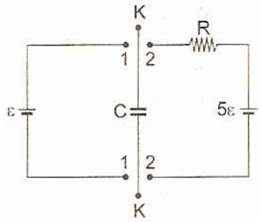
4. Del principio de conservación de la energía, el trabajo realizado por la batería (FEM) es igual a la variación de la energía del sistema, más el calor disipado:

   $W_{batería} = (W_2 - W_1) + Q$ ...(4)

   Reemplazando (α), (β) y (γ) en (4) tenemos:

   $100\mu = 50\mu + Q \Rightarrow Q = 50\ \mu J$

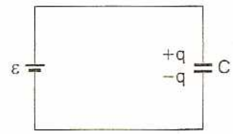
77. En el circuito eléctrico mostrado las dos llaves K funcionan simultáneamente. ¿Qué cantidad de calor se desprende en la resistencia R cuando los conmutadores K se pasan de la posición 1 a la posición 2? La resistencia interna de las baterías se desprecian.
($C = 2\ \mu F$; $\varepsilon = 2\ V$)



Resolución:

1. Cuando las llaves están en la posición 1, la energía almacenada por el condensador es igual a:

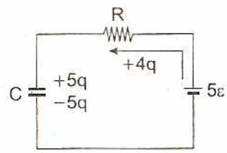
   $W_1 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow W_1 = 4\ \mu J$ ...(α)

2. Cuando las llaves están en la posición 2, la energía almacenada por el condensador es igual a:

   $W_2 = \frac{1}{2}C(5\varepsilon)^2 \Rightarrow W_2 = \frac{25}{2}C\varepsilon^2$

   $W_2 = 100\ \mu J$ ...(β)

3. La carga acumulada por el condensador es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada al condensador. Para K en 1 entonces:

   $q = C\varepsilon$ ...(1)

   Para K en 2 la carga acumulada es: $5C\varepsilon$. Por consiguiente cuando las llaves pasan de la posición 1 a la posición 2, por la resistencia R atraviesa una cantidad de carga igual a $+4q$. Luego, el trabajo realizado por la batería de FEM 5ε será:

   $W_{batería} = (4q)(5\varepsilon) = 20q\varepsilon$ ...(2)

   Reemplazando (1) en (2):

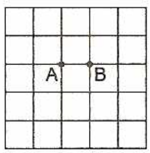
   $W_{batería} = 20C\varepsilon^2 = 160\ \mu J$ ...(γ)

4. Del principio de conservación de la energía: El trabajo realizado por la batería, es igual a la variación de la energía del sistema (condensador C), más el calor disipado:

$W_{batería} = (W_2 - W_1) + Q \qquad ...(3)$

Reemplazando (α), (β) y (γ) en (3): $\quad Q = 64\ \mu J$

78. Se tiene una rejilla de alambre ilimitada con celdas cuadradas. La resistencia entre los nodos contiguos de cada conductor es igual a R_o. Determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B de esta rejilla. Sugerencia: hacer uso de los principios de simetría y superposición.



Resolución:

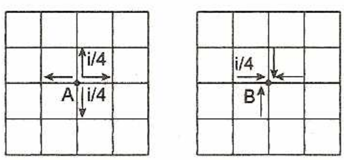
1. Conectemos mentalmente a los puntos A y B una fuente de tensión V.

   $V = iR_{eq} = i_oR_o \qquad ...(\alpha)$

   Donde:

   i = es la corriente en los cables de alimentación.

   i_o = es la corriente en el conductor AB.

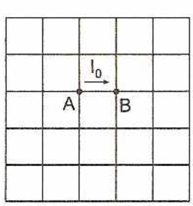


2. La corriente i_o puede ser representada como la superposición de dos corrientes. Si la corriente i fluyera hacia el punto A y se extendiera por la rejilla hacia el infinito, a través del conductor AB, por simetría, pasaría una corriente i/4.
3. Análogamente, si la corriente i ingresara a la rejilla desde el infinito y saliera desde el punto B, por el conductor AB pasaría también la corriente i/4.
4. Superponiendo estas dos soluciones, obtendremos $i_o = i/2$.

   Reemplazando en (α): $iR_{eq} = i_oR_o = \frac{i}{2}R_o$

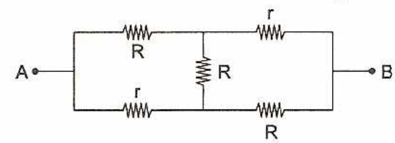
   Luego:

   $$R_{eq} = \frac{R_0}{2}$$



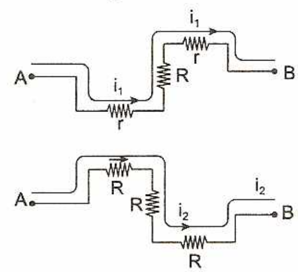
79. En el circuito eléctrico mostrado, determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

Donde: $R = 3\ \Omega$; $r = 1\ \Omega$



Resolución:

1. Para resolver este problema, aplicaremos el criterio de superposición de corrientes como muestran las figuras.



2. Ley de Ohm en (d): $V_{AB} = (i_1 + i_2)R_{eq} \qquad ...(\alpha)$
3. 2.ª ley de Kirchhoff en la malla: AXYQPA

   $i_1 . r + (i_1 - i_2)R - i_2R = 0$

   $$i_2 = \frac{(r + R)}{2R} i_1 \qquad ...(\beta)$$

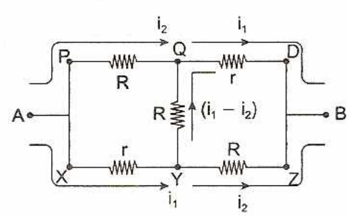
4. Teorema de la trayectoria:

   $A \to X \to Y \to Z \to B$

   $V_{AB} = i_1r + Ri_2 \qquad ...(\gamma)$

   Reemplazando (β) en (γ):

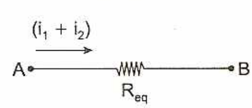
   $$V_{AB} = \frac{(3r + R)}{2} i_1 \qquad ...(\theta)$$



5. Reemplazando (θ) en (β) en (α):

   $$\frac{(3r + R)}{2} = \frac{(3R + r)}{2R}$$

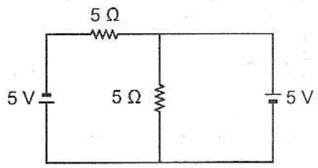
   Luego: $R_{eq} = \dfrac{(3r + R)}{3R + r} R$



De los datos: $R_{eq} = 1{,}8\ \Omega$

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En el circuito mostrado en la figura halle la corriente, en A, que pasa a través de la batería ubicada a la derecha.

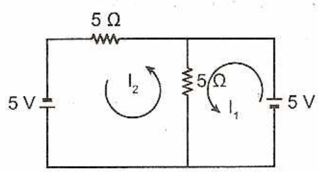


A) 0,0 B) 0,5 C) 1,0
D) 2,0 E) 3,0

Resolución:

En el circuito mostrado, aplicamos Kircchoff

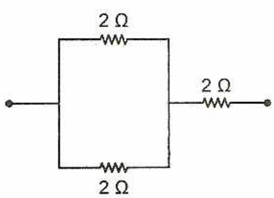
$5 = 5I_1 - 5I_2$
$I_1 - I_2 = 1\text{ A}$
$5 = 10I_2 - 5I_1$
$5 = 10(I_1 - 1) - 5I_1$
$\therefore\ I_1 = 3\text{ A}$



Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

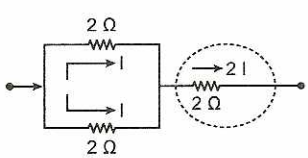
Cada una de las resistencias en el circuito mostrado puede disipar un máximo de 18 W sin sufrir ningún daño. La máxima potencia, en watts, que puede disipar el circuito es entonces.



A) 9 B) 25 C) 27
D) 36 E) 54

Resolución:

Haciendo una distribución de la corriente.



Con la finalidad de que el circuito no sufra daño, analizamos el resistor que se encuentra en serie con los dos primeros.

$P = i^2R \Rightarrow 18 = (2I)^2 2 \Rightarrow I = \dfrac{3}{2}\text{ A}$

Entonces la potencia máxima del circuito es:

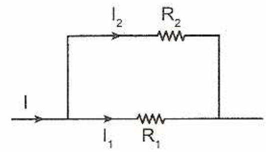
$P_{max} = (2I)^2R_{eq} = 4I^2(3) = 12I^2$

$P_{max} = 12\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \quad \therefore\ P_{max} = 27\text{ W}$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Considere el circuito de la figura:



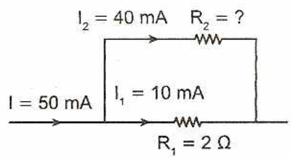
Si: $I = 50\text{ mA}$, $I_1 = 10\text{ mA}$; $R_1 = 2\ \Omega$

Entonces R_2, en Ω, es:

A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,7

Resolución:

Por la 1.ª Ley de Kirchhoff



$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = 40\text{ mA}$

Por acoplamiento en paralelo:

$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$

Reemplazando los datos:

$\dfrac{10}{40} = \dfrac{R_2}{2}$

$\therefore\ R_2 = 0{,}5\ \Omega$

Clave C

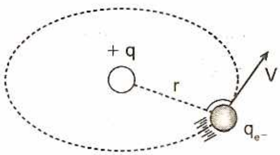
PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Consideramos el modelo del átomo de Bohr de hidrógeno, donde el electrón tiene una carga negativa de $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. El electrón gira con una rapidez de $2{,}18 \times 10^{6}$ m/s y con un radio de giro de $5{,}2 \times 10^{-11}$ m. Este electrón en movimiento circular puede ser visto como una espira con corriente. ¿Cuál sería aproximadamente la intensidad de corriente de esta espira en mA?

A) 1,0 B) 2,0 C) 3,0
D) 4,0 E) 5,0

Resolución

Del diagrama sabemos: modelo del átomo de Bohr



Se determina la intensidad de corriente: $I = \dfrac{|q_{e^-}|}{T}$

$V = \omega r$ además: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Multiplicamos ambos términos por qe^-

$$V|q_{e^-}| = 2\pi r\left(\frac{|q_{e^-}|}{T}\right) \Rightarrow V|q_{e^-}| = 2\pi r I$$

$$\Rightarrow I = \frac{V|q_{e^-}|}{2\pi r}$$

Reemplazando:

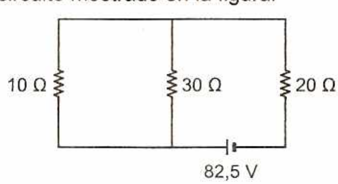
$$I = \frac{2,18\times10^{6}(1,6\times10^{-19})}{2\pi(5,2\times10^{-11})}$$

$I = 1,06 \times 10^{-3}A \quad \therefore\ I = 1,0\ mA$

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - I)

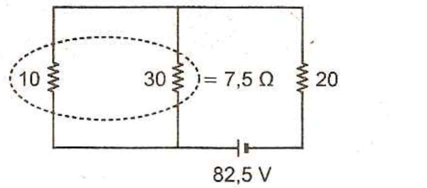
Calcule la corriente en A, a través de la Resistencia de 20 Ω del circuito mostrado en la figura.

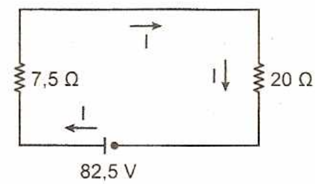


A) 1,0 B) 1,5 C) 2,0 D) 2,5 E) 3,0

Resolución:

Reduciendo el circuito y determinando la intensidad de corriente eléctrica en la R = 20 Ω:





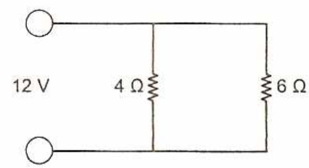
Aplicando la ley de Kirchhoff $\Sigma V = 0$

$82,5 - 7,5I - 20I = 0 \quad \therefore\ I = 3\ A$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2012 - II)

Dos resistencias, de 4 Ω y 6 Ω, se conectan en paralelo y se le aplica una diferencia de potencial de 12 V por medio de una batería. Calcule la potencia, en watts, suministrada por la batería.



A) 7,2 B) 14,4 C) 30,0
D) 60,0 E) 72,0

Resolución:

La potencia que suministra la batería se determina por:

$$P = \frac{V^2}{R_E}$$

$$P = \frac{12(12)}{\frac{4(6)}{10}} \qquad \ldots(R_E)$$

$\therefore\ P = 60\ W$

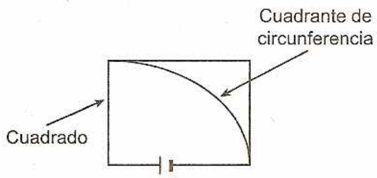
Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Por un conductor circula una corriente cuya intensidad varía con el tiempo según la ecuación $I = 2t+1$ en unidades S.I. Hallar la carga que ha circulado por la sección recta del conductor durante los primeros 5 s.

A) 1 C   B) 11 C   C) 6 C
D) 30 C   E) 36 C

2. Hallar la relación de las potencias eléctricas que consumen los conductores de igual grosor y material.



A) $\pi/2$ B) $\pi/4$ C) $\pi/8$
D) $\pi/16$ E) $\pi/64$

3. Si la intensidad de campo eléctrico generado por una carga $Q = 6{,}28 \times 10^{-7}$C a una distancia de 5 cm de ella es de $2{,}5 \times 10^{4}$ N/C. Determinar la permitividad eléctrica del medio

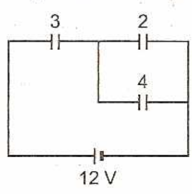
A) $0{,}4 \times 10^{-9}$ F/m   D) $0{,}5 \times 10^{-9}$ F/m
B) $0{,}8 \times 10^{-9}$ F/m   E) 10^{-9} F/m
C) $0{,}6 \times 10^{-9}$ F/m

4. Dos condensadores de 2 μF y 3 μF son conectados separadamente a una fuente de 200 V. Si luego los condensadores se conectan en paralelo con polaridades invertida. Hallar la diferencia de potencial en los extremos de estos condensadores.

A) 10 V   B) 20 V   C) 40 V
D) 80 V   E) 100 V

5. Hallar la energía del capacitador de 4μf.

A) 16 μJ
B) 32 μJ
C) 18 μJ
D) 36 μJ
E) 64 μJ

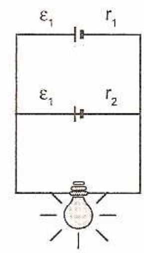


6. Al conectar en paralelo dos resistencias idénticas se obtiene, a temperatura ambiente, una resistencia equivalente de 50 Ω Determinar en cuánto se debe incrementar la temperatura de la resistencia equivalente, para obtener una resistencia del mismo valor que una de las resistencias a temperatura ambiente. Asuma que el coeficiente térmico de resistividad es de $5 \times 10^{-3}\,°C^{-1}$.

A) 50 °C   B) 100 °C   C) 150°C
D) 200 °C   E) 250 °C

7. Dos fuentes de 17 V y resistencias internas 1 Ω y 2 Ω se conectan a un foco de 5 Ω. ¿Qué potencia consume dicho foco?

A) 20 W
B) 30 W
C) 45 W
D) 50 W
E) 60 W



8. Dos grandes placas conductoras y paralelas, están electrizadas con +q y −q, si la distancia que las separa es 5 cm y una partícula electrizada con 8 μC ubicada entre ellas experimenta una fuerza de $2{,}4 \times 10^{-2}$ N. Halle la diferencia de potencial entre las placas.

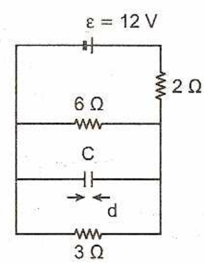
A) 100 V   B) 120 V   C) 150 V
D) 200 V   E) 250 V

9. Si en el punto (1;0) se coloca una carga Q y en el punto o(4;0) se coloca una carga −2Q. Halle la ecuación de la superficie equipotencial en donde el potencial es cero.

A) $x^2 + y^2 = 4$ B) $x^2 + y^2 = 1$
C) $x^2 + y^2 = 6$ D) $x^2 + y^2 = 64$
E) $x^2 + y^2 = 16$

10. En un circuito mostrado calcular la intensidad de campo eléctrico y la energía acumulada en el condensador de capacidad C = 1 faradio, sabiendo que la distancia de separación entre las placas es de 2×10^{-3} m. (El circuito se encuentra en estado estacionario)

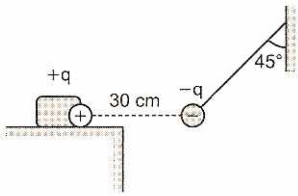
A) 3×10^3 N/C; 36 J
B) 3×10^3 N/C; 18 J
C) 6×10^3 N/C; 36 J
D) 6×10^3 N/C; 18 J
E) N. A.



11. Dos esferas idénticas con cargas $Q_1 = 10\ \mu C$ y $Q_2 = -8\ \mu C$ se ponen en contacto, hasta lograr el equilibrio luego se les separa 3 cm. Hallar la fuerza eléctrica en estas condiciones.

A) 1 N B) 0,1 N C) 10 N
D) 100 N E) 1000 N

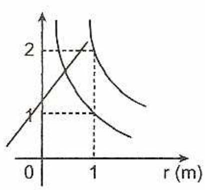
12. Las masas de las esferas idénticas es 10 g. Determinar el valor de las cargas eléctricas para el equilibrio. ($g = 10\ m/s^2$)



A) 1 μC B) 2 μC C) 2,5 μC
D) 4 μC E) 5 μC

13. La figura ilustra la variación del potencial eléctrico "V" para dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 ($Q_2 > Q_1$) en función de la distancia "r" media desde la posición en la que se encuentra la carga. Halle el potencial producido por Q_2 a una distancia r = 2 m.

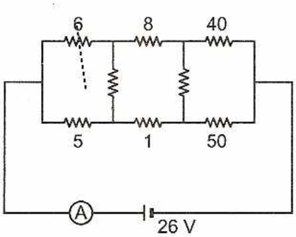
A) 0,25 V
B) 0,5 V
C) 0,75 V
D) 1,00 V
E) 1,25 V



14. Una partícula de 10 mg electrizada con 10^{-9} C es soltada, en x = 0, dentro de un campo eléctrico cuya intensidad varía según: $\vec{E} = 10x\ \hat{i}$ KN/C. ¿Qué rapidez tendrá dicha partícula en x=2 m? Desprecie los efectos gravitatorios.

A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

15. Determinar la lectura del amperímetro, las resistencias están en ohmios.



A) 0,5 A B) 1 A C) 1,25 A
D) 2 A E) 2,5 A

16. Luego de conectar un condensador a una batería cuyo voltaje es V_0 las placas de dicho condensador adquieren +q y −q. Si desconectamos el condensador de la batería y duplicamos la distancia entre las placas. ¿Qué alternativa es incorrecta?

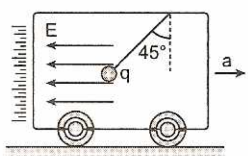
A) Las placas mantienen su cantidad de carga.
B) El voltaje entre las placas resulta ser $2V_o$.
C) La intensidad del campo eléctrico entre las placas no varía.
D) La capacidad eléctrica del condensador resulta ser $q/2V_o$
E) La capacidad eléctrica del condensador resulta ser $2q/V_o$

17. ¿Qué ocurre con la energía potencial eléctrica cuando las cargas se dejan en libertad?

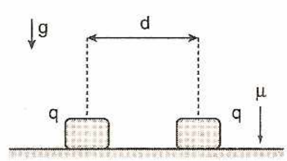
A) Aumenta
B) Disminuye
C) Permanece constante
D) Es nula en todo momento
E) No se puede predecir

18. Hallar la intensidad de campo eléctrico para que la esferita de 5 g de masa y carga 4 μC se mantenga en la posición mostrada, el carro viaja con una aceleración de 9 m/s^2

A) 250 N/C
B) 500 N/C
C) 750 N/C
D) 1000 N/C
E) 1250 N/C



19. Dos bloques idénticos de masa m y carga eléctrica q cada uno se colocan sobre una superficie horizontal distando d uno del otro. Como consecuencia de la interacción eléctrica, los bloques comienzan a moverse por dicha superficie. Determinar la distancia que los separa en el instante que se detienen, si el coeficiente de rozamiento cinético es μ.



A) $\dfrac{2kq^2}{\mu mgd}$ B) $\dfrac{kq^2}{\mu mgd}$ C) $\dfrac{kq^2}{2\mu mgd}$

D) $\sqrt{\dfrac{kq^2}{\mu mg}}$ E) $\sqrt{\dfrac{2kq^2}{\mu mg}}$

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

11. Una carga magnética norte de magnitud Q = 8 MAm genera a su alrededor un campo magnético. Determinar la intensidad del campo a 20 cm de distancia.

A) 12 N B) 14 N C) 16 N
D) 18 N E) 20 N

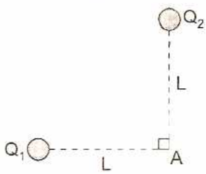
12. Dos cargas magnéticas: q_1 = +8 MAm y q_2 = −2 MAm, están separadas 20 cm. Determinar la intensidad del campo resultante en el punto medio de la línea que une las cargas magnéticas.

A) 80 T B) 85 T C) 90 T
D) 95 T E) 100 T

13. Tres cargas magnéticas de 6 Am. cada una, se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Determinar la intensidad del campo magnético resultante en el baricentro del triángulo.

A) 5 T B) 10 T C) 0
D) 4 T E) 8 T

14. La figura muestra dos cargas magnéticas: Q_1 = −3 MAm y Q_2 = +4 MAm. Determinar en el punto A, la intensidad del campo magnético resultante. Donde L = 10 cm.

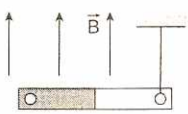


A) 30 T B) 40 T C) 50 T
D) 60 T E) 45 T

15. Sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm se han colocado dos cargas magnéticas: Q_1 = −3 MAm y Q_2 = −1,8 MAm. Calcular la intensidad del campo magnético resultante en el tercer vértice.

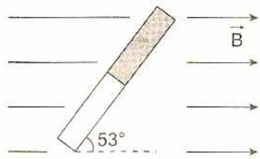
A) 30 T B) 36 T C) 42 T
D) 48 T E) 24 T

16. Un imán barra de 24 N de peso se encuentra dentro de un campo magnético homogéneo de intensidad B = 4 T, vertical hacia arriba. Sabiendo que el imán atado exactamente de uno de sus polos está en equilibrio, calcular la carga magnética "q" en cada polo.



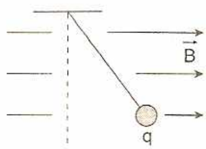
A) 3 Am B) 5 Am C) 2 Am
D) 9 Am E) 6 Am

17. La figura muestra un imán barra de 30 cm de longitud sobre un plano horizontal liso, la carga magnética en cada polo tiene magnitud igual a 50 Am. Sabiendo que el imán se encuentra dentro de un campo magnético homogéneo horizontal de intensidad B = 25 T, calcular la cupla aplicada sobre el imán en el instante que el imán forma un ángulo de 53° con líneas de fuerza magnética.



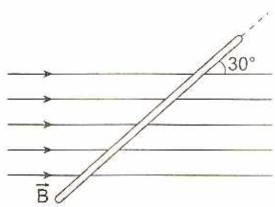
A) 200 Nm (horario)
B) 250 Nm (horario)
C) 300 Nm (horario)
D) 280 Nm (horario)
E) 350 Nm (horario)

18. La figura muestra una esfera de peso 40 N y carga magnética 3 Am, dentro de un campo magnético homogéneo de intensidad 10 T con dirección horizontal. Calcular la tensión en la cuerda que sujeta a la esfera.



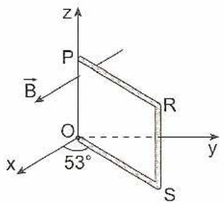
A) 10 N B) 20 N C) 30 N
D) 40 N E) 50 N

19. En la figura se indica el perfil de una espira cuadrada de 40 cm de lado. Si la intensidad del campo homogéneo con dirección horizontal es B = 20 T, determinar el flujo magnético que atraviesa a la espira.



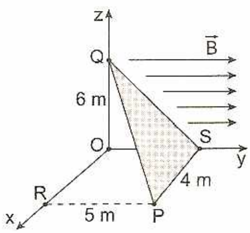
A) 1 Wb B) 1,6 Wb C) 2 Wb
D) 3,2 Wb E) 3 Wb

20. En la figura considere un campo magnético homogéneo, B = 5 T, en dirección de eje +x. Halle el flujo que sale de la espira rectangular de dimensiones a = 2 m y b = 3 m.



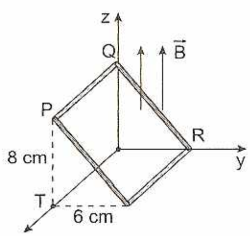
A) 20 Wb B) 24 Wb C) 28 Wb
D) 36 Wb E) 18 Wb

21. La figura muestra un triángulo PQS el cual es atravesado por un campo magnético homogéneo B = 8,5 T, en dirección del eje +y. Hallar el flujo que sale a través de la región PQS.



A) 98 Wb B) 100 Wb C) 96 Wb
D) 102 Wb E) 110 Wb

22. La intensidad del campo magnético de 500 T se orienta homogéneamente según el eje +z. Encuentre el flujo que sale de la espira cuadrada de lado 10 cm.



A) 1 Wb B) 2 Wb C) 3 Wb
D) 4 Wb E) 5 Wb

23. En cierto punto, la componente horizontal del campo magnético es 0,3 T y la componente vertical 0,4 T ¿Cuánto es el valor del ángulo de inclinación en ese lugar? y calcular la intensidad total del campo terrestre en dicho lugar.

A) 30°; 1 T B) 37°; 2 T C) 45°; 1 T
D) 53°; 2,5 T E) 53°; 0,5 T

24. En determinado lugar de la Tierra la intensidad del campo magnético es 2,5 mt. Si la inclinación magnética es 53° y la declinación magnética es 37°, calcular el módulo de la componente del campo magnético paralela al eje Norte-Sur geográfico.

A) 1,2 mT B) 1,5 mT C) 2 mT
D) 0,8 mT E) 1 mT

25. Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. La tierra se comporta como un gran imán natural.
II. El campo magnético terrestre es de poca intensidad.
III. No hay evidencia de la existencia de monopolares magnéticos.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FVF

26. Determine la magnitud del campo magnético que crea un flujo de 400 μWb en una superficie de 20 cm² de área, perpendicular al campo.

A) 0,2 T B) 0,4 T C) 0,5 T
D) 1,2 T E) 2,4 T

27. Señale la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. El campo magnético de un imán es de diferente naturaleza que el campo magnético de una corriente eléctrica.
II. No existe la conducción magnética semejante a la conducción eléctrica.
III. Todos los fenómenos magnéticos se producen por cargas en movimiento.

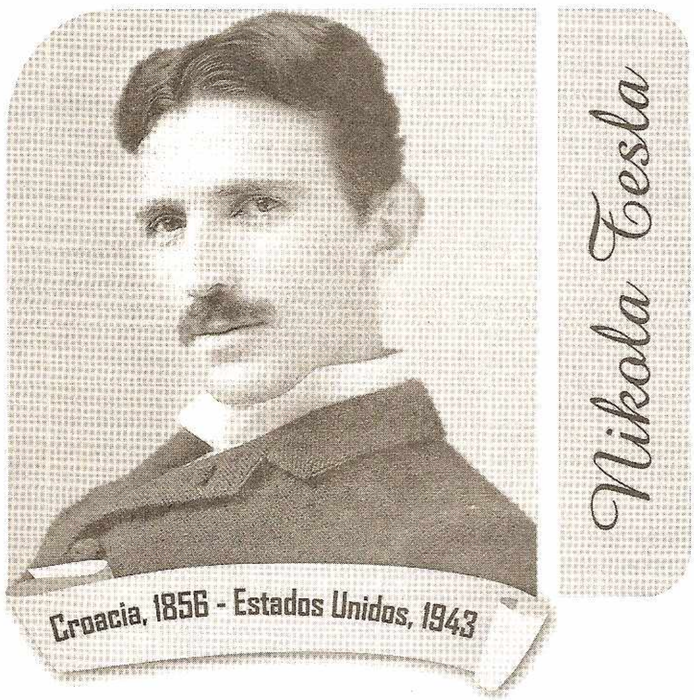
A) VVV B) FVV C) VVF
D) FFV E) FVF

28. Se dice que existe un campo magnético en un punto, si sobre una carga "q" móvil que pasa por dicho punto se ejerce una fuerza:

A) Que acelere la carga.
B) Mayor que la gravitacional de la Tierra.
C) Perpendicular a la velocidad de la carga.
D) Menor que la gravitacional de la Tierra.
E) Magnética, paralela al campo.

CLAVES

1. B	5. D	9. E	13. C	17. B	21. D	25. C
2. C	6. D	10. C	14. C	18. E	22. C	26. A
3. B	7. B	11. E	15. C	19. B	23. E	27. B
4. A	8. A	12. E	16. A	20. B	24. A	28. C



Nikola Tesla (Smiljan, actual Croacia, 10 de julio de 1856-Nueva York, 7 de enero de 1943) fue un inventor, ingeniero mecánico, ingeniero eléctrico y físico de origen serbio. Se le conoce, sobre todo, por sus numerosas invenciones en el campo del electromagnetismo, desarrolladas a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Las patentes de Tesla y su trabajo teórico ayudaron a forjar las bases de los sistemas modernos de potencia eléctrica por corriente alterna (CA), incluyendo el sistema polifásico de distribución eléctrica y el motor de corriente alterna. La unidad de medida del campo magnético B del Sistema Internacional de Unidades (también denominado densidad de flujo magnético e inducción magnética) es el tesla, que fue llamado así en su honor.

En 1884, llegó por primera vez a los Estados Unidos y Edison lo contrató para trabajar en su Edison Machine Works. Empezó a trabajar para Edison como un simple ingeniero eléctrico y progresó rápidamente, resolviendo algunos de los problemas de la compañía. En 1887 construyó un motor de inducción sin escobillas, alimentado con corriente alterna; luego,en el mismo año, desarrolló el principio de la bobina de Tesla. Además de su trabajo en electromagnetismo e ingeniería electromecánica, contribuyó en diferente medida al desarrollo de la robótica, el control remoto, el radar, las ciencias de la computación, la balística, la física nuclear y la física teórica.

Fuente: Wikipedia

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Antiguamente el magnetismo y la electricidad se consideraban ramas de la Física totalmente independientes y distinta una de la otra, hasta que un evento casual (Efecto Oersted) exigió su ligazón, luego el electromagnetismo estudia la relación entre estas dos ramas. El magnetismo es una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento.

Efecto Oersted

La experiencia fundamental fue realizada en 1820, por el físico danés Hans Christian Oersted. Descubrió de manera casual que al hacer circular una corriente lograba desviar la aguja imantada de una brújula, lo que demostraba que el movimiento de cargas eléctricas genera alrededor de éstas un campo magnético.

Toda corriente eléctrica genera a su alrededor un campo magnético.

La dirección y sentido del campo magnético, igual que la dirección que toma la aguja, depende del sentido de la corriente.

Las líneas de fuerza que representan al campo magnético envuelven al alambre conductor y el sentido de éstas viene dado por la regla de la mano derecha o de Ampére. Se toma el conductor con la mano derecha de modo que el pulgar indique el sentido de la corriente I, entonces, el sentido de las líneas de fuerza estará representado por los demás dedos.

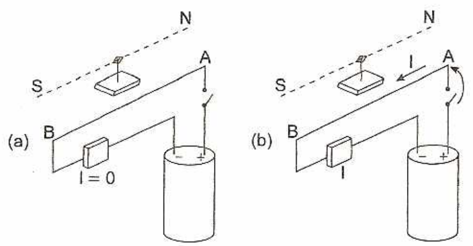
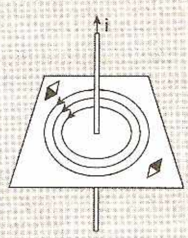


Fig. 18.1

Figura 18.1. Una aguja magnética colocada cerca de un conductor recto que lleva una corriente eléctrica, tiende a desplazarse a la dirección perpendicular a dicho conductor.

Líneas de fuerza

El sentido de las líneas de fuerza (horario o antihorario) depende del sentido de la corriente i.



Recuerda que:

Toda corriente eléctrica genera a su alrededor un campo magnético.

LEY DE BIOT-SAVART

En 1820 H. Ch. Oersted (1777-1851) descubrió el efecto de la corriente eléctrica sobre una aguja imantada. En ese mismo año los físicos J. B. Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-1841) enunciaron la ley para la fuerza magnética que ejerce la corriente sobre el polo magnético alejado una cierta distancia de la corriente. En 1826, fue enunciado en definitiva la ley de acción de la corriente a distancia. A estos trabajos se sumaron los aportes de André M. Ampére y Pierre S. Laplace.

PARA UN SEGMENTO DE CORRIENTE

Cuando un segmento conductor RS conduce una corriente de intensidad I, genera un campo magnético tal que en el punto P, el vector B será tangente a la línea de fuerza y su módulo estará dado por:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{d}\right)(\cos\alpha + \cos\beta)} \qquad (18.1)$$

$$\boxed{B = 10^{-7}\left(\frac{I}{d}\right)(\cos\alpha + \cos\beta)} \qquad (18.2)$$

La constante μ_0 se conoce como permitividad magnética del vacío, y en el SI es igual a:

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi(10^{-7})\ NA^{-2}} \qquad (18.3)$$

La intensidad del campo magnético **B** es directamente proporcional a la corriente I e inversamente proporcional a la distancia "d".

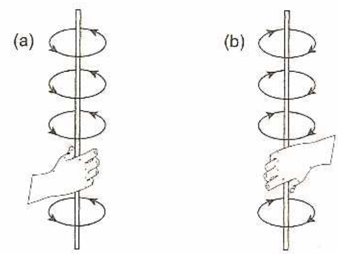


Fig. 18.2

Figura 18.2. Aplicación de la regla de Ampére para determinar la orientación del campo magnético establecido alrededor de un conductor por el que circula una corriente.

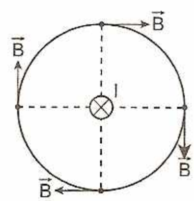


Fig. 18.3

Figura 18.3. Líneas de inducción del campo magnético producido por la corriente en un conductor rectilíneo, perpendicular al plano de la figura y entrante en ella.

Segmento conductor

$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{d}\right)(\cos\alpha + \cos\beta)$

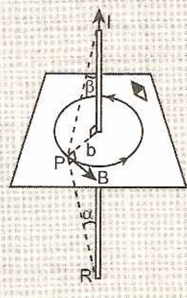
B: campo magnético (T)

I: corriente eléctrica (A)

d: distancia (m)

$0 \le \alpha \le 90°$

$0 \le \beta \le 90°$



Líneas de inducción

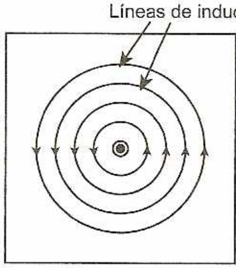


Fig. 18.4

Figura 18.4. Líneas de inducción del campo magnético establecido por un conductor rectilíneo perpendicular al plano de la figura y saliente de dicho plano.

Para una recta de corriente

Toda corriente I que transporta un conductor infinitamente largo genera un campo magnético cuya intensidad es directamente proporcional a la corriente, pero inversamente proporcional a la distancia "d".

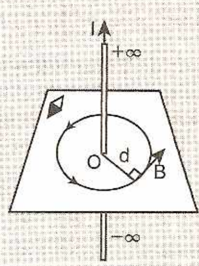
En la ecuación (18.1) haciendo $\alpha = 0°$ y $\beta = 0°$, tenemos:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{d}\right)} \qquad ...(18.4)$$

$$\boxed{B = 2 \times 10^{-7}\left(\frac{I}{d}\right)} \qquad ...(18.5)$$

La intensidad de campo $\vec{B}$, se representa por un vector tangente a la línea de fuerza.

Conductor infinito



$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{d}\right)$

Para un arco de corriente

Un conductor en forma de arco de radio R subtendido por un ángulo central θ (en radianes) producirá un campo magnético a su alrededor de manera que en el centro de curvatura la intensidad $\vec{B}$ de dicho campo está dado por:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\theta}{R}\right)} \qquad ...(18.6)$$

$$\boxed{B = 10^{-7}\left(\frac{I\theta}{R}\right)} \qquad ...(18.7)$$

El vector intensidad de campo $\vec{B}$, es perpendicular al plano donde se encuentra contenido el arco conductor que lleva la corriente I.

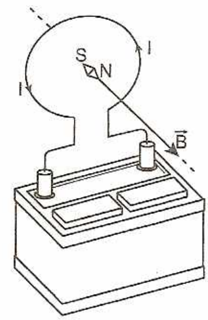


Fig. 18.5

Figura 18.5. Campo magnético originado en el centro de una espira circular por la cual pasa corriente.

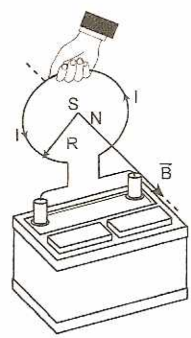
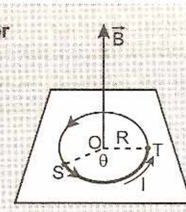


Fig. 18.6

Figura 18.6. La regla de Ampére puede utilizarse para determinar el sentido de $\vec{B}$ también en este caso.

Arco conductor



$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\theta}{R}\right)$

Para una espira circular de corriente

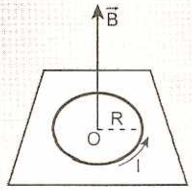
Cuando un conductor bajo la forma de un aro lleva una corriente I, esta genera un campo magnético en todo el espacio que lo rodea, el cual tendrá un valor máximo en el centro de la espira.
De la ecuación (18.6), haciendo $\theta = 2\pi$, tenemos el módulo de $\vec{B}$:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{R}\right)} \qquad ...(18.8)$$

$$\boxed{B = 2\pi(10^{-7})\left(\frac{I}{R}\right)} \qquad ...(18.9)$$

El campo magnético creado por la espira circular es muy parecido al campo generado por un imán barra.

Anillo conductor



$$B = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{R}\right)$$

Para un polígono regular de corriente

La intensidad del campo magnético en el centro de una figura geométrica regular de "n" lados y apotema "r", donde el conductor lleva una corriente eléctrica I, es igual a:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{r}\right)n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \qquad (18.10)$$

La intensidad $\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene a la figura geométrica.

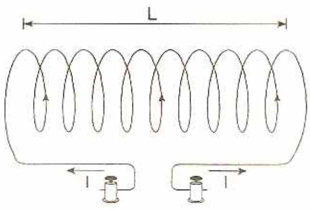


Fig. 18.7

Figura 18.7. Un solenoide está constituido por un conductor dispuesto de manera que forme un rollo de espiras sucesivas.

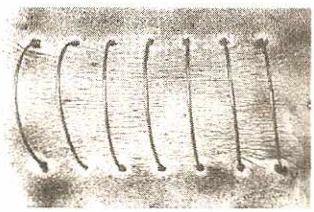


Fig. 18.8

Figura 18.8. Líneas de inducción del campo magnético producido por una corriente que circula por un solenoide.

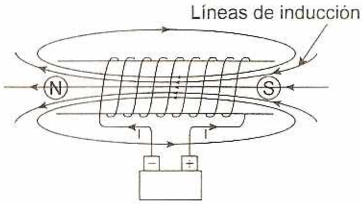
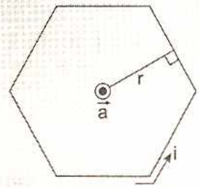


Fig. 18.9

Figura 18.9. Materialización de las líneas de inducción del campo magnético creado por un solenoide, mediante el empleo de limaduras de hierro.

Polígono regular

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{In}{r}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$



Para un solenoide

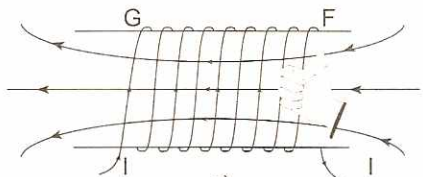
Se llama también bobina y es un conjunto de arrollamientos por donde circula una corriente I, creando en su espacio interior un campo magnético debido a la superposición de los campos individuales que genera cada espira, de modo que estos se refuerzan. La intensidad del campo en el centro del solenoide es:

$$\boxed{B = \mu_0\left(\frac{IN}{L}\right)} \qquad (18.11)$$

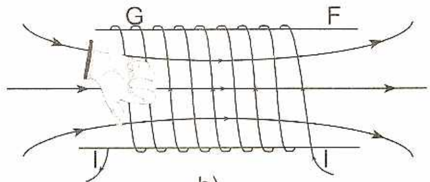
donde, N es el número de espiras y L es la longitud de la bobina.
Extremadamente, el solenoide se comporta como un imán recto, por esto, los solenoides son también llamados electroimanes.
Si el enrrollamiento se hace sobre un núcleo ferromagnético de permeabilidad μ, entonces, la intensidad del campo magnético en el interior del núcleo es,

$$\boxed{B = \mu\mu_0\left(\frac{IN}{L}\right)} \qquad (18.12)$$

El valor de μ (permeabilidad magnética) depende de cada sustancia que constituye el núcleo, para el aire su valor es igual a la unidad, no tiene unidades.



a)



b)

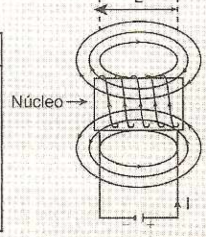
Fig. 18.10

Figura 18.10. Aplicación de la regla de Ampére para la determinación del sentido de las líneas de inducción del campo magnético de un solenoide.

Bobina

$$B = \mu\mu_0\left(\frac{IN}{L}\right)$$

Permeabilidad magnética μ	
Aire	1
Níquel	100
Fierro	200
Ferrita	1500
Permalloy	8000
Numetal	20 000



Para un toroide

Si enrrollamos un alambre conductor sobre un anillo de Rowland (Toro) estaremos construyendo un toroide que viene a ser, entonces, un solenoide circular o bobina anular, cuando por las espiras del toroide circula una corriente. El campo magnético se establece solamente en el volumen interior del toroide cuyas líneas de fuerza son circulares y concéntricos.

$$\boxed{B = \mu\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{IN}{R_m}\right)} \qquad (18.13)$$

$$\boxed{B = 2\times10^{-7}\left(\mu\frac{NI}{R_m}\right)} \qquad (18.14)$$

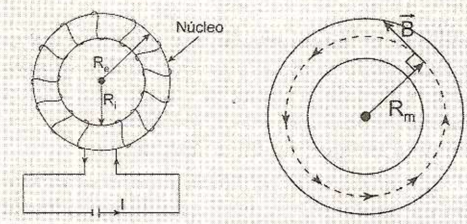
$$\boxed{R_m = \frac{R_i + R_e}{2}} \qquad (18.15)$$

En donde, μ es la permeabilidad magnética relativa del material del Toro (anillo), no tiene unidades.

N: número de vueltas o espiras con intensidad de corriente I; R_m: radio medio; R_i: radio interior y R_e: radio exterior.

Exteriormente al toroide no hay campo magnético. Para determinar el sentido de las líneas de fuerza en el interior del toroide se hace uso de la regla de la mano derecha: se toma al toroide con la mano derecha, tal que los dedos tienen el sentido de la corriente continua **I**, entonces, el pulgar indica el sentido del campo magnético.

Toro



El campo magnético en el interior del toroide es aproximadamente uniforme.

Para una carga en movimiento

Toda carga eléctrica "q" en movimiento con velocidad $\vec{v}$, crea un campo magnético $\vec{B}$ en el espacio que lo rodea:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{qv}{r^2}\right)\text{sen}\theta} \qquad (18.16)$$

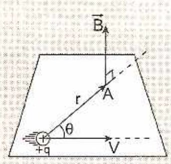
$$\boxed{B = 10^{-7}\left(\frac{qv}{r^2}\right)\text{sen}\theta} \qquad (18.17)$$

Donde $\vec{r}$ define la posición del punto A respecto de la carga "q" en movimiento. La dirección y sentido de $\vec{B}$ se determina aplicando la regla de la mano derecha, los dedos se hacen girar del sentido de la velocidad hacia el sentido del vector posición $\vec{r}$, el pulgar indica el sentido del vector intensidad de campo magnético $\vec{B}$. Si la carga es negativa $-q$, el sentido de $\vec{B}$ será opuesto.

Campo magnético

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{qv}{r^2}\right)\text{sen}\theta$$

v: velocidad (m/s); B: campo magnético (T); r: distancia relativa (m); q: carga eléctrica (C); $0° < \theta < 180°$



INTERACCIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS

Fuerza magnética sobre una carga móvil

Debido a que una carga "q" en movimiento genera su propio campo magnético, al ingresar a otro campo magnético se produce una interacción entre ellos. La fuerza magnética F que actúa sobre la carga eléctrica "q" que se mueve en el campo magnético con velocidad "v", se llama "fuerza de Lorentz".

$$\boxed{F = qvB\text{sen}\theta} \qquad (18.18)$$

La fuerza magnética F sobre la carga positiva "q", es perpendicular al plano determinado por el campo magnético B y la velocidad "v" de la carga.

El sentido de la fuerza magnética se determina aplicando la regla de la mano derecha. Los dedos se hacen girar del sentido de la velocidad $\vec{v}$ hacia el sentido del campo magnético $\vec{B}$ a través del menor ángulo θ, el pulgar indica el sentido de la fuerza magnética $\vec{F}$.

Si la carga eléctrica en movimiento tiene carga negativa −q se procede del mismo modo, pero la fuerza magnética tendrá sentido opuesto.

Si el lanzamiento de la carga "q" es perpendicular al campo magnético homogéneo $\vec{B}$, la fuerza magnética $\vec{F}$ cambia continuamente la dirección de la velocidad, tal que la carga logra describir una trayectoria circunferencial, siendo la fuerza magnética la fuerza centrípeta (despreciando el peso de la carga).

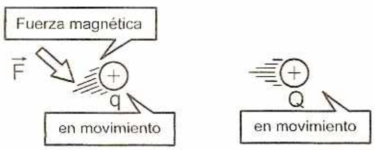


Fig. 18.11

Figura 18.11. Cuando dos cargas eléctricas se encuentran en movimiento, se manifiesta entre ellas, además de la fuerza eléctrica, una fuerza magnética.

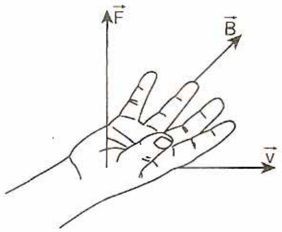


Fig. 18.12

Figura 18.12. Disposición de los dedos para aplicar la regla de la palma de la mano derecha.

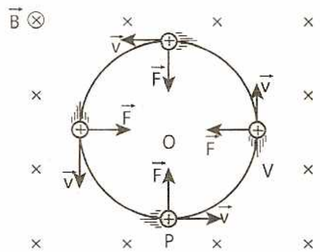
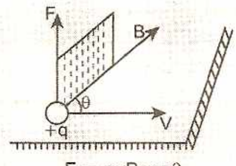


Fig. 18.13

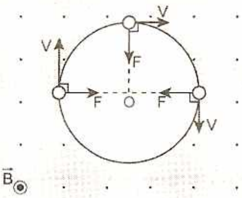
Figura 18.13. Partícula electrizada que describe una trayectoria circunferencial en un campo magnético.

Fuerza de Lorentz



F = qvBsenθ

Movimiento circunferencial



La fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad. El movimiento es circunferencial y uniforme.

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CORRIENTE RECTILÍNEA

Cuando un conductor se encuentra dentro de un campo magnético, cada una de las cargas que él conduce experimentan fuerzas magnéticas cuya resultante se conoce con el nombre de "fuerza de Ampére".

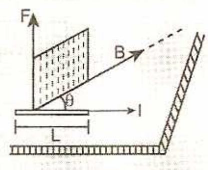
La fuerza F que actúa sobre el elemento de longitud L de un conductor de corriente i situado en un campo magnético homogéneo $\vec{B}$, es:

$$\boxed{F = ILB\,\mathrm{sen}\,\theta} \qquad (18.19)$$

La fuerza magnética sobre la corriente es perpendicular al plano determinado por el campo magnético $\vec{B}$ y la corriente I.

El sentido de la fuerza se determina aplicando la regla de la mano derecha, los dedos se hacen girar del sentido de la corriente hacia el sentido del campo magnético a través del menor ángulo θ, el pulgar indica el sentido de la fuerza.

Fuerza de Ampére



F = ILBsenθ

FUERZA TOTAL SOBRE UN CONDUCTOR EN UN CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO

Cuando un conductor curvilíneo que transporta una corriente I está en un campo magnético homogéneo exterior, la fuerza sobre el conductor tiene que ver con la longitud efectiva del conductor, o sea la separación L entre sus extremos ($RS = L_{ef}$).

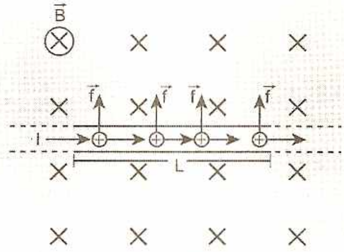
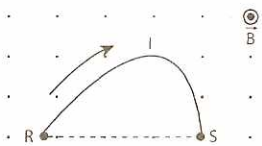


Fig. 18.14

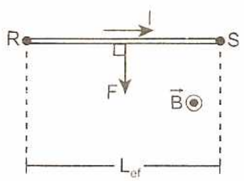
Figura 18.14. Conductor recto que lleva una corriente eléctrica y está colocado en un campo magnético.

En general la longitud efectiva L_{ef} puede formar con el campo externo $\vec{B}$ cualquier ángulo θ, entonces, se sigue cumpliendo la ecuación (18.19):

$$\boxed{F = IL_{ef}B\operatorname{sen}\theta} \qquad (18.20)$$



El sistema equivalente es:



Longitud efectiva

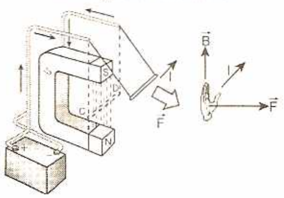


Fig. 18.15

Figura 18.15. La regla de la palma de la mano derecha puede ser utilizada para determinar el sentido de la fuerza que actúa sobre un conductor por el que pasa una corriente eléctrica y está situado en un campo magnético.

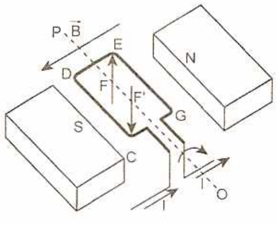


Fig. 18.16

Figura 18.16. Una espira rectangular recorrida por una corriente eléctrica y colocada en un campo magnético, tiende a girar como se indica.

FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CORRIENTES RECTILÍNEAS

Si dos alambres paralelos conducen corriente eléctrica, entonces los campos magnéticos que ambos producen interactúan entre sí originando fuerzas de atracción si las corrientes tienen el mismo sentido, y fuerzas de repulsión, si aquellas tienen sentidos opuestos. Estas fuerzas son de igual módulo pero de sentidos opuestos, pues constituyen fuerzas de acción y reacción.

$$\boxed{F = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1I_2}{d}\right)L} \qquad (18.21)$$

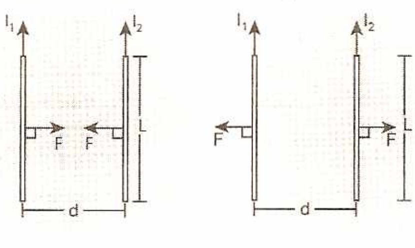
Donde L es la longitud de cada conductor y "d" la distancia entre los conductores paralelos.
El descubrimiento de este importante fenómeno se debe al físico francés Andrés María Ampére en 1820.

$$\boxed{F = 2\times10^{-7}\left(\frac{I_1I_2}{d}\right)L} \qquad (18.22)$$

La fuerza magnética, de atracción o repulsión entre dos conductores muy largos, por cada unidad de longitud tiene el siguiente módulo:

$$\boxed{\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1I_2}{d}\right)} \qquad (18.23)$$

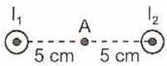
Atracción **Repulsión**



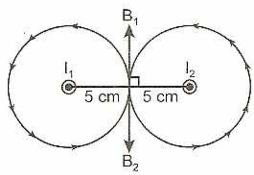
1. La figura muestra dos conductores rectilíneos perpendiculares al papel que llevan corrientes:

$$I_1 = 30\ \text{A};\ I_2 = 10\ \text{A}.$$

La distancia de separación entre los conductores es 10 cm. Hallar la intensidad del campo magnético en el punto A.



Resolución:



Cálculo del campo magnético producido por i_1 e i_2 en el punto A:

$$B_1 = 2\times10^{-7}\left(\frac{I_1}{d}\right) = 2\times10^{-7}\left(\frac{30}{5\times10^{-2}}\right) = 12\times10^{-5}\ \text{T}$$

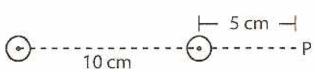
$$B_2 = 2\times10^{-7}\left(\frac{I_2}{d}\right) = 2\times10^{-7}\left(\frac{10}{5\times10^{-2}}\right) = 4\times10^{-5}\ \text{T}$$

La intensidad del campo magnético resultante en el punto A es: $B_A = B_1 - B_2 = 8\times10^{-5}\ \text{T}\ \therefore\ B = 80\ \mu\text{T}$

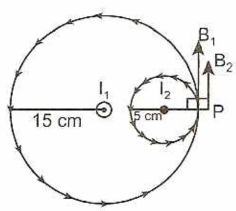
2. La figura muestra dos conductores rectilíneos perpendiculares al papel que llevan corriente:

$$I_1 = 30\ \text{A} \quad \text{e} \quad I_2 = 10\ \text{A}$$

La distancia de separación entre los conductores es 10 cm. Hallar la intensidad del campo magnético en el punto P. I_1 y I_2: saliendo del plano.



Resolución:



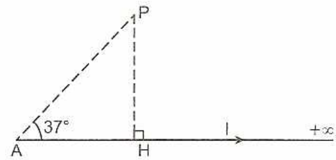
Cálculo del campo magnético producido por I_1 e I_2 en el punto P.

$$B_1 = 2\times10^{-7}\left(\frac{I_1}{D}\right) = 2\times10^{-7}\left(\frac{30}{15\times10^{-2}}\right) = 4\times10^{-5}\ \text{T}$$

$$B_2 = 2\times10^{-7}\left(\frac{I_2}{d}\right) = 2\times10^{-7}\left(\frac{10}{5\times10^{-2}}\right) = 4\times10^{-5}\ \text{T}$$

La intensidad del campo magnético resultante en el punto P es: $B_p = B_1 + B_2 = 8\times10^{-5}\ \text{T} \Rightarrow B = 80\ \mu\text{T}$

3. Se muestra un conductor infinitamente largo por donde fluye corriente eléctrica de intensidad I = 6 A. Si AP = 10 cm y PH = 6 cm, determinar la intensidad del campo magnético en el punto P.



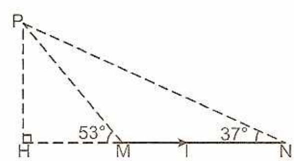
Resolución:

Cuando un segmento conductor conduce una corriente de intensidad I, como el que se muestra, genera un campo magnético en un punto P contenido en su plano, el vector intensidad de campo magnético B será normal a dicho plano. El segmento PH mide 0,06 m.

$$B = 10^{-7}\times\frac{I}{d}(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$B = 10^{-7}\times\frac{6}{0{,}06}(\cos 37° + \cos 0°) = 1{,}8\times10^{-5}\ \text{T}$$

4. Se muestra un conductor infinitamente largo por donde fluye corriente eléctrica de intensidad I = 6 A. Si PN = 20 cm, PM = 15 cm y PH = 12 cm, determinar la intensidad del campo magnético en el punto P.



Resolución:

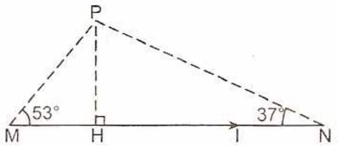
Cuando el segmento conductor MN conduce una corriente de intensidad I, como el mostrado en la figura, genera un campo magnético en el punto P, el vector intensidad de campo magnético B será normal a dicho plano. El segmento PH mide 0,12 m.

$$B = 10^{-7}\times\frac{I}{d}(\cos\alpha + \cos\beta)$$

Hacemos el siguiente artificio: al campo generado por el segmento HN sustraemos el campo creado por el segmento HM, obteniendo la siguiente relación:

$$B = 10^{-7}\times\frac{6}{0{,}12}(\cos 37° - \cos 53°) = 10^{-6}\ \text{T}$$

5. Se muestra un segmento conductor MN por el cual fluye una corriente eléctrica de intensidad I = 6 A. Sabiendo que MP = 15 cm; PH = 12 cm; PN = 20 cm; determinar el módulo de la intensidad del campo magnético en el punto P.



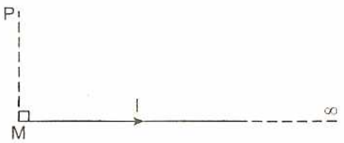
Resolución:

Cuando un segmento conductor conduce una corriente de intensidad I, como el que se muestra, genera un campo magnético en un punto P contenido en su plano, el vector intensidad de campo magnético B será normal a dicho plano. El segmento PH mide 0,06 m.

$$B = 10^{-7}\left(\frac{I}{d}\right)(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$B = 10^{-7}\left(\frac{6}{0,12}\right)(\cos 37° + \cos 53°) = 7 \times 10^{-6}\ T$$

6. Se muestra un conductor rectilíneo muy largo que lleva corriente eléctrica de intensidad I = 10 A. Sabiendo que PM = 10 cm, calcular el módulo de la intensidad del campo magnético en el punto P.



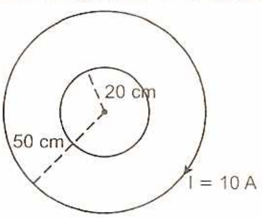
Resolución:

Cuando un segmento conductor conduce una corriente de intensidad *I*, como el que se muestra, genera un campo magnético en un punto P contenido en su plano, el vector intensidad de campo magnético B será normal a dicho plano. El segmento PM mide 0,1 m. En el extremo M la medida del ángulo es 90º y en el infinito la medida del ángulo es 0º.

$$B = 10^{-7}\left(\frac{I}{d}\right)(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$B = 10^{-7}\left(\frac{10}{0,1}\right)(\cos 90° + \cos 0°) = 10^{-5}\ T$$

7. Determinar la intensidad de corriente eléctrica (en A) en la espira de menor radio de curvatura para que la inducción magnética en el centro sea nula.



Resolución:

La intensidad del campo magnético en el centro de una espira circunferencial es directamente proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica e inversamente proporcional al radio de curvatura.

$$B = 2\pi(10^{-7})\left(\frac{I}{R}\right)$$

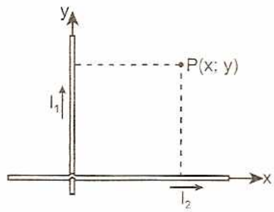
El sentido de la corriente en las espiras concéntricas deben ser opuestas para que la intensidad del campo magnético en el centro sea nula.

$$2\pi(10^{-7})\left(\frac{I_1}{R_1}\right) = 2\pi(10^{-7})\left(\frac{I_2}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{I_1}{R_1} = \frac{I_2}{R_2}$$

Reemplazando lo valores tenemos que:

$$\frac{I_1}{20} = \frac{10}{50} \Rightarrow I_1 = 4\ A$$

8. Dos conductores infinitamente largos se cruzan en el mismo plano con corrientes I_1 = 12 A; I_2 = 18 A. Si el punto P tiene coordenadas x = 60 cm; y = 45 cm, hallar la intensidad del campo magnético en el punto P.



Resolución:

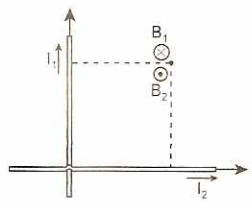
Cálculo del campo magnético producido por I_1 e I_2 en el punto P:

$$B_1 = 2(10^{-7})\left(\frac{I_1}{x}\right) = 2(10^{-7})\left(\frac{12}{0,6}\right) = 4 \times 10^{-6}\ T$$

⊗ entrando.

$$B_2 = 2(10^{-7})\left(\frac{I_2}{y}\right) = 2(10^{-7})\left(\frac{18}{0,45}\right) = 8 \times 10^{-6}\ T$$

⊙ saliendo

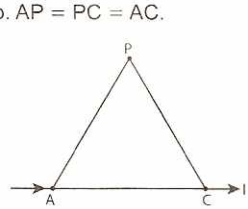


El campo magnético resultante en el punto P es:

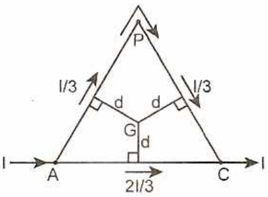
$B_p = B_2 - B_1 = 4 \times 10^{-6}$ T

$B_p = 4\ \mu T$, saliendo

9. La figura muestra un conductor triangular APC. La intensidad de corriente I ingresa por el vértice A y sale por el vértice C. Hallar la intensidad del campo magnético resultante en el baricentro del triángulo equilátero. AP = PC = AC.



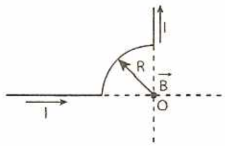
Resolución:



La corriente I que ingresa por el vértice A se divide en dos corrientes, $\frac{I}{3}$ que atraviesa APC e $\frac{2I}{3}$ que atraviesa el conductor AC. La corriente se reparte inversamente proporcional a la resistencias 2R y R respectivamente, según la ley de Ohm.

Sea G el baricentro del triángulo equilátero. Deducimos que $\frac{I}{3}$ genera un campo magnético B_1 ingresando al papel e $\frac{2I}{3}$ genera un campo magnético B_2 saliendo del papel. Pero $B_1 = B_2$, entonces, el campo magnético resultante en G es nulo. $\therefore\ B_G = 0$

10. La figura muestra un conductor que transporta una corriente I. Hallar la intensidad del campo magnético en el centro O del arco conductor.



Resolución:

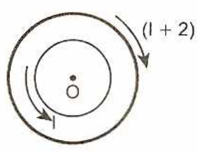
Los conductores rectilíneos no generan campo magnético en su prolongación, es decir en el punto O. Por consiguiente, solo el arco conductor genera campo magnético en el centro O.

$B = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$; donde: $\theta = 90° = \frac{\neq}{2}$

Reemplazando en la fórmula tenemos: $B = \frac{\alpha_0 I}{8R}$

Por lo tanto, la intensidad del campo magnético en el centro O es la cuarta parte del campo producido por un conductor circular.

11. La figura muestra dos espiras concéntricas de radio 9 cm y 15 cm. La espira grande conduce una corriente mayor en 2 A respecto de la menor, en sentidos opuestos. Hallar la corriente en la espira de menor tamaño, tal que la intensidad del campo magnético en el centro de la circunferencia sea nulo.



Resolución:

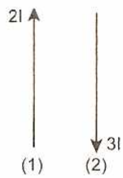
Sea $I_1 = I$ e $I_2 = (I + 2)$ las corrientes qué generan los campos B_1 y B_2 en el centro de las circunferencias. Analizando el sentido de las corrientes deducimos que los vectores B_1 y B_2 tienen sentidos opuestos. Entonces, el campo magnético es nulo en el centro O cuando:

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{I_1}{R_1} = \frac{I_2}{R_2} \Rightarrow \frac{I}{9} = \frac{I+2}{15}$$

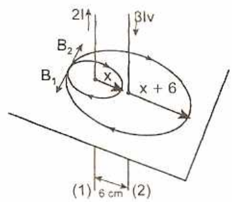
Resolviendo la ecuación tenemos que: I = 3 A

Por lo tanto, la corriente en el conductor de menor radio es 3 A.

12. La figura muestra dos conductores (1) y (2) rectilíneos e infinitamente largos con corriente eléctrica 2I y 3I, la distancia entre ellos es de 6 cm. Encontrar la distancia a partir del conductor (1) donde el campo magnético es nulo.



Resolución:



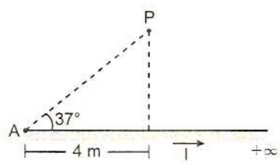
Del gráfico, para que la intensidad del campo magnético sea nulo, las intensidades B_1 y B_2 deben ser iguales en módulos y dirección: $B_1 = B_2$.

Ley de Biot - Savart: $B_1 = B_2$

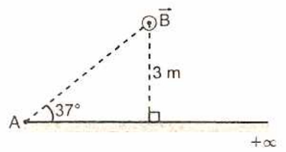
$$\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{2I}{x}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{3I}{x+6}\right) \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{x+6} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

El campo magnético es nulo a 12 cm a la izquierda del conductor (1).

13. La figura muestra el extremo A de un conductor, si por él circula una corriente de 50 A y el otro extremo del conductor se extiende hasta el infinito, hallar la intensidad del campo magnético en el punto P.



Resolución:

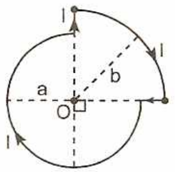


En el punto P, representamos al vector intensidad de campo magnético por un punto ⊙ que indica que está saliendo del papel.

Ley de Biot-Savart: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 37° + \cos 0°)$

$B = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50}{4\pi \times 3}\right)\left(\frac{4}{5}+1\right) = 3 \times 10^{-6} \Rightarrow B = 3\ \mu T$

14. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto O del circuito mostrado en la figura que lleva una corriente I, si se conocen los radios de curvatura a y b.



Resolución:

En el punto O, centro de curvatura, los segmentos de recta conductores que llevan corriente en dirección radial no producen campo magnético.

La intensidad del campo magnético en el punto O es igual a la superposición del campo creado por los arcos conductores, respectivamente:

$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b$ ...(1)

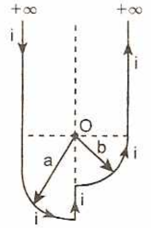
$B = \frac{\alpha\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\beta\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{b}\right)$ ...(2)

Pero: $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2): $B = \left(\frac{\alpha_0 I}{8}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Se representa por un vector entrando al papel por el punto O.

15. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto O en el circuito mostrado en la figura, considere conocidos la intensidad de corriente I, y los radios de curvatura a y b.



Resolución:

El segmento de conductor que lleva corriente en dirección radial no produce campo magnético en el punto O.

La intensidad del campo magnético en el punto O es igual a la suma del campo magnético creado por las semirrectas de conductor, más, el campo creado por los conductores curvilíneos.

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$ ...(1)

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{b}\right) + \frac{\mu_0}{8}\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\mu_0}{8}\left(\frac{I}{b}\right)$ ...(2)

$\vec{B}_1$: campo creado por la semirrecta de conductor (↓ I)

$\vec{B}_2$: campo creado por la semirrecta de conductor (↑ I)

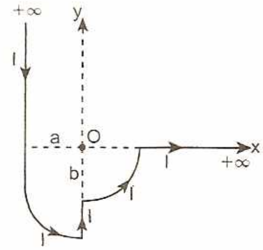
$\vec{B}_3$: campo creado por el arco de conductor de radio de curvatura "a".

$\vec{B}_4$: campo creado por el arco de conductor de radio de curvatura "b".

Luego: $B = \mu_0\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4\pi}\right)I$

Se representa por un vector saliendo del papel por el punto O.

16. En el circuito mostrado circula una corriente eléctrica de intensidad I, determinar la intensidad del campo magnético en el punto O; considere conocido los radios de curvatura "a" y "b", los conductores en dirección de los ejes X e Y son infinitivamente largos.



Resolución:

El conductor que lleva corriente en dirección del eje X, también el segmento de conductor en dirección radial, no produce campo magnético en el punto O.

$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_{//y}$

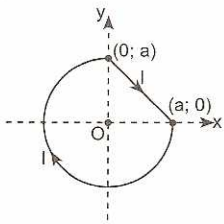
$B = \left(\frac{\pi/2}{4\pi}\right)(\mu_0)\left(\frac{I}{a}\right) + \left(\frac{\pi/2}{4\pi}\right)(\mu_0)\left(\frac{I}{b}\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\text{sen}90°$

Luego: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\pi}{2a}+\frac{\pi}{2b}+\frac{1}{a}\right]$

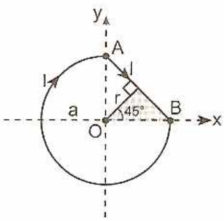
Se representa por un vector saliendo del papel por el punto O.

17. Por un conductor delgado doblado según muestra la figura fluye una corriente eléctrica de intensidad I, el radio de curvatura es a de la parte curvilínea.

Determinar la intensidad del campo magnético en el origen de coordenadas.



Resolución:



La intensidad del campo magnético en el punto O es igual a la suma del campo creado por el segmento de conductor, más, el campo creado por el arco conductor.

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_{AB}$$

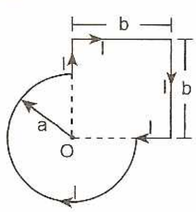
$$B = \left[\frac{(3\pi/2)\mu_0}{4\pi}\right]\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{r}\right)2\text{sen}45° \qquad ...(1)$$

$$\text{Pero: } r = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1): $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)$

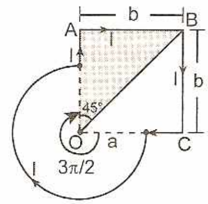
Se representa por un vector entrando al papel por el punto O.

18. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto O en el circuito mostrado en la figura, considere conocidos la intensidad de corriente I, el radio "a" y el lado "b".



Resolución:

1. En el punto O, los segmentos conductores que llevan corriente en dirección radial no producen campo magnético.
2. La intensidad del campo magnético B en el punto O es igual a la suma del campo creado por los segmentos de conductor de longitud "b", más, el conductor curvilíneo de radio de curvatura "a".



$$\vec{B} = \vec{B}_{arco} + \vec{B}_{segmentos}$$

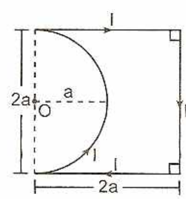
$$B = \frac{\theta\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right) + 2\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{b}\right)\text{sen}45° \qquad ...(1)$$

$$\text{Pero: } \theta = \frac{3\pi}{2} \qquad ...(2)$$

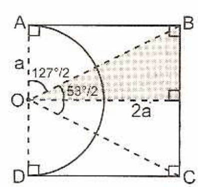
Reemplazando en (1): $B = \mu_0\left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b}\right)$

Se representa por un vector entrando al papel por el punto O.

19. En el circuito mostrado circula una corriente eléctrica de intensidad I. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto O, considere conocido el radio de curvatura "a" y los segmentos de longitud 2a. ($\tan 26{,}5° = 1/2$)



Resolución:

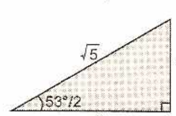


La intensidad del campo magnético en el punto O es igual a la superposición de campos de:

$$\vec{B} = \vec{B}_a - \vec{B}_{BC} - 2\vec{B}_{AB}$$

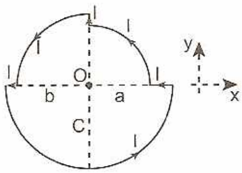
$$B = \frac{\pi}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)\mu_0 - \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{2a}\right)2\text{sen}26{,}5° - 2\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)\text{sen}63{,}5°$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)\left(\pi - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)(\pi - \sqrt{5})$$



Por lo tanto, se representa por un vector saliendo del papel por el punto O.

20. En el circuito eléctrico mostrado circula corriente eléctrica de intensidad I. Determinar la intensidad del campo magnético en el punto O, considere conocidos los radios de curvatura a, b y c.



Resolución:

En el punto O los segmentos conductores que llevan corriente en dirección radial no producen campo magnético. La superposición de campos es:

$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_c$

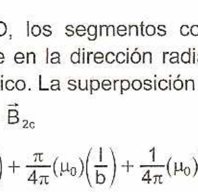
Reemplazando:

$$B = \frac{\pi/2}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\pi/2}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{b}\right) + \frac{\pi}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{c}\right)$$

Luego: $B = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)$

Se representa por un vector saliendo del papel por el punto O.

21. En el circuito eléctrico mostrado circula una corriente eléctrica de intensidad I, determinar la intensidad del campo magnético en el punto O, considere conocidos los radios de curvatura "a" y "b", además la distancia "c".



Resolución:

En el punto O, los segmentos conductores que llevan corriente en la dirección radial no producen campo magnético. La superposición de campos es:

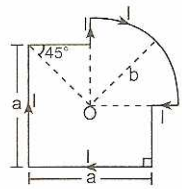
$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_{2c}$

$$B = \frac{\pi/2}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{a}\right) + \frac{\pi}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{b}\right) + \frac{1}{4\pi}(\mu_0)\left(\frac{I}{c}\right)2\text{sen}45°$$

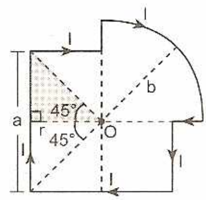
Luego: $B = \mu_0\left(\frac{I}{4\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}\right)$

Se representa por un vector saliendo del papel por el punto O.

22. En el circuito mostrado circula una corriente eléctrica de intensidad I, determinar la intensidad del campo magnético en el punto O, considere conocido el radio de curvatura "b" y los segmentos de longitud "a".



Resolución:



En el punto O, los segmentos conductores que llevan corriente en dirección radial no producen campo magnético. La superposición de campos es:

$\vec{B} = 3\vec{B}_a + \vec{B}_{arco}$

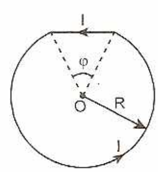
$$B = 3\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\frac{I}{r}\right)(\text{sen}45° + \text{sen}45°) + \frac{(\pi/2)}{4\pi}\mu_0\left(\frac{I}{b}\right) \quad ...(1)$$

Pero: $r = a/2$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{6\sqrt{2}}{a} + \frac{\pi}{2b}\right)$

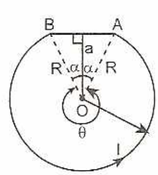
Se representa por un vector entrando al papel por el punto O.

23. Por un conductor delgado doblado según muestra la figura fluye una corriente I. El radio de curvatura es R de parte curvilínea y el ángulo central es ϕ. Hallar la intensidad del campo magnético en el centro de curvatura O.



Resolución:

1. $\phi = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\phi}{2} \Rightarrow \theta = 2\pi - \phi$ ...(1)



2. La intensidad del campo magnético en el centro de curvatura O es igual a la suma de campo creado por el segmento AB, más, el campo creado por el arco conductor.

   $\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{arco}$

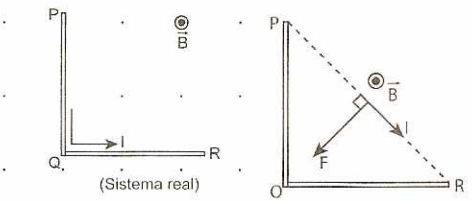
En el SI: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{a}\right)(2\text{sen}\alpha) + \frac{\theta}{4\pi}\left(\frac{I}{R}\right)(\mu_0)$ ...(2)

Pero: $a = R\cos\alpha$ ...(3)

En (2): $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I}{R}\left(\theta + 2\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\right]$

De (1): $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{R}\right)[2\pi - \phi - 2\tan(\phi/2)]$

24. En el campo magnético homogéneo de intensidad 20 T, la corriente eléctrica que lleva el conductor en forma de L es de intensidad 6 A. Si PQ = 3 m y QR = 4 m, hallar la fuerza neta sobre el conductor.

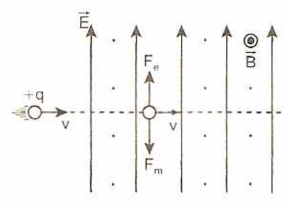


Resolución:

Cálculo de la Fuerza de Ampére usando la longitud efectiva entre los extremos del conductor: $L_{ef} = PR = m$.

$F = IL_{ef}B\text{sen}90° \Rightarrow F = (6)(5)(20)(1) \Rightarrow F = 600$ N

25. Una partícula de masa despreciable y carga "q" ingresa horizontalmente con velocidad de 200 m/s a un campo electromagnético, donde la intensidad del campo magnético homogéneo es 50 mT. Si la carga "q" sigue una trayectoria recta, hallar la intensidad del campo eléctrico homogéneo.



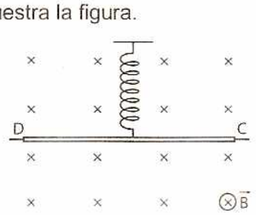
Resolución:

Si la partícula sigue el camino horizontal, la fuerza eléctrica F_e se equilibra con la fuerza magnética F_m.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow qE = qvB\text{sen}90°$

$E = vB \Rightarrow E = (200)(50 \times 10^{-3}) \Rightarrow E = 10$ N/C

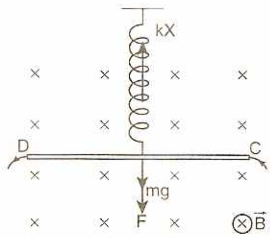
26. Un conductor CD, de 30 cm de longitud, está suspendido horizontalmente de un resorte, dentro de un campo magnético uniforme B = 0,10 T, como muestra la figura.



a) Haciendo pasar por el conductor una corriente I = 10 A, dirigida de C hacia D, ¿cuál será el sentido y el valor de la fuerza magnética $\vec{F}$ que actuará sobre el alambre?

b) Sabiendo que la masa del conductor es m = 20 g y que la constante elástica del resorte es k = 20 N/m, determinar la deformación que presenta el resorte. ($g = 10$ m/s^2).

Resolución:



a) Empleando la regla de la palma de la mano derecha se halla que la fuerza magnética $\vec{F}$ está dirigida verticalmente hacia abajo, como se indica en la figura.

Observando que la dirección del conductor es perpendicular a $\vec{B}$ ($\theta = 90°$), tendremos el siguiente valor para la fuerza $\vec{F}$: $F = ILB = 0{,}10(10)(0{,}30)$

O bien: $F = 0{,}30$ N

b) Como el peso del conductor y la fuerza magnética que actúan sobre él se encuentran ambos dirigidos hacia abajo, el resorte sufrirá un alargamiento "x".

En la posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte (kx) equilibrará al peso del conductor (mg), así como a la fuerza magnética (F).

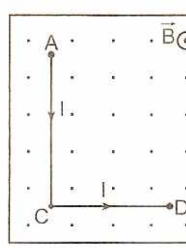
Entonces, podemos escribir: $kx = mg + F$

$mg = 20(10^{-3})(10) \Rightarrow mg = 0{,}20$ N

Entonces, recordando que $F = 0{,}30$ N, tendremos finalmente que: $20x = 0{,}20 + 0{,}30$

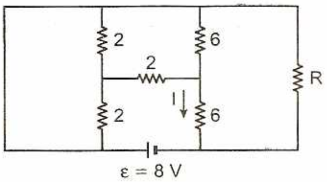
De donde: $x = 2{,}5 \times 10^{-2}$ m $\quad \therefore x = 2{,}5$ cm

27. En el esquema mostrado, la corriente que circula por el conductor es 2 A y está sometido a la acción de un campo cuya inducción magnética es B = 50 T. Hallar la fuerza magnética neta que actúa sobre el conductor.



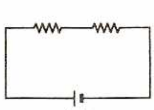
AC = 0,3 m ; CD = 0,4 m

20. En un circuito mostrado; hallar el valor de la corriente I(Todas las resistencias están en ohmios).

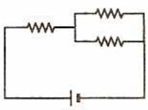


A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 5 A E) Falta conocer "R"

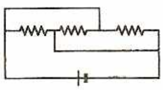
21. En los circuitos a, b y c, las pilas y las resistencias son idénticas.



(a)



(b)

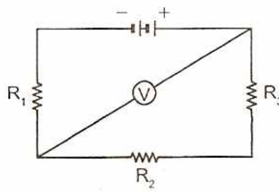


(c)

Sean I_a, I_b e I_c las intensidades de corriente en cada uno de ellos.
Entonces:

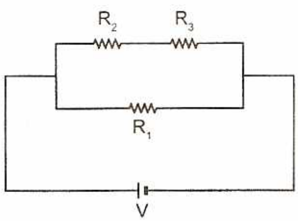
A) $I_a = I_b = I_c$ B) $I_a > I_b > I_c$ C) $I_a < I_b = I_c$
D) $I_a > I_b = I_c$ E) $I_a < I_b < I_c$

22. En el circuito de la figura, el voltímetro ideal da una lectura de 80 V. Siendo R_1 = 100 Ω ,R_2 = 200 Ω y R_3 = 200 Ω, ¿Qué voltaje proporciona la batería?



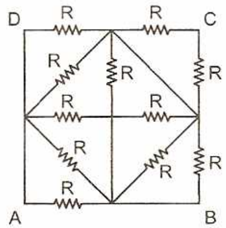
A) 20 V B) 100 V C) 80 V
D) 60 V E) 40 V

23. En el circuito mostrado: $R_1 = R_2 = R_3$. Si la potencia disipada en R_1 es de 20 W, Calcule la potencia disipada por R_3.



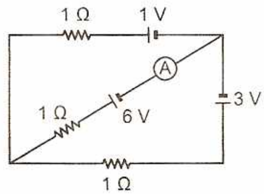
A) 5 W B) 7,5 W C) 10 W
D) 0,5 W E) 15 W

24. Determine la resistencia equivalente (en Ω entre los puntos A y B, Si R = 26 Ω.



A) 0,23 B) 4,00 C) 6,00
D) 12,00 E) 18,00

25. Para el circuito mostrado, calcular la lectura del amperímetro ideal (en A).

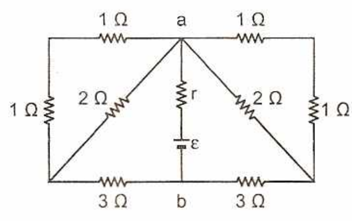


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

26. Una batería de auto (12 V) tiene una carga inicial Q (120 A-h). Suponiendo que el voltaje a través de los terminales permanece constante hasta que la batería se descargue totalmente, ¿Durante cuantas horas suministra una potencial P (100 W)

A) 7,6 h B) 16,6 h C) 9,6 h
D) 14,4 h E) 10,4 h

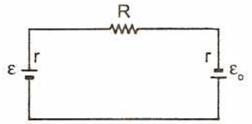
27. Si la fem de la batería conectada entre los puntos a y b es de 25 V y su resistencia interna r = 0,5 Ω, determine la diferencia de potencial $V_a - V_b$ (en V)



A) 10 B) 20 C) 18
D) 15 E) 2

28. En el circuito se muestran dos baterías similares conectadas en serie con una resistencia R = 1 Ω por la que circula una corriente de intensidad I.

cuando el circuito se acondiciona para que trabaje con una sola batería, la corriente en R se reduce en un 40%. La resistencia interna de cada una de las baterías es:

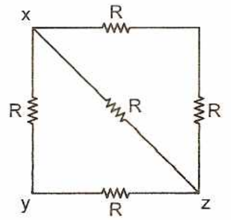


A) 0,10 Ω B) 0,22 Ω C) 0,25 Ω
D) 0,12 Ω E) 0,20 Ω

29. Se tiene las resistencias R y 2R. Cuando se conectan en paralelo bajo un voltaje V, la corriente total que circula es de 2 A. ¿Qué corriente circulará por dichas resistencias en serie si se les aplica el mismo voltaje V?

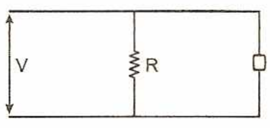
A) $\frac{1}{9}$ A B) $\frac{4}{9}$ A C) $\frac{2}{9}$ A
D) $\frac{5}{9}$ A E) $\frac{1}{3}$ A

30. En la red, las 5 resistencias son idénticas, cada una vale R_o. Determine la razón R_{xy}/R_{xz}



A) 1,05 B) 1,10 C) 1,15
D) 1,20 E) 1,25

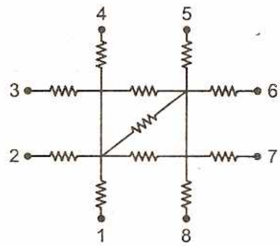
31. Un aparato cualquiera es conectado a una diferencia de potencial V fija en paralelo con una resistencia R. Al aumentar el valor de la resistencia R, indicar verdadero (V) o falso (F):



I. La diferencia de potencial entre los límites del aparato no varía.
II. La intensidad de la corriente que atraviesa al aparato aumenta.
III. La potencia que consume el aparato no varía.

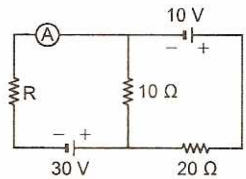
A) VVV B) VFV C) FFF
D) FFV E) VVF

32. Se tiene resistencias iguales 2 Ω, dispuestas tal como se muestra. Determine la resistencia (en Ω) equivalente entre los puntos 1 y 5.



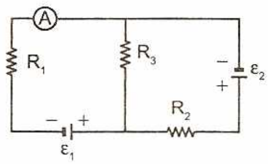
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. En el circuito mostrado en la figura, el amperímetro ideal indica una corriente de 1 A. ¿Cuál es el valor de la resistencia R?



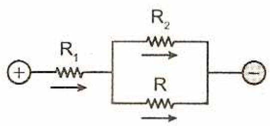
A) 20 Ω B) 10 Ω C) 30 Ω
D) 15 Ω E) 25 Ω

34. En el circuito de la figura ε_1=2 V; ε_2=4 V, R_1 = 0,5 Ω y la caída de potencial en R_2 es de 1 V. Calcular lo que señala el amperímetro.



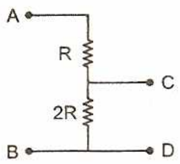
A) 1 A B) 3 A C) 2 A
D) 0,5 A E) 1,5 A

35. Las resistencias R_1, R_2 y R_3 disipan 845; 324 y 144 W, respectivamente. Calcule la resistencia R_2, si R_1 = 5 Ω.



A) 4 Ω B) 6 Ω C) 8 Ω
D) 12 Ω E) 9 Ω

36. La figura muestra un divisor de voltaje que permite obtener un voltaje de salida menor que el voltaje de entrada para el caso mostrado. Calcule el voltaje de salida entre C y D, si el voltaje de entrada entre A y B es 240 V.

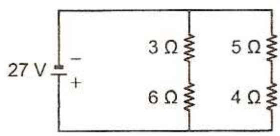


A) 50 V B) 160 V C) 180 V
D) 80 V E) 140 V

37. Mediante el calor producido por una resistencia eléctrica se vaporiza 100 g de mercurio cada 5 minutos. La resistencia está conectada a una tensión de 120 V. Considerando que el 100% del calor producido por la resistencia se emplea en la vaporización del mercurio, calcule el valor de la resistencia si se sabe que el calor latente de vaporización del mercurio es 3×10^5 J/kg

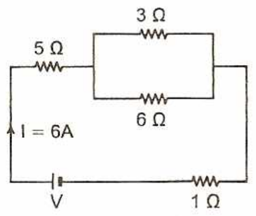
A) 64 Ω B) 360 Ω C) 720 Ω
D) 144 Ω E) 1440 Ω

38. Calcular la intensidad de la corriente que circula por la resistencia de 3 Ω.



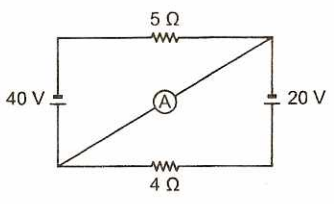
A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 4 A E) 5 A

39. Hallar la intensidad de la corriente que pasa por la resistencia de 3 Ω.



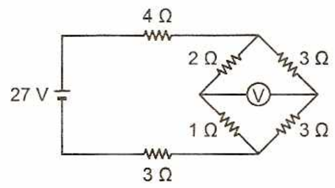
A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 4 A E) 5 A

40. Del circuito que se indica, determine la lectura del amperímetro ideal.



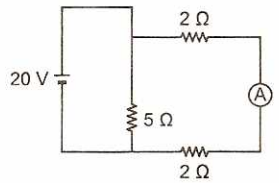
A) 3 A B) 4 A C) 5 A
D) 6 A E) 8 A

41. Determine la lectura del voltímetro ideal.



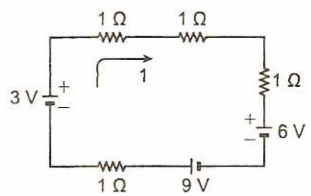
A) 1 V B) 2 V C) 3 V
D) 4 V E) 5 V

42. Calcular la lectura que indica el amperímetro ideal.



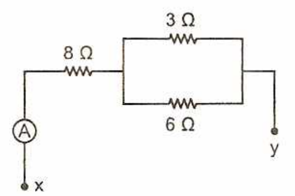
A) 1 V B) 2 V C) 3 V
D) 4 V E) 5 V

43. Hallar la intensidad de corriente que circula a través del circuito.



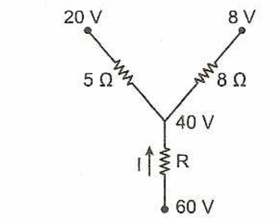
A) 1 A B) 1,5 A C) 2 A
D) 2,5 A E) 0,5 A

44. Determinar cuánto marcará un voltímetro conectado entre los terminales x e y, si el amperímetro ideal señala una corriente de 5 A.



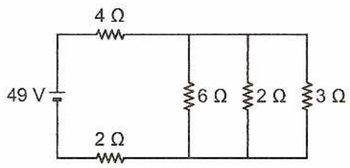
A) 10 V B) 20 V C) 30 V
D) 40 V E) 50 V

45. Hallar la intensidad de la corriente que circula por la resistencia R.



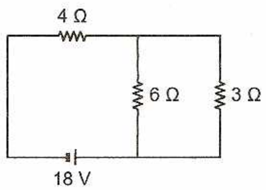
A) 2 A B) 4 A C) 8 A
D) 10 A E) 12 A

46. Determine la diferencia de potencial en los bornes de la resistencia de 4 Ω.



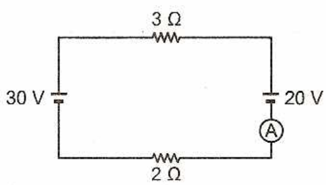
A) 20 V B) 23 V C) 28 V
D) 31 V E) 45 V

47. ¿De acuerdo al circuito mostrado, cual es la intensidad de corriente que circula por la resistencia R = 3 Ω?



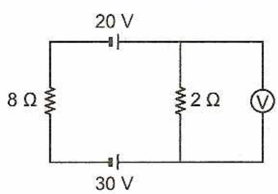
A) 1 A B) 2 A C) 4 A
D) 5 A E) 8 A

48. Calcular la lectura del amperímetro ideal.



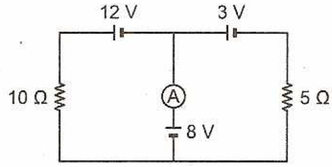
A) 1 A B) 2 A C) 2,5 A
D) 4 A E) 5 A

49. Hallar la lectura del voltímetro ideal.



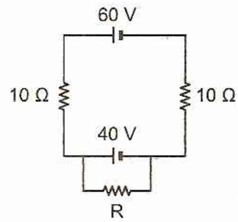
A) 2 V B) 4 V C) 5 V
D) 8 V E) 10 V

50. Calcular la lectura del amperímetro ideal.



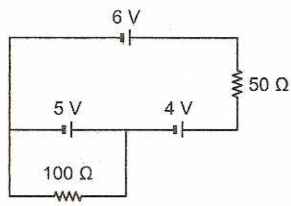
A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 5 A E) 10 A

51. Hallar la potencia que consume la resistencia R = 10 Ω.



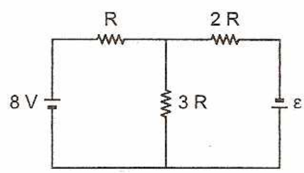
A) 16 W B) 8 W C) 160 W
D) 80 W E) 40 W

52. En el circuito, calcular la corriente en la resistencia de 50 Ω.



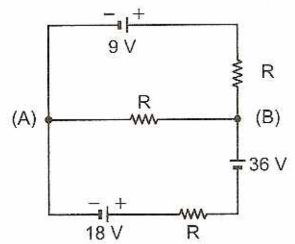
A) 0,05 A B) 0,06 A C) 0,04 A
D) 0,03 A E) 3 A

53. En el circuito mostrado, determinar la fuerza electromotriz para que por la resistencia de 3R no pase corriente.



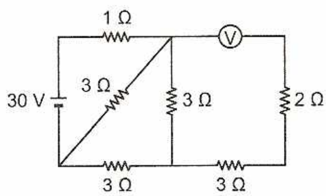
A) 4 V B) 8 V C) 12 V
D) 16 V E) 24 V

54. En el circuito mostrado, ¿cuánto vale la diferencia de potencial entre (A) y (B)?



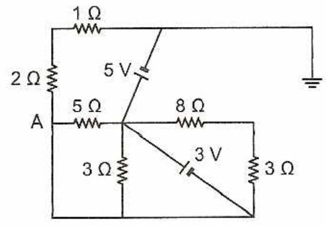
A) 8 V B) 16 V C) 24 V
D) 32 V E) 40 V

55. Indicar la lectura del voltímetro ideal mostrado.



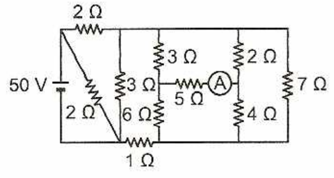
A) 0 V B) 10 V C) 20 V
D) 3 V E) 13 V

56. Determine el potencial respecto a tierra del punto "A"



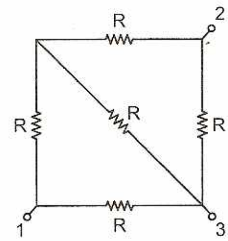
A) 8 V B) 5 V C) 3 V
D) 2 V E) 1 V

57. Determinar la lectura del amperímetro mostrado.



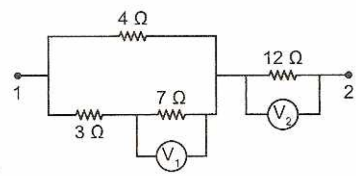
A) 0 A B) 1 A C) 2 A
D) 3 A E) 4 A

58. En un hornillo eléctrico, las resistencias están conectadas según la combinación de la figura. Esta combinación se conecta a la red en los puntos 1 y 2 haciendo hervir 500 g de agua. ¿Qué cantidad de agua se puede hervir durante el mismo tiempo, si la combinación se conecta en los puntos 1 y 3? La temperatura inicial de agua en ambos casos es la misma y se desprecian las pérdidas caloríficas.



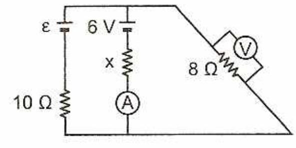
A) 400 g B) 600 g C) 800 g
D) 500 g E) 250 g

59. En la figura que se muestra, en cada segundo, la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω disipa 100 J. Hallar la lectura de los voltímetros ideales (1) y (2).



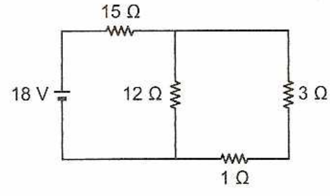
A) 14 y 8 V B) 84 y 12 V C) 14 y 72 V
D) 36 Y 72 V E) 12 y 67 V

60. En el esquema mostrado, la lectura del voltímetro es de 16 V y la del amperímetro 0,5 A. Determinar el valor de la resistencia X: Se consideran ideales el voltímetro y amperímetro.



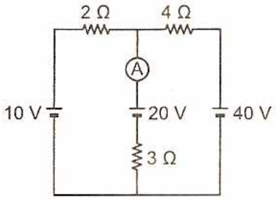
A) 10 W B) 15 W C) 30 W
D) 25 W E) 20 W

61. Calcular la potencia que entrega la fuente al circuito exterior:



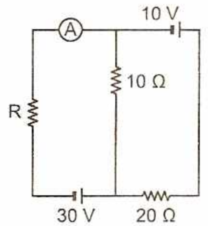
A) 9 W B) 18 W C) 27 W
D) 36 W E) 12 W

62. En el circuito mostrado, hallar la lectura en el amperímetro ideal.



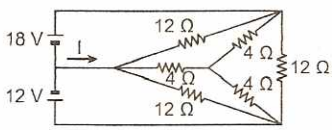
A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 4 A E) 0 A

63. Hallar el valor de la resistencia R, si la lectura del amperímetro es de 1 A. Se desprecia las resistencias de las fuentes y amperímetro.



A) 10 W B) 30 W C) 20 W
D) 15 W E) 5 W

64. En el circuito mostrado, la corriente indicada "I" es:



A) 1 A B) 4 A C) −5 A
D) −3 A E) −4 A

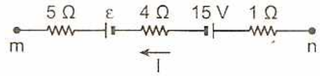
65. La resistencia de un termómetro de platino es de 6 Ω a 30 °C. Hallar su valor correspondiente a 100 °C, sabiendo que el coeficiente de temperatura de resistividad del platino vale 0,00392 $°C^{-1}$.

A) 6,27 Ω B) 7,64 Ω C) 2,00 Ω
D) 520 Ω E) 20 Ω

66. Calcular la intensidad de corriente que circula por un alambre de cobre de 6400 m de longitud y 40 mm^2 de sección transversal, si la diferencia de potencial aplicada a sus extremos es de 136 V. ($\rho_{cobre} = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\Omega.m$)

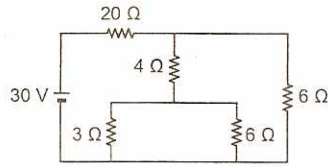
A) 50 A B) 100 A C) 25 A
D) 150 A E) 75 A

67. En la figura, se indica una rama de un circuito eléctrico en funcionamiento, donde V_n = 30 V. Se pide calcular la fuerza electromotriz "ε", si el potencial en "m" es V_m = 9 V y la intensidad de corriente I = 2 A.



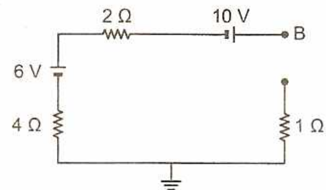
A) 5 V B) 7 V C) 9 V
D) 14 V E) 10 V

68. En el circuito mostrado, calcular la diferencia de potencial en la resistencia de 3 Ω, en voltios.



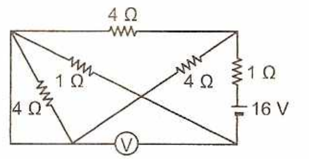
A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

69. Hallar el potencial eléctrico en el punto "B".



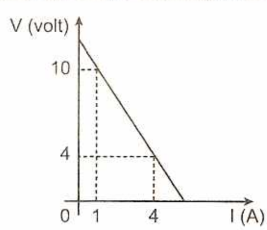
A) 10 V B) 6 V C) 16 V
D) 22 V E) 19 V

70. En el siguiente circuito, hallar la lectura del voltímetro ideal "V".



A) 12 V B) 8 V C) 6 V
D) 4 V E) 10 V

71. Para una batería, se encuentra que la gráfica de su diferencia de potencial "V" en función de la corriente "I" que circula por ella es la siguiente:



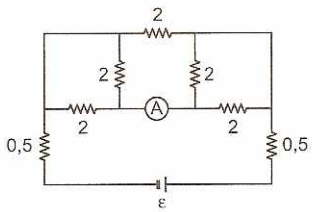
Halle la fuerza electromotriz de la batería en voltios.

A) 10 B) 12 C) 8
D) 6 E) 9

72. En la pregunta anterior, halle la resistencia interna de la batería.

A) 1 Ω B) 2 Ω C) 3 Ω
D) 4 Ω E) 5 Ω

73. En el circuito mostrado, hallar la lectura del amperímetro, si tiene una resistencia interna de 1 Ω. Todas las resistencias están en Ohmios y $\varepsilon = 11$ V.



A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 4 A E) 5 A

74. Una tetera eléctrica tiene 2 arrollamientos. Al conectar uno de ellos, el agua de la tetera hierve al cabo de 15 minutos, al conectar el otro, el agua hierve al cabo de 30 minutos. ¿En cuánto tiempo, en minutos, hervirá el agua, si ambos arrollamientos se conectan en paralelo?

A) 3 B) 10 C) 15
D) 20 E) 5

75. Se tiene una esfera conductora de radio r y potencial eléctrico V en su superficie. Determine en cuánto varia el potencial en su superficie si la rodeamos concéntricamente con un cascaron conductor de radio interno 2r y externo 4r.

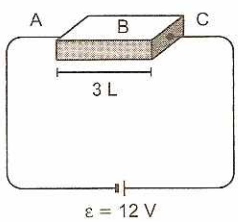
A) aumenta en $\frac{V}{2}$ B) disminuye en $\frac{V}{2}$

C) aumenta en $\frac{V}{4}$ D) disminuye en $\frac{V}{4}$

E) no cambia

76. Determine el potencial eléctrico en B si se sabe que en el extremo C el potencial eléctrico es 6 V. Considere que la barra es de sección recta uniforme. (AB = 2L)

A) 3 V
B) 6 V
C) 8 V
D) 12 V
E) 10 V



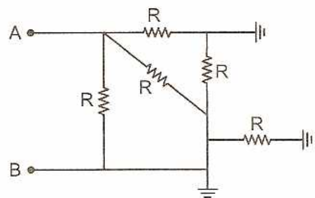
77. Se tienen dos alambres de igual material siendo la longitud de uno de ellos el doble que la del otro, pero el área de su sección recta es la tercera parte. Si a ambos se les aplica una misma diferencia de potencial, determine en qué relación se encuentran sus intensidades de corriente.

A) 6/5 B) 1/6 C) 2/3
D) 4/5 E) 1/4

78. Una resistencia de níquel de 24 Ω es reemplazada por otra de constantán de igual longitud y sección. Si a dicha resistencia se le aplica una diferencia de potencial de 20 V, determine cuantos electrones circulan por su sección recta en 8s, $\rho_{Ni} = 12 \times 10^{-8}\ \Omega.m$
$\rho_{constantán} = 5 \times 10^{-8}\ \Omega.m$

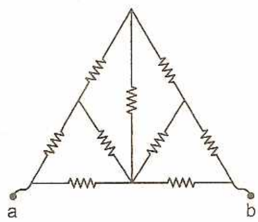
A) 10^{19} B) 10^{18} C) 10^{20}
D) 2×10^{19} E) 3×10^{18}

79. Para el circuito mostrado, determine el valor de la resistencia que lo reemplaza entre A y B. (R=12 Ω)



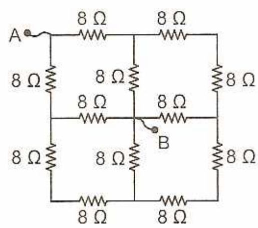
A) 2 Ω B) 4 Ω C) 6 Ω
D) 8 Ω E) 12 Ω

80. Calcule la resistencia equivalente entre los bornes a y b, si se sabe que todas las resistencias son iguales a 10 Ω.



A) 4 Ω B) 6 Ω C) 8 Ω
D) 10 Ω E) 12 Ω

81. Halle la resistencia equivalente entre los bornes A y B.



A) 8 Ω B) 16 Ω C) 24 Ω
D) 7 Ω E) 12 Ω

82. Un anillo de radio R posee una carga por unidad de longitud λ. Si hacemos rotar al anillo con respecto a un eje perpendicular a el que pase por su centro con una rapidez angular constante w, calcule la intensidad de la corriente que se origina.

A) $\frac{\lambda R\omega}{2\pi}$ B) $2\pi\lambda R\omega$ C) $\lambda R\omega$

D) $\pi\lambda R\omega$ E) $\frac{\lambda R\omega}{\pi}$

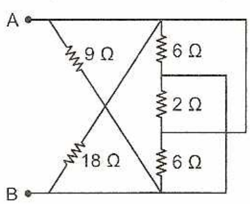
83. Un conductor grueso y rectilíneo de resistencia R es cortado longitudinalmente en n partes iguales. Si estas partes se conectan en serie, ¿a que es igual la resistencia equivalente de la nueva conexión?

A) R B) nR C) $\frac{R}{n}$

D) n^2R E) $\frac{R}{n^2}$

84. Halle la resistencia equivalente entre A y B.

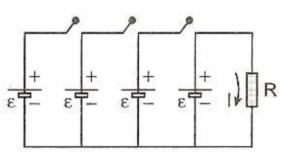
A) $1\ \Omega$
B) $2\ \Omega$
C) $3\ \Omega$
D) $4\ \Omega$
E) $5\ \Omega$

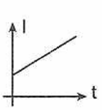


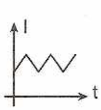
85. Dos fuentes cuya f.e.m. son iguales, tienen diferentes resistencias internas R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y están conectadas en serie. Halle la resistencia externa, con la cual la diferencia de potencial en los bornes de una de las fuentes se hace nula.

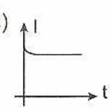
A) $R_1 + R_2$ B) $3R_1 - R_2$ C) $R_2 - R_1$
D) $2R_2 - R_1$ E) $2(R_1 - R_2)$

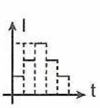
86. Del circuito que se indica, determine la gráfica correspondiente (I-t), si los interruptores se cierran uno por uno de derecha a izquierda, con un intervalo de 10 s, luego se abren de izquierda a derecha de igual forma y así sucesivamente. (Las fuentes son ideales).

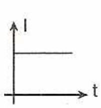


A)


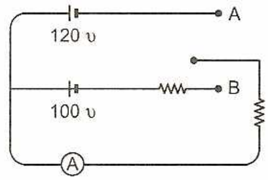
B)


C)


D)


E)


87. Si todos los resistores son de $50\ \Omega$ y las fuentes ideales; ¿Cómo varia la lectura en el amperímetro ideal al llevar el interruptor de A hacia B?



A) Aumenta en 1,2 A
B) Disminuye en 1,2 A
C) Se mantiene
D) Aumenta en 0,2 A
E) Disminuye en 0,2 A

88. En el interior de un conductor cuya sección transversal es de área A y resistividad ρ, se establece un campo eléctrico variable, donde su intensidad depende del tiempo según $E = Kt$ (t en segundos). Determine el número de electrones que atraviesa la sección transversal del conductor hasta $t = T$.
(q_e: cantidad de carga del electrón)

A) $\frac{KAT^2}{2|q_e|\rho}$ B) $\frac{KAT^2}{|q_e|\rho}$ C) $\frac{KAT}{|q_e|\rho}$

D) $\frac{K\rho T^2}{A|q_e|}$ E) $\frac{K\rho T^2}{2A|q_e|}$

89. A los terminales de una batería se coloca un alambre de longitud L y sección transversal S de manera que por el circulan 9 A. ¿Qué amperaje circulará si colocamos a la misma batería otro alambre de igual material pero de longitud 2L y sección transversal 3?

A) 6 A B) 4 A C) 3 A
D) 1,5 A E) 1 A

90. ¿Qué resistencia en shunt es necesario conectar a un galvanómetro con escala de 100 divisiones (una división de su escala es de 1 μA) y resistencia interna de $180\ \Omega$, para que con su ayuda se puede medir corrientes hasta de 1 mA?

A) $5\ \Omega$ B) $10\ \Omega$ C) $25\ \Omega$
D) $2\ \Omega$ E) $25\ \Omega$

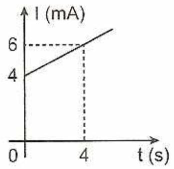
91. Tres pilas iguales de resistencia eléctrica interna r se conectan en serie y a una resistencia externa. ¿Cómo se modifica la intensidad de la corriente eléctrica en la resistencia externa si cambiamos la polaridad de una de las pilas?

A) Se duplica.
B) Se triplica.
C) Se reduce a la tercera parte.
D) Se reduce a la mitad.
E) No varía.

92. Se ha generado un haz de electrones en un televisor, los cuales inciden sobre la pantalla, originándose así una corriente eléctrica cuya intensidad es de 4 μA. Si en el haz de 40 cm de largo están contenidos 100 millones de electrones, determine la rapidez con que los electrones se desplazan formando parte del haz mencionado.

A) 100 km/s B) 80 km/s C) 60 km/s
D) 40 km/s E) 20 km/s

93. Si la intensidad de corriente que pasa por un conductor varía con el tiempo según la gráfica, determine el número de electrones que fluyen en los primeros 4 s.

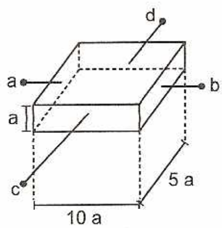


A) 10×10^{16} B) $3{,}2 \times 10^{18}$ C) 50×10^{16}
D) $12{,}5 \times 10^{16}$ E) 48×10^{17}

94. Calcule el diámetro que debe tener un cable de aluminio para que su resistencia sea la misma que la de un cable de cobre de 2,2 mm de diámetro, y con una longitud igual a ocho veces la longitud del cable de aluminio (Considere $\rho_{Al} = 3{,}2 \times 10^{-8}\ \Omega.m$ y $\rho_{Cu} = 1{,}6 \times 10^{-8}\ \Omega.m$)

A) 3,1 mm B) 4,1 mm C) 2,3 mm
D) 2,2 mm E) 1,1 mm

95. A continuación se muestra un conductor eléctrico. Determine $\frac{R_{ab}}{R_{cd}}$.



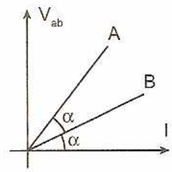
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

96. Si a través del conductor pasa corriente eléctrica de intensidad que varía con el tiempo $I = (0{,}2 + 0{,}4t)$ A, "t" en segundos, determine la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal del conductor en los 10 s iniciales.

A) 10 C B) 12 C C) 22 C
D) 23 C E) 26 C

97. Dos conductores A y B son sometidos independientemente a diferentes diferencias de potencial. Si la gráfica adjunta nos muestra el comportamiento de la intensidad, de corriente eléctrica conforme varia la diferencia de potencial, entonces, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

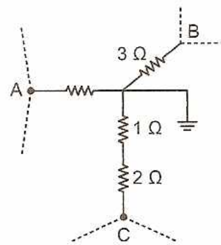
I. Para una misma diferencia de potencial, por el conductor A circula una menor intensidad de corriente que por el conductor B.
II. El conductor B presenta mayor conductividad eléctrica que el conductor A.
III. Los conductores son óhmicos.



A) FVV B) FFV C) VFV
D) VVF E) VVV

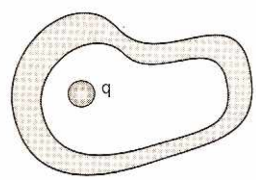
98. A continuación se muestra parte de un circuito complejo. Si el potencial en A es 12 V y en B es 15 V, determine el potencial eléctrico en C.

A) −12 V
B) −15 V
C) −18 V
D) −20 V
E) −24 V



99. En el gráfico se muestra un conductor irregular electrizado con +3 mC en equilibrio electrostático, ¿Qué cantidad de carga habrá en la superficie externa del conductor? (q =−8 mC).

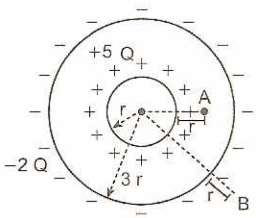
A) 3 mC
B) −3 mC
C) 11 mC
D) −5 mC
E) −8 mC



100. En un tubo fluorescente se desplazan simultáneamente portadores de carga positivos y negativos. Si en 0,5 s se han desplazado +0,02 C y −0,02 C de un polo hacia otro, calcule la intensidad de corriente eléctrica.

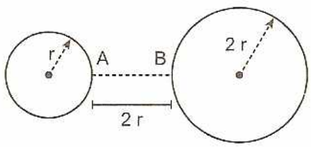
A) 0,8 A B) 0,08 A C) 0,4 A
D) 0,04 A E) 0,2 A

101. Se muestran dos cascarones esféricos concéntricos. ¿En qué relación están los módulos de las intensidades de campo eléctrico en los puntos A y B?



A) 18/5 B) 24/7 C) 32/9
D) 20/3 E) 8/5

102. Se muestran dos cascarones conductores electrizados uniformemente en toda su superficie exterior con 12 μC cada uno. Determine la diferencia de potencial entre A y B (r = 50 cm).



A) 90 kV B) 100 kV C) 110 kV
D) 120 kV E) 130 kV

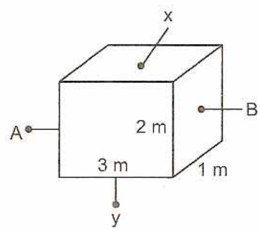
103. La rigidez dieléctrica de una sustancia no conductora se expresa como el módulo de la intensidad de campo, para el cual la sustancia se vuelve conductora (se ioniza). Determine el mayor potencial eléctrico que puede presentar una esfera conductora de 0,5 m. Considere que la rigidez dieléctrica del aire que rodea a la esfera es de 3×10^6 N/C.

A) 1500 kV B) 200 kV C) 2 kV
D) 1,5 kV E) 3000 kV

104. En un tubo de televisión, el haz de electrones que llega a la pantalla produce una corriente de 1 mA. ¿Cuántos electrones golpean la pantalla por segundo?

A) $62,5 \times 10^{14}$ B) $6,25 \times 10^{13}$
C) 625×10^{14} D) 526×10^{14}
E) $25,6 \times 10^{15}$

105. Si la resistencia entre x e y es 20 Ω; determine la resistencia entre A y B.



A) 20 Ω B) 30 Ω C) 45 Ω
D) 25 Ω E) 50 Ω

CLAVES

1. D	15. B	29. B	43. B	57. A	71. B	85. C	99. D
2. B	16. E	30. E	44. E	58. C	72. B	86. E	100. B
3. B	17. B	31. B	45. C	59. C	73. B	87. E	101. D
4. C	18. D	32. E	46. C	60. E	74. B	88. A	102. A
5. B	19. B	33. A	47. B	61. B	75. D	89. D	103. A
6. D	20. A	34. C	48. B	62. E	76. E	90. D	104. A
7. C	21. B	35. E	49. E	63. C	77. B	91. C	105. C
8. C	22. B	36. B	50. C	64. C	78. C	92. A	
9. A	23. A	37. D	51. C	65. A	79. B	93. D	
10. B	24. C	38. C	52. B	66. A	80. E	94. E	
11. C	25. D	39. D	53. D	67. D	81. D	95. D	
12. A	26. D	40. A	54. C	68. D	82. C	96. C	
13. D	27. B	41. A	55. B	69. C	83. D	97. E	
14. B	28. C	42. E	56. D	70. D	84. A	98. E	

André-Marie Ampère (Lyon, 20 de enero de 1775-Marsella, 10 de junio de 1836) fue un matemático y físico francés que inventó el primer telégrafo eléctrico y, junto con François Arago, el electroimán. Formuló en 1827 la teoría del electromagnetismo. El amperio (en francés, *ampère*) se llama así en su honor.

En 1820, a partir del experimento de Hans Oersted, estudió la relación entre magnetismo y electricidad. Descubrió que la dirección que toma la aguja de una brújula depende de la dirección de la corriente eléctrica que circula cerca y dedujo de esto la regla llamada de Ampère: un hombre está acostado sobre el conductor; la corriente, que va por convención de más a menos, lo atraviesa de pies a cabeza; sus ojos apuntarán a la aguja imantada. El polo norte de esta aguja se desplaza entonces a su izquierda. Esto es ejemplificado también en la regla de la mano derecha: si se separan los tres primeros dedos de la mano derecha de manera que el cordial indique la dirección del campo magnético y el pulgar la del movimiento, entonces el índice indicará la dirección por la que circula la corriente.

De las leyes de Ampère, la más conocida es la de la electrodinámica. Esta describe las fuerzas que dos conductores paralelos atravesados por corriente eléctrica ejercen uno sobre otro. Si el sentido de la corriente es el mismo en los dos conductores, estos se atraen; si la corriente se desplaza en sentidos opuestos, los conductores se repelen.

Fuente: Wikipedia

En la actualidad se sabe que la propiedad llamada magnetismo que poseen determinados cuerpos y que consiste en atraer pedacitos de hierro (limaduras) es simplemente una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento. Se cree que el magnetismo fue descubierto en la región de Magnesia, antigua ciudad del reino de Lidia en Asia Menor.

IMÁN

Llamamos así a todos aquellos cuerpos que tienen la propiedad de atraer limaduras de hierro. Entre los cuerpos que poseen magnetismo en forma natural tenemos a la magnetita, mineral de hierro cuya fórmula química es Fe_3O_4.

Hoy sabemos que los átomos de una sustancia magnética (imán) son ellos mismos pequeños imanes, la causa de este magnetismo de los átomos es el movimiento de los electrones. Los átomos de un material no-magnético (madera) no poseen esta propiedad.

Sustancia magnética

Está constituido por pequeños imanes moleculares alineados perfectamente.

Un imán puede perder sus propiedades magnéticas debido fundamentalmente a dos razones:

1. Cuando se golpea bruscamente provocándole un desorden molecular.
2. Cuando es calentado hasta alcanzar una temperatura característica conocida con el nombre de temperatura de CURIE.

Sustancia	**Temperatura**
Hierro	750 °C
Níquel	350 °C
Cobalto	1100 °C
Ferrita	218 °C

Polos de un imán

Se llama polos magnéticos o polos del imán a las zonas donde se concentran los efectos magnéticos externos del imán. Si se suspende el imán de manera que puede oscilar libremente, adoptará siempre la misma posición coincidiendo su eje con el meridiano geográfico. El polo que se orienta hacia el Norte geográfico se llama polo Norte magnético (N), y el otro se llama polo magnético Sur (S). A la parte intermedia se le llama zona neutra.

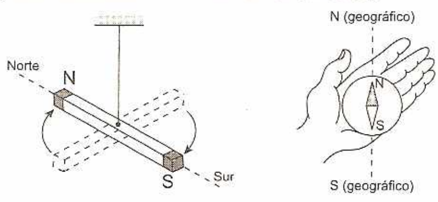


Figura 17.1

Figura 17.1. Un imán (o aguja magnética) suspendido se orienta en la dirección Norte-Sur (geográficos).

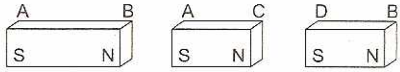


Figura 17.2

Figura 17.2. Es imposible obtener un polo magnético aislado.

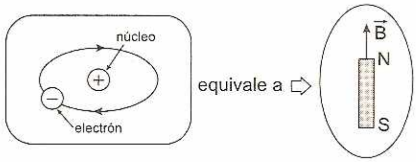


Figura 17.3

Figura 17.3. Un átomo puede considerarse como un imán elemental.

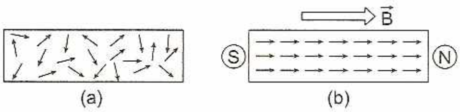
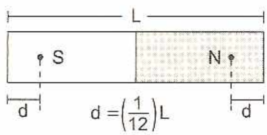


Figura 17.4

Figura 17.4. En una barra no magnetizada, los imanes elementales se encuentran orientados al azar (a). Si la barra se coloca en un campo magnético, dichos imanes elementales se orientan en forma paralela al campo (b). La concentración de estos polos en el imán recto se hallan a una distancia de los extremos igual a 1/12 de la longitud del imán. Si la longitud del imán es 12 cm, entonces sus polos magnéticos están a 1 cm de cada extremo.



Polos inseparables

Los polos de un imán son inseparables, es decir, si cortamos un imán en dos partes, cada una de las porciones obtenidas constituye un nuevo imán con sus respectivos polos Norte y Sur.

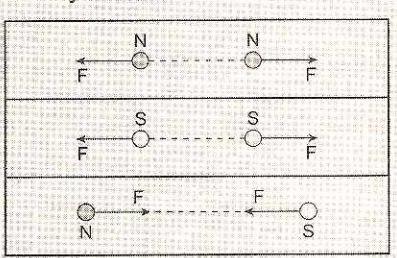
Se puede seguir dividiendo un imán hasta llegar a los imanes moleculares.

LEYES DEL MAGNETISMO

Ley cualitativa

Dos polos magnéticos del mismo nombre se repelen y polos magnéticos de nombres diferentes se atraen.

Repulsión y atracción



Ley cuantitativa

Esta ley permite cuantificar una de las fuerzas naturales más importantes y fue descubierta por el físico francés Carlos Agustín de Coulomb.

Dos polos magnéticos se atraen o se repelen con fuerzas iguales en módulo, cuya intensidad es directamente proporcional al producto de sus cargas magnéticas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

$$\boxed{F = K\left(\frac{q_1 q_2}{d^2}\right)} \qquad ...(17.1)$$

En la ecuación (17.1) la constante magnética K tiene el siguiente valor:

$$\boxed{K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}} \qquad ...(17.2)$$

La constante μ_0 se conoce como permeabilidad magnética del vacío, y en el SI es igual a:

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi(10^{-7})\,\frac{N}{A_2}} \qquad ...(17.3)$$

La carga magnética "q", es aquella magnitud física que va asociada a todo polo magnético, y nos indica de un modo directo el nivel de magnetismo que posee. La unidad en el SI es el ampere metro (A.m)

En todo imán se verifica que los dos polos magnéticos tienen la misma carga magnética "q", pero de signos diferentes. Convencionalmente el Polo Norte (N) tiene carga magnética positiva (+) y el Polo Sur (S) tiene carga magnética negativa (−).

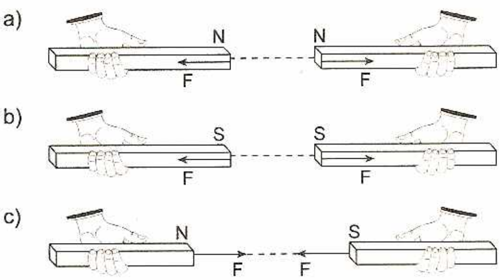
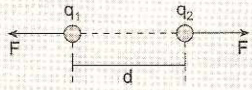


Figura 17.5

Cargas magnéticas



$$F = K\left(\frac{q_1 q_2}{d^2}\right)$$

F: fuerza (N)
q: carga magnética (Am)
d: distancia (m)
K: constante magnética

$$K = 10^{-7}\ N/A^2$$

Figura 17.5. Los polos magnéticos del mismo nombre se repelen, y los de nombre contrario se atraen.

CAMPO MAGNÉTICO

Es aquella región de espacio que rodea a todo polo magnético, y que poseen propiedades magnéticas, las cuales dejan sentir su efecto sobre cargas magnéticas, cargas eléctricas en movimiento y corrientes eléctricas, mediante fuerzas de atracción o repulsión.

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO (B)

Se llama también inducción magnética, es aquella magnitud física vectorial que se define como la fuerza magnética por cada unidad de carga magnética Norte en un punto del campo magnético.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q}} \qquad ...(17.4)$$

La unidad de $\vec{B}$ en el SI es el *tesla* (T) en honor al ingeniero norteamericano nacido en Yugoslavia (1856-1943), y su valor es: $1\ T = 1\ NA^{-1}m^{-1}$

$$\boxed{F = K\left(\frac{qQ}{d^2}\right)} \qquad ...(17.5)$$

Reemplazando (17.5) en (17.4) tenemos:

$$\boxed{B = K\left(\frac{Q}{d^2}\right)} \qquad ...(17.6)$$

La intensidad del campo magnético $\vec{B}$, es directamente proporcional a la magnitud Q de la carga creadora del campo magnético e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" entre la carga magnética y el punto A en estudio.

El vector intensidad del campo magnético $\vec{B}$ tiene la misma dirección y sentido que la fuerza resultante magnética $\vec{F}$.

Figura 17.6. El campo magnético $\vec{B}$ en un punto tiene la orientación magnética Sur-Norte de una aguja imantada puesta en dicho punto.

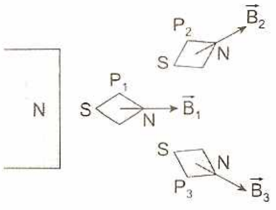
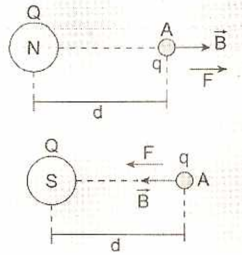


Fig. 17.6

Dirección y sentido:



$$B = K\left(\frac{Q}{d^2}\right)$$

B: intensidad del campo (T)
Q: carga magnética (Am)
d: distancia (m)
K: constante magnética

$$K = 10^{-7}\ NA^{-2}$$

LÍNEA DE FUERZA

Históricamente se sabe que el concepto de línea de fuerza fue propuesto por el físico inglés Michael Faraday para describir los campos eléctricos. Como el caso de las cargas eléctricas, los campos magnéticos se grafican por medio de líneas de fuerza que salen del polo Norte (N) e ingresan al polo Sur (S), notándose que ahora las líneas de fuerza se cierran sobre sí mismas, lo que no ocurría en los campos eléctricos.

Si el campo magnético es homogéneo o uniforme, las líneas de fuerza son paralelas.

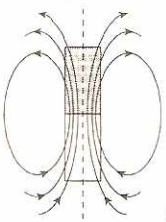


Fig 17.7.a

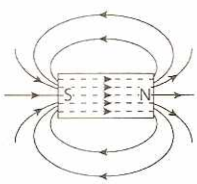


Fig. 17.7.b

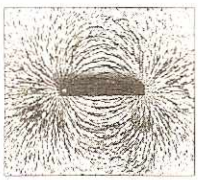


Fig. 17.7.c

Figura 17.7. Líneas de inducción del campo magnético creado por un imán en forma de barra.

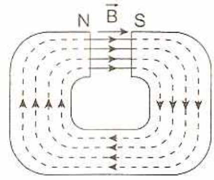
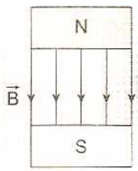


Fig. 17.8

Figura 17.8. Entre los polos del imán ilustrado, el campo magnético es prácticamente uniforme.

Campo magnético homogéneo:



El campo magnético homogéneo se representa mediante líneas de fuerza paralelas y se caracteriza por mantener constante la intensidad del campo magnético, $\vec{B}$, en todos los puntos del campo.

Principio de superposición de los campos magnéticos

Si en un punto A del espacio varias cargas magnéticas crean campos magnéticos cuyas intensidades sean:

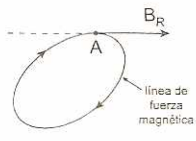
$$\vec{B}_1;\ \vec{B}_2;\ \vec{B}_3;\ \ldots\ ;\ \vec{B}_n$$

La intensidad resultante será la suma vectorial de las intensidades parciales:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots + \vec{B}_n$$

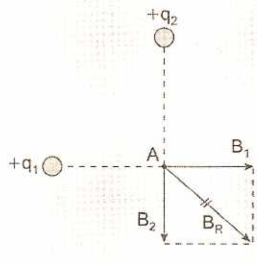
El vector resultante, $\vec{B}_R$, se representa mediante un vector tangente a la línea de fuerza que pasa por el punto A en estudio.

Las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas.



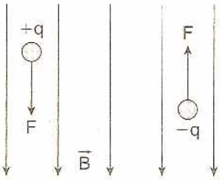
Vector resultante:

$$B_R = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$



ACCIÓN DEL CAMPO HOMOGÉNEO

Un campo eléctrico cuya intensidad es igual en todos los puntos del espacio se le llama campo homogéneo o uniforme. Las líneas de fuerza son paralelas.



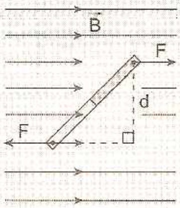
En la figura, la fuerza $\vec{F}$ que ejerce el campo magnético $\vec{B}$ sobre la carga magnética $+q$ tiene la misma dirección y sentido del campo, en cambio sobre la carga magnética $-q$ la fuerza $\vec{F}$ tiene sentido opuesto al campo homogéneo.

La fuerza $\vec{F}$ que actúa por parte del campo magnético sobre una carga magnética arbitraria "q" situada en un punto del campo magnético es:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{B}} \qquad ...(17.7)$$

En el caso de un imán recto, sus cargas magnéticas Norte y Sur son iguales pero con signos diferentes. Entonces, un imán recto dentro del campo homogéneo experimenta una cupla (momento de una fuerza), cuyo módulo es igual al producto de una de las fuerzas F por la distancia "d" perpendicular entre las fuerzas.

Cupla o par de fuerzas:



El campo magnético $\vec{B}$ origina fuerzas de igual módulo y dirección, pero sentido opuestos, sobre los polos magnéticos. El imán tiende a alinearse con el campo externo, formando una cupla cuyo módulo es:

$$M^{par} = F\,d$$

FLUJO MAGNÉTICO (Φ)

Una mayor o menor concentración de las líneas de fuerza nos permite tener una idea de lo intenso que es el campo magnético en dichas regiones. Se define así el flujo magnético como aquella magnitud escalar que nos indica el número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie imaginaria. Su valor resulta ser directamente proporcional con la componente normal ($B\perp$) a la superficie y con el área de la misma:

$$\Phi = (B\cos\theta)A$$

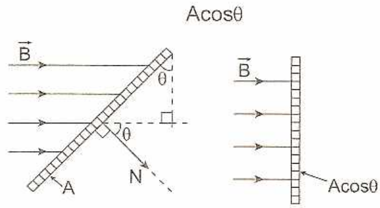
$$\boxed{\Phi = BA\cos\theta} \qquad ...(17.8)$$

La unidad de Φ en el SI es el *weber* (Wb), 1 Wb = 1 Tm^2

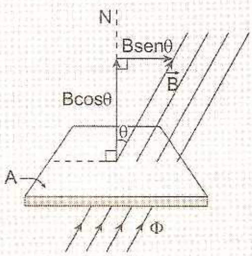
$$\Phi = B(A\cos\theta)$$

$$\boxed{\Phi = B(A\perp)} \qquad ...(17.9)$$

El flujo magnético Φ también se puede definir como el producto de la intensidad de campo $\vec{B}$, por la proyección normal del área cuyo valor es:



Componente normal



$$\Phi = BA\cos\theta$$

Φ: flujo magnético (*weber*)
B: intensidad del campo (T)
A: área (m^2)
N: línea normal al plano

MAGNETISMO TERRESTRE

La Tierra posee un campo magnético, no se conoce exactamente la causa de este campo, aunque la Tierra contiene hierro en su centro no puede decirse que el magnetismo terrestre se debe a este hierro ya que en el centro de la Tierra la temperatura es elevadísima (recordemos que la temperatura anula el magnetismo).

Si una barra imantada se suspende desde su centro, tal que pueda oscilar libremente y no hay magnetismo local (a consecuencia de otros imanes), el imán suspendido oscilará hasta ubicarse aproximadamente según un meridiano terrestre.

El Polo Sur del imán suspendido señala el Polo Norte magnético terrestre.

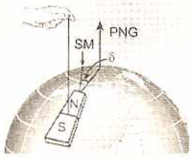
El Polo Norte del imán suspendido señala el Polo Sur magnético terrestre.

El Polo Norte magnético y el Polo Sur geográfico de la tierra son vecinos y viceversa.

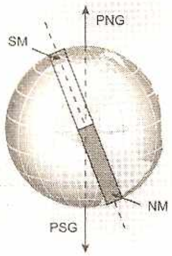
Brújula

El polo Norte del imán suspendido indica aproximadamente el polo Norte geográfico (PNG) de la Tierra.

El ángulo δ que forma el polo Sur magnético terrestre (SM), el punto de suspensión del imán y el meridiano terrestre se llama ángulo de declinación.



El imán Tierra



Ángulo de declinación (δ)

El norte de la aguja de una brújula equilibrada no señala exactamente el Norte geográfico de la Tierra, esto se debe a que los polos magnéticos de la Tierra no coinciden con los polos geográficos terrestres.

El ángulo δ entre la aguja equilibrada en un plano horizontal y el meridiano terrestre es llamado ángulo de declinación. Este ángulo varía de un lugar a otro.

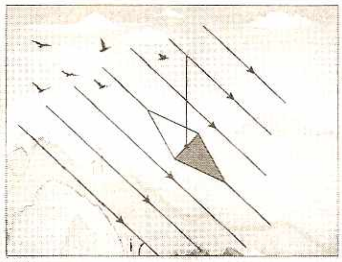
Ángulo de inclinación (i)

Analizando las líneas de fuerza del campo magnético terrestre, en muchos puntos de la superficie se observa que estas líneas magnéticas son inclinadas con respecto a la horizontal formando un ángulo denominado ángulo de inclinación (i).

La inclinación magnética varía de un lugar a otro.

Con una brújula la inclinación magnética se mide equilibrando la aguja en un plano vertical.

En el plano vertical



PROBLEMAS RESUELTOS

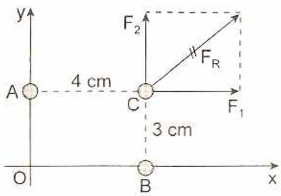
1. Tres cargas magnéticas: $q_A = 640\,\text{Am}$; $q_B = 270\,\text{Am}$; $q_C = 100\,\text{Am}$ se encuentran en un plano cartesiano en las posiciones A(0; 3); B(4; 0); C(4; 3) en centímetros, respectivamente. Hallar la fuerza magnética resultante sobre la carga ubicada en C.

Resolución:

Cálculo de las fuerzas magnéticas:

$$F_1 = K\left(\frac{q_A\,q_C}{d_{AC}^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{640\times 100}{(4\times 10^{-2})^2}\right] = 4\text{ N}$$

$$F_2 = K\left(\frac{q_B\,q_C}{d_{BC}^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{270\times 100}{(3\times 10^{-2})^2}\right] = 3\text{ N}$$

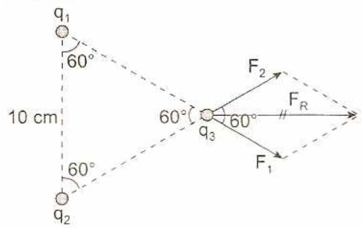


Cálculo de la fuerza magnética resultante en C aplicando el método del paralelogramo:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 = 16 + 9 = 25 \quad \therefore\ F_R = 5\text{ N}$$

2. Sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, se encuentran las cargas magnéticas $q_1 = 3\text{ kAm}$; $q_2 = 5\text{ kAm}$; $q_3 = 0{,}9\text{ kAm}$. Calcular la fuerza magnética resultante sobre la carga magnética q_3.

Resolución:



Cálculo de las fuerzas magnéticas F_1 y F_2:

$$F_1 = K\frac{q_1 q_3}{d_{13}^2} = 10^{-7}\left[\frac{3000\times 900}{(10^{-1})^2}\right] = 27\text{ N}$$

$$F_2 = K\frac{q_2 q_3}{d_{23}^2} = 10^{-7}\left[\frac{5000\times 900}{(10^{-1})^2}\right] = 45\text{ N}$$

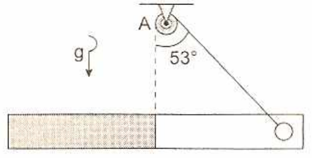
Cálculo de la fuerza magnética resultante sobre q_3 aplicando el método del paralelogramo:

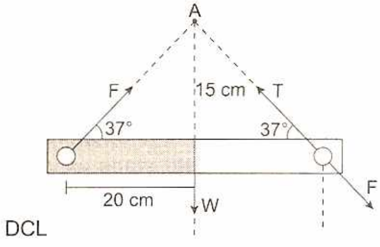
$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60°$$

$$F_R^2 = (27)^2 + (45)^2 + 2(27)(45)\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore F_R = 63\text{ N}$$

3. La figura muestra un imán barra de 48 cm de longitud en equilibrio, cuyas cargas magnéticas en sus polos tienen un módulo de 6250 Am. Sabiendo que la esfera A tiene carga magnética Sur de módulo 1000 Am, calcular el peso del imán barra. La cuerda está atada en uno de los polos de imán.

Resolución:



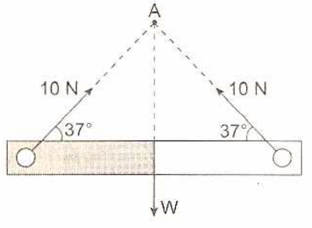


La distancia entre los polos magnéticos de un imán es 5L/6, donde L es la longitud del imán recto. Para nuestro caso esta distancia es 40 cm.

Cálculo de la fuerza magnética F sobre los polos:

$$F = K\left(\frac{qQ}{d^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{6250 \times 1000}{(25 \times 10^{-2})^2}\right] = 10\text{ N}$$

Analizando el DCL (imán), por concepto de simetría deducimos que la tensión T en la cuerda es: $T = 2F = 20$ N.

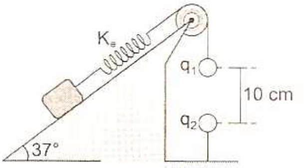


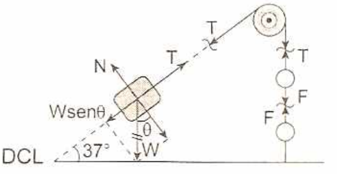
De la primera condición de equilibrio:
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W = 2(10)(\text{sen}37°)$

$$W = 2\left(10 \times \frac{3}{5}\right) \quad \therefore W = 12\text{ N}$$

4. La figura muestra dos esferas sin peso que poseen cargas magnéticas $q_1 = -9$ kAm y $q_2 = +5$ kAm, en equilibrio. Sabiendo que no existe rozamiento, hallar el peso del bloque y la deformación en el resorte de constante de elasticidad 50 N/cm.

Resolución:





Cálculo de la fuerza magnética entre las cargas q_1 y q_2 (atracción):

$$F = K\left(\frac{q_1q_2}{d^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{9000 \times 5000}{(10^{-1})^2}\right] = 450\text{ N}$$

De la condición del problema, el peso de las esferas es despreciable, entonces la tensión T en la cuerda es igual a la fuerza magnética, $T = F = 450$ N.

De la ley de Hooke; la tensión T en el resorte es directamente proporcional a la deformación "x" en el cuerpo elástico.

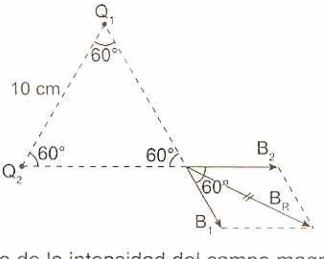
$$T = (K_e)(x) \Rightarrow 450 = 50x \Rightarrow x = 9\text{ cm}$$

Del DCL (bloque), la tensión T en la cuerda es igual a la componente del peso W paralela al plano inclinado: $W\text{sen}37° = T$

$$\Rightarrow W\left(\frac{3}{5}\right) = 450\text{ N} \quad \therefore W = 750\text{ N}$$

5. Sobre los vértices de un triángulo equilátero se han colocado dos cargas magnéticas: $Q_1 = 2{,}1$ MAm y $Q_2 = 3{,}5$ MAm. Si el lado del triángulo es 10 cm, calcular la intensidad del campo magnético resultante en el tercer vértice.

Resolución:



Cálculo de la intensidad del campo magnético B_1 y B_2 en el tercer vértice:

$$B_1 = K\left(\frac{Q_1}{d_1^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{2{,}1 \times 10^6}{(10^{-1})^2}\right] = 21\text{ T}$$

$$B_2 = K\left(\frac{Q_2}{d_2^2}\right) = 10^{-7}\left[\frac{3{,}5 \times 10^6}{(10^{-1})^2}\right] = 35\text{ T}$$

Cálculo de la intensidad del campo magnético resultante, aplicando el método del paralelogramo:

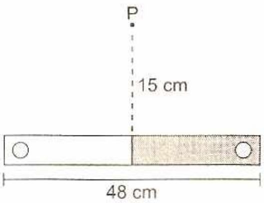
$$B_R^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\,B_1B_2\cos 60°$$

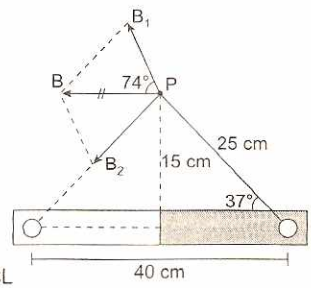
$$\Rightarrow B_R{}^2 = (21)^2 + (35)^2 + 2(21)(35)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ B_R = 49\ \text{T}$$

6. La figura muestra un imán recto de 48 cm de longitud, con carga magnética en cada polo igual a 625 Am. Calcular la intensidad del campo magnético en el punto P. Considere: $\tan 74° = \dfrac{24}{7}$.

Resolución:





DCL

La distancia entre los polos magnéticos es 5L/6 (L es la longitud del imán recto). La intensidad del campo magnético que genera cada carga magnética es $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$.

$$B_1 = B_2 = K\left(\frac{Q}{d^2}\right) \Rightarrow B_1 = 10^{-7}\left[\frac{625}{(0,25)^2}\right] = 10^{-3}\ \text{T}$$

$$\Rightarrow B_1 = B_2 = 1\ \text{mT} \qquad ...(1)$$

Cálculo de la intensidad del campo magnético resultante en el punto P, aplicando la ley del paralelogramo:

$$B_P^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos 74° \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$B_P^2 = 1 + 1 + 2(1)(1)\left(\frac{7}{25}\right) \qquad \therefore\ B_P = 1{,}6\ \text{mT}$$

7. La figura (1) muestra una esferita de peso 4 N y carga magnética Sur de magnitud 0,6 Am, unida a un hilo se encuentra suspendida de un punto fijo, dentro de un campo magnético homogéneo $\vec{B}$. Sabiendo que la esferita está en equilibrio, determinar $\vec{B}$.

Resolución:

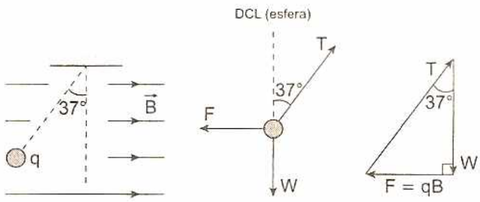


Figura (1) Figura (2) Figura (3)

De la primera condición de equilibrio, la suma de las tres fuerzas es igual a cero, entonces, se construye un triángulo de fuerzas. Donde la fuerza magnética F es: $F = q\,B$

$$\tan 37° = \frac{F}{W} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{qB}{W}$$

Reemplazando: $\dfrac{3}{4} = \dfrac{(0,6)B}{4} \qquad \therefore\ B = 5\ \text{T}$

8. Un imán barra de 20 N de peso se encuentra dentro de un campo magnético homogéneo de intensidad B = 5 T, en equilibrio, figura (1). Sabiendo que el imán está atado exactamente en uno de sus polos magnéticos, calcular la carga magnética "q" en cada polo.

Resolución:

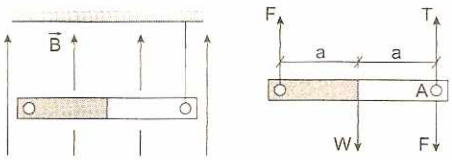


Figura (1) Figura (2): DCL (imán)

De la primera condición de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T = W + F$$

$$T = W = 20\ \text{N} \qquad ...(1)$$

De la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A^F = M_A^W$$

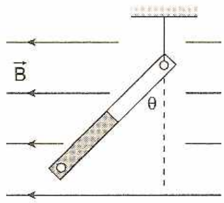
$$F(2a) = W(a) \Rightarrow F = \frac{W}{2} = 10\ \text{N} \qquad ...(2)$$

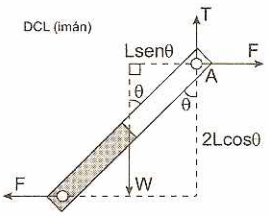
Cálculo de la fuerza magnética:

$$F = q\,B \Rightarrow 10\ \text{N} = (q)(5\ \text{T}) \qquad \therefore\ q = 2\ \text{Am}$$

9. La figura muestra un imán recto en equilibrio, atado mediante una cuerda desde uno de sus polos magnéticos. La carga magnética de cada polo del imán es q = 3 Am y su peso igual a 24 N. Sabiendo que se encuentra dentro de un campo magnético homogéneo de intensidad B = 4 T, hallar la medida del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

Resolución:





Consideremos el imán de longitud 2L. Aplicando la segunda condición de equilibrio respecto del punto A, tenemos:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A^W = M_A^F \Rightarrow W(L\text{sen}\theta) = F(2L\cos\theta)$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{2F}{W}$ ...(1)

Cálculo de la fuerza magnética:

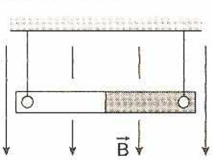
$F = qB \Rightarrow F = (3)(4) = 12\ N$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

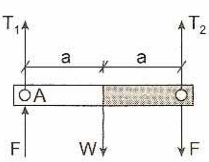
$\tan\theta = \dfrac{2(12)}{24} = 1 \quad \therefore\ \theta = 45°$

10. Un imán barra de 10 N de peso, y una carga magnética en cada polo igual a 2 Am, se encuentra dentro de un campo magnético uniforme externo de intensidad, B = 2 T, como indica la figura. Sabiendo que el imán está atado exactamente en sus polos, calcular la tensión en los hilos que lo sostienen.

Resolución:



Figura



DCL (imán)

De la primera condición de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = W \Rightarrow T_1 + T_2 = 10\ N$ ...(1)

De la segunda condición de equilibrio:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A{}^W + M_A{}^F = M_A{}^{T_2}$

$Wa + F(2a) = T_2(2a) \Rightarrow 10 + 2F = 2T_2$ ...(2)

Cálculo de la fuerza magnética:

$F = qB \Rightarrow F = (2)(2) \Rightarrow F = 4\ N$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2), y en (1) tenemos que:

$T_2 = 9\ N \ \wedge\ T_1 = 1\ N$

11. En la figura (1), el campo magnético homogéneo de intensidad B = 20 T, en dirección del eje +y, atraviesa el plano PQRS. Hallar el flujo magnético Φ que sale del rectángulo PQRS.

Resolución:

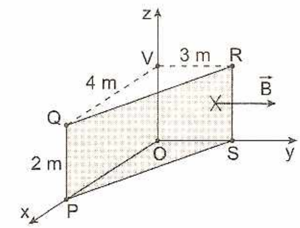


Figura (1)

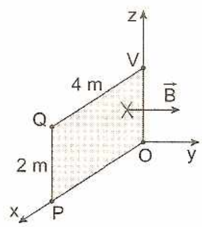


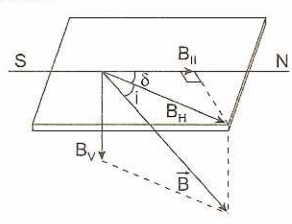
Figura (2)

El flujo magnético que nos piden es el que atraviesa el plano PQRS, pero en el gráfico reconocemos que el área proyectada normalmente al campo magnético $\vec{B}$ es el rectángulo PQVO contenido en el plano cartesiano XZ. El área de PQVO es: $2 \times 4 = 8\ m^2$

$\Phi = BA\perp = (20)(8) = 160$ *weber* $\Rightarrow \Phi = 160\ Wb$

12. En determinado lugar de la Tierra la intensidad del campo magnético es 5×10^{-4} T. Si la inclinación magnética es 60° y la declinación magnética es 37°, calcular el módulo de la componente del campo magnético paralela al eje Norte-Sur geográfico.

Resolución:



Graficando tenemos que: $i = 60°$ y $\angle\,\delta = 37°$

Campo magnético horizontal: $B_H = B\cos(i)$ ...(1)

Campo magnético vertical: $B_V = B\text{sen}(i)$ ...(2)

Campo magnético paralelo al eje Norte-Sur geográfico: $B_{\parallel} = B_H\cos(\delta)$ ...(3)

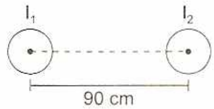
Reemplazando (1) en (3) tenemos:

$B_{\parallel} = B\cos(i)\cos(\delta)$

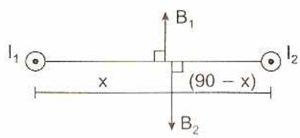
$B_{\parallel} = 5 \times 10^{-4}(\cos 60°)(\cos 37°)$

$B_{\parallel} = 5 \times 10^{-4}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow B_{\parallel} = 2 \times 10^{-4}\ T$

13. La figura muestra dos secciones rectas de dos conductores rectilíneos infinitos que transportan corrientes eléctricas $I_1 = 10$ A e $I_2 = 5$ A. ¿A qué distancia (en cm) del conductor izquierdo la intensidad del campo magnético es nula?. La separación entre los conductores es 90 cm.



Resolución:

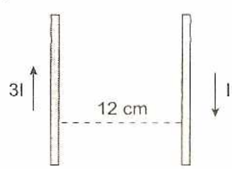


El campo magnético es nulo: $B_1 = B_2$

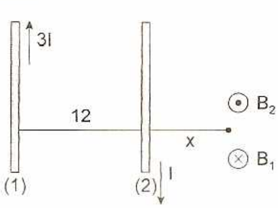
$$K\left(\frac{I_1}{d_1}\right) = K\left(\frac{I_2}{d_2}\right) \Rightarrow \frac{I_1}{d_1} = \frac{I_2}{d_2}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{90 - x} \Rightarrow 3x = 180 \qquad \therefore\ x = 60 \text{ cm}$$

14. En la figura se muestra dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos, cuyas intensidades de corrientes están en proporción 1:3. Determine la distancia a partir del conductor derecho donde el campo magnético es nulo.



Resolución:



Si el campo es nulo, entonces: $B_1 = B_2$

$$\frac{K(3I)}{d_1} = \frac{K(I)}{d_2}$$

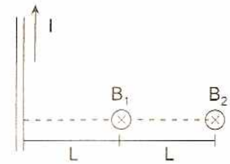
$$\frac{3}{12 + x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x = 12 \qquad \therefore\ x = 6 \text{ cm}$$

15. El campo magnético en una línea de inducción L asociado a un alambre conductor muy largo que conduce una corriente $I = 2$ A es 4 μT. Hallar el campo magnético (en μT) en una línea de inducción del doble de radio de L.

Resolución:

Ley de Biot- Savart:

$$B = K\left(\frac{I}{R}\right)$$

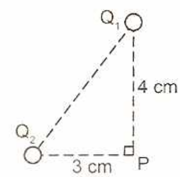


La intensidad de campo magnético es inversamente proporcional al radio o distancia al conductor.

$$B_1R_1 = B_2R_2$$

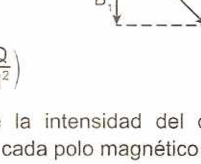
$(4)(L) = B_2(2L) \qquad \therefore\ B = 2\ \mu T$

16. Determinar el módulo de la intensidad de campo magnético resultante en el punto P, si la cantidad de carga magnética en cada vértice del triángulo es: $Q_1 = +16 \times 10^4$ Am y $Q_2 = +9 \times 10^4$ Am



Resolución:

La intensidad del campo magnético en un punto es directamente proporcional a la cantidad de carga magnética creadora de campo Q e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la carga magnética y el punto P.



$$B = 10^{-7}\left(\frac{Q}{d^2}\right)$$

Cálculo de la intensidad del campo magnético creado por cada polo magnético en el punto P.

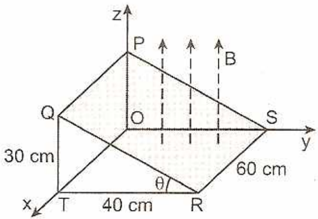
$$B_1 = 10^{-7}\left(\frac{Q_1}{d_1^2}\right) \Rightarrow B_1 = 10^{-7}\left[\frac{16 \times 10^4}{(4 \times 10^{-2})^2}\right] = 10 \text{ T}$$

$$B_2 = 10^{-7}\left(\frac{Q_2}{d_2^2}\right) \Rightarrow B_2 = 10^{-7}\frac{9 \times 10^4}{(3 \times 10^{-2})^2} = 10 \text{ T}$$

Cálculo de la resultante en el punto P, mediante el teorema de Pitágoras:

$$B_R = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 10\sqrt{2} \text{ T}$$

17. Si el campo magnético de intensidad $\vec{B} = 5\hat{k}$ T es uniforme y paralelo al eje Z. Determinar el flujo magnético que atraviesa la superficie de mayor área.



Resolución:

El valor del flujo magnético resulta ser directamente proporcional con la componente del campo magnético normal a una superficie, o directamente proporcional con la componente normal de una superficie a un campo magnético:

$\Phi = (B\perp)A \Leftrightarrow \Phi = B(\perp A)$

$\Phi = (B\cos\theta)A \Leftrightarrow \Phi = B(A\cos\theta)$

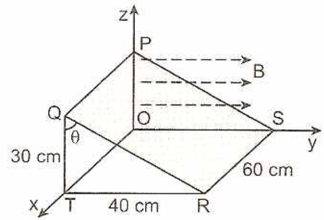
Identificando las variables, el área de la región PQRS es $0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3\ m^2$. La medida del ángulo θ es 37°.

$\Phi = B(A\cos\theta) \Rightarrow \Phi = (5)\left(0{,}3 \times \frac{4}{5}\right) = 1{,}2$ Wb

Verificación. Geométricamente la proyección de la región PQRS sobre el plano xy es la región OTRS cuya área mide $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24\ m^2$.

$\Phi = B(A\cos\theta) \Rightarrow \Phi = (5)(0{,}24) = 1{,}2$ Wb

18. Si el campo magnético de intensidad $\vec{B} = 5\hat{j}$T es uniforme y paralelo al eje Y. Determinar el flujo magnético que atraviesa la superficie de mayor área.



Resolución:

El valor del flujo magnético resulta ser directamente proporcional con la componente del campo magnético normal a una superficie, o directamente proporcional con la componente normal de una superficie a un campo magnético:

$\Phi = (B\perp)A \Leftrightarrow \Phi = B(\perp A)$

$\Phi = (B\cos\theta)A \Leftrightarrow \Phi = B(A\cos\theta)$

Identificando las variables, el área de la región PQRS es $0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3\ m^2$. La medida del ángulo θ es 53°.

$\Phi = B(A\cos\theta) \Rightarrow \Phi = (5)\left(0{,}3 \times \frac{3}{5}\right) = 0{,}9$ Wb

Verificación. Geométricamente la proyección de la región PQRS sobre el plano xz es la región OPQT cuya área mide $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18\ m^2$.

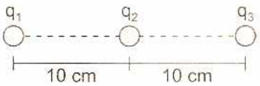
$\Phi = B(A\cos\theta) \Rightarrow \Phi = (5)(0{,}18) = 0{,}9$ Wb

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar la fuerza de interacción magnética entre dos cargas $q_1 = 600$ Am y $q_2 = 800$ Am, separadas una distancia de 2 cm. Considere cargas puntuales.

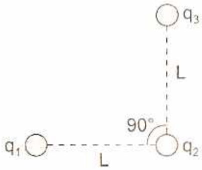
A) 100 N B) 130 N C) 140 N
D) 160 N E) 200 N

2. La figura muestra tres cargas puntuales: $q_1 = +1$ kAm; $q_2 = -2$k Am; $q_3 = +3$k Am, separados 10 cm entre sí. Calcular la fuerza magnética resultante sobre la carga q_2.



A) 20 N B) 30 N C) 40 N
D) 60 N E) 80 N

3. La figura muestra tres cargas puntuales:
$q_1 = +6000$ Am; $q_2 = -1000$ Am; $q_3 = +8000$ Am.
Calcular la fuerza magnética resultante sobre la carga q_2. Donde: L 10 cm.



A) 80 N B) 100 N C) 120 N
D) 140 N E) 160 N

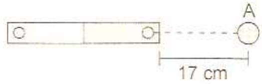
4. Cuatro cargas magnéticas de 5 Am cada una, se encuentran ubicadas en los vértices de un cuadrado de 10 cm de lado. Determinar la fuerza magnética resultante sobre la carga de 2 Am ubicado en el centro del cuadrado.

A) 0 B) 10 N C) 5 N
D) 15 N E) 20 N

5. Tres cargas magnéticas de 10^3 Am cada una, se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Determinar la acción total que se ejerce sobre una de las cargas.

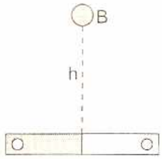
A) 10 N B) $10\sqrt{2}$ N C) 15 N
D) $10\sqrt{3}$ N E) 20 N

6. La figura muestra un imán barra de 36 cm de longitud y carga magnética 25 kAm en cada polo. Determinar la fuerza magnética resultante que ejerce el imán sobre la esfera A de carga magnética sur con magnitud 4 kAm.



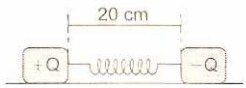
A) 180 N B) 190 N C) 200 N
D) 210 N E) 220 N

7. La figura muestra un imán barra de 48 cm de longitud y carga magnética 4 kAm en cada polo. Determinar la fuerza magnética resultante que ejerce el imán, sobre la esfera B de carga magnética Norte con magnitud 1 kAm. Dónde: h = 20 cm



A) 10 N B) $10\sqrt{2}$ N C) 15 N
D) $10\sqrt{3}$ N E) 20 N

8. La figura muestra dos bloques sobre una superficie lisa, con igual carga magnética Q pero de signos diferentes. Si la longitud natural del resorte, de constante de elasticidad 50 N/cm, es $L_0 = 25$ cm, halla el módulo de Q.



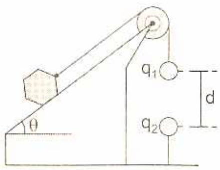
Considere despreciable las dimensiones de cada bloque.

A) 10^4 Am. B) 2×10^4 Am C) 10^3 Am
D) 3×10^3 Am E) 10^5 Am

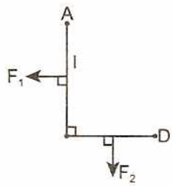
9. Sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, se encuentran las cargas magnéticas $q_1 = 3$ kAm. $q_2 = 5$ KAm; $q_3 = 0,4$ kAm. Calcular la fuerza magnética resultante sobre la carga q_3.

A) 15 N B) 18 N C) 20 N
D) 25 N E) 28 N

10. La figura muestra dos esferas de 4 N de peso cada una y cargas magnéticas $q_1 = -2$ kAm y $q_2 = +0,8$ kAm, en equilibrio. Sabiendo que el bloque pesa 25 N, hallar el ángulo θ de inclinación del plano liso. Donde: d = 10 cm.

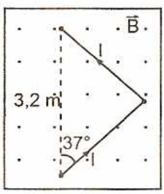


Resolución:



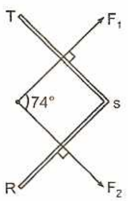
Fuerza Ampére: $F = ILBsen\theta$
$F_1 = 2(0{,}3)(50)(1) = 30$ N
$F_2 = 2(0{,}4)(50)(1) = 40$ N
Cálculo de la fuerza resultante: $F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
$F_R = 50$ N

8. En el esquema mostrado, la corriente que pasa por el conductor es 5 A, y está sometido a la acción de un campo cuya inducción magnética es 0,5 W/m^2. Hallar la fuerza magnética neta que actúa sobre el conductor.



Resolución:

1. ΔRST es isósceles $\Rightarrow$ RS = ST = 2 m
2. Además: $F_1 = F_2 = F = ILBsen\theta$



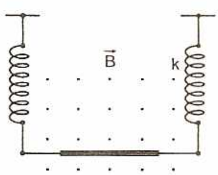
$F = 5(2)(0{,}5)sen90° = 5$ N ...(1)

$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 74°}$

Ley de paralelogramo:

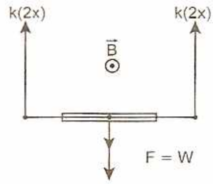
$F_R = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2(5^2)(7/25)} = \sqrt{64} \Rightarrow F_R = 8$ N

. Una vuelta de 60 cm de longitud y peso 24×10^{-5} N está suspendida por un par de resortes flexibles como muestra la figura. El sistema está dentro de un campo magnético ⊙ saliendo. ¿Cuál es la intensidad y dirección de la corriente, tal que, la elongación en el resorte se duplique? (B = 0,4 W/m^2)



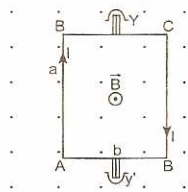
Resolución:

1. De la condición del problema, para que se duplique la elongación, esto significa que el peso aparente la fuerza de origen magnético debe ser igual a peso en módulo, dirección y sentido.
2. Diagrama del cuerpo libre de la barra.



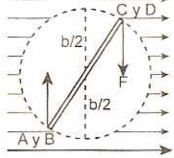
$F = Peso \Rightarrow ILBsen\theta = W$
$I(0{,}6)(0{,}4)sen90° = 24 \times 10^{-5}$ N
$I = 10^{-3}$ *amperes* = 1 mA
La corriente de I = 1 mA se desplaza de izquierda a derecha.

30. Un circuito rectangular ABCD cuyos lados tienen longitud "a" y "b", se encuentra en un campo magnético homogéneo, de inducción $\vec{B}$ y puede girar en torno al eje YY', como indica la figura. En el circuito pasa una corriente constante I. Determinar el trabajo realizado por el campo magnético, al girar el circuito 180°, si, inicialmente, el plano del circuito era perpendicular al campo magnético que está saliendo ⊙ del plano vertical.



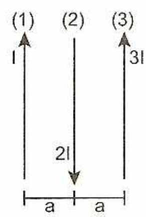
Resolución:

1. Mirando la espira rectangular desde arriba.



2. Las fuerzas que actúan sobre los lados BC y AD son perpendiculares al desplazamiento de estos lados, por eso ellas no realizan trabajo.
3. Las fuerzas que actúan sobre los lados AB y CD son constantes, forman un ángulo recto con la dirección del campo.
   $F = IaBsen90° \Rightarrow F = IaB$ ...(1)
4. El trabajo que buscamos será igual al doble del producto de la fuerza F por el desplazamiento de los lados AB o CD en dirección de la fuerza. Al girar el circuito 180° este desplazamiento es igual a b.
   $W = 2Fd = 2IaB(b) \Rightarrow W = 2Biab$

31. La figura muestra tres conductores (1); (2); (3); infinitamente largo, que llevan corrientes I, 2 I y 3 I respectivamente. Determinar la fuerza resultante por cada unidad de longitud, que actúa sobre el conductor (3).



Resolución:

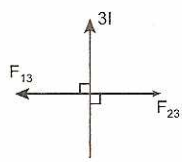


Diagrama de fuerzas sobre (3):

F_{13}: (1) sobre (3); F_{23}: (2) sobre (3)

$$F_{13} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1 I_3}{d}\right) \Rightarrow F_{13} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I}{2a}\right)(3I)$$

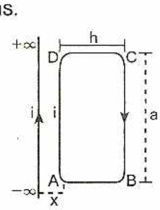
$$F_{23} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_2 I_3}{d}\right) \Rightarrow F_{23} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{2I}{a}\right)(3I)$$

Cálculo de la fuerza resultante:

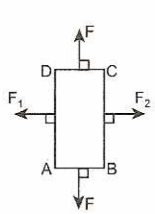
$$F_R = F_{23} - F_{13} \Rightarrow F_R = \frac{\mu_0}{4\pi a}(9I^2)$$

32. Determinar la fuerza con que actúa un conductor recto, infinitamente largo, sobre un circuito en forma rectangular, situado en el plano del conductor. Se sabe que por el conductor pasa una corriente I y por el circuito pasa I. Los lados del circuito AD y BC tienen longitud "a" y paralelas al conductor. La distancia entre AD y el conductor es "x".

La longitud de los lados es AB = DC = h, las direcciones de las corrientes se indican en la figura por medio de flechas.



Resolución:



1. Diagrama de fuerzas sobre la espira, debido al campo magnético creado por la corriente I.
2. Las fuerzas que actúan sobre los lados AB y DC son iguales en magnitud y dirección pero de sentidos opuestos, la suma es nula.
3. F_1 es la fuerza con que actúa la corriente I sobre AD es: $F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi x}(aLI)$

   F_2 es la fuerza con que actúa la corriente I sobre BC es: $F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi(x+h)}(aLI)$

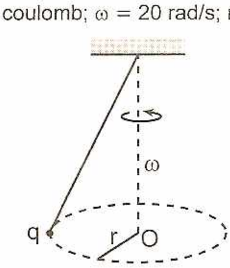
   Las fuerzas F_1 y F_2 están dirigidas a lo largo de una recta en sentidos opuestos siendo $F_1 > F_2$. Por lo tanto, la fuerza resultante es $F_R = F_1 - F_2$.

   $$F_R = \frac{\mu_0}{2\pi}(aLI)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}\right) \Rightarrow F_R = \frac{\mu_0 LI}{2\pi x(x+h)}(ah)$$

33. Una carga eléctrica (+q) se desplaza en un plano horizontal con una velocidad angular ω describiendo una circunferencia de radio "r".

Determinar el vector inducción magnética en el centro de la circunferencia.

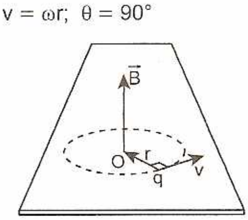
$q = 5 \times 10^{-4}$ coulomb; $\omega = 20$ rad/s; $r = 10$ cm



Resolución:

1. De la fórmula: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{qv}{r^2}\right)\text{sen}\theta$

   Pero: $v = \omega r$; $\theta = 90°$



2. Reemplazando en la fórmula:

   $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q\omega r}{r^2}\right)\text{sen}90°$$

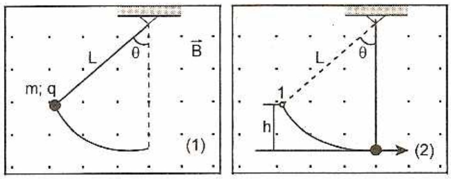
   $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{q\omega}{r}\right) \Rightarrow B = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi}\right)\left[\frac{(5\times 10^{-4})20}{0,1}\right]$$

   $$B = 10^{-8}\ \frac{Wb}{m^2}$$

   La inducción en el centro de la circunferencia, punto O, es igual a 10^{-8} T.

34. La figura (1), muestra un péndulo de longitud L, masa "m" y carga "q", que se abandona en la posición indicada. El campo magnético es indicado

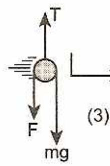
mediante puntos ⊙. Hallar la tensión en la cuerda cuando pasa la masa pendular por su posición más baja, como muestra la figura (2). Considere conocidos: m, h, L, q, B.



Resolución:

1. La fuerza magnética F es perpendicular al movimiento, es colineal con la tensión en la cuerda en todo instante, no realiza trabajo mecánico.

2. La fuerza F que actúa sobre la carga eléctrica "q" en movimiento es debido al campo magnético externo B.
$F = qvBsen90°$ ...(1)

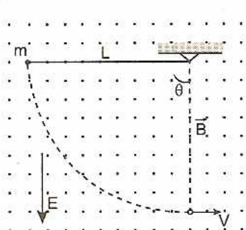


3. Por principio de conservación de la energía mecánica de la figura (2). $EM_{(1)} = EM_{(2)}$
$mgh = 0{,}5mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$ ...(2)
v: velocidad de la partícula cuando pasa por su posición más baja.

4. Dinámica circunferencial, en la posición (2). El DCL del péndulo muestra la figura (3).
$$\Sigma F_{(radianes)} = mac \Rightarrow T - mg - F = m\left(\frac{v^2}{L}\right) \quad ...(3)$$

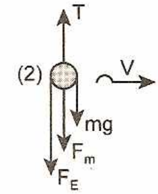
5. Reemplazando (1) y (2) en (3):
$$T - mg - gvB = m\left(\frac{2gh}{L}\right) \quad ...(4)$$
Finalmente: $T = mg + qB\sqrt{2gh} + 2mg\left(\frac{h}{L}\right)$
$$\therefore\ T = mg\left(1 + \frac{2h}{L}\right) + qB\sqrt{2gh}$$

35. La figura muestra un péndulo de longitud L, masa "m" y carga +q. Se abandona en la posición indicada. El campo magnético B está representado por líneas de fuerza saliendo del papel ⊙ indicado mediante puntos. El campo eléctrico E está representado por líneas de fuerza verticales hacia abajo. Hallar la tensión en la cuerda cuando la masa pendular pasa por su posición más baja, sabiendo que en ese instante su velocidad máxima es "v".



Resolución:

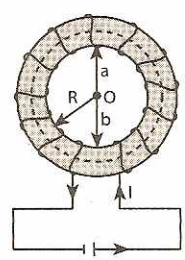
1. La fuerza magnética F_m es perpendicular al movimiento colineal con la tensión en la cuerda en todo instante, por consiguiente no realiza trabajo mecánico. $F_m = qvBsen90°$ ...(1)
2. Diagrama de cuerpo libre, en la posición más baja.



El peso mg y la fuerza eléctrica:
$F_E = qE$, realiza trabajo mecánico.

3. Principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M(1)} = E_{M(2)} \Rightarrow E_{p(1)} + E_{k(1)} = E_{p(2)} + E_{k(2)}$
$mgL + qEL + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$
$mv^2 = 2mgL + 2qEL$ ...(2)
4. Dinámica circunferencial:
$F_C = ma_c \Rightarrow (T - mg - F_m - F_E) = m\left(\frac{v^2}{L}\right)$ ...(3)
Reemplazando (1) y (2) en (3):
$T - mg - qvB - qEb = 2mg + 2qE$
$\therefore\ T = 3mg + qvB + 3qE$

36. Un toroide se enrolla uniformemente y tiene N vueltas de alambre por los que circula una corriente I. El radio interior del toroide es "a" y el exterior es "b". Hallar la relación b/a que permitirá que la intensidad del campo magnético B, en el toroide, no varíe en más de un 25%.



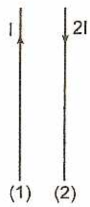
Resolución:

1. De la fórmula general: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{N}{R}\right)I$
Donde: $a \le R \le b$
2. Error relativo: $\frac{B_a - B_b}{B_a} \le 25\%$

Reemplazando: $\dfrac{\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{4}$

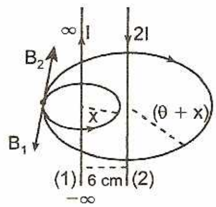
Por tanto: $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

37. La figura muestra dos conductores (1) y (2) rectilíneos e infinitamente largos con corriente I y 2I. La distancia entre ellos es de 6 cm. Encontrar la distancia a partir del conductor (1) donde el campo magnético es nulo.



Resolución:

1. Del gráfico, para que la intensidad del campo magnético sea nulo las intensidades B_1 y B_2 deben ser iguales en módulo y dirección.

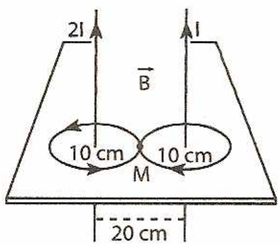


2. Luego: $B_1 = B_2$
3. De la ley de Biot-Savart:

$$K\left(\frac{1}{x}\right) = K\frac{(2i)}{(x+6)} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+6} \Rightarrow x = 6\text{ cm}$$

a la izquierda del conductor (1).

38. La figura muestra dos conductores rectilíneos infinitamente largos por los cuales circulan corrientes, I = 2 A, tal como se muestra. Las corrientes I y 2I respectivas tienen sentidos contrarios. Determinar la inducción magnética en el punto M equidistante de los conductores sabiendo que la distancia de separación entre ellos es 20 cm.



Resolución:

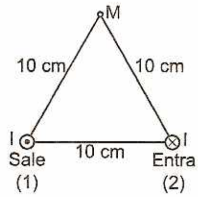
1. En el punto M existe una superposición de campos magnéticos creados por las corrientes 2I e I respectivamente.
2. Luego: $B = B_1 + B_2$ ...(1)

   B_1: creado por I; B_2: creado por 2I
3. Reemplazando en (1):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}I + \frac{\mu_0}{2\pi r}2I$$

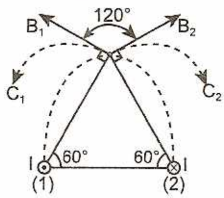
$$B = \frac{3\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{3(4\pi\times10^{-7})2}{2\pi(0,1)} \Rightarrow B = 12\times10^{-6}\text{ T}$$

39. En la figura se representa las secciones de dos conductores (1) y (2) rectilíneos uniformemente largos por las cuales fluyen corrientes eléctricas iguales a 30 ampéres. Determinar la inducción magnética en el punto M.



Resolución:

1. En la gráfica, C_1 línea de fuerza creada por el conductor (1), C_2 línea de fuerza creada por el conductor (2), B_1 y B_2 son tangentes en M a C_1 y C_2 respectivamente.



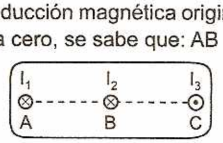
2. Aplicando la ley de paralelogramo, para la suma vectorial: $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos 120°$ ...(1)
3. Pero: $B_1 = B_2 = \mu_0\left(\frac{I}{2\pi r}\right)$

   Donde: $B_1 = B_2 = 4\pi\times10^{-7}\left[\frac{30}{2\neq(0,1)}\right]$

   $B_1 = B_2 = 6\times10^{-5}\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

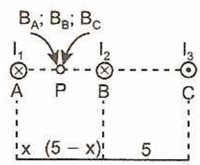
   Reemplazando en (1): $B = 6\times10^{-5}$ T

40. En la figura se tiene (3) tres secciones de conductores rectilíneos infinitamente largos recorridos por corrientes $I_1 = I_2 = 0{,}5I_3$. Hallar un punto sobre AC tal que la inducción magnética originada por las corrientes sea cero, se sabe que: AB = BC = 5 cm.



Resolución:

1. Suponiendo que en el punto P la inducción magnética resultante es cero.



B_A: vector hacia abajo (−), creado por I_1.
B_B: vector hacia arriba (+), creado por I_2.
B_C: vector hacia abajo (−), creado por I_3.

2. $B_P = B_A + B_B - B_C = 0 \Rightarrow B_B = B_A + B_C$ ...(1)
3. Reemplazando valores en (1):

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(5-x)} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x)} + \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(10-x)} \Rightarrow \frac{I_2}{5-x} = \frac{I_1}{x} + \frac{I_3}{(10-x)}$$

De la condición:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 \Rightarrow \frac{1}{5-x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(10-x)}$$

Resolviendo la ecuación tenemos una única solución $x = 3{,}3$ cm

Entonces, la inducción magnética es cero a 3,3 cm (derecha) del punto A.

41. Por dos conductores perpendiculares circulan corrientes $I_1 = 5$A y $I_2 = 25$A respectivamente. Determinar la inducción magnética en el punto P (0,2; 0,2) m. Los conductores son infinitamente largos.

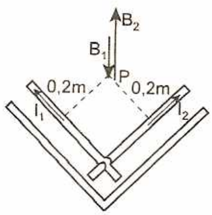
Resolución:

1. En la figura:

B_1: inducción magnética creada por I_1 representado por un vector entrando al plano horizontal ↓ (−).

B_2: inducción magnética creada por I_2 representado por un vector saliendo del plano horizontal (↑) (+).

2. Inducción magnética en el punto P:
$B = B_2 - B_1$ ...(1)
3. Reemplazando en (1), para el (SI)

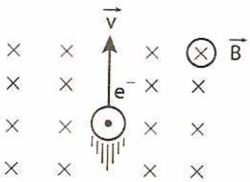


$$B = \mu_0\left(\frac{I_2}{2\pi r}\right) - \mu_0\left(\frac{I}{2\pi r}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi r}(I_2 - I_1)$$

Del dato: $\left(\frac{4\times 10^{-7}}{2\times 0{,}2}\right)(25-5)$

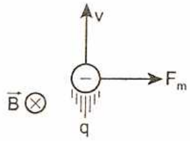
Luego: $B = 2\times 10^{-5}$ T

42. Indicar la dirección de la fuerza magnética sobre el electrón (e^-) mostrado.



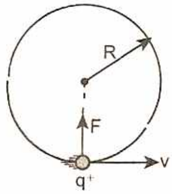
Resolución:

Fuerza de Lorenz:



43. Una partícula cargada con $q = 10$ μC y de masa $m = 2\times 10^{-6}$ kg, gira en el interior de un campo magnético de intensidad 4 T, con una rapidez de 100 m/s. Determinar el radio de la trayectoria circular que describe.

Resolución:



a) Fuerza de Lorenz: $F = qvB\text{sen}90°$
$F = qvB$ ...(1)

b) Fuerza centrípeta $= ma_C$

$F = m\left(\frac{v^2}{R}\right)$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $qvB = m\left(\frac{v^2}{R}\right)$

$$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow R = \frac{2\times 10^{-6}\times 100}{10^{-5}\times 4} \Rightarrow R = 5 \text{ m}$$

44. Un espectómetro de masa, es un dispositivo que mediante un campo magnético permite obtener la razón entre las masa de dos partículas cargadas que poseen la misma velocidad a partir del radio que describen en el interior del campo. Si dos partículas cargadas tienen un radio de 2 cm y 50 cm. ¿Cuál es la razón entre las masas de estas partículas?

Resolución:

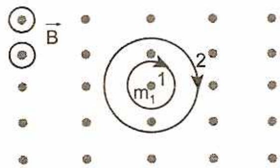
Se conoce la relación: $R = \frac{mv}{qB}$

Despejando: $m = \frac{RqB}{v}$

La masa es directamente proporcional al radio.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{5}$$

45. La figura muestra las trayectorias de dos partículas de igual masa e igual carga eléctrica moviendose en un campo magnético uniforme perpendicular al plano del dibujo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



a) El trabajo hecho por la fuerza magnética sobre la partícula 1 es mayor que el hecho sobre la partícula 2.
b) El trabajo hecho por la fuerza magnética sobre la partícula 2 es mayor que el hecho sobre la partícula 1.
c) La energía cinética de la partícula 1 es mayor.
d) La energía cinética de la partícula 2 es mayor.
e) Ambas tienen igual energía cinética.

Resolución:

Sabemos que: $R = \dfrac{mv}{qB}$

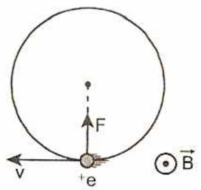
R es directamente proporcional a "v"

$E_{C(2)} > E_{C(1)}$; $v_2 > v_1$; $R_2 > R_1$

Por lo tanto, alternativa correcta: C

46. Un electrón es disparado perpendicularmente con una rapidez de 5×10^6 m/s al interior de un campo magnético $B = 10$ T como muestra la figura. Determinar la fuerza magnética en el instante que el electrón ingresa al campo.

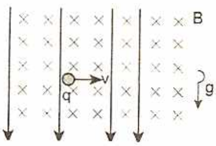
Resolución:



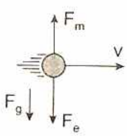
Fuerza de Lorenz: $F = qvB\text{sen}90°$

$F = (1{,}6 \times 10^{-19})(5 \times 10^6)(10)(1) \Rightarrow F = 8 \times 10^{-12}$ N

47. Una partícula eléctrica $q = 6$ mC se mueve dentro de un campo magnético ($B = 0{,}1$ T), un campo eléctrico ($E = 5$ N/C) y un campo gravitatorio ($g = 10$ N/kg), uniformes. Si la velocidad de la partícula es constante e igual a: $\vec{v} = 200\,\hat{i}$ m/s, determinar la masa de la partícula.



Resolución:



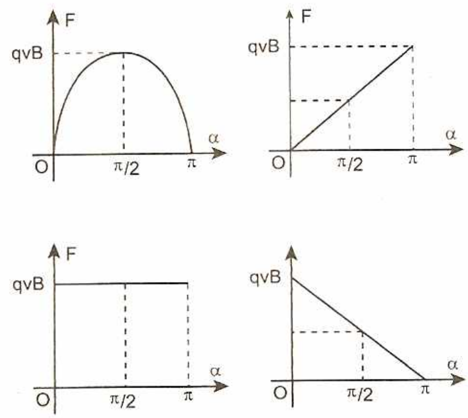
Equilibrio: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_g + F_e = F_m$

$mg + qE = qvB \Rightarrow mg = q(vB - E)$

$10m = 6 \times 10^{-3}(200 \times 0{,}1 - 5) \Rightarrow m = 9 \times 10^{-3}$ kg

$m = 9$ g

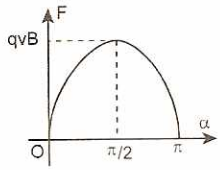
48. Una partícula de carga Q se mueve con velocidad $\vec{v}$, la cual hace un ángulo α con un campo magnético $\vec{B}$. Diga cuál de las siguientes gráficas expresa mayor la magnitud de la fuerza magnética sobre la partícula en función del ángulo α (para valores de α entre 0 y π rad)



Resolución:

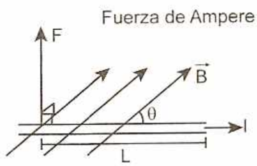
Fuerza de Lorenz: $F = qvB\text{sen}\alpha$

$\text{sen}0 = 0$; $\text{sen}90° = 1$; $\text{sen}180° = 0$



49. Un segmento conductor rectilíneo por el cual circula una corriente de 2 A de intensidad, esta en el interior de un campo magnético externo homogéneo de 0,5 T, que forma 53° con respecto al conductor. Determinar el módulo de la fuerza magnética que experimenta el segmento conductor de longitud 0,5 m.

Resolución:



$F = ILB\text{sen}\theta \Rightarrow F = 2(0{,}5)(0{,}5)\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow F = 0{,}4$ N

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Consiste en la inducción de corriente eléctrica en un conductor por acción de un campo magnético variable. Estudia la transformación del campo magnético en corriente eléctrica.

FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA

Para una barra metálica móvil

Cuando un conductor de longitud L se mueve dentro de un campo magnético $\vec{B}$, sus electrones libres experimentan una fuerza magnética que las hará desplazarse hacia un extremo, produciéndose una polarización en la barra. Esto se interpreta como una diferencia de potencial ε_i, al que llamaremos FEM inducida.

$$\boxed{\varepsilon_i = vBL} \qquad ...(18.24)$$

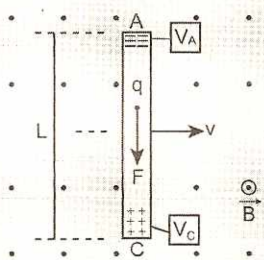
Las cargas en los extremos A y C de la barra producen una diferencia de potencial generada como consecuencia del movimiento de la barra en el campo magnético. La ecuación (18.24) se cumple solo si la velocidad "v", el campo $\vec{B}$ y la barra son perpendiculares entre sí.

La diferencia de potencial que se genera entre los extremos de la barra móvil, es equivalente a una fuerza electromotriz como una pila o batería. En la barra móvil la energía mecánica se convierte en energía eléctrica.

Barra móvil

$$\varepsilon_i = (V_C - V_A) = \frac{W_{A\to C}}{q} \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{Fd}{q} = \frac{qvBL}{q}$$

$$\varepsilon_i = vBL$$



Ley de faraday para una barra conductora

Se tiene una barra conductora de longitud L, que se desplaza con velocidad "v" dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B. La fuerza electromotriz ε inducida entre los extremos de la barra tiene la siguiente forma:

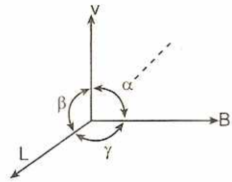
$$\varepsilon = vBL(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma)$$

Además:

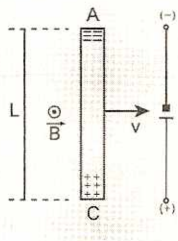
α: es el ángulo formado por los vectores "v" y B.

β: es el ángulo formado por la barra y la velocidad.

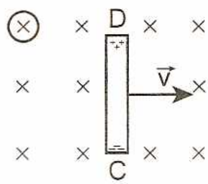
γ: es el ángulo formado por la barra con las líneas del campo magnético.



Batería equivalente

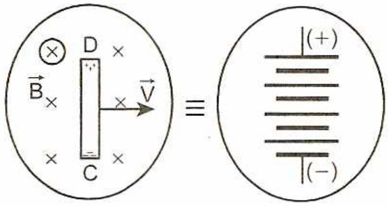


Caso particular. Como sabemos, la barra metálica posee electrones libres. Entonces, como estos electrones se encuentran en movimiento (debido a la traslación de la barra) , quedarán sujetos a la acción de una fuerza magnética ejercida por el campo $\vec{B}$. Es fácil comprobar, usando la regla de la mano derecha en la figura de abajo, que tal fuerza tiende a desplazar los electrones hacia el extremo C de la barra. Como éstos se encuentran libres, se desplazarán en efecto, acumulándose en C. Por consiguiente, en la barra CD tendremos una separación de cargas; es decir, el extremo D quedará electrizado positivamente, y el extremo C negativamente.



Barra metálica CD que se desplaza en un campo magnético $\vec{B}$.

La barra CD se comporta como una fuente de FEM En otras palabras equivale a una pila o batería, como ilustra la figura adjunta. La tensión generada que aparece en la barra se denomina fuerza electromotriz inducida, su inducción se debe al movimiento en un campo magnético.



Barra metálica CD que al ser desplazada a través de un campo magnético, equivale a una pila o batería (FEM).

Ley de Faraday para una espira conductora

Este fenómeno consiste en la inducción de corriente eléctrica en un conductor por acción de un campo magnético externo variable, conocido como el Efecto Faraday.

Cuando varía el flujo de inducción a través del área del circuito, se induce en el circuito (espira) una FEM que tiende a producir una corriente eléctrica.

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}} \quad \text{...(18.25)}$$

Debe observarse que la fuerza electromotriz de inducción existe solamente mientras el flujo de inducción está variando, anulándose tan pronto cesa la variación del flujo.

El signo (−) en la ecuación (18.25) está de acuerdo a la Ley de Lenz, la corriente inducida genera un campo magnético que tiende a compensar la variación del flujo Φ.

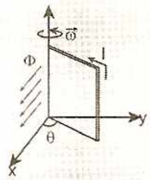
Espira rotatoria

ε_i: FEM inducida (volt)

$\Delta\Phi$: variación del flujo (weber)

Δt: intervalo de tiempo (segundo)

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

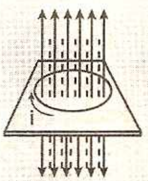


Ley de Lenz

Este fenómeno de inducción electromagnética fue descubierto en 1831, por el ruso Heinrich Friedrich Emil Lenz. El sentido de la corriente producido por la FEM inducida, es tal que el campo que ella crea tiende a compensar la variación del flujo a través del circuito (espira). La corriente inducida, tiene un sentido, de tal modo que el campo magnético creado por él se opone al aumento o disminución del flujo magnético externo. A este fenómeno se denominada inercia electromagnética.

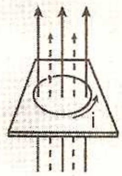
I. Si el flujo magnético externo está aumentando a través de la espira, el sentido de la corriente inducida I producida por la FEM inducida, tiene sentido horario, porque así esta corriente producida crea un flujo opuesto, indicado por líneas discontinuas, que tiende a compensar el aumento de flujo magnético externo.

Flujo Φ aumentando



II. Si el flujo magnético externo está disminuyendo a través de la espira, el sentido de la corriente inducida I producida por la FEM inducida, tiene sentido antihorario, porque así esta corriente producida crea un flujo opuesto, indicado por líneas discontinuas, que tiende a compensar la disminución del flujo magnético externo.

Flujo Φ disminuyendo

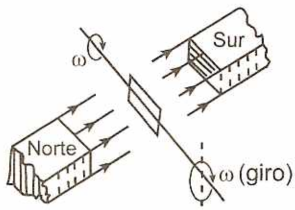


GENERADORES ELECTROMAGNÉTICOS

El movimiento mecánico de una espira dentro de un campo magnético estacionario es la base para convertir energía mecánica en energía eléctrica, tal es el fin de una central hidroeléctrica o de un dinamo.

Fuerza electromotriz alterna

Cuando hacemos girar (mecánicamente) una espira conductora dentro de un campo magnético, observamos que el flujo magnético Φ que atraviesa la espira de área A varía a medida que esta va girando con velocidad angular constante ω, donde el ángulo de giro es θ ($\theta = \omega t$) varía con el tiempo "t".



$$\boxed{\Phi = BA\cos\theta} \quad \text{...(18.26)}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{BA\Delta(\cos\omega t)}{\Delta t}} \quad \text{...(18.27)}$$

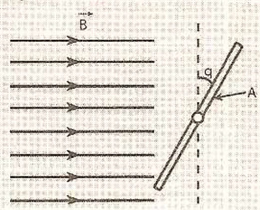
$$\boxed{\varepsilon_i = BA\omega \operatorname{sen}(\omega t)} \quad \text{...(18.28)}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \varepsilon_{max} \operatorname{sen}(\omega t)} \quad \text{...(18.29)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{máx.} = BA\omega} \quad \text{...(18.30)}$$

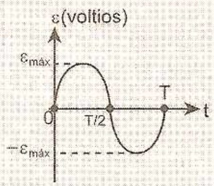
Vista de perfil de la espira

$\Phi = BA\cos\theta$



Gráfica: ε - t

Tensión eficaz:
$\varepsilon_i = \varepsilon_{máx}\text{sen}(\omega t)$



Límite: $\dfrac{\Delta(\cos\omega t)}{\Delta t} = -\omega\,\text{sen}\,\omega t$

Corriente alterna (~)

Si alimentamos una resistencia con una tensión alterna obtendremos una corriente que oscilará en fase con aquella, es decir una onda senoidal. Esto se debe a que la resistencia es solo un elemento de consumo y no de variación de la tensión.

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_{máx}}{R}\,\text{sen}(\omega t)} \qquad ...(18.31)$$

$$\boxed{I_{máx} = \frac{\varepsilon_{máx}}{R}} \qquad ...(18.32)$$

$$\boxed{I = I_{máx}\text{sen}(\omega t)} \qquad ...(18.33)$$

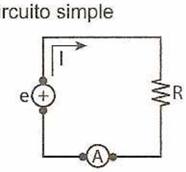
Siendo $\varepsilon_{máx}$ e $I_{máx}$ los valores máximos alcanzados por la tensión y corriente alterna respectivamente, ε' e I' son los valores de aquella tensión y corriente continua que producen en una resistencia R una potencia de disipación igual a la que producen la tensión y/o corriente variable.

Valores eficaces

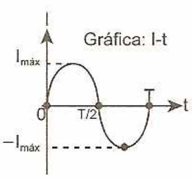
$$\boxed{\varepsilon' = \frac{\varepsilon_{máx}}{\sqrt{2}}} \qquad (18.34)$$

$$\boxed{I' = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}} \qquad (18.35)$$

Circuito simple



Amperímetro



$I = I_{máx}\text{sen}(\omega t)$

TRANSFORMADORES

Es aquel dispositivo compuesto por un núcleo de fierro, el cual es alimentado por una corriente alterna I_1 que genera en el interior del núcleo un flujo magnético también variable, el mismo que produce en el enrollamiento N_2 una fuerza electromotriz ε_2, tal que:

$$\boxed{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad ...(18.36)$$

Donde N representa el número de vueltas de enrollamiento.

Si no existen pérdidas en el transformador, por principio de conservación de la energía, se cumple que, la potencia de entrada es igual a la potencia de salida:

$$\boxed{\varepsilon_1 I_1 = \varepsilon_2 I_2} \qquad ...(18.37)$$

A la bobina de entrada se le denomina primario y a la bobina de salida simplemente secundario.

N_1: número de vueltas en el primario.

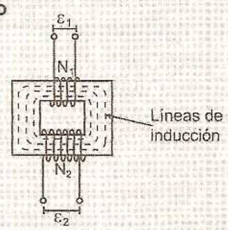
N_2: número de vueltas en el secundario.

ε_1: voltaje de entrada.

ε_2: voltaje de salida.

Esquema del núcleo

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$$



PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (μ)

Es una magnitud adimensional, su valor indica el comportamiento que experimenta una sustancia cuando se encuentra situado dentro de un campo magnético externo. La permeabilidad magnética indica si la sustancia concentra, dispersa o simplemente no altera el campo magnético (las líneas de fuerza).

La permeabilidad magnética μ caracteriza las propiedades magnéticas del medio.

Sustancias paramagnéticas ($\mu \geq 1$)

Son aquellas sustancias que al encontrarse dentro de un campo magnético externo concentran las líneas de fuerza débilmente o simplemente no lo alteran. Estas sustancias tienen permeabilidad magnética constante y ligeramente mayor o igual a la unidad.

Ejemplo: vacío, aire, oxígeno, platino, aluminio.

Sustancias diamagnéticas ($\mu < 1$)

Son aquellas sustancias que al encontrarse en un campo magnético externo dispersan a las líneas de fuerza, magnetizándose en sentido opuesto al campo magné-

tico inductor. Estas sustancias tienen permeabilidad magnética constante y menor que la unidad.
Ejemplo: agua, antimonio, bismuto.

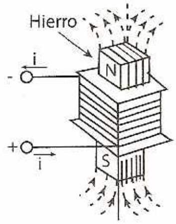


Fig. 18.17

Figura 18.17. Una bombina con núcleo de hierro constituye un electroimán.

Sustancias ferromagnéticas ($\mu > 1$)

Son aquellas sustancias que al encontrarse en un campo magnético externo concentran a las líneas de fuerza, magnetizándose en favor del campo magnético inductor. Estas sustancias tienen permeabilidad magnética variable y mayor que la unidad. Ejemplo: hierro, níquel, cobalto.

La gran mayoría de las sustancias existentes en la naturaleza son paramagnéticas o diamagnéticas:

- Sustancias paramagnéticas son las que en presencia de un campo magnético, se imantan muy débilmente, haciendo que el valor del campo magnético sea ligeramente aumentado.
- Sustancias diamagnéticas son las que en presencia de un campo magnético, se imanan también débilmente, pero, sin embargo, hacen que el valor del campo magnético se vuelva ligeramente menor. El hierro, el cobalto, el níquel, y sus aleaciones, son sustancias ferromagnéticas, las que sujetas a la acción de un campo magnético, se imantan fuertemente, haciendo que el campo magnético resultante sea muchas veces mayor que el campo aplicado.

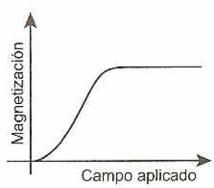


Fig. 18.18

Figura 18.18. Diagrama que muestra el aumento de la magnetización de una sustancia ferromagnética con el aumento del campo B que provoca la imanación.

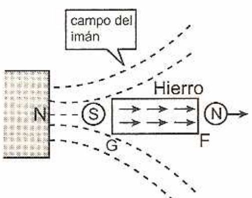


Fig. 18.19

Figura 18.19. Trozo de hierro colocado en las proximidades del polo norte de un imán.

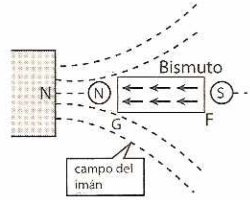


Fig. 18.20

Figura 18.20. Muestra de bismuto colocada en las cercanías del polo norte de un imán.

- **Qué es la histéresis magnética.** Vimos que una sustancia ferromagnética se imanta cuando se coloca en un campo magnético. Pero, un hecho muy conocido es que estas sustancias, al ser retiradas del campo magnético, no se desmagnetizan por completo; es decir, presentan cierta imantación aun en ausencia del campo magnético aplicado. Esta propiedad, característica de las sustancias ferromagnéticas, se denomina histéresis magnética. La gráfica de la figura 18.21. ilustra el fenómeno de la histéresis.

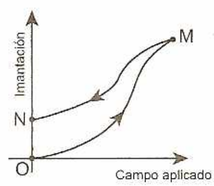
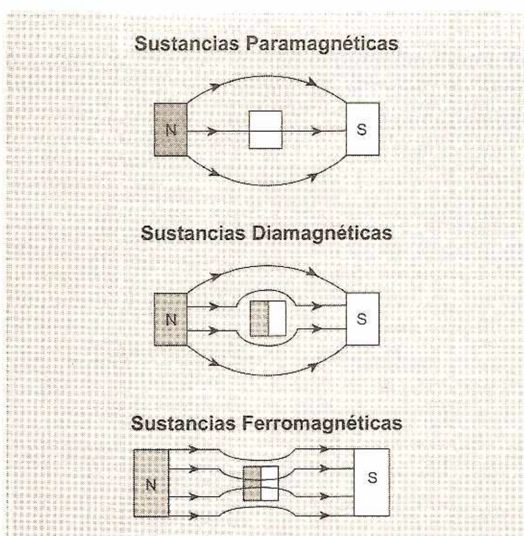


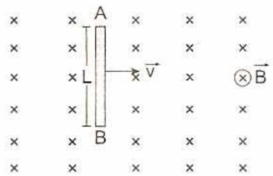
Fig. 18.21

Figura 18.21. Diagrama que ilustra el fenómeno de histéresis en una sustancia ferromagnética.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una barra conductora de longitud L, se desplaza con velocidad "v" perpendicularmente a las líneas de campo magnético B. Determinar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Resolución:

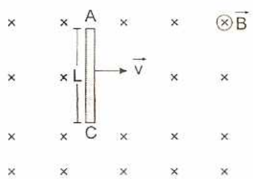
La diferencia de potencial inducida entre los extremos A y B es: $\varepsilon_{AB} = vBL(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma)$

siendo los ángulos: $\alpha = \beta = \gamma = 90°$

Luego: $\varepsilon_{AB} = vBL$

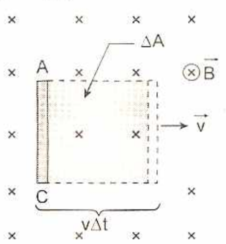
A: positivo (+); B: negativo (−)

2. Una barra conductora AC de largo L = 0,5 m se desplaza perpendicularmente a un campo magnético B = 0,8 T, con una velocidad v = 10 m/s. Calcular el valor de la fuerza electromotriz inducida (ε) en sus extremos e indicar cuál de los extremos está a mayor potencial.



Resolución:

Para solucionar este problema se debe indicar que la barra al moverse genera un área ΔA perpendicular al campo $\vec{B}$ = cte.



Por ley de Faraday, para obtener FEM inducida se requiere que el flujo magnético varíe; luego:

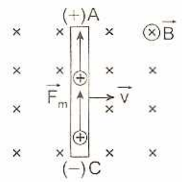
$\Phi = BA\cos 0° \Rightarrow \Delta\Phi = B(\Delta A)$

Donde ΔA tiene forma rectangular e igual al producto del largo de la barra L por el espacio recorrido por ésta en el tiempo Δt.

$\Delta\Phi = B(L)[v(\Delta t)] \Rightarrow \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = LvB$

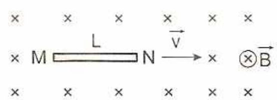
Donde el miembro de la izquierda representa el valor de la fem inducida en los extremos de la barra.

$\varepsilon = LvB \Rightarrow \varepsilon = (0,5)(10)(0,8) \Rightarrow \varepsilon = 4$ voltios



Para determinar ahora qué extremo está a mayor potencial, consideramos que el conductor tiene cargas libres positivas que se mueven hacia la derecha con la barra, sobre ellas actuará una fuerza magnética $\vec{F}_m$ de C hacia A, desplazándolas en aquel sentido y haciendo un trabajo sobre ellas, lo que implica que en A el potencial será mayor que en C ($V_A > V_C$).

3. Una barra conductora MN de longitud L, se desplaza con velocidad "v" perpendicularmente a las líneas de campo magnético B. Determinar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



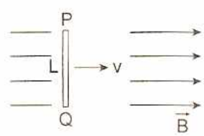
Resolución:

La diferencia de potencial inducida entre los extremos M y N es: $\varepsilon_{MN} = vBL(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma)$

Siendo los ángulos: $\alpha = 90°$; $\beta = 0°$; $\gamma = 90°$

Luego: $\varepsilon_{MN} = 0$

4. Una barra conductora PQ de longitud L, se desplaza con velocidad "v" paralelamente a las líneas de campo magnético B. Determinar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.



Resolución:

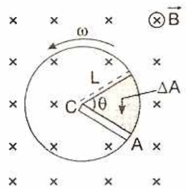
La diferencia de potencial inducida entre los extremos P y Q es: $\varepsilon_{PQ} = vBL(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma)$

Siendo los ángulos: $\alpha = 0°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 90°$

Luego: $\varepsilon_{PQ} = 0$

5. Una barra conductora AC de largo L = 0,5 m gira uniformemente con una velocidad angular ω = 12 rad/s en torno a su extremo C siendo el eje de rotación paralelo a un campo magnético uniforme B = 2 T. Calcular el valor de la fuerza electromotriz inducida en sus extremos y determinar que extremo está a mayor potencial.

Resolución:



Al girar la barra en un tiempo Δt genera un área ΔA en forma de sector circular.

$$\Delta A = \pi L^2\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \Rightarrow \Delta A = \frac{L^2\theta}{2}$$

Luego, el flujo magnético variará:

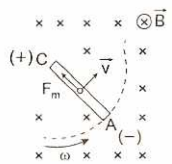
$$\Phi = BA\cos 0° \Rightarrow \Delta\Phi = B\Delta A \Rightarrow \Delta\Phi = B\left(\frac{L^2\theta}{2}\right)$$

Como el movimiento es circular uniforme: $\theta = \omega\Delta t$

Reemplazando y acomodando:

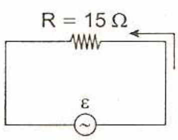
$$\Delta\Phi = \left(\frac{BL^2}{2}\right)\omega\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{BL^2\omega}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{BL^2\omega}{2}$$

Sustituyendo valores: $\varepsilon = \dfrac{(2)(0,5)^2(12)}{2} \Rightarrow \varepsilon = 3\text{ V}$



Para determinar que extremo está a mayor potencial, como en el problema anterior, consideremos, en el conductor cargas libres positivas que girarán con la barra con una velocidad lineal V y que experimentarán una fuerza magnética de A hacia C. Por tanto, C está a mayor potencial que A ($V_C > V_A$).

6. Se tiene una resistencia de 15 Ω, por donde circula una corriente alterna con su valor máximo de 8 A. ¿Qué potencia eficaz disipa la resistencia?



Resolución:

La corriente alterna que circula es: $I = 8\text{sen}(\omega t)$

Luego la corriente eficaz será: $I' = I_m\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow I' = 4\sqrt{2}\text{ A}$

De la ley de Ohm, el voltaje alterno que recibe la resistencia será:

$\varepsilon = RI \Rightarrow \varepsilon = 15[8\text{sen}(\omega t)] \Rightarrow \varepsilon = 120\text{sen}(\omega t)$

Luego, el voltaje eficaz será:

$\varepsilon' = \varepsilon_m(\sqrt{2}/2) \Rightarrow \varepsilon' = 60\sqrt{2}\text{ V}$

Calculando la potencia eficaz consumida en la resistencia:

$P' = \varepsilon' I' \Rightarrow P' = (60\sqrt{2})(4\sqrt{2}) \Rightarrow P' = 480\text{ W}$

7. Un anillo metálico (espira circular) de 20 cm de radio y 20 Ω de resistencia, se encuentra dentro de un campo magnético externo. Si el campo magnético, a través de la superficie limitada por el anillo, aumenta linealmente a razón de 20 T cada segundo, determinar la intensidad de corriente inducida en el anillo.

Resolución:

El flujo magnético se relaciona con el campo magnético externo: $\Phi = BA$

La fuerza electromotriz inducida se define como:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\Delta BA}{\Delta t}$$

Área del círculo: $A = \pi R^2 = \pi(0,2)^2 = 4\pi \times 10^{-2}\text{ m}^2$

$$\varepsilon = -\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)A \Rightarrow \varepsilon = -\left(\frac{20}{1}\right)(4\neq \times 10^{-2}\text{ m}^2)$$

$\varepsilon = 0,8\pi\text{ V}$

De la ley de Ohm: $I = \dfrac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \dfrac{0,8\neq}{20} = 4\pi \times 10^{-2}$

$\therefore\ I = 0,126\text{ A}$

8. Una bobina plana de alambre de 100 vueltas, cada una con área de 14 cm^2, está perpendicular a un campo magnético cuya magnitud cambia con el tiempo de acuerdo con $B = 0,5[\text{sen}(\pi t)]$ T. ¿Cuál es la FEM inducida en función del tiempo?

Resolución:

El flujo magnético se relaciona con el campo magnético externo: $\Phi = BA$

La fuerza electromotriz inducida se define como:

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon = -N\frac{\Delta BA}{\Delta t}$$

Relacionando convenientemente tenemos que:

$$\varepsilon = -NA\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right) = -NA\left[\frac{d(0,5\text{sen}\pi t)}{dt}\right]$$

Derivando y reemplazando, obtenemos que:

$\varepsilon = -NA(0,5\pi\cos\pi t) = -100(14 \times 10^{-4})(0,5\pi\cos\pi t)$

$\therefore\ \varepsilon = -0,2199(\cos\pi t)$

9. Un transformador tiene 50 espiras en el primario y 2000 en el secundario. Si en el primario la FEM es 100 V y la intensidad de corriente 20 A, calcular la tensión y la intensidad de la corriente en el secundario.

Resolución:

El número de vueltas del conjunto de espiras es directamente proporcional a la diferencia de potencial.

$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \Rightarrow \frac{100}{50} = \frac{V_2}{2000}$

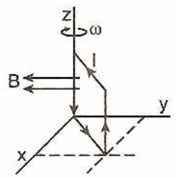
Resolviendo: $V_2 = 4000$ V

Por tratarse de un transformador ideal, no hay pérdidas de ningún tipo. La potencia de entrada y la potencia de salida son iguales:

$P_1 = P_2 \Rightarrow V_1I_1 = V_2I_2$

$(100)(20) = (4000)I_2 \quad \therefore I_2 = 0,5$ A

10. La figura muestra una espira conductora cuadrada de 50 cm^2 que rota en sentido horario alrededor del eje Z con una frecuencia angular de 100 rad/s. Si en esta región del espacio existe un campo magnético uniforme de $\vec{B} = (-4\hat{j})$ T en la dirección de − y, determinar el valor máximo del voltaje.



Resolución:

Ley de inducción de Faraday:

$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\Delta(BA\cos\omega t)}{\Delta t}$

Relacionando convenientemente tenemos que:

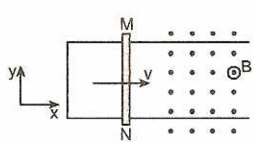
$\varepsilon = -BA\left(\frac{\Delta\cos\omega t}{\Delta t}\right) = -BA(-\omega\text{sen}\omega t)$

$\varepsilon = BA\omega(\text{sen}\omega t) \Rightarrow \varepsilon = (BA\omega)\text{sen}\omega t \Rightarrow \varepsilon_{máx.}\text{sen}\omega t$

Cálculo del valor del voltaje máximo:

$\varepsilon_{máx.} = BA\omega = (4)(50 \times 10^{-4})(10) \Rightarrow \varepsilon_{máx.} = 2$ V

11. Una barra conductora de 0,5 m de largo y resistencia 4 Ω se desliza sobre rieles paralelos con un rapidez de 10 m/s en el interior de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de movimiento cuyo módulo es de 0,4 T. Determinar la potencia disipada (en W) en la barra.



Resolución:

La fuerza electromotriz inducida es: $\varepsilon_i = vBL$

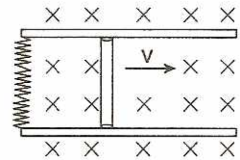
$\varepsilon_i = (10)(0,5)(0,4) = 2$ V

De la ley de Ohm: $\varepsilon_i = IR \Rightarrow (2) = I(4) \Rightarrow I = 0,5$ A

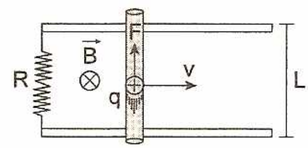
La potencia disipada por el resistor (barra) es:

$P = I^2R \Rightarrow P = (0,5)^2(4) \quad \therefore P = 1$ W

12. En la figura el campo magnético tiene una intensidad de 0,6 T, la varilla tienen una longitud de 15 cm y avanza en 8 m/s hacia la derecha y la resistencia R = 36 Ω. Calcular la fuerza externa (en N) para mover la varilla con velocidad constante.



Resolución:

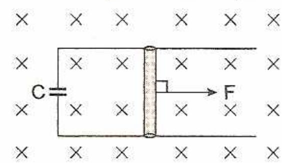


a) Fuerza electromotriz inducida (ley de Faraday)
$\varepsilon = vBL = 8(0,6)(0,15) \Rightarrow \varepsilon = 0,72$ V

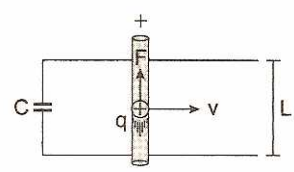
b) Ley de Ohm:
$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,72}{36} = 0,02 \Rightarrow I = 0,02$ A

c) Ley de Ampere:
$F = IBL \Rightarrow F = (0,02)(0,6)(0,15) = 1,8 \times 10^{-3}$
$F = 1,8 \times 10^{-3}$ N

13. Un conductor se desplaza con una rapidez de 0,5 m/s por medio de dos varillas lisas, las cuales están separadas 20 cm. Determinar la energía almacenada en el capacitor de 20 μF.



Resolución:



Fuerza electromotriz inducida (ley de Faraday)

$\varepsilon = vBL = (0,5)(0,1)(0,2) \Rightarrow \varepsilon = 0,1$ V

Energía almacenada en el condensador:

$W = \frac{1}{2}cv^2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6})(0,1)^2 = 10^{-7}$ J

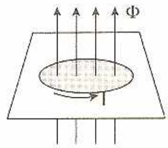
$W = 0,1 \times 10^{-6} \Rightarrow W = 0,1$ μJ

14. Un campo magnético externo generado por una bobina primaria varía uniformemente a un ritmo de 1 T/s. En el interior de una bobina secundaria de sección 0,25 m^2 y un embobinado de 100 espiras. Determinar la fuerza electromotriz inducida en la bobina secundaria.

Resolución:

Ley de Lenz: $\varepsilon_i = n\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$

$\varepsilon_i = n(A)\frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon_i = 100(0,25)1 \Rightarrow \varepsilon_i = 25\ V$



15. Un campo magnético perpendicular al plano de una espira de alambre de área 0,40 m^2 decrece en 0,1 T durante 10^{-3} s. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza electromotriz inducida (en voltios) en la espira?

Resolución:

Ley de Lenz: $\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$\varepsilon_i = A\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right) \Rightarrow \varepsilon_i = 0,4 \times 10^2 \Rightarrow \varepsilon_i = 40\ V$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Una partícula alfa de carga + 2q y masa $6,65 \times 10^{-27}$ kg recorre una trayectoria circular de radio 0,5 m en un campo magnético de 1,4 T. Calcule aproximadamente la energía cinética de la partícula alfa en MeV.
($q = 1,6 \times 10^{-19}$ C; 1 eV $= 1,6 \times 10^{-19}$ J)

A) 19,6 B) 20,6 C) 21,6 D) 22,6 E) 23,6

Resolución:

Si una partícula electrizada, ingresa perpendicularmente a una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$, describe una trayectoria circunferencial cuyo radio de curvatura se determina con la siguiente expresión:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Del problema: $v = \frac{RqB}{m} = \frac{0,5[2(1,6 \times 10^{-19})](1,4)}{6,65 \times 10^{-27}}$

$\Rightarrow v = 3,368 \times 10^5$ m/s

Determinado la energía cinética en (J):

$E_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow E_k = \frac{(6,65 \times 10^{-27})(3,368 \times 10^5)^2}{2}$

$E_k = 3,77 \times 10^{-16}$ J

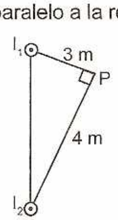
Transformando la unidad:

$E_k = \frac{3,77 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19}} = 23,6 \times 10^6$ eV

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

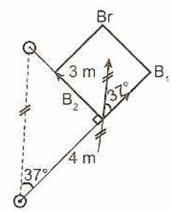
En la figura se muestra dos hilos conductores de gran longitud que son perpendiculares al plano del papel y llevan corrientes de intensidades I_1 e I_2 "saliendo" del papel. Determine el cociente I_1/I_2 para que el campo magnético $\overline{B}$ en el punto P sea paralelo a la recta que une los hilos.



A) 0,50 B) 0,75 C) 0,80
D) 0,90 E) 1,00

Resolución:

Representamos gráficamente los vectores inducción magnética en el punto P.



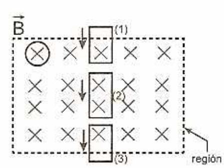
Del gráfico:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{\mu I_2}{2\pi(4)}}{\frac{\mu I_1}{2\pi(3)}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 1$$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Una espira rectangular metálica penetra en una región donde existe un campo magnético $\overline{B}$ uniforme y pasa sucesivamente (bajando) por las posiciones (1), (2) y (3) mostradas en la figura. Con respecto a este proceso se dan las siguientes proposiciones.



I. Cuando la espira está pasando por la posición (1) el flujo magnético a través de ella está disminuyendo.

II. Cuando la espira está pasando por la posición (2) la corriente inducida aumenta.

III. Cuando la espira está pasando por la posición (3) la corriente inducida circula en sentido horario.

Señale la alternativa que presenta la secuencia co-

rrecta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) FVF B) FVV C) VFV
D) FFV E) VVF

Resolución:

Analizando cada una de las proposiciones:

I. **Falso.** Cuando la espira pasa por la posición (1) el flujo magnético va aumentando porque el área efectiva en el interior del campo aumenta.

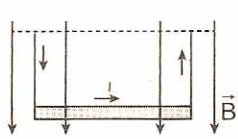
II. **Falso.** Solo existe corriente inducida cuando el flujo magnético efectivo es variable. Cuando la espira pasa por la posición (2) el flujo es constante motivo por el cual no se induce fuerza electromotriz y en consecuencia tampoco corriente eléctrica.

III. **Verdadero.** Por la ley de Lenz, la corriente inducida circula en sentido horario.

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

En la figura se representa una barra conductora de masa 20 g y longitud 10 cm, suspendida por dos hilos rígidos también de material conductor y de masas despreciables. La barra se coloca en un campo magnético, formando la conocida "balanza magnética". Si al circular una corriente I de 2 amperios, por la barra, esta se inclina formando un ángulo $\theta = 45°$ con la vertical, determine la intensidad de inducción magnética $|\vec{B}|$ en Teslas.

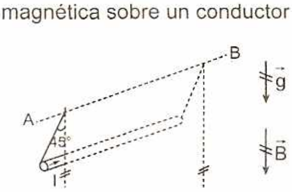


A) 0,098 B) 0,98 C) 9,8
D) 98 E) 980

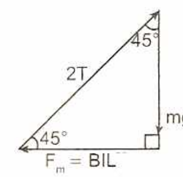
Resolución:

Realizando un diagrama de cuerpo libre

F_m: Fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo.



Aplicando $\sum \vec{F} = \vec{0}$ para el equilibrio (primera condición de equilibrio)



$$F_m = BIL; \; mg = BIL; \; B = \frac{mg}{IL}$$

Reemplazando los datos:

$$B = \frac{20 \times 10^{-3} \times 9,8}{2 \times 10 \times 10^{-2}} \Rightarrow B = 0,98 \text{ T}$$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

Calcular la intensidad del campo magnético, en T, que genera una corriente eléctrica i = 10 A en el borde de un alambre rectilíneo de radio r = 2 mm.

μ_O = permeabilidad magnética del vacío.

$\mu_O = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A

A) 10^{-3} B) 10^{-2} C) 10^{-1} D) 10 E) 10^{2}

Resolución:

Del gráfico:

El modulo del vector inducción magnética se calcula con:

$$B_A = \frac{\mu_O}{2\pi}\left(\frac{I}{d}\right)$$

Reemplazando:

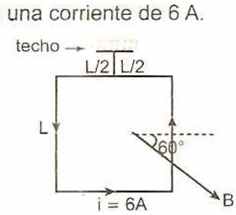
$$B_A = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi}\right)\left(\frac{10}{2 \times 10^{-3}}\right)$$

$\therefore \; B_A = 10^{-3}$ T

Clave: A

PROBLEMA 6 (UNI 2012 - II)

Una espira conductora cuadrada de lado L que está en el plano de papel se encuentra suspendida de un hilo como se muestra en la figura. Si la espira se halla en un campo magnético uniforme de 1 T, que hace un ángulo de 60° con el plano de papel y paralelo al techo, calcule la magnitud del torque (en Nm) sobre la espira cuando circula por ella una corriente de 6 A.



A) L^2 B) $3L^2$ C) $9L^2$ D) $12L^2$ E) $15L^2$

Resolución:

Determinamos el torque, con la ecuación:

$$t = NBAI(\text{sen}\theta)$$

$t = (1)(1)(L^2)(6)\text{sen}30°$

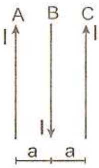
$t = 6(L^2)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t = 3L^2$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

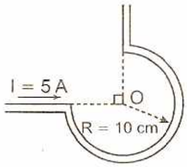
1. Tres conductores fijos, rectos, paralelos y muy largos, son colocados verticalmente tal como muestra la figura.
Indicar verdadero (V) o falso (F).

I. A y B tienden a aproximarse.
II. A y C tienden a aproximarse.
III. A y C tienden a separarse.
IV. B y C tienden a aproximarse.
V. La fuerza en cada conductor es cero.



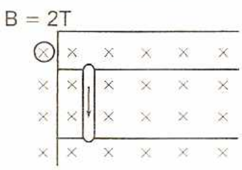
A) VVVVV B) VFVVF C) VFVFF
D) FFVFF E) FFFFF

2. Un alambre muy largo se ha doblado tal como se muestra. Si transporta la corriente de 5 A, determine la introducción magnética en "O".



A) $7{,}5\pi\ \mu T$ B) $2\pi\ \mu T$ C) $7\pi\ \mu T$
D) $15\pi\ \mu T$ E) $3{,}5\pi\ \mu T$

3. Por la barra metálica de 1kg y 50 cm de longitud circulan 5 A, tal como se muestra. Si esta barra es dejada sobre una mesa horizontal lisa, determine la distancia que recorre en los primeros 2 segundos de iniciado su movimiento.



A) 2 m B) 6 m C) 5 m
D) 10 m E) 8 m

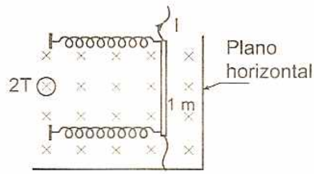
4. Se tiene dos alambres conductores rectilíneos y paralelos separados 50 cm, en los cuales circulan corrientes de igual intensidad (I = 5 A) y en direcciones opuestas. Calcular el módulo de la inducción magnética en un punto que está a 50 cm de cada conductor.

A) $3\ \mu T$ B) $2\ \mu T$ C) $4\ \mu T$
D) $5\ \mu T$ E) $20\ \mu T$

5. Dos espiras circulares que coinciden sus centros se hallan en dos planos perpendiculares entre sí. Si el radio de una de ellas es de 2 cm y de la otra 4 cm, además llevan corrientes de 8 A y 12 A, respectivamente, determinar la inducción magnética en el centro de las espiras.

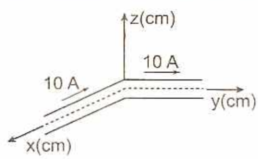
A) $10^{-2}\ \pi T$ B) $10^{-2}\ T$ C) $10^{-4}\ \pi T$
D) $10^{-5}\ \pi T$ E) $10^{-6}\ \pi T$

6. La figura muestra un conductor que transporta corriente cuya intensidad es 10 A. Determine la deformación que experimenta cada resorte (k = 100 N/m) en equilibrio.



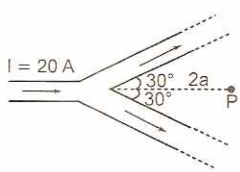
A) 0,1 m B) 0,2 m C) 0,4 m
D) 0,5 m E) 1 m

7. Determine el módulo de la inducción magnética en el punto cuyas coordenadas son (0; 0; 50) cm.



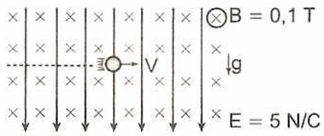
A) $2\ \mu T$ B) $2\ \mu T$ C) $2\sqrt{2}\ \mu T$
D) $\sqrt{2}\ \mu T$ E) $5\sqrt{2}\ \mu T$

8. El conductor que transporta la corriente I se divide en dos conductores de gran longitud e igual sección transversal. Determine el módulo de la inducción magnética en P.



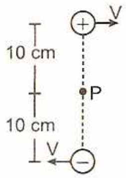
A) $\dfrac{\mu_0}{2\pi a}$ B) $\dfrac{20\mu_0}{\pi a}$ C) $\dfrac{10\mu_0}{\pi a}$ D) $\dfrac{10\sqrt{3}\,\mu_0}{\pi a}$ E) 0

9. Una partícula electrizada con una cantidad de carga igual a 6 mC se encuentra dentro de un campo magnético y eléctrico, ambos homogéneos moviéndose con una rapidez de 200 m/s como se indica. ¿Qué masa presenta dicha partícula? ($g = 10\ m/s^2$)



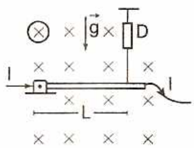
A) 2 g B) 4 g C) 6 g D) 9 g E) 12 g

10. Un protón y un electrón son lanzados por un acelerador de partículas y en el instante mostrado poseen la rapidez de 10 m/s. Determine la inducción magnética en "P".



A) 10^{-7} T B) 1 μT C) 10 μT
D) 0,01 μT E) 0

11. Por un conductor rectilíneo homogéneo de 80 cm y 900 g circula una corriente de 2,5 amperios. ¿Cuánto indica el dinamómetro D? (B = 2,2 T)

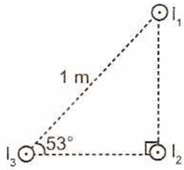


A) 2,8 N B) 2,5 N C) 2,2 N
D) 2,66 N E) 2,3 N

12. En la figura se muestra la sección de tres conductores de gran longitud que transportan las corrientes:

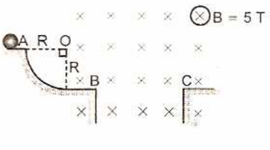
$I_1 = 20$ A e $I_2 = 30$ A $= I_3$

Determine la fuerza magnética sobre un metro del conductor que transporta "I_2"



A) $15\sqrt{2}\times10^{-5}$ N B) 15×10^{-5} N C) 30×10^{-5} N
D) 2×10^{-5} N E) $5\sqrt{2}\times10^{-5}$ N

13. Un pequeña esfera electrizada con $+2\,\mu$C y 2×10^{-3}g de masa es soltada en "A". Si pasa de "B" hacia "C" horizontalmente, determinar el valor de R. Considerar superficies lisas aislantes.



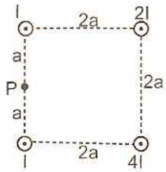
A) $\frac{1}{2}$ m B) $\frac{1}{4}$ m C) $\frac{1}{5}$ m
D) $\frac{1}{8}$ m E) 1 m

14. ndique verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proporciones:

I. Las interacciones entre conductores que transportan corrientes, se da por medio de los campos magnéticos.
II. Los campos magnéticos son rotacionales.
III. Todos los cuerpos que se encuentran dentro de un campo magnético, se imanan, es decir, establecen a su alrededor un campo magnético.

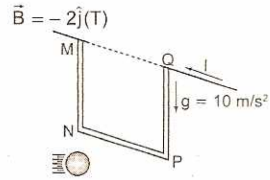
A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) VFV

15. Indique el vector que mejor representa la inducción magnética en el punto P debido al sistema de conductores rectilíneos de gran longitud.



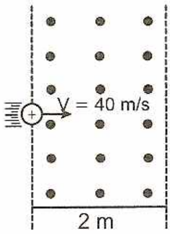
A) → B) ↑ C) ←
D) ↙ E) ↘

16. Un alambre conductor (MNPQ) de 60 g doblado en forma de cuadro cuyo lado mide 10 cm de longitud y por el cual circula 1 A, se encuentra en posición vertical. Si en dicha región se establece un campo magnético homogéneo cuyas líneas de inducción están dirigidas verticalmente hacia abajo y su inducción magnética aumenta lentamente, determine el ángulo que se desvía el cuadro con respecto a la vertical cuando
$B = -2\hat{j}$ (T)



A) $\theta = \tan^{-1}(0{,}5)$ B) $\theta = \text{sen}^{-1}(0{,}5)$
C) $\theta = \tan^{-1}(0{,}25)$ D) $\theta = \text{sen}^{-1}(0{,}25)$
E) $\theta = 60°$

17. Una partícula de 2 g y electrizada con 1 mC ingresa a una región donde se ha establecido un campo magnético homogéneo de 20 T cuyo ancho de la región 2 m. Determine al cabo de que tiempo escapa de dicha región y que ángulo forma con la vertical. (Desprecie efectos gravitatorios).

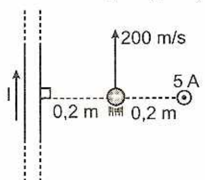


A) $t = \frac{\neq}{60}$ s; $\theta = \frac{\neq}{2}$ rad B) $t = \frac{\neq}{30}$ s; $\theta = \frac{\neq}{3}$ rad

C) $t = \frac{\neq}{60}$ s; $\theta = \frac{\neq}{3}$ rad D) $t = \frac{\neq}{2}$ s; $\theta = \frac{\neq}{2}$ rad

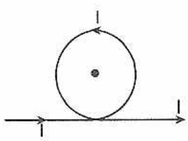
E) $t = \frac{\neq}{60}$ s; $\theta = \frac{\neq}{4}$ rad

18. Determine el módulo de la fuerza magnética que experimenta la partícula electrizada con $q = +0,1$ mC. Considere que los conductores que transportan la corriente continua son muy largos. ($I = 10$ A)



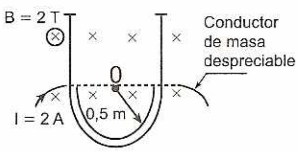
A) 0,2 μN B) 2 μN C) 20 μN
D) 5 μN E) 0,5 μN

19. Se muestra un gran conductor al cual a una parte se le dio la forma de una circunferencia y cuidando que no se dé el contacto en él. Si en dicho conductor se presenta una intensidad de corriente de 7 A, determinar la inducción magnética ($\vec{B}$) en el centro de la circunferencia cuyo radio es de 29 cm.
$\left(\neq = \frac{22}{7}\right)$



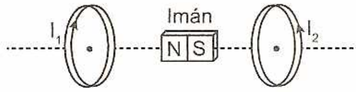
A) 20 μT B) 4 μT C) 40 μT
D) 24 μT E) 200 μT

20. Si el conductor en forma de semicircunferencia cuelga de dos hilos aislantes, determine la tensión en uno de ellos. (Masa del conductor igual a 1 kg y ($g = 10$ m/s^2)



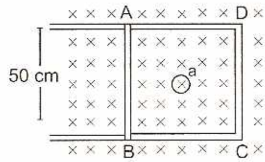
A) 2 N B) 4 N C) 6 N
D) 5 N E) 3 N

21. En el siguiente sistema, podemos afirmar correctamente que:



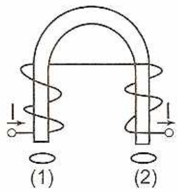
A) Si el imán no se mueve, I_1 e I_2 son correctos.
B) Si el imán se dirige a la izquierda, solo I_1 es correcto.
C) Si el imán se dirige a la derecha I_1 e I_2 son correctos.
D) Si el imán se dirige a la izquierda, I_1 antihorario e $I_2 = 0$
E) Si el imán va a la derecha con velocidad constante; $I_1 = I_2 =$ Cero.

22. Se muestra la barra conductora AB que hace contacto con los rieles metálicos AD y BC que están separados 50 cm en un campo magnético uniforme de 1 T perpendicular al plano de la figura como se muestra. Calcular la magnitud y sentido de la fuerza electromotriz inducida en la barra, cuando se mueve hacia la izquierda con rapidez de 8 m/s.



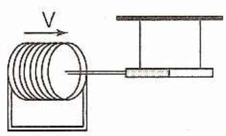
A) 8 V; hacia abajo B) 8 V; hacia arriba
C) 2 V; hacia abajo D) 4 V; hacia abajo
E) 4 V; hacia arriba

23. El electroimán es soltado libremente con respecto a los sentidos de las corrientes inducidas en las espiras (1) y (2). Podemos afirmar:



A) I_1 e I_2 son antihorarios
B) I_1 e I_2 son horarios
C) I_1: Antihorario; I_2: Horario
D) I_1: Horario; I_2: Antihorario
E) I_1: Antihorario; I_2 = Cero

24. Si el solenoide se acerca al imán, ¿Hacia dónde se moverá el imán?

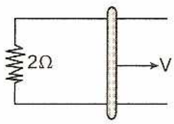


A) Hacia la derecha B) Hacia la izquierda
C) No se moverá D) No se puede determinar
E) Se moverá hacia ambos lados.

25. Un campo de 0,5 T uniforme está dirigido perpendicularmente al plano de una espira rectangular de lados 20 y 40 cm. Si el campo desaparece en 0,2 s, calcular el valor de la fem media inducida en la espira en voltios.

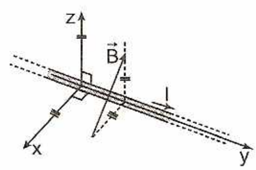
A) 2,5 B) 0,2 C) 0,25 D) 6,25 E) 0,4

26. Calcular la potencia disipada en la resistencia de 2 Ω cuando la barra conductora de 0,5 m se desliza pegado a los rieles con una velocidad de 10 m/s en el interior de un campo magnético uniforme de 0,4T. Despreciar las resistencias de la barra y los rieles



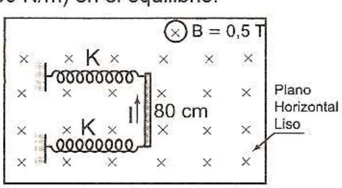
A) 2 W B) 3 W C) 4 W D) 5 W E) 6 W

27. Determine la fuerza magnética que experimenta 1 m del conductor de gran longitud que transporta corriente eléctrica de 10 A.
$\vec{B} = (-0{,}3\hat{j} + 0{,}5\hat{k})$ teslas.



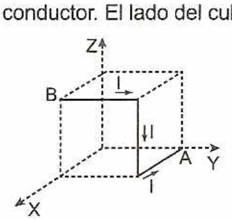
A) $\sqrt{15}$ N B) $\sqrt{17}$ N C) $2\sqrt{19}$ N
D) $\sqrt{34}$ N E) $3\sqrt{13}$ N

28. La figura muestra un conductor que transporta una corriente eléctrica cuya intensidad es 10 A. Determine la deformación que experimenta cada resorte (K = 100 N/m) en el equilibrio.



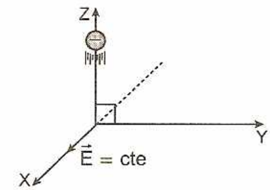
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

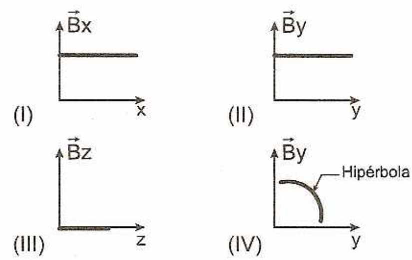
29. Un campo magnético uniforme de 2 T está orientado en dirección del eje Z y la corriente que circula por la barra AB es de 10 A. Halle la fuerza magnética sobre este conductor. El lado del cubo mide 10 cm.



A) $2\sqrt{2}$ N B) 2 N C) $2\sqrt{3}$ N
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ N E) $5\sqrt{2}$ N

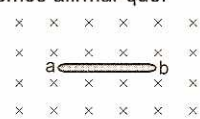
30. Una partícula electrizada negativamente es lanzada a lo largo del eje Z. Si se desprecia los efectos gravitatorios, para que tal partícula se desplace uniformemente en dicha región debe existir un campo magnético cuya inducción magnética varíe con la posición según.





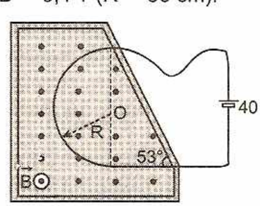
A) I y II B) I y IV C) II y III D) I y IV E) III

31. Si el potencial eléctrico en el extremo "a" es mayor que en el extremo "b", pero luego se igualan resultando que el potencial en "b" es mayor que en "a", entonces podemos afirmar que:



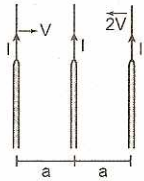
A) La barra se mueve a la derecha.
B) La barra se mueve a la izquierda.
C) La barra baja, se detiene y luego asciende.
D) La barra asciende, se detiene y luego baja.
E) La barra se mueve a la derecha, se frena y luego va a la izquierda.

32. Determine la fuerza neta de parte del campo magnético sobre el alambre de 20 Ω doblado en la forma mostrada y ubicado en un campo magnético de inducción B = 0,4 T (R = 50 cm).



A) 3 N B) 10 N C) 4 N D) 1 N E) 8 N

33. Se tiene 3 cables paralelos que conducen corriente en un mismo sentido, de pronto los 2 cables extremos se acercan con rapidez de V y 2V. ¿Qué sucede con el cable central?

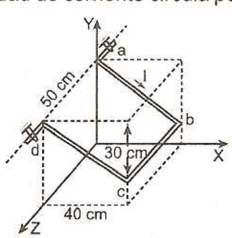


A) Se queda en el mismo lugar.
B) Se desplaza a la izquierda.
C) Se desplaza a la derecha.
D) Depende de las velocidades.
E) No se puede precisar.

34. Una barra de aluminio de 5 N reposa apoyada entre dos rieles separados 50 cm que conducen una corriente eléctrica de 40 A de un riel a otro, si se establece un campo magnético $\vec{B}$ representado por líneas de inducción perpendiculares al plano formado por los rieles. ¿Para qué módulo de $\vec{B}$ la barra de aluminio resbala?
Considere que el coeficiente de rozamiento estático entre el riel y la barra es 0,8.

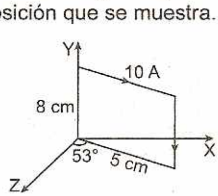
A) $B \leq 0{,}1$ T B) $B = 0{,}2$ T C) $B \geq 0{,}2$ T
D) $B > 0{,}2$ T E) $B < 0{,}2$ T

35. El conductor abcd de 300 g se encuentra dentro de un campo magnético de inducción $\vec{B} = (40; -30)$ mT; en la posición que se indica.
¿Qué intensidad de corriente circula por el alambre?



A) 36 A B) 32 A C) 64 A
D) 128 A E) 150 A

36. La espira rectangular que se indica puede girar alrededor del eje Y, lleva una corriente de 10 A en el sentido indicado. Si la espira está en un campo magnético uniforme 0,1 T paralelo al eje X, determine el modulo del torque requerido para mantenerlo en la posición que se muestra.

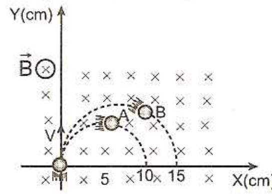


A) 16×10^{-4} Nm B) 32×10^{-4} Nm
C) 64×10^{-4} Nm D) 120×10^{-4} Nm
E) 160×10^{-4} Nm

37. Una partícula electrizada con 36×10^{-10} C es acelerada por una diferencia de 1200 V e ingresa a un campo magnético homogéneo ($B = 0{,}004\pi$T) haciendo un ángulo de 30° con líneas de inducción magnética. Determine la longitud de los pasos que experimenta la partícula, sabiendo que su masa es de 18×10^{-18} kg. Desprecie efectos gravitatorios.

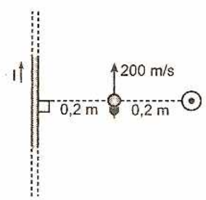
A) 0,5 m B) 1,5 m C) 3 m
D) 2 m E) 2,5 m

38. Indique la relación de masas de dos partículas electrizadas con igual cantidad de carga eléctrica y lanzadas con igual rapidez según se indica.



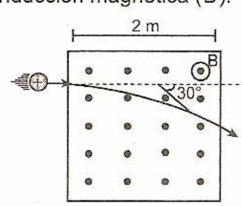
A) 2 : 3 B) 1 : 2 C) 1 : 3
D) 3 : 4 E) 1 : 5

39. Determine el módulo de la fuerza magnética que experimenta la partícula electrizada con +0,1 mC (I = 10 A)



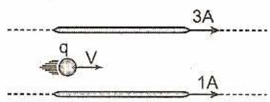
A) 0,1 μN B) 0,2 μN C) 0,5 μN
D) 0,7 μN E) 0,8 μN

40. En un experimento es necesario desviar en 30° a un haz de iones cuya cantidad de carga es $+8 \times 10^{-4}$ C y tiene una masa de 4×10^{-9} kg. Estos iones son lanzados con una rapidez de 1600 m/s, a través de una región donde se manifiesta un campo magnético uniforme. Determine el valor de la inducción magnética ($\vec{B}$).



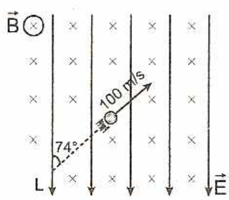
A) 4 mT B) 3 mT C) 2 mT
D) 1 mT E) 0,5 mT

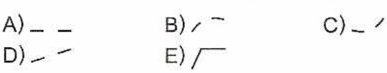
41. ¿Con que rapidez se debe lanzar una partícula de 4 mg y 50 mC para que se desplace paralelamente a los conductores en el plano vertical que los contiene equidistando de ambos? Los conductores de gran longitud están distanciados 1 m entre sí y transportan 3 A y 1 A.



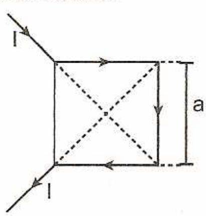
A) 10^3 m/s B) 10^6 m/s C) 5×10^3 m/s
D) 3×10^3 m/s E) 3×10^8 m/s

42. ¿Que alternativa representa mejor la trayectoria que sigue la particular electrizada con 0,1 mC ? (Desprecie los efectos gravitatorios, B = 0,24 T y E = 25 N/C)



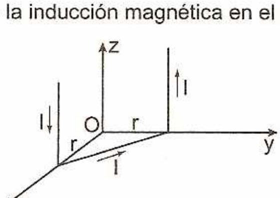


43. La espira cuadrada está definida por un alambre de sección uniforme y tiene lado "a". ¿Qué inducción magnética se origina en el centro geométrico al paso de la corriente I?



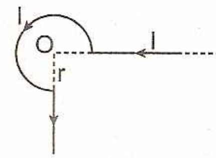
A) $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}$ B) $\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{a}$ C) Cero
D) $\frac{\mu_0}{\pi}\frac{\sqrt{2}I}{a}$ E) Faltan datos

44. El conductor, muy largo, transporta corriente cuya intensidad es I, se encuentra ubicado como indica. Determine la inducción magnética en el punto O.



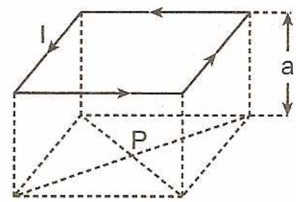
A) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(1;1;\sqrt{2})$ B) $\frac{\mu_0 I}{\pi r}(1;\sqrt{2};1)$ C) $\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(1;1;2)$
D) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\sqrt{2};2;1)$ E) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(3;2;1)$

45. Determine la inducción magnética en el punto O para el siguiente conductor muy largo que se encuentra ubicado como se indica transportando corriente de intensidad I.



A) $\frac{3\propto_0 I}{8r}$ B) $\frac{4\propto_0 I}{7r}$ C) $\frac{5\propto_0 I}{2r}$
D) $\frac{7\propto_0 I}{6}$ E) $\frac{5\propto_0 I}{8r}$

46. Si por el perímetro de una de las cajas de un cubo de lado "a" circula una corriente I, ¿Qué inducción magnética se establece en el punto P?.



A) $\frac{\mu_0 I}{\sqrt{5}\pi a}$ B) $\frac{\mu_0 I}{\pi a}$ C) $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$
D) $\frac{\sqrt{6}\mu_0 I}{30\pi a}$ E) $\frac{2\sqrt{6}\mu_0 I}{15\pi a}$

47. Indique la expresión falsa.

A) Los materiales ferromagnéticos ante la acción de un campo magnético externo intensifican el campo en su interior.
B) Para los materiales paramagnéticos y diamagnéticos $\mu \approx 1$.
C) Un imán en forma de herradura tiene mayor poder de atracción que un imán de barra.
D) Toda partícula electrizada en movimiento al encontrarse en un campo magnético externo experimenta una fuerza magnética.
E) Cuando un electrón es lanzado perpendicularmente a un campo magnético externo describe una trayectoria circunferencial.

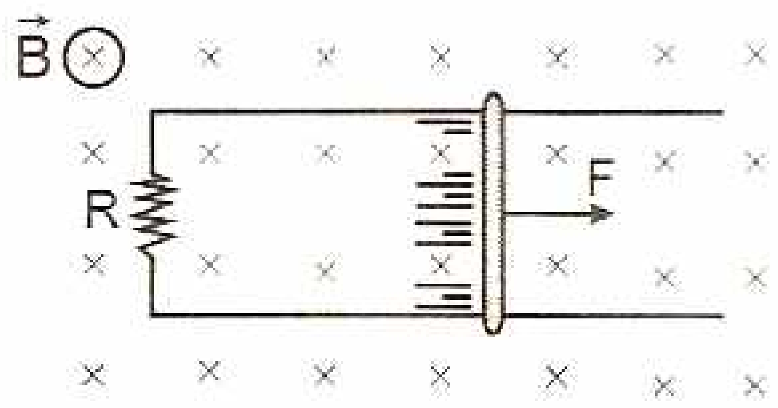
48. Indique la expresión falsa.

A) Los electrones debido a su movimiento alrededor del núcleo, generan campo magnético.
B) Las propiedades magnéticas de todo cuerpo están determinadas por corrientes eléctricas cerradas dentro de él.
C) Los materiales ferromagnéticos generan campo magnético a consecuencia de que fundamentalmente los electrones presentan rotación propia y además giran en torno al núcleo.
D) Todos los cuerpos generan campo magnético.
E) Solo los imanes generan campo magnético.

49. Indique la expresión falsa.

A) Si su cuerpo es ubicado dentro de un campo magnético y se imana, se puede decir que se trata de un material de alta permeabilidad magnética.
B) Los cuerpos con gran permeabilidad magnética ($\mu >> 1$) son llamados ferromagnéticos.
C) En los cuerpos ferromagnéticos los campos magnéticos se generan a consecuencia del movimiento de rotación propia del electrón y el movimiento de traslación en torno al núcleo.
D) Los materiales ferromagnéticos no son muy usados en generadores y motores eléctricos por tener alta permeabilidad magnética.
E) Un material ferromagnético puede perder sus propiedades magnéticas a cierta temperatura.

50. Una barra conductora de 0,5 m se apoya en dos rieles lisos y conductores tal como se muestra. Para que módulo de la fuerza F, la resistencia $R = 5\ \Omega$ disipa 20 W ($B = 50$ mT).



A) 10 mN B) 20 mN C) 30 mN
D) 40 mN E) 50 mN

51. Una sustancia ferromagnética cuya permeabilidad magnética relativa es de 800, se emplea como núcleo para un arrollamiento toroidal cuyos radios interno y externo son de 32 cm y 38 cm. Si por las 140 espiras del toroide circula una corriente de 25 A, determine el módulo de la densidad del flujo ($\vec{B}$) en el interior del toroide.

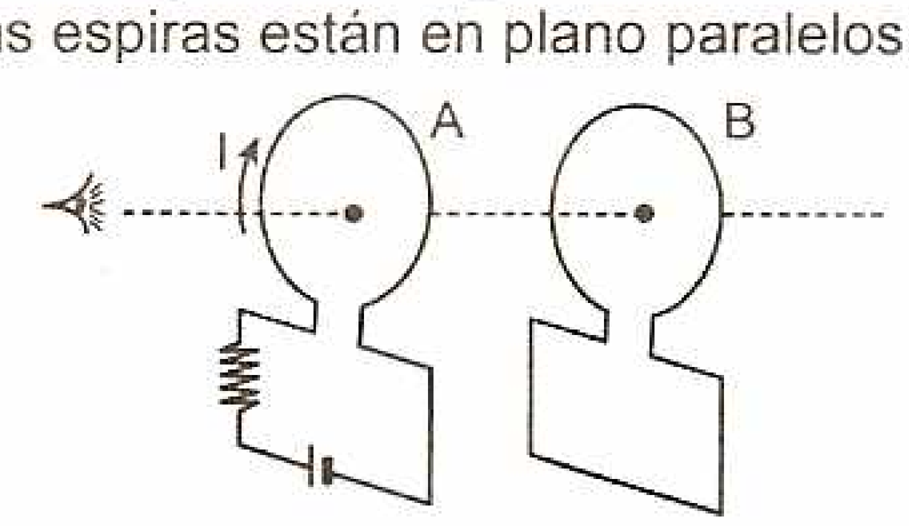
A) $1,6\ \frac{Wb}{m^2}$ B) $20\ \frac{Wb}{m^2}$ C) $8\ \frac{Wb}{m^2}$

D) $10\ \frac{Wb}{m^2}$ E) $28\ \frac{Wb}{m^2}$

52. En cierta zona donde el campo es variable, el flujo que atraviesa una espira está dado por la siguiente ley: $\phi = 0,3t^2$ donde "t" se expresa en segundos y "ϕ" en weber. Determinar la fem inducida en los 10 primeros segundos.

A) 0,3 V B) 3 V C) 30 V D) 1 V E) 10 V

53. Debido a la corriente "I" se genera un campo magnético cuyas líneas de inducción intersectan a la espira B. Indique cómo fluye la corriente en la espira B. Las espiras están en plano paralelos.

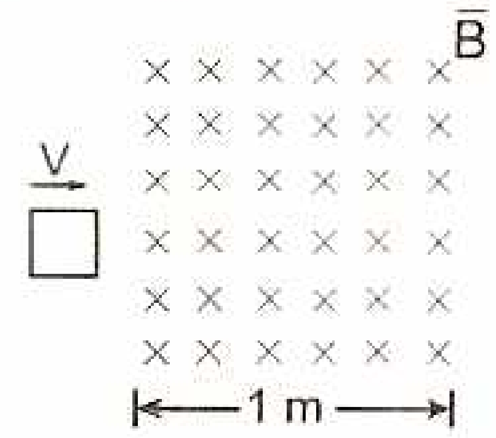


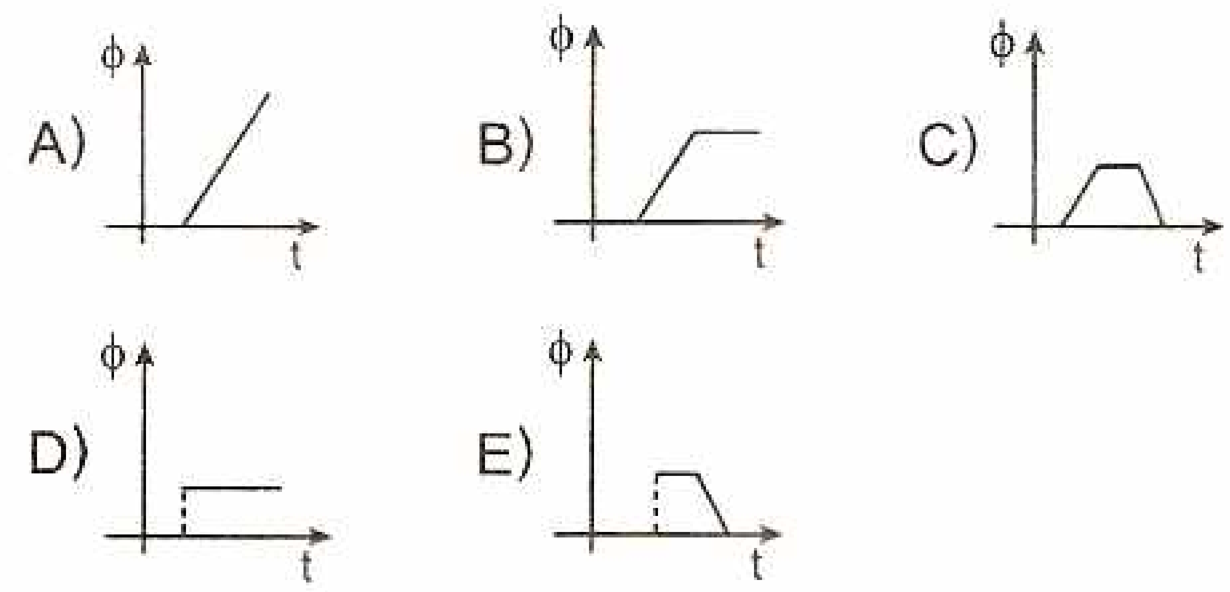
A) Sentido horario.
B) No se genera corriente inducida.
C) Sentido antihorario.
D) Depende del voltaje en la espira A.
E) Ninguna anterior es correcta.

54. Un anillo metálico de radio "r" se encuentra dentro de un campo magnético, cuyas líneas de inducción son perpendiculares al plano que contiene el anillo. Si $B = kt$($k > 0$ y "t" el tiempo), determine el módulo de la intensidad del campo eléctrico en el interior del anillo.

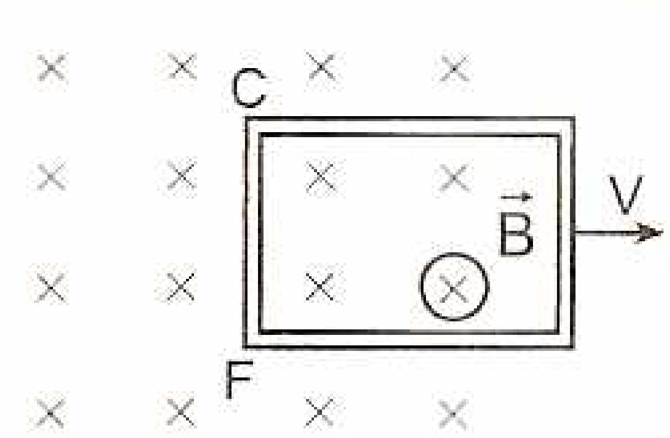
A) $\frac{kV}{2}$ B) kV C) $\frac{kV^2}{2}$ D) $\frac{kV}{4}$ E) $2kV$

55. Una espira cuadrada de lado 100 mm, atraviesa una región de 1 m de ancho donde existe un campo magnético uniforme, perpendicular AL plano de la espira. ¿Qué grafico representa mejor el valor del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo?





56. La figura muestra una espira metálica que se desplaza hacia la derecha con una rapidez $V = 10$ m/s en un campo magnético $B = 0,4$ T. Suponga que $CF = 0,4$ m. ¿Qué voltaje se induce en el techo CF? ¿Qué punto se encuentra a mayor potencial?



A) 2,1 V; F B) 1,6 V; C C) 0,8 V; F
D) 2,4 V; C E) 1,6 V; F

57. Un transformador posee $N_p = 500$ vueltas y $N_s = 2000$ vueltas. Si el voltaje de entrada es $V(t) = 170\cos Wt$, ¿Qué voltaje eficaz se genera en la bobina secundaria?

A) $20\sqrt{2}$ V B) $30\sqrt{2}$ V C) 34 V
D) $34\sqrt{2}$ V E) $17\sqrt{2}$ V

58. En cierta zona donde el campo magnético es variable, el flujo que atraviesa una espira está dado por

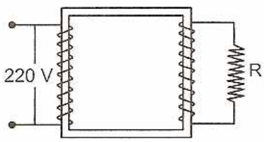
la siguiente ley: $\phi = 0{,}3t^2$; donde "t" se expresa en segundos y "ϕ" en weber. Calcule el valor medio de la fem inducida en los 10 primeros segundos.

A) 0,3 V B) 3,0 V C) 30,0 V
D) 1,0 V E) 10,0 V

59. A un transformador reductor de 220 V a 110 V se le conecta un dispositivo que requiere una potencia de 440 W. Considerando una eficiencia de 80% en el transformador. Determine la intensidad de corriente eficaz suministrada al primario. La tensión eléctrica (voltaje) de la línea es sinusoidal de frecuencia 60 Hz.

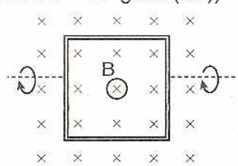
A) 2,5 A B) 5,0 A C) 2,0 A
D) 4,0 A E) 8,0 A

60. Calcular la intensidad de la corriente eficaz que circula por la resistencia R = 11 Ω, si el voltaje eficaz en el primario del transformador ideal es de 220 V. El número de espiras del primario es 100 y el del secundario 150.



A) 60 A B) 40 A C) 45 A
D) 50 A E) 30 A

61. Una bobina de 1000 espiras cuya área es de 100 cm^2 es perpendicular al campo magnético terrestre, gira 90° en 1 s. La fem media proveniente de la bobina durante este segundo resulta ser 0,6 mV. ¿Cuál es el valor del campo magnético terrestre?. (1 tesla = 10^4 gaus (Gs))



A) 0,8 Gs B) 0,2 Gs C) 1 Gs
D) 0,6 Gs E) 0,3 Gs

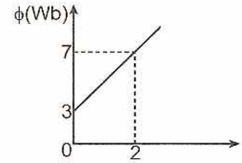
62. Una fuente de voltaje alterno $E = 20\text{sen}(120\pi t)$ voltios se conecta a una resistencia de 4 Ω. Calcular la potencia consumida en watt.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

63. Se coloca una bobina de 200 vueltas y 0,1 m de radio perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T. Encontrar la fem media inducida en la bobina, si en 0,1 s se duplica el campo.

A) 6π V B) 10π V C) 4π V
D) 8π V E) 2π V

64. En la figura se muestra el grafico que representa la variación del flujo magnético perpendicular al plano de una bobina de 50 espiras en función del tiempo. Calcular la fem inducida en dicha bobina durante el intervalo de tiempo [2; 10] segundos.



A) 100 V B) 20 V C) 80 V D) 90 V E) 70 V

65. Un aeroplano vuelva paralelamente al suelo y hacia el oeste a una velocidad de 720 km/h. Si la componente vertical del campo magnético vale 5×10^{-5} T y la diferencia de potencial entre los extremos (A y B) de las alas es 0,25 voltios, la distancia entre los puntos A y B es:

A) 20 m B) 25 m C) 40 m
D) 50 m E) 60 m

66. En cierto lugar el campo magnético terrestre es 10^{-4} T y el ángulo de inclinación es 53°. Si el tren viaja a 72 km/h sobre los rieles horizontales separados una distancia "d", si la diferencia de potencial entre los rieles es 2 mV, luego:

A) d = 1 m B) d = 2 m C) d = 2,5 m
D) d = 1,5 m E) d = 1,25 m

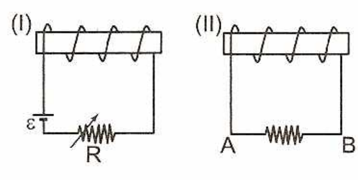
67. Un aeroplano vuela paralelamente al suelo y hacia el oeste a una velocidad de magnitud 100 m/s. Si la componente vertical del campo magnético vale 0,8 gauss, ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las puntas de las alas cuya separación es 25 m? (Considerar 1T = 10^4 gauss)

A) 0,1 V B) 0,2 V C) 0,3 V
D) 0,4 V E) 0,5 V

68. En cierto lugar el campo magnético terrestre es $0{,}5\times10^{-4}$ T y el ángulo de inclinación es 53°. Si un tren viaja a 72 km/h sobre los rieles horizontales separados 1 m, ¿Cuál es la diferencia de potencial entre rieles?

A) 8×10^{-4} V B) 6×10^{-4} V C) 3×10^{-2} V
D) 2×10^{-3} V E) 8×10^{-3} V

69. En el circuito (I) se tiene una resistencia variable (R). Indicar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes afirmaciones, cuando el valor de R aumenta:



I. La corriente inducida en (II) va de A hacia B.
II. El potencial eléctrico en B es mayor que en A.
III. El valor de la corriente inducida en (II) disminuye.

A) VVV B) VFF C) VFV
D) FVF E) FVV

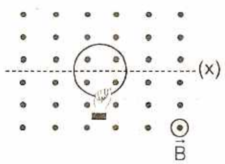
70. El flujo magnético que pasa a través de una espira circular aumenta a razón de 18×10^{10} maxwell/min. Si la intensidad de la corriente eléctrica inducida es de 15 A, determine el valor de la resistencia eléctrica de la espira.
(Dato: 1 weber $=10^8$ maxwell)

A) 0,2 Ω B) 0,5 Ω C) 1 Ω
D) 2 Ω E) 4 Ω

71. En un campo magnético uniforme de 100 mT, se coloca un contorno cuadrado. El plano de éste forma un ángulo de 45° con la dirección del campo magnético. El lado del cuadrado es de 4 cm. El flujo magnético que atraviesa el contorno es:

A) $11{,}3\times10^{-5}$ Wb B) $1{,}13\times10^{-5}$ Wb
C) $22{,}6\times10^{-5}$ Wb D) $2{,}26\times10^{-5}$ Wb
E) Cero

72. En la espira se induce una corriente eléctrica cuando:
I. Realiza un MRU perpendicularmente a $\vec{B}$.
II. Oscila perpendicularmente al eje X.
III. Realiza MRUV perpendicularmente a $\vec{B}$.
IV. Varía el flujo magnético que atraviesa la espira.



¿Qué proposición(es) es (son) verdaderas(s)?

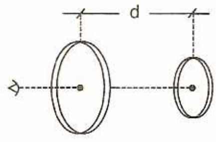
A) I; IV B) I; II C) Solo III
D) Solo IV E) Todas

73. Una espira circular de resistencia eléctrica igual a $12\ \pi\Omega$ y área $A = 25\ cm^2$ se encuentra en el plano X − Y dentro de un campo magnético de inducción $\vec{B} = 100Sen(12\pi t)\hat{k}$ mT.
Determine la intensidad de corriente eléctrica inducida en la espira en $t=\frac{1}{6}$ s.

A) 25 mA B) 2 mA C) 0,5 mA
D) 0,25 mA E) 0,2 mA

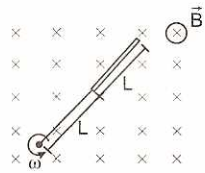
74. Dos espiras conductoras se encuentran una frente a la otra separadas una distancia "d". Un observador colocado sobre su eje común observa de izquierda a derecha. Súbitamente en la espira más grande se establece una corriente I en el sentido de las agujas del reloj. Indicar verdadero (V) o falso (F).

I. La corriente inducida en la espira pequeña es de sentido antihorario.
II. Las espiras se repelen.
III. El campo de la corriente inducida, sobre el eje de la aspira, está orientada hacia la izquierda.



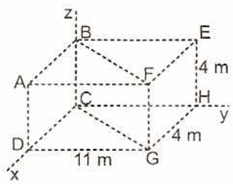
A) VVV B) VVF C) FFV
D) VFV E) VFF

75. Una varilla metálica de 1 m de longitud está unida a un hilo aislante y gira en un plano horizontal a 2 rad/s. Si B = 5 T, Determine la fem inducida entre los extremos de la barra (L = 1 m)



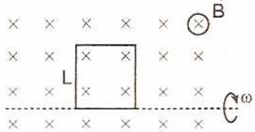
A) 10 V B) 15 V C) 20 V
D) 25 V E) 30 V

76. Determine el valor del flujo magnético que atraviesa la superficie CBFG, si el campo magnético uniforme B = 80 T, tiene dirección +y.



A) 1380 Wb B) 138 Wb C) 128 Wb
D) 1280 Wb E) 640 Wb

77. Si la espira cuadrada de lado "L" gira a una rapidez angular constante, determine la corriente eléctrica inducida en la espira (Resistencia eléctrica igual a R).

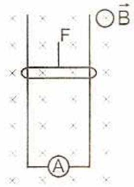


A) $\frac{BL^2\omega Sen\omega z}{R}$ B) $BL^2\omega cos\omega t$ C) $BL^2\omega sen\omega t$

D) $\frac{BL\omega Sen\omega t}{R}$ E) $\frac{BL^2\omega}{R}$

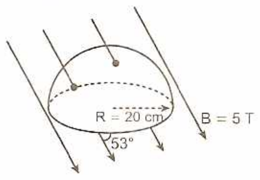
78. Se tiene un alambre de resistencia eléctrica despreciable y en forma de "U" vertical. En él se hace deslizar una barra de 1 m con rapidez constante a

razón de 0,5 m/s. Determinar la lectura del amperímetro ideal. La barra es de 5 Ω y B = 0,1 T.



A) 1 A B) 2 A C) 0,1 A D) 0,01 A E) 10 A

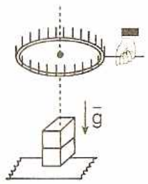
79. Determine el flujo magnético saliente a través de la base del sólido que se muestra de 20 cm de radio.



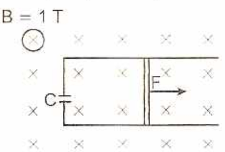
A) $0{,}12\pi$ Wb B) $0{,}15\pi$ Wb C) $0{,}16\pi$ Wb
D) $0{,}2\pi$ Wb E) $0{,}24\pi$ Wb

80. La espira se hace descender sobre un imán tal como se indica. Indicar el sentido de la corriente inducida (Visto desde arriba).

A) Horario
B) Antihorario
C) Depende de la velocidad
D) Depende del área
E) Falta información

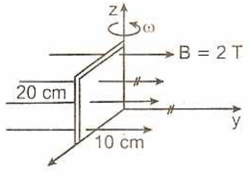


81. Un conductor se desplaza con una rapidez de 0,5 m/s por dos varillas lisas las cuales están separadas 20 cm. Determine la energía almacenada en el capacitor de 20 μF. (B = 1T)



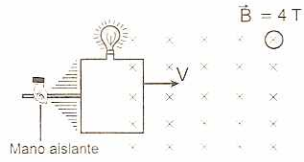
A) 2 μJ B) 1 μJ C) 0,1 μJ D) 100 J E) 20 μJ

82. Una placa rectangular cuyas dimensiones son 20 × 10 cm rota con respecto a un eje vertical con una rapidez angular uniforme de $\pi/15$ rad/s. Si a partir del instante mostrado se comienza a examinar el flujo a través de su cara lateral, determine en cuanto varía el flujo magnético en los primeros 10 s.



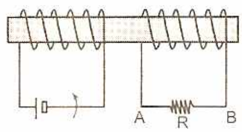
A) −40 m Wb B) −20 m Wb
C) −10 m Wb D) 5 m Wb
E) 0,2 m Wb

83. Una espira cuadrangular de 20 cm de lado se hace ingresar con una rapidez constante de 5 cm/s y en una región donde se ha establecido un campo magnético homogéneo cuya inducción B = 4 T. Determine la energía consumida por la bombilla de 1 Ω por segundo, mientras la espira ingresa al campo.



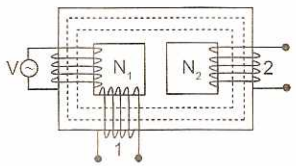
A) 16 mJ B) 12 mJ C) 1,6 mJ
D) 1,2 mJ E) 2 mJ

84. Al interrumpir el circuito de la izquierda, ¿Qué ocurre con el circuito de la derecha?



A) $V_A > V_B$ B) $V_B > V_A$ C) $V_A = V_B$
D) La corriente inducida circula de B → A.
E) La corriente inducida es nula.

85. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.



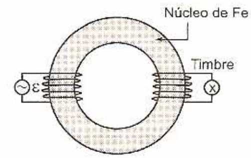
I. Los voltajes que reciben en 1 y 2 son iguales independientemente del número de espiras que tengan.
II. Si $N_1 = N_2$, en 1 se recibe mayor voltaje que 2.
III. Para todo instante, el flujo magnético a través del embobinado 1 es mayor que en 2.

A) FFV B) VVF C) FFF D) FVV E) VFV

86. Un transformador reductor, conectado al extremo de una línea de transmisión, reduce la tensión de 4400 V a 220 V. La potencia útil es 43,12 KW y el rendimiento total es 98%. El primario presenta 4000 espiras. ¿Cuántas espiras tendrá el secundario? y ¿Cuál es la intensidad de corriente que circula en el devanado primario?

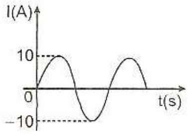
A) 200; 5 A B) 2000; 50 A C) 20; 55 A
D) 200; 10 A E) 200; 20 A

87. ¿Cuál será la tensión máxima en el timbre que se coloca en la salida del transformador? El número de espiras en la entrada y salida, son 100 vueltas y 40 vueltas respectivamente, $\varepsilon = 20\text{sen}(wt + \alpha)$.



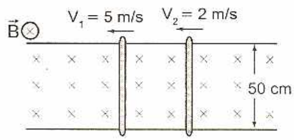
A) $4\sqrt{2}$ V B) 4 V C) 8 V
D) 2 V E) $8\sqrt{2}$ V

88. La grafica describe el comportamiento de la corriente alterna en función del tiempo que circula por una resistencia de 5 ohmios. Determine el calor que se disipa en el resistor cuando esta corriente circula durante 10 segundos.



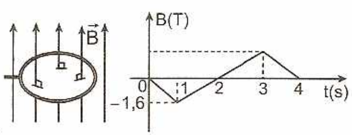
A) 125 J B) 250 J C) 100 J
D) 500 J E) 350 J

89. Los conductores de 50 cm y resistencia de 100 mΩ y 200 mΩ se mueven sobre rieles que están dentro de un campo magnético de inducción 1 T como se indica. Determine la intensidad de corriente inducida (desprecie la resistencia de los rieles).



A) 2 A B) 3 A C) 4 A
D) 5 A E) 6 A

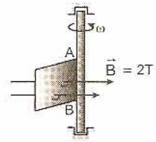
90. Se muestra las líneas de inducción que pasan perpendicularmente a la espira mostrada. Si la inducción magnética $\vec{B}$ cambia según la gráfica, determine la fem inducida en t = 2 s (A = 0,2 m^2).



A) 0,80 V B) 1,16 V C) 0,32 V
D) 0,6 V E) 2,4 V

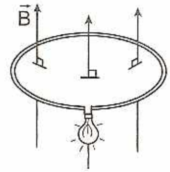
91. A partir del instante mostrado, el eje unido al lado AB = 0,5 m de la espira cuadrada gira con rapidez angular constante de $w = \frac{\neq}{4}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Determine la fem inducida en t = 2 s



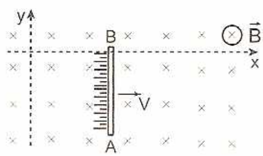
A) $\frac{\neq}{8}$ V B) $\frac{\neq}{4}$ V C) $\frac{\neq}{2}$ V
D) π V E) 2π V

92. La inducción magnética $\vec{B}$ que atraviesa la espira varia con el tiempo según la siguiente expresión $B = (10t^2 + 5)$ teslas donde "t" esta en segundos. Determine la intensidad de la corrientes eléctrica en el foco de 4,5 Ω, en t = 2 s, si la espira tiene una resistencia eléctrica de 0,5 Ω y encierra un área de 5 cm^2.



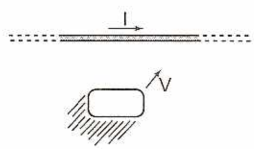
A) 1 mA B) 2 mA C) 3 mA
D) 4 mA E) 5 mA

93. Una barra conductora de 0,5 m de longitud se traslada con rapidez constante de 2 m/s, tal como se muestra, donde la inducción magnética $\vec{B}$ varía según $B = 0{,}2(x + 1)$ donde x esta en metros y B en teslas. Determine la diferencia de potencial entre A y B cuando la barra se encuentre en x = 2 m.



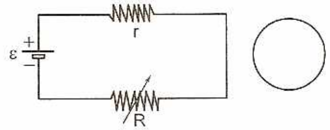
A) 0,3 V B) 0,6 V C) 0,8 V
D) –0,3 V E) –0,6 V

94. La espira rectangular de la figura se acerca con una velocidad V al alambre por el cual circula una corriente de intensidad "i". Determine el sentido de la corriente inducida en la espira. (El alambre y la espira se encuentran en el mismo plano).



A) Horario.
B) Antihorario.
C) No se genera corriente.
D) No se puede determinar.
E) Falta conocer la velocidad.

95. El circuito mostrado está situado en el mismo plano que la espira circular. ¿Qué sucede en la espira cuando la resistencia R variable aumenta?



A) Se induce una corriente horaria.
B) Se induce una corriente antihoraria.
C) No se induce nada
D) No se puede afirmar nada.
E) Todas las alternativas son falsas.

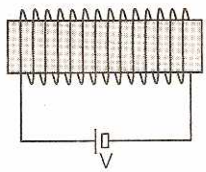
96. El flujo magnético que atraviesa en forma perpendicular al plano de un bobina de 100 espiras obedece a la ley $\phi = 2t + 3$, donde "t" en segundos y "ϕ" en wb. Determine la fem inducida para cualquier intervalo de tiempo.

A) 100 V B) 2 V C) 200 V
D) 20 V E) Cero

97. Se tiene una bobina (solenoide) de 50 cm de longitud y de 1500 vueltas. Si por sus espiras circula una corriente de 50 A, determine el flujo magnético en el interior del solenoide (área de la sección recta del solenoide 20 cm^2)

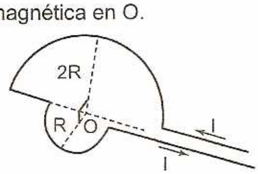
A) 0,12 mWb B) 0,012 mWb C) 0,16 mWb
D) 0,4 Wb E) 0,37 mWb

98. En la figura se muestra un solenoide de longitud L tiene una sección recta de área A y tiene N espiras. Si el flujo magnético en su interior es ϕ, determine V sabiendo que el solenoide tiene como resistencia R.



A) $\frac{\phi RL}{\mu NA}$ B) $\frac{\phi RL}{2\mu AN}$ C) $\frac{\propto RL}{3\propto NA}$
D) $\frac{2\propto RL}{\propto NA}$ E) $\frac{2\phi RL}{\mu NA}$

99. A través del alambre conductor circula una corriente cuya intensidad es I, determine el módulo de la inducción magnética en O.

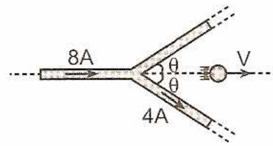


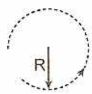
A) $\frac{3\propto_0 I}{8R}$ B) $\frac{\propto_0 I}{4R}$ C) $\frac{\propto_0 I}{8R}$
D) $\frac{\propto_0 I\sqrt{5}}{4R}$ E) $\frac{\propto_0 I\sqrt{5}}{2R}$

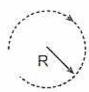
100. Un electrón y protón con la misma energía cinética describen trayectorias circulares en un mismo campo magnético uniforme. Por lo tanto.

A) El electrón tiene trayectoria de mayor radio.
B) La trayectoria del protón tiene menor radio.
C) La velocidad del electrón es menor que del protón.
D) El electrón tiene mayor periodo de revolución.
E) Todas las afirmaciones son falsas.

101. ¿Qué grafica indica mejor trayectoria que describe el electrón? Desprecie los efectos gravitatorios.



A) 
B) 

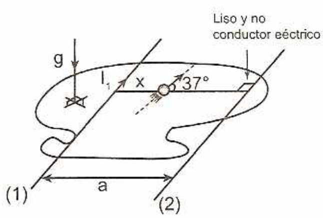
C) 
D) 

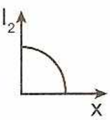
E) 

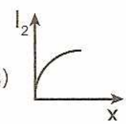
102. Una partícula electrizada con 1 mC se mueve dentro de un campo magnético de inducción magnética $\vec{B} = (300; 400; 500)$ mT con una velocidad $\vec{V}$ (0; 0; 5) km/s. Determine el módulo de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula electrizada.

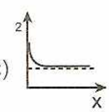
A) 1 N B) 1,5 N C) 2 N
D) 2,5 N E) 3 N

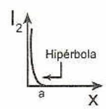
103. Al lanzar una partícula electrizada positivamente se observa que la dirección de su movimiento se mantiene. Para que ello ocurra, la intensidad de corriente que circula por el conductor 2 debe variar respecto a x según:

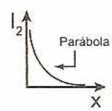


A) 

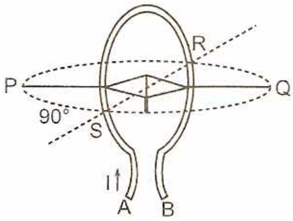
B) 

C) 

D) 

E) 

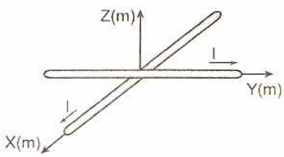
104. Si en la posición que se indica se hace circular una corriente eléctrica desde A hacia B ¿Hacia dónde apuntará el polo norte de la aguja magnética?



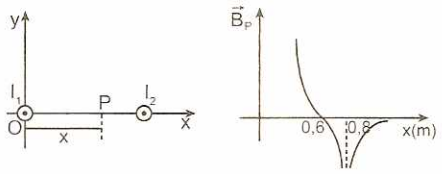
A) Hacia P B) Hacia Q C) Hacia R
D) Hacia S E) Faltan datos

105. Los ejes X e Y de un mismo sistema cartesiano XYZ están constituidos por dos alambres infinitos llevando cada uno corriente de 6 A tal como se indica. Determine la inducción magnética en el punto (0; 0; 0,3).

A) (4; 4) μT
B) (4; −4) μT
C) (2; 2) μT
D) (2; 4) μT
E) (3; 4) μT

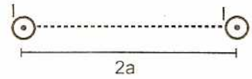


106. La grafica (B − X) indica como varia el módulo de la inducción magnética en el punto P en función de x. ¿En qué relación se encuentran I_1 e I_2?



A) 0,25 B) 0,5 C) 1 D) 1,5 E) 3

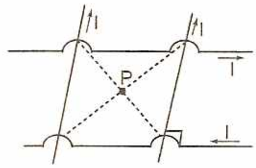
107. Dos conductores muy largos, ubicados paralelamente, transportan igual corriente en el mismo sentido como se indica. Determine la máxima inducción magnética de un punto que equidiste de los conductores.



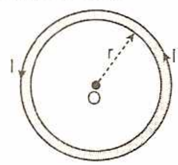
A) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$ B) $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ C) $\frac{6\mu_0 I}{\pi a}$ D) $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ E) $\frac{\mu_0 I}{3\pi a}$

108. Los conductores paralelos y de gran longitud están separados 0,5 m. Si todos transportan igual intensidad de corriente (I = 10 A), determine el módulo de la inducción magnética en el punto P.

A) 4 μT
B) 8 μT
C) 12 μT
D) 16 μT
E) 32 μT



109. Considere que por el anillo rígido de 20 cm de radio circula una corriente eléctrica de intensidad I. Indique la alternativa incorrecta.



A) El anillo se encuentra tensionado.
B) La inducción magnética en el centro O no es nula.
C) Si establecemos un campo magnético uniforme, saliente al plano de papel, la fuerza de tensión en el anillo aumenta.
D) Si se establece un campo magnético, perpendicular al plano de la espira, la fuerza de tensión en el anillo no cambia.
E) Si se establece un campo magnético entrante al plano del papel, la fuerza de tensión es el anillo puede ser nula.

CLAVES

1. D	15. D	29. B	43. C	57. D	71. A	85. D	99. E
2. A	16. A	30. E	44. C	58. B	72. D	86. E	100. E
3. D	17. C	31. A	45. A	59. C	73. D	87. C	101. E
4. B	18. A	32. D	46. E	60. E	74. A	88. B	102. D
5. C	19. A	33. B	47. D	61. D	75. B	89. D	103. D
6. A	20. E	34. D	48. E	62. E	76. D	90. C	104. A
7. C	21. C	35. C	49. D	63. C	77. A	91. A	105. B
8. E	22. D	36. B	50. E	64. A	78. D	92. D	106. E
9. D	23. C	37. B	51. A	65. B	79. C	93. E	107. D
10. E	24. A	38. A	52. B	66. E	80. A	94. B	108. D
11. E	25. B	39. A	53. C	67. B	81. C	95. A	109. D
12. A	26. A	40. E	54. A	68. A	82. A	96. B	
13. C	27. D	41. A	55. C	69. B	83. C	97. E	
14. B	28. B	42. C	56. B	70. D	84. D	98. A	

Óptica | 19 capítulo

Willebrord Snel van Royen (Leiden, 1580-Leiden, 30 de octubre de 1626), también conocido como «Snellius» e indebidamente reflejado como Snell, fue un astrónomo y matemático holandés célebre por la ley de la refracción que lleva su nombre. Introdujo varios descubrimientos importantes sobre el tamaño de la Tierra y realizó mejoras al método aplicado del cálculo. A pesar de comenzar los estudios de Derecho en la Universidad de Leiden mostró un gran interés por las matemáticas, disciplina que ya enseñaba incluso mientras cursaba sus estudios. En 1613 sustituyó a su padre, Rudolph Snel (1546-1613), como profesor de Matemáticas en esa universidad.

En 1615 planeó y llevó a cabo un nuevo método para medir el radio de la Tierra por medio de la determinación de la longitud de un arco de meridiano calculado mediante triangulación. Además, Snell se distinguió como matemático mejorando el método para el cálculo de π utilizado por los antiguos sabios griegos; con un polígono de 96 lados obtuvo 7 cifras correctas, mientras que con los métodos clásicos solo se habían obtenido 2. En 1621 enunció la ley de refracción de la luz (también llamada ley de Snell o ley de Snell-Descartes). En su honor, un cráter lunar lleva el nombre de Snellius.

Fuente: Wikipedia

La óptica es parte de la Física y estudia los fenómenos producidos por la luz. Luz, es toda onda electromagnética que puede percibir el ojo humano, por consiguiente, la luz es un concepto relativo.

NATURALEZA DE LA LUZ

Teoría corpuscular

Tratando de descubrir qué es la luz, Newton consideró que ella era una emisión de pequeñísimos corpúsculos que salían de los cuerpos luminosos, incidían sobre los demás cuerpos, y luego de rebotar en ellos llegaban a nuestros ojos, estimulándolos con choques, los cuales producían el fenómeno de visión.

Teoría ondulatoria

Esta teoría fue sustentada por Christian Hüygens, quien sostuvo que la luz era una emisión de ondas similares a las del sonido. Esta teoría tuvo finalmente mayor acogida dado que permitía explicar los fenómenos propios de las ondas como la interferencia, difracción y la polarización. Maxwell reforzó aún más esta teoría al afirmar que la luz era una onda electromagnética, en 1873.

Teoría actual

A principios del siglo XX, se descubrió que la luz estaba constituida por un flujo de pequeños paquetes de energía llamados fotones, y que permiten explicar el fenómeno fotoeléctrico, en 1905. Esto obligaba a aceptar una doble naturaleza para la luz: onda y partícula.

Es onda y partícula

Como onda se propaga y como partícula interacciona con los cuerpos que ilumina. Esta teoría fue apoyada por Max Planck y Albert Einstein.

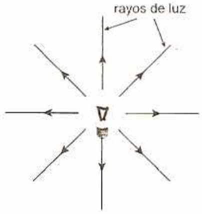


Fig. 19.1

Figura 19.1. Los rayos luminosos indican las direcciones de propagación de la luz.

Fig. 19.2.a

Fig. 19.2.b

Fig. 19.2.c

Fig. 19.2. Los haces luminosos pueden estar constituidos por rayos divergentes, convergentes o paralelos.

... y la velocidad del hombre está en función de su ingenio,
... y la velocidad de la luz es un candado a la velocidad del hombre,
... y algunos hombres reconocerán el ingenio de Dios.

Energía luminosa

La energía luminosa puede también transformarse en otros tipos de energía, los materiales ganan energía cuando absorben luz, incrementando su energía interna, por ejemplo, las celdas solares (fotoeléctricas) transforman la energía luminosa en energía eléctrica.

ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

En 1873, James Maxwell demostró que la luz es uno de los componentes del espectro electromagnético. Todas las ondas electromagnéticas tienen la misma velocidad c en el espacio libre (vacío), difieren solo en su longitud de onda (λ) y, por consiguiente, en su frecuencia (f). El producto de la longitud de onda por su frecuencia es una constante e igual a la velocidad de la luz.

$$\boxed{\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 = \lambda_3 f_3 = C} \quad ...(19.1)$$

$$\boxed{C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \quad ...(19.2)$$

El espectro electromagnético no tiene límites definidos ni superior ni inferior. Definimos aquí a la luz como toda radiación de ondas electromagnéticas que puede detectar el ojo humano.

Luz o espectro visible

Es una banda angosta del espectro electromagnético formada por las longitudes de onda a las cuales nuestra retina es sensible.

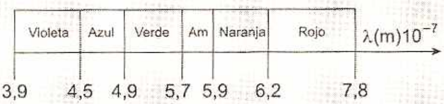
Las diferentes sensaciones que la luz produce en el ojo humano, que se denominan colores, dependen de la longitud de onda electromagnética.

La sensibilidad del ojo también depende de la longitud de onda de la luz; esta sensibilidad es máxima para $\lambda = 5{,}7 \times 10^{-7}$ m, es decir, para los colores verde y amarillo.

El color rojo ocupa aproximadamente el 41% del espectro visible. Por esta razón el semáforo tiene los colores: verde, amarillo y rojo.

Luz monocromática

Color	Longitud de onda $\lambda(m)\ 10^{-7}$
Violeta	3,90 – 4,55
Azul	4,55 – 4,92
Verde	4,92 – 5,77
Amarillo	5,77 – 5,97
Naranja	5,97 – 6,22
Rojo	6,22 – 7,80



CLASIFICACIÓN ÓPTICA DE LOS CUERPOS

Cuerpos luminosos

Son aquellos que producen luz propia, por ejemplo, el Sol, las estrellas, la vela, el foco, fierro caliente.

Cuerpos iluminados

Llamamos así a aquellos cuerpos en donde incide o llega la luz de otro cuerpo. Un cuerpo iluminado puede ser visible.

Cuerpos transparentes

Estos se caracterizan porque dejan pasar la luz por el interior de su masa, de modo que podemos ver lo que hay detrás de ellos.

Cuerpos opacos

Todos estos cuerpos impiden el paso de la luz a través de su masa, y debido a ello producen sombra (oscuridad) detrás de ellos.

Cuerpos translúcidos

En estos cuerpos la luz puede atravesarlos parcialmente, de modo que es posible ver el contorno de los objetos detrás de ellos.

ÓPTICA GEOMÉTRICA

El dominio de la óptica geométrica a diferencia de la óptica física, se limita a las situaciones donde los efectos de la difracción que tiene lugar debido a la naturaleza ondulatoria inherente de la luz son despreciables. Esta simplificación equivale exigir una propagación rectilínea en un medio homogéneo, esto es, se supone que los rayos luminosos siguen líneas rectas.

En un medio homogéneo y transparente la luz se propaga en forma rectilínea, alcanzando su máxima velocidad en el vacío:

$$\boxed{C = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^{8} \text{ m/s}} \quad \ldots(19.3)$$

Comportamiento dual de la luz

- La luz en los fenómenos de propagación se comporta como onda, o sea en:
  Interferencia
  Difracción
  Polarización
- La luz se comporta como corpúsculo en los fenómenos de interacción con la materia, o sea en:
  Efecto fotoeléctrico
  Efecto Compton

Rayo y haz

- Llamamos rayo de luz a la línea que sirve de dirección de propagación a una radiación luminosa.
- Denominamos haz luminoso al conjunto de rayos luminosos emitidos por una fuente de luz (Sol, vela, foco).

Índice de refracción

Sustancia	n
Aceite	1,51
Agua	1,33
Aire	1,00
Cuarzo	1,54
Diamante	2,42
Glicerina	1,47
Hielo	1,31
Sal común	1,54
Vidrio Crown	1,50
Vidrio Flint	1,70

ÍNDICE DE REFRACCIÓN (n)

Cuando la luz se propaga en el vacío alcanza una velocidad c, y cuando lo hace en una sustancia transparente, su velocidad es $v < c$; esto permite definir el índice de refracción de la sustancia:

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \quad \ldots(19.4)$$

Es evidente que siempre $n \geq 1$, y tanto mayor cuanto menor sea v. Cada sustancia transparente tiene su propio índice de refracción, por ejemplo del aire es aproximadamente igual a la unidad, para el vacío $n = 1$.

REFRACCIÓN DE LA LUZ

Cuando la luz pasa de un medio transparente a otro de diferente índice de refracción, la dirección de su propagación experimenta una sensible desviación, así como también su velocidad; cuando esto ocurre se dice que la luz se ha refractado. En este fenómeno la longitud de onda de la luz cambia, pero no su frecuencia.

Frecuencia constante

Cuando un rayo luminoso se refracta, la longitud de onda (λ) cambia, pero no su frecuencia (f).

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

$$v_1 = \lambda_1 f$$

$$v_2 = \lambda_2 f$$

LEYES DE LA REFRACCIÓN

1.ª Ley: "El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal trazada en el punto de incidencia a la interfase están contenidas en un mismo plano".

2.ª Ley: Fue descubierta por el físico holandés Willebrord Snell (1591–1626). "Toda onda electromagnética, en particular la luz, busca el camino más rápido y no el más corto en su propagación".

$$\boxed{n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2} \qquad ...(19.5)$$

Si el ángulo de incidencia es igual a cero, $\theta_1 = 0°$, entonces el ángulo de refracción también es igual a cero, $\theta_2 = 0°$, es decir, no hay desviación para los rayos que inciden perpendicularmente.

Cuando un rayo luminoso se desplaza de un medio de menor índice de refracción a otro de mayor índice, el rayo refractado se acerca a la normal (N), y viceversa, esto quiere decir que cuando el rayo luminoso se desplaza de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor índice, entonces el rayo refractado se aleja de la normal (N).

Desviación de la luz

Si, $n_1 > n_2$, entonces el rayo refractado se aleja de la normal (N).

R_i: rayo incidente

R_R: rayo refractado

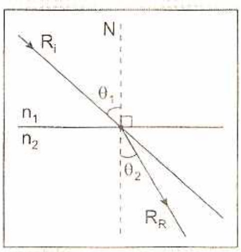
N: normal

θ_1: ángulo de incidencia

θ_2: ángulo de refracción

Ley de Snell:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$



ÁNGULO LÍMITE ($\hat{L}$)

Es el ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción igual a 90°. Para que exista ángulo límite es indispensable que el rayo luminoso se propague de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor índice, $n_1 > n_2$.

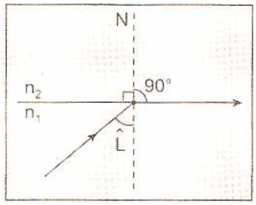
Ley de Snell:

$$n_1 \text{sen}\hat{L} = n_2 \text{sen}90°$$

$$\boxed{\text{sen}\hat{L} = \frac{n_2}{n_1}} \qquad ...(19.6)$$

Último rayo que sale

Si, $n_1 > n_2$, el rayo refractado se aleja de la normal.



Reflexión total (θ)

Este fenómeno se produce cuando el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite. Consiste en que el rayo luminoso no emerge sino que se refleja con un ángulo igual al de incidencia. La superficie, pues, se comporta como un espejo.

$$\boxed{\theta > \hat{L}} \qquad ...(19.7)$$

Por lo tanto, para que se verifique la reflexión son necesarias dos condiciones:

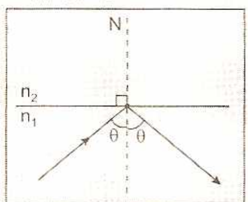
a) Que la luz se propague de mayor a menor índice de refracción.

b) Que incida con un ángulo superior al ángulo límite ($\hat{L}$).

El rayo no puede salir

Se cumple que: 1.° $n_1 > n_2$

2.° $\theta > \hat{L}$



PRISMA DE REFLEXIÓN

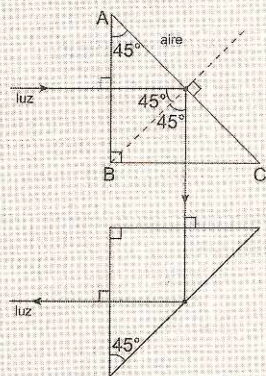
Tiene como fundamento el fenómeno de reflexión total, suponiendo que el vidrio que lo constituye posee un n = 1,5, el ángulo límite de la superficie de separación aire (n = 1) y vidrio será:

$$n_{vidrio}\text{senL} = n_{aire}\text{sen}90°$$

$$(1,5)\text{senL} = (1)(1) \Rightarrow \text{senL} = \frac{2}{3} \Rightarrow L = 42°$$

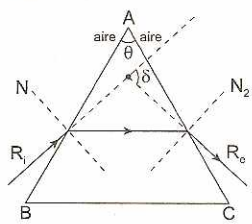
De este modo el rayo luminoso a la cara AB, penetra en el prisma sin desviación (incidencia normal), pero toca a la cara AC con un ángulo de incidencia (igual a 45°) superior al ángulo límite (L = 42°), siendo reflejado totalmente y saliendo sin desviación por la cara BC, como indica la figura.

Reflexión interna



Desviación a través del prisma óptico

Prisma óptico, es todo medio transparente limitado por dos caras planas inclinadas, una respeto a otra: estas son las caras del prisma. Las características del paso de la luz a través del prisma son deducidas conociendo las leyes de la refracción.



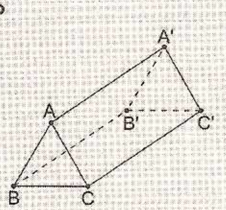
δ : desviación del rayo incidente.

N_1 y N_2 : línea normal a la cara del prisma.

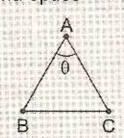
R_i: rayo incidente

R_e: rayo emergente

Prisma óptico



θ = ángulo del prisma óptico



PRINCIPIO DE FERMAT

Trayectoria más rápida.

Un soldado de caballería debe llevar un parte desde el punto A a la tienda de campaña de su jefe, el cual se encuentra en el punto C (Figura 19.3). Le separan de dicha tienda dos zonas, una formada por arenas profundas y otra por un prado, divididas entre sí por la línea recta EF. Por la arena, el caballo marcha con la mitad de la velocidad que por el prado. ¿Qué camino deberá seguir el jinete para llegar en el tiempo mínimo a la tienda de su jefe?

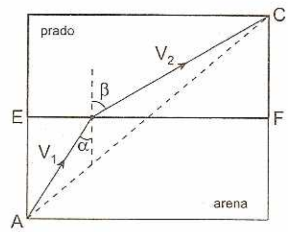


Figura 19.3

En el segmento EF, existe un punto de refracción donde se cumple la siguiente relación:

$$\frac{V_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{V_2}{\operatorname{sen}\beta}$$

"Toda onda electromagnética y en particular la luz busca el camino más rápido".

El principio de Fermat, es compatible con la ley de Snell.

REFLEXIÓN DE LA LUZ

Si las ondas, luego de incidir sobre una superficie determinada retornan al medio original de propagación cambiando de dirección de su movimiento, pero manteniendo su rapidez constante, se dice que experimentan el fenómeno de reflexión.

Leyes de la reflexión

1.ª Ley. Fue descubierta por Euclides y establece que: "El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal trazada a la superficie de reflexión en el punto de incidencia se encuentran en el mismo plano".

2.ª Ley. Fue descubierta por el árabe Al Hazen, y establece que: "En toda superficie perfectamente pulida, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión".

$\boxed{\alpha = \beta}$ ...(19.8)

Cambio de dirección

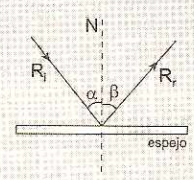
R_i : rayo incidente

R_r : rayo reflejado

α : ángulo de incidencia

β : ángulo de reflexión

N : línea normal al espejo.



ESPEJOS

Se denomina así a toda aquella superficie perfectamente pulida en la cual se produce solamente reflexión regular, es decir, se cumplen las dos leyes de la reflexión.

Los espejos pueden ser planos o curvos según la naturaleza de la superficie pulimentada.

Todo espejo tiene convencionalmente dos zonas bien definidas: zona real y zona virtual.

Zona real (ZR)

Es aquella en el cual se encuentra el objeto, donde cualquier distancia es positiva.

Zona virtual (ZV)

Es aquella región que se encuentra detrás del espejo, donde cualquier distancia es negativa.

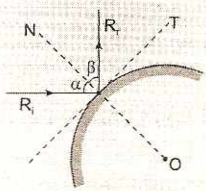
Objeto. Es aquel punto o conjunto de puntos de los cuales se originan los rayos luminosos que van a incidir al espejo.

Imagen. Es el punto o conjuntos de puntos que se forman mediante la intersección de los rayos reflejados o de sus prolongaciones. Las imágenes pueden ser reales o virtuales. La imagen virtual (zona virtual) es vista directamente, en cambio la imagen real (zona real) es necesario recibir en una pantalla para ser vista.

Superficie curva

En una superficie curva pulida también se cumplen las leyes de la reflexión, trazando previamente las líneas rectas tangente (T) y normal (N) en el punto de incidencia.

$$\alpha = \beta$$

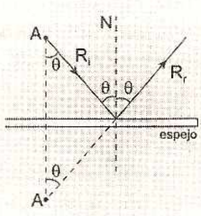


ESPEJO PLANO

Es aquella superficie plana perfectamente pulida, es capaz de reflejar el 100% de la luz incidente. Los espejos ordinarios constan de una lámina de vidrio que lleva en el reverso una delgada capa de plata (Ag) donde se produce la reflexión.

Teorema

Todo rayo luminoso que partiendo de un punto A incide en el espejo plano, se refleja de modo que su prolongación pasa por el punto simétrico A' del punto A respecto al espejo.



Características

1.° Las imágenes en los espejos planos son siempre virtuales, su posición parece estar definida detrás del espejo.

2.° Las imágenes en los espejos planos difieren de los objetos en que la derecha y la izquierda están intercambiadas.

3.° La imagen y el objeto se encuentran equidistantes con respecto al espejo plano.

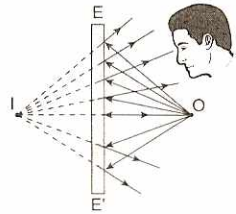


Figura 19.4

Figura. 19.4. Formación de la imagen virtual de un objeto en un espejo plano.

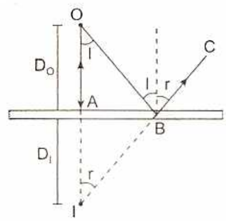


Figura 19.5

Figura. 19.5. En un espejo plano, la distancia de la imagen al espejo es igual a la distancia del objeto a la superficie reflectante.

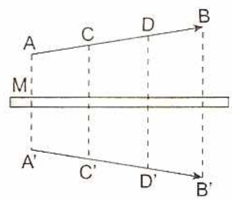


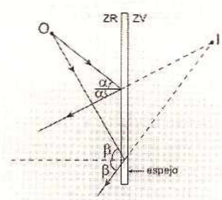
Figura 19.6

Figura 19.6. En un espejo plano, la imagen tiene el mismo tamaño del objeto y es simétrica de él en relación con el espejo.

Imagen de un punto

O: objeto

I: imagen

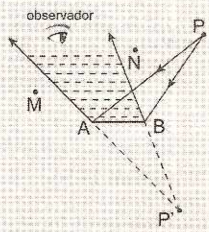


RANGO DE OBSERVACIÓN DE LA IMAGEN

Sea AB un espejo finito y P el punto luminoso. A través del espejo el punto P es observado solo si nos ubicamos en cualquier punto de la región sombreada.

Si el observador se ubica en los puntos M o N, no podrá ver el punto P a través del espejo.

Ubicación del observador



ESPEJOS ANGULARES

Experimentalmente, disponemos de una barra bicolor colocado simétricamente con los espejos planos. Si el ángulo θ que forman los espejos tiene la forma:

$$\boxed{\theta n = 360°} \qquad ...(19.9)$$

Donde n es un número entero y positivo, entonces, se observa que el objeto y las imágenes forman un polígono regular de n lados, inscriptible en una circunferencia. Por consiguiente, el número de imágenes N será:

$$\boxed{N = n - 1} \qquad ...(19.10)$$

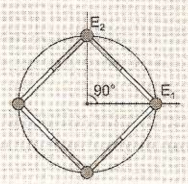
Reemplazando (19.9) en (19.10) tenemos:

$$\boxed{N = \frac{360°}{\theta} - 1} \qquad ...(19.11)$$

Si el ángulo que forman los espejos es 90°, entonces, el objeto y las imágenes forman un cuadrado.

Si un objeto se encuentra entre dos espejos paralelos, el número de imágenes que se generan tiende al infinito.

Tres imágenes



Ángulo θ	Número de imágenes N
180°	1
120°	2
90°	3
72°	4
60°	5
51,4°	6
45°	7
40°	8
36°	9
32,7°	10
0°	

EXPERIMENTO

Suponga que dos espejos planos E_1 y E_2, se colocan en ángulo recto, y que un objeto O se encuentra situado entre ellos, como se observa en la figura 19.7 del experimento. Como sabemos, los rayos luminosos que parten del objeto, al reflejarse en E_1 originarán la imagen I_1, y al reflejarse directamente en E_2, darán lugar a la imagen I_2. Pero parte, los rayos luminosos emitidos por el objeto sufren dos reflexiones, ya que después de reflejarse en uno de los espejos, encuentran el otro, volviéndose a reflejar. Al observador que perciba estos rayos después de sufrir la segunda reflexión, le parecerá que provinieran del punto I_3, es decir, el observador verá en I_3 una tercera imagen del objeto O (figura 19.7).

1. Coloque dos espejos planos en ángulo recto. Ponga entre ellos un objeto cualquiera (por ejemplo un lápiz) y trate de observar las tres imágenes que proporcionan los dos espejos.
2. Reduzca el valor del ángulo formado por los espejos, y compruebe que el número de imágenes del objeto se vuelve cada vez mayor. Cuando los espejos se encuentra paralelos (el ángulo entre ellos es nulo), observe las imágenes que se forman, ¿puede usted contarlas?
3. Las múltiples imágenes proporcionadas por espejos planos que forman entre sí un ángulo menor de 90°, se emplea en la construcción de los caleidoscopios. Trate de saber como se construye un caleidoscopio, y comprobando que su construcción es muy simple, podrá construir uno para observar las bellas e interesantes figuras que se forma en dicho aparato.

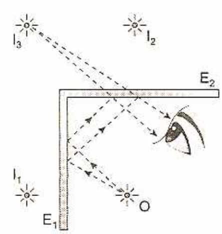
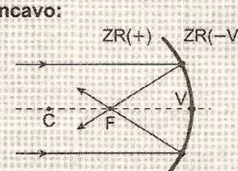


Figura 19.7

ESPEJOS ESFÉRICOS

Se denomina así a todo aquel casquete de espejo esférico cuya superficie interna o externa es reflectante. Cuando la superficie interna es la reflectante se denomina espejo CÓNCAVO y cuando es la externa se denomina espejo CONVEXO.

Espejo cóncavo:



Elementos del espejo esférico

1. **Centro de curvatura (C):** es el centro geométrico de la esfera de la cual forma parte el casquete.
2. **Radio de curvatura (R):** es el radio de la esfera de la cual forma parte del espejo.
3. **Vértice o polo (V):** es el centro geométrico del espejo, se consigue interceptando el espejo con el eje principal (XX').
4. **Eje principal (XX'):** es la línea recta que pasa por el centro de la curvatura (C):
5. **Foco (F):** es aquel punto situado en el eje principal entre el vértice y el centro de curvatura. El foco se caracteriza porque pasa por los rayos reflejados o sus prolongaciones, provenientes de rayos incidentes al espejo paralelos al eje principal.
6. **Distancia focal (f):** es la distancia que existe entre el foco y el vértice del espejo, cumpliéndose que dicha distancia es igual a la mitad del radio de curvatura:

$$f = \frac{R}{2}$$

7. **Abertura (MN):** es aquel segmento o cuerda que une los puntos extremos del espejo, cuando la abertura MN es muy grande se produce el fenómeno de aberración esférica, el cuál consiste en la formación de una imagen borrosa de tal manera que el foco deja de ser un punto para convertirse en una mancha. Para observar una imagen nítida se exige que el ángulo central correspondiente al arco MN debe ser menos de 20°.

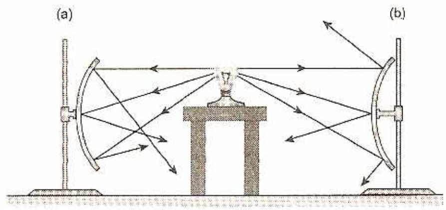


Figura 19.8

Figura 19.8. Rayos luminosos que se reflejan en un espejo cóncavo (a), y en uno convexo (b).

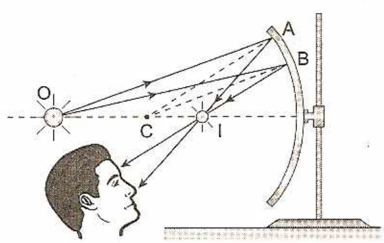


Figura 19.9

Figura 19.9. Formación de una imagen real (I) de un objeto (O) por su espejo cóncavo.

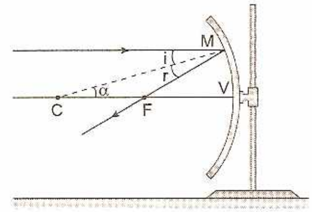
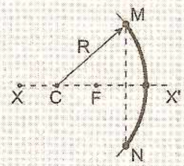


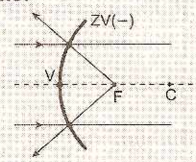
Figura 19.10

Figura 19.10. La distancia focal de un espejo esférico es igual a la mitad de su radio de curvatura (f = R/2).

Elementos:



Espejo convexo:



FORMACIÓN DE IMÁGENES

Para la formación de imágenes en espejos esféricos, se toman en cuenta tres rayos luminosos como los principales, resultando indispensables dos de ellos y son los siguientes:

1. Un rayo luminoso que incide paralelamente al eje principal se refleja pasando el o su prolongación por el foco.
2. Un rayo luminoso incidente que pasa él o su prolongación por el foco se refleja paralelamente al eje principal.
3. Un rayo luminoso incidente que pasa él o su prolongación por el centro de curvatura se refleja por sí misma.

Ecuación de Descartes o de los focos conjugados

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

Aumento (A)

$$\mathbf{A} = \frac{\text{tamaño de la imagen}}{\text{tamaño del objeto}}$$

También: $A = \frac{-i}{o}$

Signos:

A (+): imagen derecha

A (−): imagen invertida

Las imágenes virtuales son derechas (erecto) y las imágenes reales son invertidas.

Ley de signos

	E. Convexo	E. Cóncavo
o	(+): siempre	(+): siempre
i	(−): siempre imagen virtual	(+): imagen real (−): imagen virtual
f	(−): siempre	(+) siempre

o: distancia del objeto al vértice del espejo.
i: distancia de la imagen al vértice del espejo.
f: distancia del foco al vértice del espejo.

1. Un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo, paralelamente al eje, se refleja pasando por el foco (fig. 19.11.a).

   Un rayo luminoso que incide en un espejo convexo, en forma paralela a su eje, se refleja de modo que su prolongación pasa por el foco (fig. 19.11.b).

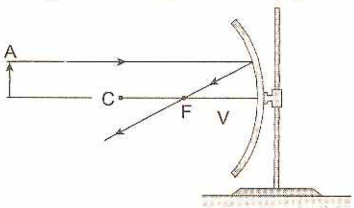


Fig. 19.11.a

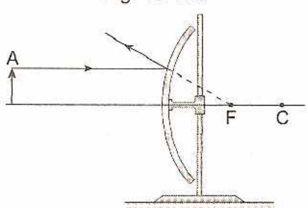


Fig .19.11.b

Figura 19.11. Reflexión de un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo y en un espejo convexo, paralelamente a los ejes de dichos espejos.

2. Un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo pasando por su foco, se refleja en forma paralela al eje del espejo (fig. 19.12.a).

   Un rayo luminoso que incide en un espejo convexo de manera que su dirección pasa por el foco, se refleja paralelamente al eje de dicho espejo (fig. 19.12.b).

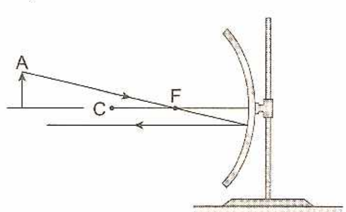


Fig. 19.12.a

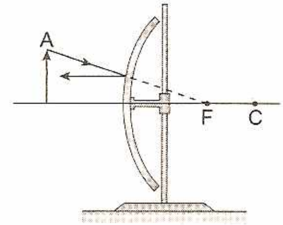


Fig. 19.12.b

Fig. 19.12. Reflexión de un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo y un espejo convexo, de modo que su dirección pasa por el foco de estos espejos.

3. Un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo pasando por el centro de curvatura, se refleja sobre sí mismo (este rayo incide perpendicularmente al espejo; (fig. 19.13.a).

   Un rayo luminoso que incide en un espejo convexo de manera que su dirección pase por el centro de curvatura del espejo, se refleja sobre sí mismo (fig. 19.13.b).

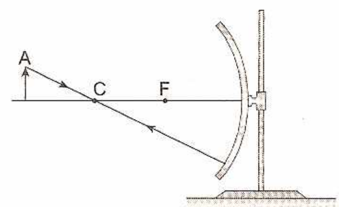


Fig. 19.13.a

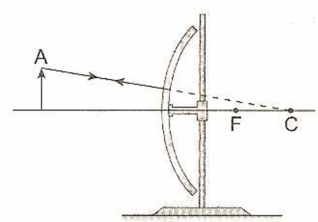


Fig. 19.13.b

Fig. 19.13. Reflexión de un rayo luminoso que incide en un espejo cóncavo y en un espejo convexo, de modo que su dirección pasa por el centro de curvatura de dichos espejos.

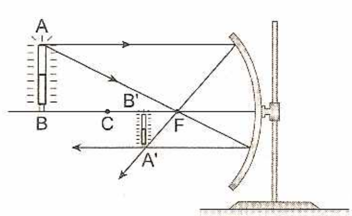


Fig. 19.14. Ejemplo 1

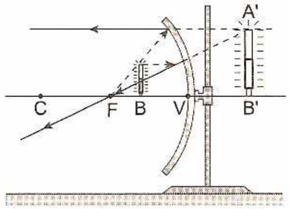


Fig. 19.14. Ejemplo 2

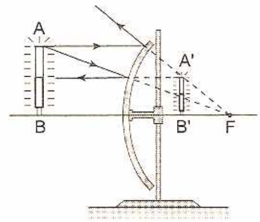
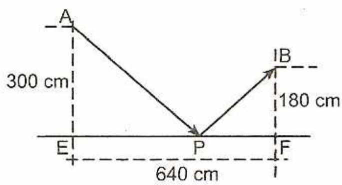


Fig. 19.14. Ejemplo 3

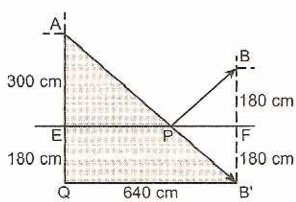
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un ratón se encuentra en la posición A sobre un piso horizontal. Si el ratón quiere llegar a su agujero ubicado en la posición B, desplazándose con rapidez constante de 4 m/s, recogiendo previamente un grano de arroz de la línea horizontal EF. Determinar el intervalo de tiempo mínimo, empleado por el ratón, en este proceso desde A hasta B.



Resolución:

Si el ratón se comportara como un rayo de luz y la superficie EF como un espejo plano, entonces el punto B' sería la imagen del extremo B; el tiempo empleado sería mínimo. Por simetría PB y PB' tienen la misma longitud.



Por Pitágoras, en el triángulo rectángulo AQB':

$$AB' = \sqrt{(480)^2 + (640)^2} = 800 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow AB' = AP + PB' = 8 \text{ m}$$

Su equivalente sería que el ratón viaja en línea recta desde A hasta B' (imagen).

Cálculo del tiempo empleado: $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{8}{4} = 2$ s

2. Con un espejo cóncavo de 60 cm de distancia focal se obtuvo una imagen virtual. Si la distancia imagen es el doble de la distancia objeto, determinar la distancia ente el objeto y el espejo (en cm).

Resolución:

El aumento de la imagen es: $A = \dfrac{D_i}{D_0} = \dfrac{2x}{x} = 2$

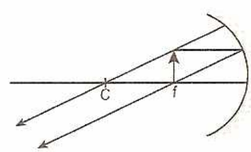
Si el espejo es cóncavo, entonces la distancia focal es positiva. La imagen es virtual entonces el signo de la distancia imagen es negativa.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_o} + \frac{1}{D_i} \Rightarrow \frac{1}{60} = \frac{1}{x} + \frac{1}{-2x} \qquad \therefore\ x = 30 \text{ cm}$$

3. Un observador se ubica a 80 cm de un espejo cóncavo de 60 cm de radio de curvatura. Si el observador se acerca al espejo a razón de 10 cm/s mientras observa el espejo, ¿en cuánto tiempo más (en segundos) observará su imagen?

Resolución:

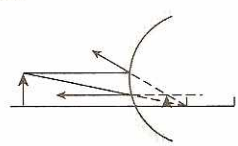
En el instante que pasa por el foco, observará su imagen virtual en el espejo cóncavo. El foco se encuentra a 30 cm del vértice del espejo. El desplazamiento del objeto será: $80 - 30 = 50$ cm. Si el objeto se acerca al espejo a razón de 10 cm/s, entonces después de 5 segundos pasará por el foco. A partir de este instante la imagen será virtual y podrá observarse directamente en el espejo.



Por lo tanto, después de 5 segundos podrá ver su imagen.

4. La imagen de un objeto vista en un espejo convexo ($f = -50$ cm) está a 20 cm detrás del espejo. Calcular el aumento del espejo, ¿la imagen es derecha o invertida?

Resolución:



Si el espejo es convexo, entonces la distancia focal es negativa. La imagen es virtual, entonces el signo de la distancia imagen es negativa.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{D_0}+\frac{1}{D_i} \Rightarrow \frac{1}{-50}=\frac{1}{x}+\frac{1}{-20} \Rightarrow x=\frac{100}{3}\text{ cm}$$

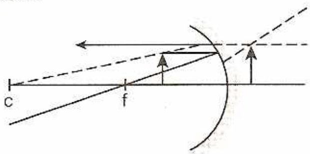
El aumento de la imagen es:

$$A=-\frac{D_i}{D_o}=-\frac{(-20)}{100/3}=+0{,}6$$

Convencionalmente si el aumento A es positivo (+), entonces la imagen es derecha.

¿Cuál es el radio de curvatura (en cm) de un espejo de afeitar que da un aumento doble de su rostro situado a 30 cm del espejo?

Resolución:



El tipo de espejo es cóncavo. Es el único espejo que da un aumento mayor de 1,0 y su imagen es virtual.

El aumento de la imagen es: $A=\frac{D_i}{D_o}=-\frac{(-2x)}{x}=2$

Espejo cóncavo: la distancia focal es positiva.

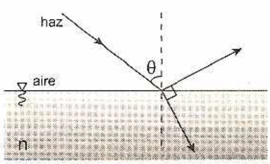
La distancia del objeto es siempre positiva: 30 cm

En la imagen virtual, la distancia de la imagen es negativa: −60 cm

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{D_o}+\frac{1}{D_i} \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{1}{30}+\frac{1}{-60} \Rightarrow f=+60\text{ cm}$$

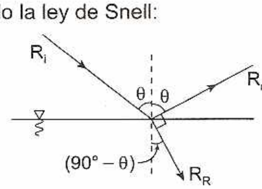
Sabiendo que la distancia focal es la mitad del radio, entonces el radio mide 120 cm.

Un rayo de luz incide sobre un cuerpo transparente, cuyo índice de refracción es n, formando un ángulo θ. ¿Qué relación debe haber entre n y θ, para que el rayo reflejado sea perpendicular al rayo refractado?



Resolución:

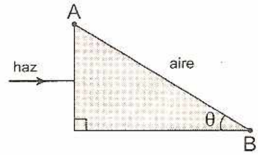
Aplicando la ley de Snell:



$$n_{aire}\text{sen}\theta=n\text{sen}(90°-\theta)$$

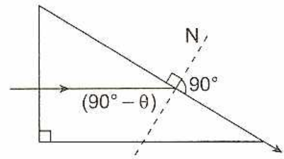
Reemplazando: $(1)\text{sen}\theta=n\cos\theta \quad \therefore \tan\theta=n$

7. En el sistema óptico mostrado, hallar la medida del ángulo θ, sabiendo que el rayo de luz incide perpendicularmente y se refracta finalmente paralelo a la cara AB. Índice de refracción del prisma, n = 5/4.



Resolución:

Aplicando la ley de Snell, cuando el haz de luz emerge al aire:

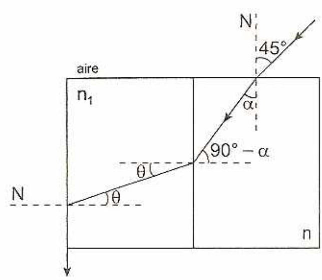


$$n\text{sen}(90°-\theta)=n_a\text{sen}90°$$

Reemplazando: $\frac{5}{4}\cos\theta=(1)(1) \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \theta=37°$

8. La figura muestra dos porciones de vidrio de índices de refracción n y n_1. Si un rayo de luz incide con un ángulo de 45°, siguiendo la trayectoria mostrada, emergiendo sobre la cara vertical. Calcular n.



Resolución:

Aplicando la ley de Snell:

aire − vidrio

$n_a\text{sen}45°=n\text{sen}\alpha$ ...(1)

vidrio(n) − vidrio(n_1)

$n\text{sen}(90°-\alpha)=n_1\text{sen}\theta$ ...(2)

vidrio(n_1) − aire

$n_1\text{sen}\theta=n_a\text{sen}90°$ ...(3)

De la propiedad transitiva en (2) y (3) tenemos:

$n\cos\theta=1$

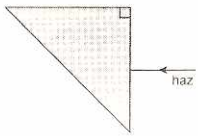
De la ecuación (1) tenemos: $n\text{sen}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

De la identidad trigonométrica:

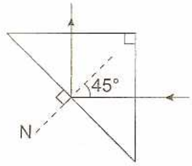
$n^2(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{3}{2} \quad \therefore n=\sqrt{1{,}5}$

9. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre un prisma isósceles de vidrio. Cuál será la trayectoria que seguirá, si el ángulo crítico vidrio – aire es igual a:

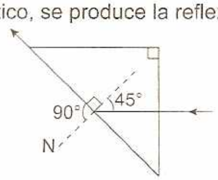
a) $\hat{L} = 40°$ b) $\hat{L} = 45°$ c) $\hat{L} = 50°$



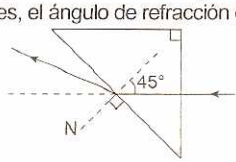
Resolución:



a) Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico, se produce la reflexión interna.



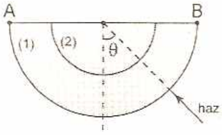
b) Si el ángulo de incidencia es igual al ángulo crítico, entonces, el ángulo de refracción es igual a 90°.



c) Si el ángulo de incidencia es menor que el ángulo crítico, entonces, el rayo de luz emerge, vidrio– aire, alejándose de la normal.

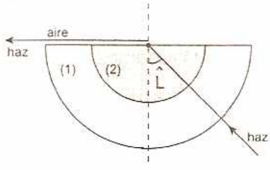
10. En el sistema óptico mostrado, ¿con qué ángulo θ debe incidir el rayo luminoso mostrado, para que pueda reflejarse totalmente sobre la cara AB?

$n_1 = \frac{5}{4}$; $n_2 = \frac{5}{3}$.



Resolución:

Determinemos previamente el ángulo límite, para el cuál el rayo luminoso emerge tangencialmente a la cara AB.



Aplicando la ley de Snell, en los medios (2) – aire:

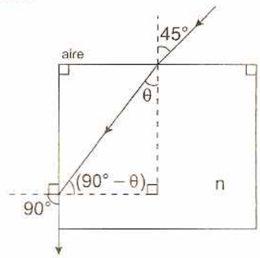
$n_2 \text{sen}\hat{L} = n_{aire}\text{sen}90°$

$\frac{5}{3}\text{sen}\hat{L} = (1)(1) \Rightarrow \text{sen}\hat{L} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{L} = 37°$

Por consiguiente, la reflexión total se produce cuando el ángulo de incidencia θ es mayor al ángulo límite $\hat{L}$. $\therefore\ \theta > 37°$

11. Determinar el índice de refracción de un cristal cúbico, sabiendo que un rayo luminoso incide en una de las caras del cubo con un ángulo de incidencia igual a 45°, y emerge coincidiendo con una de las caras del cubo.

Resolución:



Aplicando la ley de Snell:

- aire – cristal:
  $n_a\text{sen}45° = n\text{sen}\theta$ ...(1)
- cristal – aire:
  $n\text{sen}(90° - \theta) = n_a\text{sen}90°$ ...(2)

Reemplazando valores en (1) y (2), luego acomodando convenientemente:

$\frac{\sqrt{2}}{2} = n\text{sen}\theta$ ...(3)

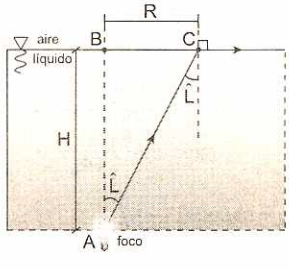
$1 = n\cos\theta$ ...(4)

Elevando al cuadrado (3) y (4), luego sumando:

$\frac{3}{2} = n^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\ \therefore\ n = \sqrt{1,5}$

12. Un foco luminoso se encuentra en el centro de un pozo que contiene un líquido de índice de refracción n = 5/4. Si se logra ver la emergencia de la luz del foco, ¿a qué profundidad se encuentra el foco, si el diámetro del pozo es 16 metros? Dar como respuesta la altura máxima, tal que el pozo se encuentre totalmente iluminado.

Resolución:



Aplicando la ley de Snell. El último rayo luminoso que se refracta es aquel que su ángulo de incidencia es $\hat{L}$.

Líquido – Aire

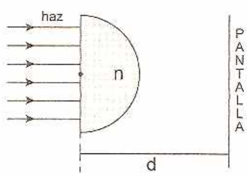
$n\text{sen}\hat{L} = n_a\text{sen}90° \Rightarrow \frac{5}{4}\text{sen}\hat{L} = (1)(1)$

$\text{sen}\hat{L} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \hat{L} = 53°$

En el triángulo rectángulo ABC, el cateto BC es el radio máximo del pozo, entonces, R = 8 m, luego la altura máxima H es:

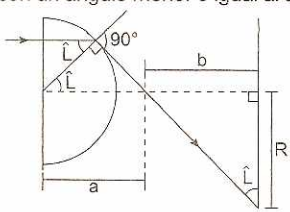
$H = R\cot\hat{L} \Rightarrow H = 8(\frac{3}{4}) \qquad \therefore H = 6 \text{ m}$

13. Sobre la mitad de una esfera de radio r = 3,0 cm, hecha de vidrio de índice de refracción n = 5/4, incide un haz de rayos paralelos como indica la figura. Determinar el radio del círculo brillante que se formará sobre la pantalla situada a la distancia d = 13,0 cm del centro de la esfera.



Resolución:

Debido al ángulo crítico L, de la semiesfera solo emergen los rayos que inciden sobre la superficie interna con un ángulo menor o igual al ángulo límite.



Cálculo del ángulo límite:

Ley de Snell, para vidrio – aire:

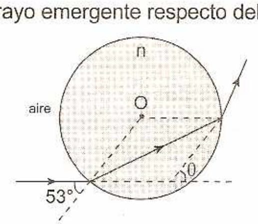
$n\text{sen}\hat{L} = n_{aire}\text{sen}90° \Rightarrow \frac{5}{4}\text{sen}\hat{L} = (1)(1)$

$\text{sen}\hat{L} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{L} = 53°$

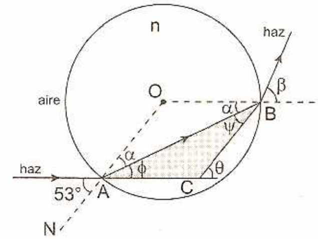
Identificando en la figura: a = 5,0 cm; b = 8,0 cm

Luego, el radio del círculo brillante será: R = 6,0 cm

14. Un rayo luminoso incide formando un ángulo de 53° respecto de la normal, sobre una esfera de vidrio de índice de refracción 4/3. Determinar el ángulo θ que forma el rayo emergente respecto del incidente.



Resolución:



Aplicando la ley de Snell en A:

$n_{aire}\text{sen}53° = n\text{sen}\alpha$

$(1)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{3}\text{sen}\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \alpha = 37° \quad \text{y} \quad \phi = 16°$

Aplicando la ley de Snell en B:

$n\text{sen}\alpha = n_{aire}\text{sen}\beta$

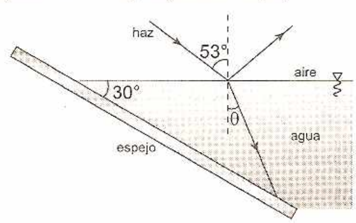
$\frac{4}{3}(\frac{3}{5}) = (1)\text{sen}\beta \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \beta = 53° \quad \text{y} \quad \psi = 16°$

En el triángulo ABC se deduce que:

$\theta = \phi + \psi \qquad \therefore \theta = 32°$

15. En el sistema óptico mostrado, el plano inclinado es un espejo sumergido en agua. El rayo luminoso incide en la superficie del agua con un ángulo de 53°. Determinar el ángulo que forman los rayos reflejados en el agua y en el espejo.

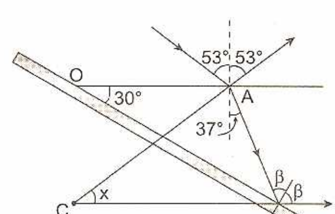


Resolución:

Cálculo del ángulo de refracción θ, aplicando la ley de Snell:

$n_{aire}\text{sen}53° = n_{agua}\text{sen}\theta \Rightarrow (1)\frac{4}{5} = \frac{4}{3}\text{sen}\theta$

$\text{sen}\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 37°$



En el △AOB, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

$30° + (90° + 37°) + (90° - \beta) = 180°$

$\Rightarrow \beta = 67°$ ...(1)

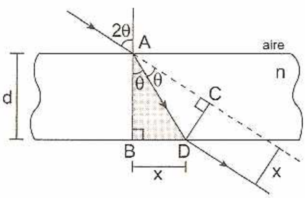
En el $\triangle ACB$, el ángulo exterior en el vértice B es:

$2\beta = x + 90°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $x = 44°$

16. Un rayo luminoso incide sobre una lámina transparente de índice de refracción n y espesor d. Determinar el desplazamiento x entre los rayos incidente y emergente, sabiendo que el ángulo de incidencia en el aire es igual al doble del ángulo de refracción sobre el material de la lámina.

Resolución:

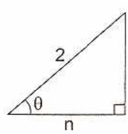


En la figura deducimos la igualdad de triángulos: $\triangle ABD = \triangle ACD$.

Aplicando la ley de Snell en A :

$n_{aire}\text{sen}2\theta = n\text{sen}\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{n}{2}$

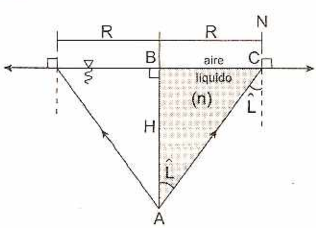


En el triángulo ABD, recto en B:

$x = (d)(\tan\theta) \quad \therefore\ x = \frac{d}{n}\sqrt{4 - n^2}$

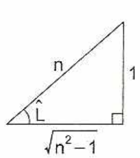
17. Un buceador se encuentra sumergido en el fondo de un lago. Si la distancia entre los ojos del buceador y la superficie libre del lago es H, hallar el radio R del círculo luminoso que verá sobre él. El índice de refracción del lago es n.

Resolución:



El último rayo luminoso que se refracta es aquel que su ángulo de incidencia es $\hat{L}$.

Aplicando la ley de Snell, en el medio líquido – aire:



$n\text{sen}\hat{L} = n_{aire}\text{sen}90° \Rightarrow n\text{sen}\hat{L} = (1)(1) \Rightarrow \text{sen}\hat{L} = \frac{1}{n}$

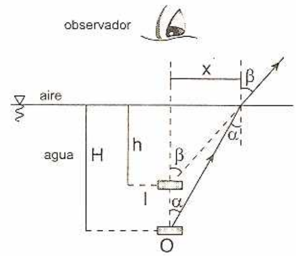
Cálculo de R en el triángulo rectángulo ABC:

$R = H\tan\hat{L} \quad \therefore\ R = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}}$

El resto de la superficie se comporta como un espejo para el buzo.

18. Una moneda está sumergida en el agua a una profundidad H. Si miramos desde arriba y en dirección vertical, ¿a qué profundidad vemos la moneda?

Resolución:



Ley de Snell: Agua – Aire

$n_{agua}\text{sen}\alpha = n_{aire}\text{sen}\beta$ ...(I)

Pero: α y β son pequeños:

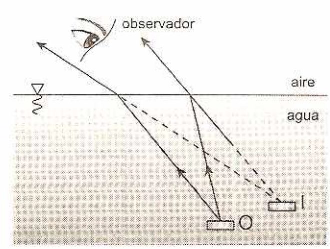
$\text{sen}\alpha\ ;\ \tan\alpha = \frac{x}{H}$

$\text{sen}\beta\ ;\ \tan\beta = \frac{x}{h}$

Reemplazando en (I):

$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{x}{H}\right) = (1)\left(\frac{x}{h}\right) \ \therefore\ h = \frac{3}{4}H$

¿Y qué sucede si miramos la moneda no verticalmente, sino de un lado?

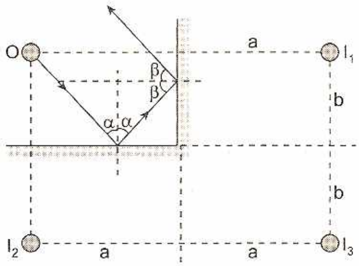


En este caso veremos la moneda no solamente más arriba, sino también desplazada.

19. Una rana se encuentra frente a dos espejos planos mutuamente perpendiculares. ¿Cuántas imágenes verá la rana?

Resolución:

1. Ve tres imágenes.
2. Dos imágenes resultan de las reflexiones de los rayos en cada uno de los espejos.
3. La tercera imagen resulta cuando el rayo de luz se refleja sobre ambos espejos.

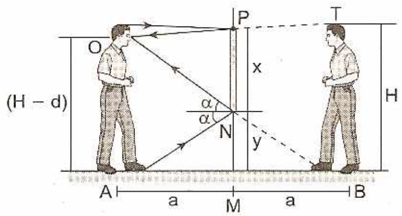


20. Una persona de estatura H se encuentra parado frente a un espejo plano vertical. Considerando que sus ojos se encuentran a una distancia d por debajo del límite superior de su cabeza, determinar:

a) La altura mínima que debe tener el espejo.

b) A qué altura con respecto al piso, debe ser colocado, tal que pueda ver su imagen completa.

Resolución:



a) Teorema de los puntos medios: $\triangle$ PON ~ $\triangle$ TOB

$$x = \frac{H}{2}$$

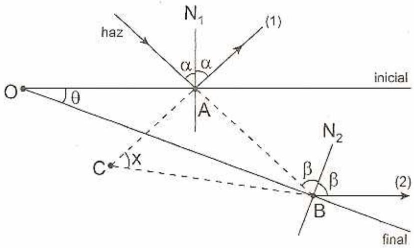
b) Teorema de los puntos medios: $\triangle$ NBM ~ $\triangle$ OBA

$$y = \frac{H - d}{2}$$

Los valores de x e y son independientes de la distancia a.

21. En un espejo plano incide un rayo luminoso. Demostrar que cuando se gira el espejo plano un ángulo θ, sus rayos reflejados se desvían 2θ.

Resolución:



Consideremos un espejo horizontal, al cual lo haremos girar un ángulo θ en sentido horario.

En el $\triangle$ AOB, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°:

$$\theta + (90° + \alpha) + (90° - \beta) = 180°$$

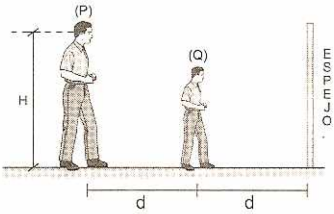
$$\Rightarrow \theta = \beta - \alpha \qquad ...(1)$$

En el $\triangle$ ACB, el ángulo exterior en el vértice B es:

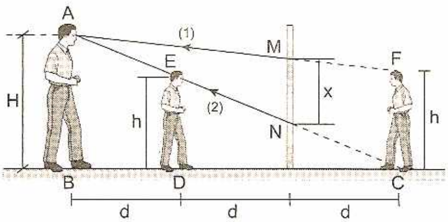
$$2\beta = x + 2\alpha \Rightarrow x = 2(\beta - \alpha) \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2): $x = 2\theta$

22. Para el esquema mostrado, calcular la altura mínima que debe tener el espejo plano en la pared vertical, para que la persona (P) pueda ver al muchacho (Q) íntegramente.
Donde: H = 1,8 m.



Resolución:



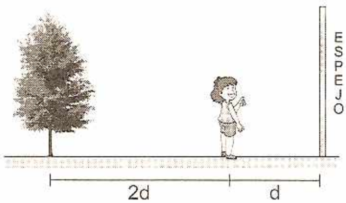
El rayo luminoso (2) pasará a los ojos de la persona P, si la estatura de la persona Q tiene un límite h.

Los triángulos ABC y EDC son semejantes: $\dfrac{H}{3d} = \dfrac{h}{2d}$

Los triángulos ACF y AMN son semejantes: $\dfrac{x}{2d} = \dfrac{h}{3d}$

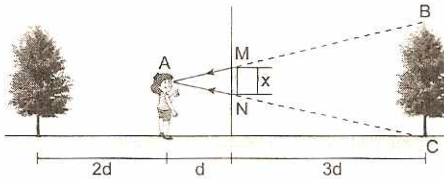
Entonces: x = 0,8 m

23. En el sistema mostrado, calcular la altura mínima que debe tener el espejo plano en la pared vertical, para que el niño de estatura 1,5 m pueda ver el árbol de 6 m de altura íntegramente en el espejo.



Resolución:

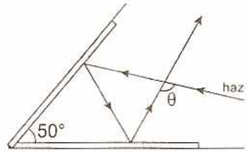
En todo espejo plano la imagen y el objeto tienen igual tamaño y se encuentran equidistantes con respecto al espejo.



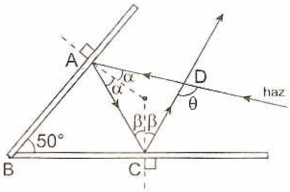
En la figura los triángulos AMN y ABC son semejantes:

$\frac{x}{d} = \frac{6}{4d}$ $\quad \therefore x = 1{,}5$ m

24. Dos espejos planos forman un ángulo de 50° entre sí. Determinar el ángulo θ que el rayo reflejado forma con el rayo incidente.



Resolución:



En todo espejo plano se cumple que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

En el triángulo ABC, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°:

$50° + (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 50°$ $\quad$ ...(1)

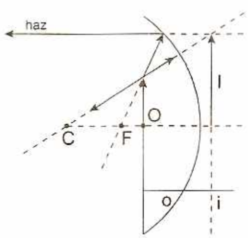
En el triángulo ACD, θ es ángulo exterior:

$\theta = 2(\alpha + \beta)$ $\quad$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos: $\theta = 100°$

25. Un objeto frente a un espejo esférico genera una imagen virtual de tamaño doble; si la distancia entre el objeto y la imagen es 30 cm, ¿a qué distancia del espejo se encuentra el objeto?

Resolución:



El único espejo esférico, que genera una imagen de mayor tamaño que el objeto (A > 1) es el espejo cóncavo.

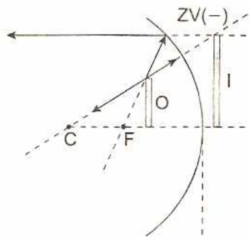
Aumento $= \frac{i}{o} = 2 \Rightarrow i = 2o$ $\quad$ ...(1)

Del dato: $o + i = 30$ cm $\quad$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $o = 10$ cm

26. ¿Cuál es el radio de curvatura de un espejo de afeitar que da un aumento doble de su rostro situado a 30 cm del espejo?

Resolución:



El espejo cóncavo, es el único espejo esférico, que da un aumento mayor que la unidad (A > 1).

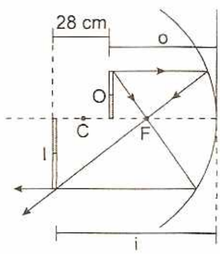
Aumento $= \frac{i}{o} = 2 \Rightarrow i = 2o \Rightarrow i = 60$ cm

Ecuación de los focos conjugados:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{-60}$ $\quad \therefore R = 120$ cm

27. Con un espejo cóncavo se obtiene una imagen invertida tres veces el tamaño objeto; si la distancia que le separa respecto a su imagen formada es de 28 cm, hallar el radio de curvatura del espejo.

Resolución:



Si la imagen, es invertida y de mayor tamaño que el objeto, entonces, el objeto se encuentra entre C y F.

Aumento $= \frac{i}{o} = 3 \Rightarrow i = 3o$ $\quad$ ...(1)

Del gráfico: $i - o = 28$ cm $\quad$ ...(2)

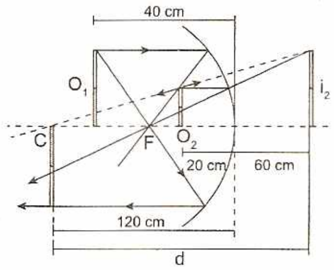
Reemplazando (1) en (2): $o = 14$ cm

Ecuación de los focos conjugados:

$\frac{2}{R} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ $\quad \therefore R = 21$ cm

28. Dos objetos se encuentran frente a un espejo cóncavo de 60 cm de radio de curvatura, el primero se encuentra 10 cm delante del foco y el segundo 10 cm detrás del foco. Determinar la distancia que existe entre las imágenes de los objetos.

Resolución:



Ecuación de los focos conjugados: $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$

Cálculo para el primer objeto: $\frac{1}{30} = \frac{1}{40} + \frac{1}{i_1}$

$i_1 = +120$ cm

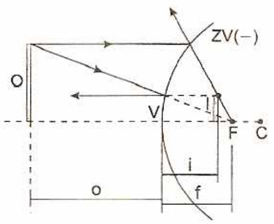
Cálculo para el segundo objeto: $\frac{1}{30} = \frac{1}{20} + \frac{1}{i_2}$

$i_2 = -60$ cm

De la figura; la distancia entre las imágenes es:
$d = 120 + 60 \quad \therefore \; d = 180$ cm

29. Un objeto de 10 cm de altura está situado a 180 cm de un espejo convexo esférico que tiene un radio de curvatura igual a 90 cm. Determinar el tamaño de la imagen.

Resolución:



Ecuación de los focos conjugados: $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$

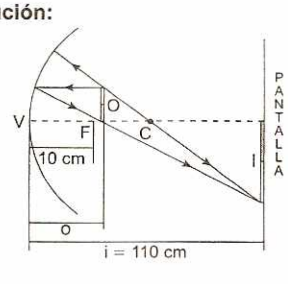
$\frac{1}{-45} = \frac{1}{180} + \frac{1}{i} \quad \Rightarrow i = -36$ cm

El signo (−) indica que la imagen es virtual.

Aumento $= \frac{TI}{TO} = \frac{i}{o} \Rightarrow \frac{TI}{10} = \frac{36}{180} \quad \therefore \; TI = 2$ cm

30. Un espejo esférico cóncavo de 20 cm de radio se utiliza para proyectar la imagen de un cuerpo sobre una pantalla situado a 110 cm. ¿Dónde debe ser colocado el cuerpo y cómo se verá la imagen?

Resolución:



Ecuación de los focos conjugados:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{o} + \frac{1}{110}$

$\Rightarrow o = 11$ cm ...(1)

Aumento $= \frac{i}{o} = \frac{110}{11} = 10$

La imagen es real, invertida y de mayor tamaño.

LENTES

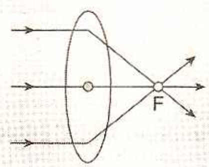
Es aquella sustancia transparente limitada por dos superficies, de las cuales por lo menos una de ellas debe ser esférica, de modo que el espesor es despreciable en relación a la longitud de los radios de curvatura, también se les denomina lentes delgadas. Existen dos tipos de lentes: convergentes y divergentes.

Lentes convergentes

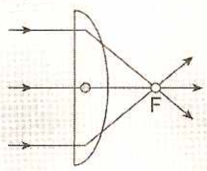
Son aquellos lentes cuya parte central es más ancha que sus extremos, se caracterizan porque hacen concurrir a los rayos refractados provenientes de rayos incidentes paralelos en un punto del plano focal. El punto F se llama foco de la lente.

Lentes convergentes

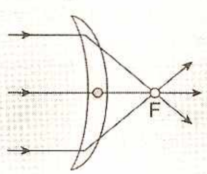
1. Biconvexa



2. Plano convexa



3. Menisco convergente

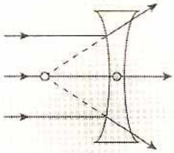


Lentes divergentes

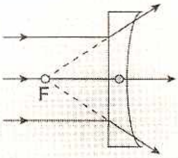
Son aquellos lentes cuya parte central es más delgada que sus extremos, se caracterizan porque hacen divergentes a los rayos refractados provenientes de rayos incidentes paralelos. Los rayos refractados divergentes, sus prolongaciones, son concurrentes en un punto del plano focal. El punto F se llama foco de la lente.

Lentes divergentes

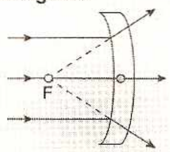
1. **Bicóncava**



2. **Plano cóncava**



3. **Menisco divergente**



Elementos de una lente

1. **Centro óptico (C):** es el centro geométrico de la lente, este punto se caracteriza porque todo rayo luminoso que pasa por él no experimenta desviación.
2. **Centro de curvatura (C_1, C_2):** son los centros geométricos de las superficies esféricas que limitan la lente.
3. **Radios de curvatura (R_1, R_2):** son los radios de las superficies esféricas que limitan la lente. Se denomina R_1 al radio de la esfera que está frente al objeto y R_2 al radio de la esfera que no está frente al objeto.

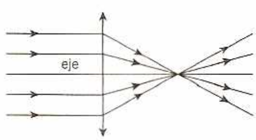


Fig. 19.15.a

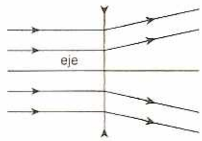


Fig. 19.15.b

Figura 19.15. Las lentes convergentes tienen su borde circular más delgado que la parte central, y en las divergentes su borde es más grueso.

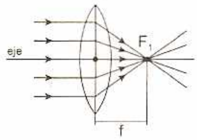


Fig. 19.16.a

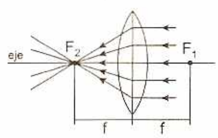


Fig. 19.16.b

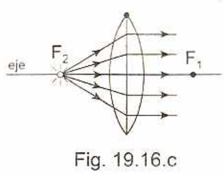


Fig. 19.16.c

Figura 19.16. Los rayos paralelos al eje de una lente convergente, luego de atravesarla, convergen hacia un foco (F_1 en a y F_2 en b). Los rayos luminosos que provienen de un foco, luego de atravesar la lente, se vuelven paralelos a dicho eje (Fig. 19.16.c).

4. **Eje principal (X, X'):** es aquella recta que pasa por los centros de curvatura y el centro óptico.
5. **Foco objeto (F_o):** es el foco de la lente que se encuentra en la región donde está el objeto.
6. **Foco imagen (F_i):** es el foco de la lente que se encuentra en la región donde no está el objeto.
7. **Foco principal (F):** es aquel punto situado en el eje principal por el cual van a pasar los rayos refractados o sus prolongaciones de estos, provenientes a la lente paralelos al eje principal. El foco principal puede ser el foco objeto o el foco imagen.
8. **Distancia focal (f):** es la distancia que existe entre el foco principal y el centro óptico de la lente.
9. **Zonas:** toda lente divide al espacio en el cual se encuentra en dos zonas denominadas, zona real (ZR), a aquella en la cual no se encuentra el objeto y zona virtual (ZV) a aquella en la cual se encuentra el objeto. Convencionalmente, en la zona real las distancias son positivas y en la zona virtual las distancias son negativas.
10. **Aberración:** cuando los rayos luminosos pasan cerca a los extremos de la lente se produce el fenómeno denominado aberración cromática de la lente, en el cual la imagen que se forma es coloreada como resultado que la luz se dispersa o se descompone en sus colores primarios (rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, violeta).

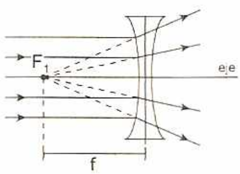


Fig. 19.17.a

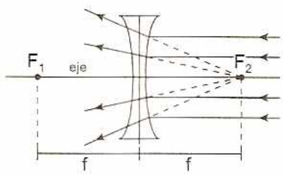


Fig. 19.17.b

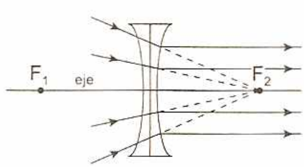


Fig. 19.17.c

Figura 19.17. Los rayos paralelos al eje de una lente divergente, luego de atravesarla, divergen de manera que sus prolongaciones pasan por un foco (F_1 en a y F_2 en b). Los rayos cuyas prolongaciones pasan por un foco después de atravesar la lente, se vuelven paralelos al eje (Fig. 19.17.c).

11. Trayectoria de los rayos:

1. Un rayo luminoso que incide en una lente convergente en forma paralela a su eje, se refracta pasando por el primer foco, F_1 (Fig. 19.18.a).

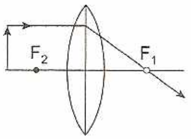


Fig. 19.18.a

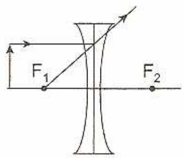


Fig. 19.18.b

Figura 19.18. Rayo paralelo el eje principal y que incide en una lente convergente (Fig. 19.18.a) y en una lente divergente (Fig. 19.18.b).

Un rayo luminoso que incide en una lente divergente en forma paralela a su eje, se refracta de manera que su prolongación pasa por el primer foco F_1 (Fig. 19.18.b).

12. Un rayo luminoso que incide en una lente convergente y cuya dirección pasa por el segundo foco F_2, sale de la lente en forma paralela a su eje (Fig. 19.19.a).

Un rayo luminoso que incide en una lente divergente, de modo que su prolongación pase por el segundo foco, F_2, sale de la lente en forma paralela a su eje (Fig. 19.19.b).

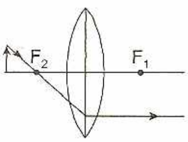


Fig. 19.19.a

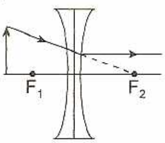
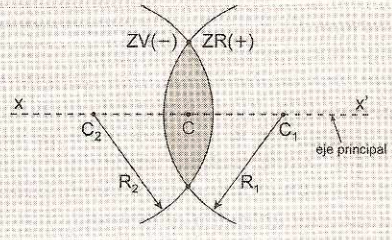


Fig. 19.19.b

Rayos luminosos que emergen en forma paralela al eje, después de atravesar una lente convergente (Fig. 19.19.a) y una lente divergente (Fig. 19.19.b).

Elementos:



FORMACIÓN DE IMÁGENES

Para la formación de las imágenes en una lente se tomarán en cuenta tres rayos luminosos considerados como los principales, de los cuales resultan indispensables solo dos de ellos, el tercero sirve de comprobación.

Rayos principales:

1. Un rayo luminoso que partiendo del objeto incide en la lente paralelamente al eje principal, se refracta para luego pasar él o su prolongación por el foco principal.
2. Un rayo luminoso que partiendo del objeto incide en la lente pasando previamente él o su prolongación por el foco no principal, para luego refractarse emergiendo de la lente paralelamente al eje principal.
3. Un rayo luminoso que parte del objeto, pasa por el centro óptico sin desviarse.

Ecuación de Gauss o de los focos conjugados

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

Aumento (A)

$$A = \frac{\text{tamaño imagen}}{\text{tamaño objeto}}$$

También: $A = \frac{-i}{o}$

Signos:

A(+): imagen derecha

A(−): imagen invertida

Las imágenes virtuales son derechas y las imágenes reales son invertidas.

Potencia de una lente (P)

$$P = \frac{1}{f}$$

Unidad: dioptría = m^{-1}

ECUACIÓN DE LOS FABRICANTES DE LENTES

$$\frac{1}{f} = \frac{(n - n_o)}{n_o}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

n: índice de refracción de la lente

n_o: índice del medio en que se encuentra la lente, para el aire es igual a la unidad.

R_1: radio de la esfera o superficie que está frente al objeto.

R_2: radio de la esfera o superficie que no está frente al objeto.

f: distancia del foco principal al centro óptico.

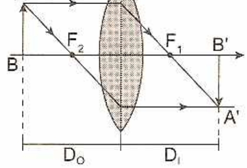


Fig. 19.20.a

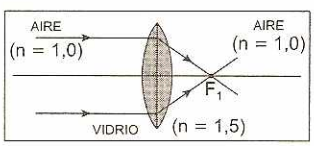


Fig. 19.20.b

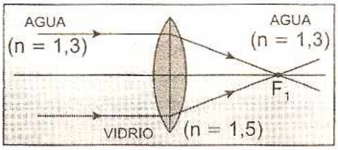


Fig. 19.20.c

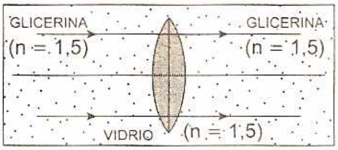


Fig. 19.20.d

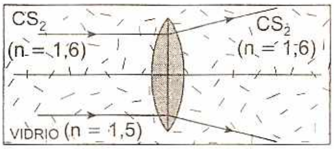


Fig. 19.20.e

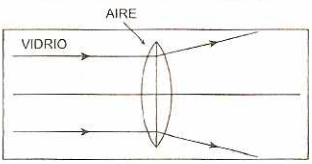
Figura 19.20. La distancia fotal de una lente depende del medio en el cual está sumergida.

Ejemplo:

Suponga que en el interior de un bloque de vidrio hay una burbuja de aire con caras convexas, como muestra la figura 19.21. Si hacemos que un haz de luz atraviese la burbuja, ésta se comportará como una lente. Esta lente de aire biconvexa, ¿será convergente o divergente?

Sabemos que una lente biconvexa de vidrio, al aire, es convergente. En nuestro caso se tiene la situación inversa: una lente de aire envuelta por vidrio; es decir, tenemos una lente biconvexa sumergida en un medio cuyo índice de refracción es mayor que el de la propia lente. Como ya sabemos, en estas condiciones la lente biconvexa se vuelve divergente. Así, la burbuja de aire envuelta por vidrio, se comportará como una lente divergente (Fig. 19.21).

Figura 19.21. Para el ejemplo.



Ley de signos

	Lente divergente	Lente convergente
σ	(+): siempre	(+): siempre
i	(−): siempre imagen virtual	(+): imagen real
		(−): imagen virtual
f	(−): siempre	(+): siempre

σ : distancia del objeto al centro óptico.

i : distancia de la imagen al centro óptico.

f : distancia del foco principal al centro óptico.

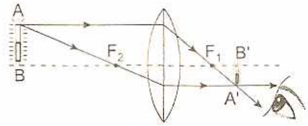


Figura 19.22. Ejemplo 1.

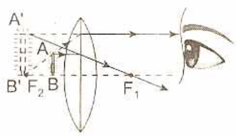


Figura 19.22. Ejemplo 2.

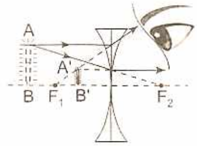


Figura 19.22. Ejemplo 3.

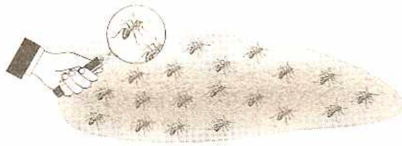


Figura 19.23. Mediante el empleo de una lupa podemos ver una imagen virtual y aumentada de los objetos.

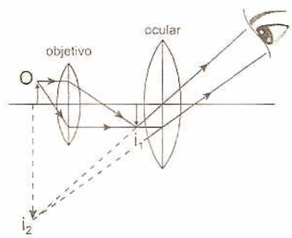
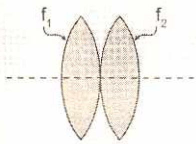


Figura 19.24. Esquema de la formación de la imagen en un microscopio.

Lente equivalente

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$



El ojo humano. De manera simplificada podemos considerar al ojo humano como constituido de una lente biconvexa, denominada cristalino, situada en la región anterior del globo ocular (fig. 19.25). En el fondo de este globo se localiza la retina, que funciona como una pantalla sensible a la luz. Las sensaciones luminosas que recibe la retina son llevadas al cerebro por el nervio óptico.

Cuando miramos un objeto, el cristalino (lente convergente) forma una imagen real e invertida del mismo, la cual se localiza exactamente sobre la retina (fig. 19.25), y en estas condiciones, visualizamos nítidamente dicho objeto. Aunque la imagen formada en la retina sea invertida, el mensaje llevado al cerebro pasa por complicados procesos, haciendo que visualicemos el objeto en su posición correcta.

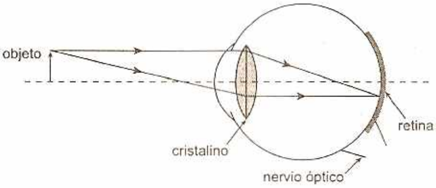


Figura 19.25. Esquema que muestra la formación de la imagen en un ojo humano.

Podemos ver nítidamente los objetos que estén cerca o lejos de nuestros ojos. Esto sucede porque la imagen siempre se forma en la retina, cualquiera que sea la distancia del objeto a nuestros ojos. En otras palabras, la distancia D_i de la imagen al cristalino (la lente) es constante, aunque cambie la distancia D_o del objeto con respecto a él. Para que tal cosa suceda, la distancia focal del cristalino debe ser diferente para cada posición del objeto. Lo anterior se produce por la acción de los músculos del ojo, que al actuar sobre el cristalino, producen alteraciones en su curvatura. Esta propiedad del ojo humano se denomina acomodamiento visual.

Para muchas personas, la imagen de los objetos no se forman exactamente en la retina, y por consiguiente, dichas personas no perciben con nitidez los objetos. El motivo por el cual sucede lo anterior puede ser una deformación del globo ocular, o bien, un acomodamiento defectuoso del cristalino.

En algunas otras personas, la imagen se forma enfrente de la retina; se trata de las personas con miopía o cortas de vista (fig 19.26.a). Para corregir este defecto, es decir, para hacer que la imagen del objeto se forme en la retina, las personas miopes deben usar gafas con lentes divergentes (fig. 19.26.b).

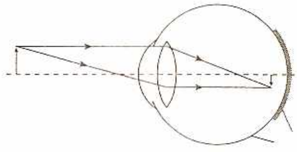


Fig. 19.26.a

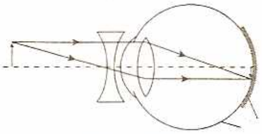


Fig. 19.26.b

Figura 19.26. Las personas miopes deben usar anteojos con lentes divergentes.

Por otra parte, en el caso de otras personas, generalmente las de mayor edad, los rayos luminosos son interceptados por la retina antes de formar la imagen (la cual normalmente se forma detrás de la retina, figura 19.27.a). Decimos que tales personas padecen de hipermetropía o vista cansada. Este defecto se corrige con el empleo de gafas con lentes convergentes (fig. 19.27.b).

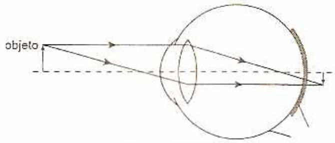


Fig. 19.27.a

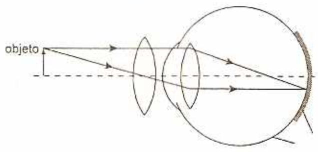


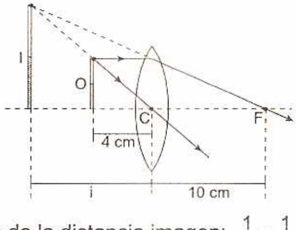
Fig.19.27.b

Figura 19.27. Las personas hipermétropes deben usar anteojos con lentes convergentes.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Delante de una lente convergente de 10 cm de distancia focal, se coloca a 4 cm del mismo, un objeto luminoso de 12 cm de tamaño. Calcular el tamaño de la imagen.

Resolución:



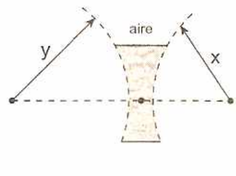
Cálculo de la distancia imagen: $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{i} \Rightarrow i = -\frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Aumento} = \frac{\text{tamaño imagen}}{\text{tamaño objeto}} = \frac{i}{o} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{\left(\frac{20}{3}\right)}{4}$$

$\therefore\ x = 20$ cm

2. La figura muestra una lente cuyo índice de refracción es $n = 1{,}5$. Hallar la distancia focal de la lente. $x = 30$ cm $\wedge$ $y = 60$ cm



Resolución:

Imaginariamente ubicamos al objeto a la izquierda de la lente divergente.

Ecuación de los fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]$$

R_1: radio de la superficie de la lente, frente al objeto.

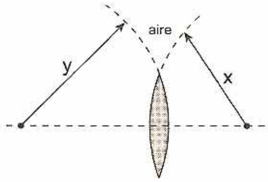
R_1: $y=-60$ cm(zona virtual)

R_2: $x=+30$ cm(zona real)

Reemplazando: $\frac{1}{f}=(1{,}5-1)\left[\frac{1}{-60}-\frac{1}{30}\right]$.

Despejando: $f=-40$ cm (−) : lente divergente

3. La figura muestra una lente cuyo índice de refracción es $n=1{,}5$. Si, $x=30$ cm; $y=60$ cm, hallar la distancia focal de la lente.



Resolución:

Imaginariamente ubicamos al objeto a la izquierda de la lente convergente.

Escribimos la ecuación de los fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]$$

R_1 : radio de la superficie de la lente, frente al objeto

$R_1=x=+30$ cm (ZR) ∧ $R_2=y=-60$ cm (ZV)

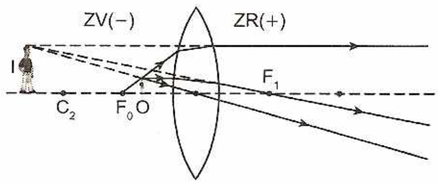
Reemplazando: $\frac{1}{f}=(1{,}5-1)\left[\frac{1}{30}-\frac{1}{-60}\right]$.

Resolviendo: $f=+40$ cm (+): lente convergente

4. Una lente delgada convergente tiene una longitud focal de 24 cm. Si se coloca un objeto a 18 cm de la lente, calcular la distancia a la cual se encuentra la imagen de la lente.

Resolución:

Toda lente divide al espacio en el cual se encuentra en dos zonas, denominadas zona real; aquella en la que no está el objeto, y zona virtual; aquella en la que se encuentra el objeto. Convencionalmente, en la zona real las distancias son positivas (+) y, en la zona virtual, las distancias son negativas (−).



Si la lente es convergente, la distancia focal es positiva y la distancia objeto también es positiva.

Reemplazamos los datos en la ecuación de los focos conjugados:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{o}$$

Reemplazando los datos:

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{i}+\frac{1}{18}\Rightarrow\frac{1}{24}-\frac{1}{18}=\frac{1}{i}$$

Resolviendo tenemos que: $i=-72$ cm

5. Un objeto de 4 cm de altura se encuentra ubicado a 20 cm de una lente convergente de distancia focal 12 cm. Determinar el tamaño de la imagen.

Resolución:

Si la lente es convergente, la distancia focal es positiva y la distancia objeto también es positiva. Reemplazamos los datos en la ecuación de los focos conjugados:

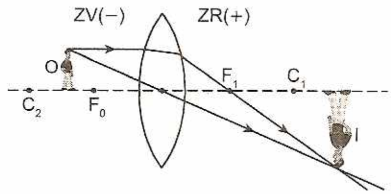
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{o}$$

Reemplazando los datos:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{i}+\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{i}$$

Resolviendo tenemos que: $i=+30$ cm

El aumento A es directamente proporcional a la distancia imagen e inversamente proporcional a la distancia objeto.



$$A=\frac{\text{tamaño imagen}}{\text{tamaño objeto}}=\frac{|i|}{o}\Rightarrow A=\frac{x}{4}=\frac{30}{20}$$

$\therefore\ x=6$ cm

6. Un objeto de 48 cm de altura se encuentra ubicado a 60 cm de una lente divergente de distancia focal 20 cm. Determinar la altura de la imagen.

Resolución:

Si la lente es divergente, la distancia focal es negativa y la distancia objeto es positiva. Reemplazamos los datos en la ecuación de los focos conjugados:

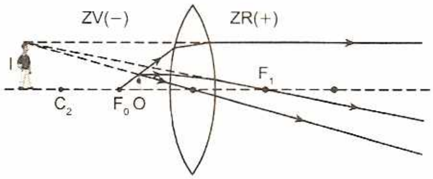
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{o}$$

Reemplazando los datos:

$$\frac{1}{-20}=\frac{1}{i}+\frac{1}{60}\Rightarrow\frac{1}{-20}-\frac{1}{60}=\frac{1}{i}$$

Resolviendo tenemos que: $i=-15$ cm

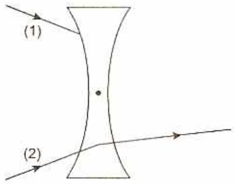
El aumento A es directamente proporcional a la distancia imagen e inversamente proporcional a la distancia objeto.



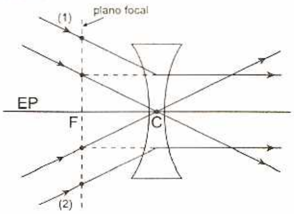
$$A = \frac{\text{tamaño imagen}}{\text{tamaño objeto}} = \frac{|i|}{o} \Rightarrow A = \frac{x}{48} = \frac{15}{60}$$

$\therefore$ x = 12 cm

7. En el sistema óptico mostrado, determinar geométricamente el foco principal y la trayectoria que seguirá el rayo luminoso (1).



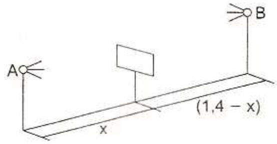
Resolución:



La lente divergente, hace divergentes a los rayos refractados en la lente provenientes de rayos incidentes paralelos. La prolongación de los rayos refractados, son concurrentes en un punto del plano focal.
Todo rayo luminoso que pasa por el centro óptico (C), no experimenta desviación.
El foco principal (F) se encuentra en la intersección del plano focal y el eje principal (horizontal).

8. Una lámpara A de intensidad luminosa 16 candelas y otra B de 9 candelas distan entre sí 1,4 m. ¿A qué distancia de la lámpara A hay que colocar una pantalla para que esté igualmente iluminada por ambos focos? La figura muestra el denominado: Fotómetro de Bunsen.

Resolución:



Iluminación (A) = Iluminación (B)

$$\frac{I_A}{d_1^2} = \frac{I_B}{d_2^2} \qquad ...(1)$$

I: intensidad luminosa (candela)
d: distancia entre la pantalla y la lámpara.

$$\frac{16}{x^2} = \frac{9}{(1,4 - x)^2}$$

Resolviendo: x = 0,8 m

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

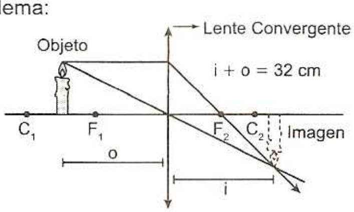
PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

La distancia focal de una lente convergente es de 8 cm. Se coloca un objeto frente a la lente y se obtiene una imagen real e invertida. Si la distancia entre el objeto y su imagen es de 32 c, calcule la distancia, en cm, de la imagen a la lente.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Resolución:

Del problema:



Aplicando la ecuación de Descartes; y reemplazando los datos, tenemos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{i} + \frac{1}{32 - i} \Rightarrow \text{Resolviendo: } i = 16 \text{ cm}$$

Clave: D

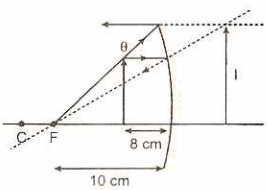
PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Un joven usa un espejo esférico cóncavo de 20 cm de radio de curvatura para afeitarse; si pone su rostro a 8 cm del vértice del espejo, Halle el aumento de su imagen.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Dibujando:



Por semejanza:

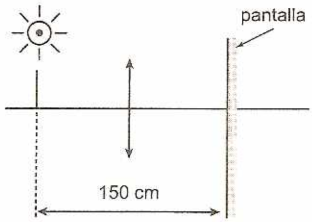
$$\frac{I}{10} = \frac{\theta}{2} \qquad \therefore \frac{I}{\theta} = 5$$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

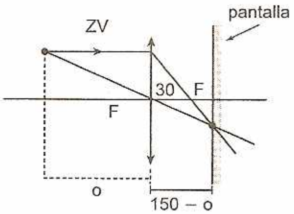
Una lente delgada convergente de distancia focal 30 cm debe colocarse entre una fuente luminosa puntual y una pantalla, de modo que sobre esta se forme nítidamente la imagen de la fuente. La distancia entre la fuente luminosa y la pantalla es 1,50 m. Las distancias, en cm, de las dos posiciones posibles en las que se debe colocar la lente con respecto a la fuente, son:

A) 105,5; 44,4
B) 106,5; 43,4
C) 107,5; 42,4
D) 108,5; 41,4
E) 109,5; 40,4



Resolución:

Del gráfico:



Ecuación: $\frac{1}{f}=\frac{1}{o}+\frac{1}{i} \Rightarrow \frac{1}{30}=\frac{1}{o}+\frac{1}{150-o}$

$0 = o^2 - 150o + 4500$

Resolviendo con la ecuación cuadrática

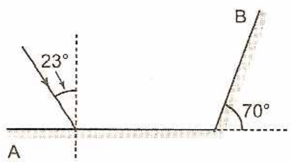
$o_1 = 108{,}5$ cm; $o_2 = 41{,}4$ cm

Clave: D

TPROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

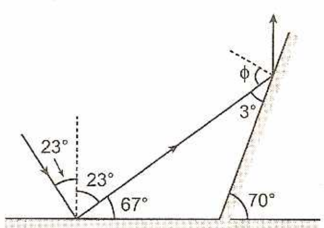
Calcule el ángulo de reflexión del rayo incidente en el espejo B, si el ángulo de incidencia del rayo sobre A es 23° y el ángulo entre A y B es 110°.

A) 23°
B) 27°
C) 57°
D) 67°
E) 87°



Resolución:

Dibujando la trayectoria de la luz

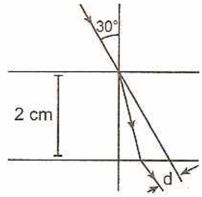


$\therefore \phi = 87°$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

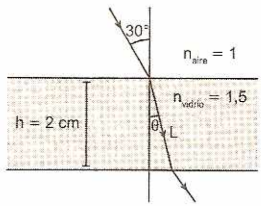
La luz mostrada en la figura pasa a través del bloque de vidrio de 2 cm de espesor y programación es desplazada lateralmente una distancia d (ver figura). Calcule aproximadamente el tiempo que invierte el rayo de luz, en s, en atravesar este bloque de vidrio. $n_{vidrio} = 1{,}5$ ($c = 3 \times 10^8$ m/s).



A) $1{,}06 \times 10^{-10}$ B) $1{,}17 \times 10^{-10}$ C) $2{,}15 \times 10^{-9}$
D) $3{,}42 \times 10^{-8}$ E) $4{,}15 \times 10^{-7}$

Resolución:

Del gráfico:



Determinamos el ángulo θ empleando la ley de Snell:

$n_{aire}\text{sen } 30° = n_{vidrio}\text{sen}\theta$

$\text{sen}\theta = 1/3$

De la figura, la longitud que recorre el rayo de luz refractado en "L".

$L = h\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Para determinar el tiempo:

$$t = \frac{L}{v_{vidrio}} = \frac{L}{\frac{C}{n_{vidrio}}} = \frac{Ln_{vidrio}}{C}$$

$$t = \frac{2\times10^{-2}(1{,}5)}{3\times10^{8}}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = 1{,}06\times10^{-10}\text{s}$$

Clave: A

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - I)

Un objeto de 10^{-2} m de altura se encuentra a una distancia de 10^{-1} m de espejo cóncavo. Si la imagen que se forma se encuentra a $2{,}5 \times 10^{-2}$ del espejo, calcule el radio de curvatura del espejo en m.

A) 10^{-2} B) 2×10^{-2} C) 4×10^{-2}
D) 6×10^{-2} E) 8×10^{-2}

Resolución:

Aplicando la ecuación de los espejo esféricos

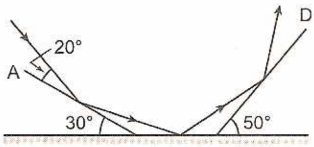
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta} \Rightarrow \frac{2}{R}=\frac{1}{2{,}5\times10^{-2}}+\frac{1}{(10)^{-1}}$$

$\therefore R = 4 \times 10^{-2}$ m

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los planos AB; BC y CD son espejos. Calcular el ángulo de desviación del rayo incidente al salir reflejado del espejo CD.



A) 100° B) 120° C) 140° D) 160° E) 170°

2. La imagen real de un objeto producida por un espejo cóncavo de 27 cm de distancia focal es 3 veces el tamaño del objeto. La distancia entre el espejo y el objeto es:

A) 45 cm B) 40 cm C) 38 cm
D) 24 cm E) 18 cm

3. Hallar la posición de un objeto, colocado frente a un espejo esférico cóncavo de 120 cm de radio, sabiendo que este proporciona una imagen derecha y de tamaño 4 veces el tamaño del objeto.

A) A 180 cm del espejo
B) A 45 cm de la imagen.
C) A 90 cm de la imagen
D) A 225 cm del espejo.
E) A 45 cm del espejo.

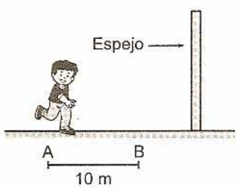
4. Calcular el radio de un espejo esférico de manera que colocado a una distancia de 45 cm de un objeto se obtiene una imagen derecha y de un tamaño 5 veces menor que el del objeto.

A) 11,25 cm B) 11,5 cm C) 15 cm
D) 22,5 cm E) 25 cm

5. Un objeto de 27 cm de tamaño es colocado a 30 cm de distancia focal. Calcular el tamaño de la imagen.

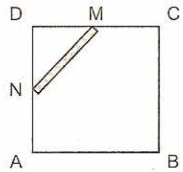
A) 27 cm B) 54 cm C) 13,5 cm
D) 40,5 cm E) 18 cm

6. ¿Con que velocidad observa la persona que se acerca su imagen, si para recorrer el tramo AB, emplea 10 s?



A) 1 m/s B) 2 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 8 m/s

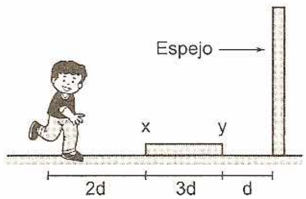
7. La figura mostrada representa la vista superior de una sala cuadrada. Un observador está ubicado en el vértice A y 2 personas más en los vértices B y C. Si MN es un espejo plano, entonces desde "A" observará a: (DM = MC = DN = NA)



A) C B) B
C) B y C D) No se ve a ninguno
E) Faltan datos

8. Calcular la altura mínima del espejo de tal manera que la persona de altura "h" puede observar la imagen del objeto xy. (h = 1,75 m)

A) 17,5 cm
B) 22,5 cm
C) 25 cm
D) 45 cm
E) 70 cm



9. ¿A qué distancia debe ubicarse un objeto de un espejo cóncavo de 5 cm de distancia focal para que tenga una imagen real y de igual tamaño que el objeto?

A) 10 cm B) 15 cm C) 20 cm
D) 5 cm E) 35 cm

10. Un espejo cóncavo de 0,5 m de radio produce una imagen real de 20 cm sobre una pantalla a 1,5 m del espejo. Calcular el tamaño del objeto.

A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 10 cm E) 12 cm

11. Un espejo esférico cóncavo da una imagen real tres veces mayor que el objeto. Calcular la distancia focal del espejo, si la distancia entre el objeto y su imagen es d = 20 cm.

A) 7,5 cm B) 15 cm C) 10 cm
D) 12,5 cm E) 25 cm

12. Un espejo cóncavo obtiene una imagen invertida cinco veces el tamaño del objeto. Si la distancia del objeto a la imagen es de 36 cm, calcular la distancia objeto-espejo.

A) 27 cm B) 14 cm C) 18 cm
D) 21 cm E) 9 cm

13. Un espejo cóncavo produce un aumento de −4 de un objeto. Si dicho objeto lo desplazamos 5 cm, el aumento disminuye a la mitad. Calcular la distancia del objeto al espejo.

A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm D) 25 cm E) 5 cm

14. Un objeto se encuentra a 100 cm de un espejo convexo. Si el objeto se acerca al espejo en 20 cm, el tamaño de su imagen aumenta 10% con respecto a la imagen anterior. Calcular la distancia focal del espejo.

A) −120 cm B) −60 cm C) −80 cm
D) −40 cm E) −10 cm

15. Un objeto de 24 cm de altura es colocado a 20 cm de un espejo convexo de 60 cm de distancia focal. La altura de la imagen es:

A) 18 cm B) 36 cm C) 14 cm D) 12 cm E) 6 cm

16. Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 16 cm. ¿A qué distancia del espejo debe colocarse un objeto para que la imagen sea real y del doble del tamaño que el objeto?

A) 18 cm B) 20 cm C) 24 cm
D) 50 cm E) 60 cm

17. Un objeto se encuentra entre 2 espejos planos, a 5 cm de uno y a 15 cm del otro. ¿Qué distancia separa a las segundas imágenes producidas en cada espejo?

A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm
D) 70 cm E) 80 cm

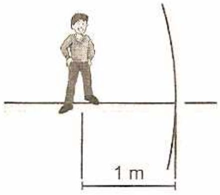
18. Un espejo plano se aleja de un objeto detenido con una velocidad constante de 0,5 m/s. ¿Qué distancia se habrá desplazado su imagen desde su posición original en los 5 primeros segundos?

A) 1,25 m B) 1,5 m C) 2,0 m D) 2,5 m E) 5 m

19. Determinar el número de imágenes que produce un objeto colocado entre dos espejos planos, que forman entre si un ángulo de 40°.

A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

20. La distancia focal del espejo mide 11 m. ¿A qué distancia del espejo se formara la imagen de la persona?



A) 2,2 m B) 1,1 m C) 1 m
D) 55 cm E) 50 cm

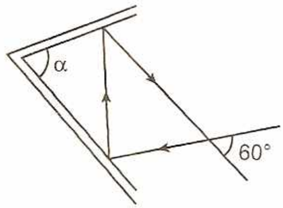
21. La posición de una estrella, vista desde la Tierra, difiere un poco de la real a causa de la refracción de los rayos en la atmósfera. Determinar el error al fijar la posición angular de una estrella que desde la Tierra se ve bajo un ángulo de 45° con la vertical. El índice de refracción del aire cerca de la superficie de la Tierra es n = 1,0003.

A) 0,7 min angular. B) 0,8 min angular.
C) 2 min angular. D) 1 min angular.
E) 3 min angular.

22. Recibiendo en la Tierra la señal radiada por un satélite artificial se puede determinar su posición angular. La refracción de las ondas hertzianas en la atmósfera origina un pequeño error. Así, para un satélite observado bajo un ángulo de 45° con la vertical, el error es de 2 min. ang Determinar el índice de refracción de las ondas hertzianas en la capa de la atmósfera próxima a la Tierra.

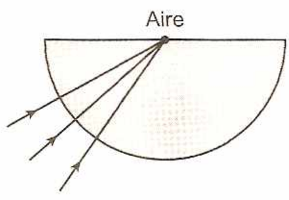
A) 1,0006 B) 1,0008 C) 1,0009
D) 1,00092 E) 1,00093

23. ¿Qué ángulo formara los espejos planos en el sistema mostrado?



A) 30° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 150°

24. Tres rayos de luz, de la misma frecuencia, inciden con ángulos de 30°, 45° y 60° sobre la superficie de una semiesfera de un vidrio cuyo índice de refracción es $\sqrt{2}$, como se muestra.



Entonces:

A) Emergen 2 rayos, con 45° y 90°, el tercero se refleja totalmente.
B) Emergen todos los rayos.
C) Emerge un rayo con 45° y otro se refleja totalmente.
D) Todos se reflejan totalmente.
E) Emerge un rayo con 30°, los otros dos se reflejan totalmente.

25. Si un objeto se encuentra en el fondo de un líquido cuyo índice de refracción es 1,6. Calcular la profundidad con que un observador libre del líquido de profundidad «H»

A) 1,6 H B) 1,2 H C) 0,625 H
D) 0,6 H E) 0,3 H

26. Determine el índice de refracción de cierta resina de una lente plano convexa (radio 1 m) si en el aire un objeto con su imagen equidistan a 2 m de la lente.

A) 1,4 B) 1,5 C) 1,6 D) 1,8 E) 2,0

27. Un objeto de 27 cm de tamaño es colocado a 30 cm de un espejo convexo de 30 cm de distancia focal. Calcular el tamaño de la imagen.

A) 27 cm B) 54 cm C) 13,5 cm
D) 40,5 cm E) 18 cm

28. ¿Cuál es el aumento de la imagen para un objeto a 10 cm frente a un espejo convexo de 50 cm de radio?

A) $-5/7$ B) $-4/5$ C) $+5/7$ D) $-7/5$ E) $-5/6$

29. Con relación a las siguientes proposiciones sobre los espejos convexos. Indique verdadero (V) o falso (F)

I. Las imágenes siempre son reales.
II. Su foco se encuentra en la zona virtual.
III. Las imágenes siempre son de menor tamaño.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFF

30. Los radios de curvatura de las superficies de una lente biconvexa miden 50 cm. El índice de refracción de la lente mide 1,5. Calcular su potencia óptica en dioptrías.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 2,5

31. Se tiene una lente biconvexa de radio de curvatura 30 y 60 cm con $n = 1,5$. Calcular la potencia de la lente (en dioptrías).

A) 1,5 B) 2 C) 3 D) 2,5 E) 1,2

32. ¿A qué distancia de una lente convergente de 18 cm de distancia focal se debe colocar una vela para obtener una imagen de cuádruple tamaño?

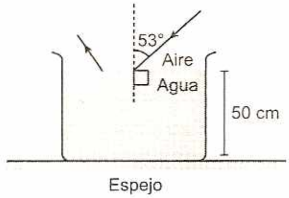
A) 15 cm B) 13,5 cm C) 12,5 cm
D) 16 cm E) 14 cm

33. Calcular el radio de un espejo esférico de manera que colocado a una distancia de 45 cm de un objeto se obtiene una imagen derecha y de un tamaño 5 veces menor que el del objeto.

A) 11,25 cm B) 11,5 cm C) 15 cm
D) 22,5 cm E) 25 cm

34. En un recipiente se tiene agua ($n = 4/3$) y en el fondo un espejo, un rayo luminoso incide en el punto P. Determine la distancia (en cm) a la cual emerge del agua el rayo luminoso después de reflejarse en el espejo.

A) 150
B) 100
C) 90
D) 75
E) 37,5



35. ¿A qué distancia (en cm) de un espejo de 20 cm de distancia focal debe colocarse un objeto de 4 cm de altura para obtener una imagen derecha de 8 cm de altura?

A) 20 B) 15 C) 10
D) 25 E) 5

36. Un objeto se encuentra inicialmente a 40 cm de un espejo esférico. Si se aleja otros 20 cm entonces la distancia entre la imagen y el espejo se reduce a la mitad. Determine la distancia focal (en cm) del espejo.

A) 50 B) 40 C) 30
D) 20 E) 35

37. Respecto a las lentes, delgadas, indique verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

I. Están formadas por una sustancia transparente y delimitada por dos superficies, de las cuales por lo menos una tiene la forma esférica.
II. En los lentes convergentes la imagen será real si el objeto se encuentra a una distancia de la lente, mayor que la distancia focal.
III. En las lentes divergentes las imágenes siempre son virtuales.

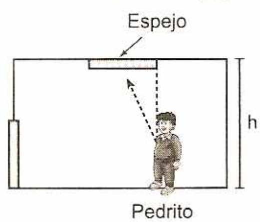
A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) VFF

38. Una lente biconvexa de 10 dioptrías se coloca a 15 cm de un objeto perpendicular al eje óptico y de 2 cm de altura. ¿De qué tamaño se forma la imagen?

A) 7,5 cm B) 6 cm C) 5 cm
D) 4 cm E) 0,3 cm

39. Un espejo plano cuadrado de 0,09 m^2 se coloca en el techo de un dormitorio, observando desde el piso de la habitación, ¿Qué área de piso (en m^2) podrá observar Pedrito a través del espejo?

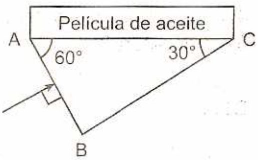
A) 0,21
B) 0,36
C) 0,54
D) 0,10
E) 0,9



40. Un objeto se encuentra a 100 cm de un espejo convexo, si el objeto se acerca al espejo en 20 cm, el tamaño de su imagen aumenta 10% con respecto a la imagen anterior. Calcular la distancia foca del espejo.

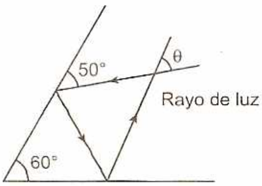
A) −120 cm B) −60 cm C) −80 cm
D) −40 cm E) −10 cm

41. La figura muestra un prisma de índice de refracción 1,5 y sobre cuya cara AC se ha depositado una película de aceite transparente. Un rayo luminoso incide normalmente sobre la cara AB y sale rasante a la interfaz prisma - película. ¿Cuál es el valor del índice de refracción del aceite?



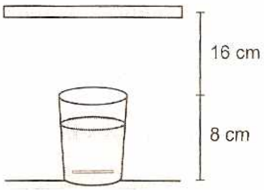
A) 1,1
B) 1,3
C) 1,5
D) 1,7
E) 1,8

42. La figura muestra dos espejos planos, que forman un ángulo de 60° entre sí, y la trayectoria de un rayo de luz que se refleja en los espejos. ¿Cuál es el valor del ángulo θ?



A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

43. Un espejo plano se encuentra a una altura de 16 cm de la superficie libre de un vaso que contiene aceite. ¿A qué distancia del fondo se formará la imagen de este en el espejo? (Índice de refracción del aceite n = 1,6?

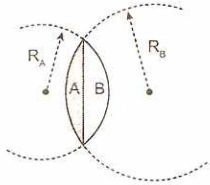


A) 42 cm
B) 43 cm
C) 45 cm
D) 48 cm
E) 54 cm

44. Un lente plano−convexo tiene una distancia focal igual a −160 cm, cuando está sumergido en un líquido cuyo índice de refracción de 1,6. Si el lente tiene un índice de refracción de 1,5 halle el radio de curvatura de una de sus caras

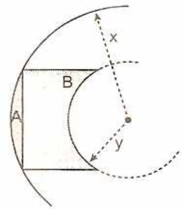
A) 16 cm B) 160 cm C) 20 cm
D) 320 cm E) 10 cm

45. La figura muestra dos lentes planos convexos A y B en contacto, cuyos índices de refracción son $n_A = 1{,}3$; $R_A = 60$ cm; $n_B = 1{,}5$; $R_B = 60$ cm. Halle la distancia focal de la lente equivalente al sistema óptico así formado.



A) 60 cm
B) 75 cm
C) 80 cm
D) −60 cm
E) −75 cm

46. La figura muestra dos lentes, convexo y cóncavo, A y B cuyos índices de refracción son:
$n_A = 1{,}4$; $n_B = 1{,}5$; x = 40 cm; y = 50 cm
Determine la distancia focal de la lente equivalente del sistema óptico.



A) Cero
B) 50 cm
C) 45 cm
D) 90 cm
E) Infinito

47. Se tiene una lente de 10 dioptrías y de un lado y de otro de uno de los focos, y sobre el eje, hay dos puntos luminosos que distan 2 cm de este foco. Halle la distancia que separa las imágenes de estos dos puntos.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 3,5 m E) 2,5 m

48. Una lente convergente de 30 cm de distancia focal recibe un haz cilíndrico de 12 cm de diámetro cuyo eje coincide con el de la lente. ¿A qué distancia de esta es preciso disponer una lente divergente para que el haz emergente sea también cilíndrico y de 4 cm de diámetro? Determine la distancia focal de la lente divergente.

A) 30 cm; 20 cm B) 30 cm; 25 cm
C) 20 cm; 10 cm D) 20 cm; 15 cm
E) 30 cm; 10 cm

49. Sobre una lente incide un haz de forma de cilindro circular de 2 cm de radio cuyo eje coincide con el eje principal de la lente. Del otro lado de esta y a 30 cm de distancia se dispone una pantalla, normal al eje, sobre la cual se observa un círculo luminoso de 10 cm de diámetro. Calcule la distancia focal.

A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm
D) 40 cm E) 50 cm

50. Se tiene dos lentes, uno convergente y otro divergente, cuyas longitudes focales son 90 cm y 30 cm respectivamente. Al colocar un objeto frente a la primera se forma una imagen virtual de triple tamaño. Si se cambia de lente, ¿Qué altura respecto del objeto tendrá la imagen formada?

A) La mitad B) La tercera parte
C) La cuarta parte D) Igual
E) El doble

51. En una lente convergente con distancia focal igual a 40 cm, incide un haz de rayos paralelos. ¿A qué distancia de la lente convergente es necesario colocar a una lente divergente, con distancia focal igual a 15 cm, para que el haz de rayos después de pasar por los dos lentes, continúe paralelo?

A) 15 cm B) 20 cm C) 25 cm
D) 30 cm E) 40 cm

52. Un objeto se encuentra a 15 cm del centro de un vidrio esférico de 7,5 cm de diámetro que adorna un árbol de navidad. ¿Cuál es la posición y aumento de su imagen?

A) 1,607 cm: 0,143 B) 1,507 cm; 0,163
C) 1,407 cm; 0,243 D) 1,627 cm; 0,131
E) 1,249 cm; 0,111

53. Cuando un objeto se coloca frente a un espejo convexo, el aumento que se obtiene es 0,5 y cuando se acerca 20 cm al espejo el aumento es 0,75. Determine la distancia focal del espejo.

A) −10 cm B) −20 cm C) −30 cm
D) −40 cm E) −50 cm

54. Frente a un espejo convexo se coloca una bujía que da una imagen de tamaño mitad que el de la llama. Un observador coloca un alambre detrás del espejo y lo mueve hacia atrás y hacia adelante hasta que no haya paralelaje entre la imagen vista en el espejo y el alambre proyectado sobre él. En esta posición la distancia del alambre al espejo es de 250 mm. ¿Cuál es la distancia focal del espejo?

A) 100 mm B) 200 mm C) 300 mm
D) 400 mm E) 500 mm

55. Un objeto pequeño se encuentra entre dos espejos planos que forman entre si un ángulo $\alpha = 30°$. El objeto está a la distancia $l = 12$ cm, de la línea de intersección de los espejos y a igual distancia de ambos. ¿Qué distancia hay entre las primeras imágenes virtuales?

A) 5 cm B) 10 cm C) 12 cm
D) 15 cm E) 20 cm

56. Indique la expresión verdadera.

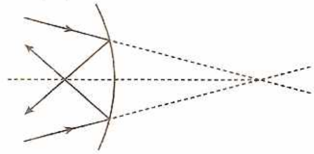
A) Si la imagen es real, de mayor tamaño e invertida, se trata de un espejo convexo.
B) Si la imagen es virtual de menor tamaño se trata de un espejo cóncavo.
C) Se puede obtener una imagen real derecha y de mayor tamaño en un espejo esférico.
D) Si la imagen es de mayor tamaño se trata de un espejo cóncavo necesariamente.
E) Si la imagen es de menor tamaño se trata de un espejo convexo necesariamente.

57. Un objeto está situado a 20 cm frente a un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es de 50 cm. ¿Qué característica tiene la imagen?

A) Real, invertida, menor tamaño.
B) Virtual, derecha, mayor tamaño.
C) Virtual, invertida, menor tamaño.
D) Virtual, derecha, menor tamaño.
E) Real, invertida, mayor tamaño.

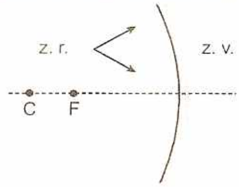
58. Un haz cónico convergente de rayos luminosos incide sobre un espejo cóncavo. ¿A qué distancia del foco se intersecan los rayos reflejados, si el radio del espejo es de 80 cm y la continuación de los rayos corta al eje óptico principal a la distancia de 40 cm detrás del espejo?

A) 20 cm
B) 40 cm
C) 60 cm
D) 80 cm
E) 100 cm



59. Indique cual será la imagen del objeto al colocarlo frente a un espejo cóncavo tal como se muestra.

A) $<$ virtual
B) $>$ real
C) $<$ virtual
D) $>$ virtual
E) $<$ real



60. La imagen de un objeto en un espejo cóncavo aparece aumentada a 3 veces. Después de que el objeto fue alejado del espejo en 80 cm, su imagen se hizo la mitad que el objeto. Determine la distancia focal del espejo.

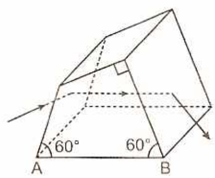
A) 20 cm B) 30 cm C) 40 cm
D) 50 cm E) 48 cm

61. La luna tiene un diámetro aproximado de 3480 km. ¿Cuál es el tamaño aproximado de la imagen de la luna que forma un espejo cóncavo de 3 m de radio cuando la luna se halla a su mínima distancia, que es de 356 000 km?

A) 10 min B) 11 min C) 12 min
D) 13 min E) 15 min

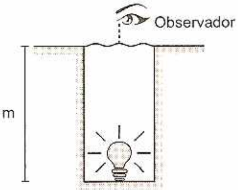
62. Halle la desviación mínima que experimenta el haz luminoso al emerger del material refringente de índice de refracción $n = \sqrt{2}$.

A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°



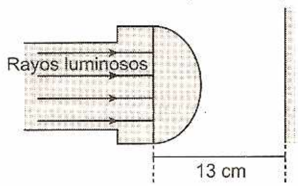
63. Un gran pozo de 2 m de profundidad se encuentra lleno de cierta sustancia transparente cuyo índice de refracción es 5/3. Si en el fondo del pozo se encuentra una pequeña bombilla encendida, determine el área iluminada que es vista por el observador.

A) 4π m^2
B) 25π m^2
C) $2{,}25\pi$ m^2
D) $2{,}56\pi$ m^2
E) 5π m^2



64. Un foco de una linterna está protegido por una pantalla, cuya forma es de una semiesfera de 3 cm de radio. Si con ella se alumbra a una pared situada a 13 cm de la linterna, determine el radio del círculo brillante que se formara en la pared $\left(n_{vidrio} = \dfrac{5}{4}\right)$.

A) 5 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 7 cm
E) 2 cm



65. En el fondo de un riachuelo yace una pequeña piedra. Un niño desea darle un golpe con un palo. Apuntando, el niño mantiene el palo en el aire bajo un ángulo de α con respecto a la vertical. ¿A qué distancia de la piedra se clavará el palo en el fondo del riachuelo, si su profundidad es de 32 cm? $\left(\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{4}\right)$; $\left(n_{H_2O} = \dfrac{5}{4}\right)$.

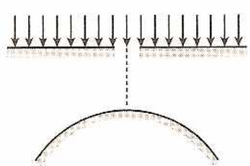
A) 32 cm B) 20 cm C) 15 cm D) 12 cm E) 8 cm

66. Una vara doblada en su mitad se halla sumergida en un tanque de agua, de manera que el vértice esta justo en la superficie del agua. A un observador que mira a lo largo de la parte de la barra, que emerge del agua, le parece que esta es recta y que forma 37° con la horizontal. ¿Qué ángulo forman entre si las dos partes de la barra $\left(n_{H_2O} = \dfrac{4}{3}\right)$?

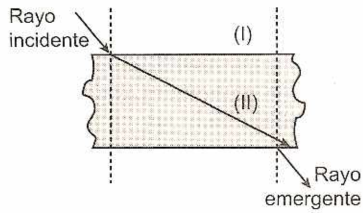
A) 37° B) 60° C) 100° D) 150° E) 164°

67. El techo de una casa tiene un agujero circular de 10 cm de diámetro e inciden los rayos solares según se muestra. Si a 2 m del techo se coloca un espejo convexo cuya distancia focal es 50 cm, ¿qué diámetro tiene el circulo luminoso que se forma en dicho techo?

A) 0,5 m
B) 2,5 m
C) 3,2 m
D) 5,4 m
E) 6 m



68. Indique la proposición correcta.



A) El medio (I) puede ser aire y el medio (II) vacío.
B) El medio (I) es menos denso que el medio (II).
C) En (I) la luz tiene igual frecuencia que (II).
D) La longitud de la onda luminosa es mayor en (I) que en (II).
E) El medio (I) puede ser aire y el medio (II) vidrio.

69. El índice de refracción en la superficie de separación aire-vidrio es 1,5 y el índice de refracción en la superficie de separación aire-agua es 1,33. ¿Cuál es el índice de refracción en la superficie de separación agua-vidrio?

A) 1,1 B) 1,3 C) 1,15 D) 1,2 E) 1,4

70. Una barra de madera de 40 cm de longitud se encuentra incrustada verticalmente hasta la mitad de su longitud en un bloque de hielo adherido a un recipiente. Si sobre el hielo se llena de agua hasta cubrir la barra, determine la longitud aparente de la tierra.

$$\left(n_{hielo} = \frac{5}{3};\ n_{agua} = \frac{4}{3}\right)$$

A) 27 cm B) 18 cm C) 13 cm
D) 9 cm E) 20 cm

71. Un niño se acerca caminando con rapidez constante a un espejo cóncavo de radio 60 cm. Si inicialmente presenta una imagen real a 40 cm del espejo y transcurrido 3 s desaparece su imagen, ¿Qué rapidez tiene el niño?

A) 10 cm/s B) 20 cm/s C) 30 cm/s
D) 40 cm/s E) 50 cm/s

72. Determine la distancia focal de un espejo esférico sabiendo que si se aleja 20 cm de un objeto que inicialmente estaba 40 cm del espejo, entonces la distancia entre la imagen y el espejo se reduce a la mitad.

A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm
D) 40 cm E) 50 cm

73. Por medio de una lente se obtiene una imagen de un objeto con aumento de $A = -1{,}5$, después la lente se traslada 12 cm a lo largo del eje principal y se obtiene una imagen de igual tamaño que el objeto. Determine la distancia focal de la lente.

A) 6 cm B) 9 cm C) 18 cm
D) 27 cm E) 36 cm

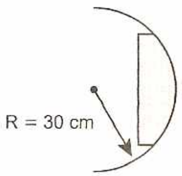
74. Un objeto se coloca a 14 cm delante de una lente convergente de 10 cm de distancia focal, otra lente convergente de 7 cm de distancia focal se coloca a 40 cm detrás de la primera lente. Determine la posición de la imagen del objeto en el sistema óptico dado.

A) 17,5 cm de la segunda lente.
B) 17,5 cm de la primera lente.
C) 20 cm de la primera lente.
D) 34 cm de la segunda lente.
E) No se forma imagen.

75. ¿A qué distancia de un espejo cóncavo de 32 cm de radio debe colocarse una lente convergente de 10 cm de longitud focal, para que un objeto colocado a 30 cm de la lente presente en el espejo una imagen del mismo tamaño que el objeto, pero invertida?

A) 28 cm B) 23 cm C) 18 cm
D) 15 cm E) 30 cm

76. Un lente cuyo índice de refracción es 1,5 produce una imagen del objeto cuyo aumento es igual a 2. Determine la distancia entre el objeto y la imagen hasta la lente.



A) 30 cm B) 90 cm C) 60 cm
D) 80 cm E) 85 cm

77. La distancia mínima de la visión de un miope es de 12 cm. ¿Qué lente a de usar tal que el punto próximo de visión se aleje a 30 cm?

A) 2 dioptrías B) 3 dioptrías
C) −3 dioptrías D) 5 dioptrías
E) −5 dioptrias

78. La distancia minima de la visión nitida de un hipermétrope es de 50 cm. ¿Qué valor adquiere esta distancia mínima cuando el ojo se auxilia con una lente convergente cuya distancia focal es de 30 cm?

A) 25,6 cm B) 15,7 cm C) 16,75 cm
D) 16,8 cm E) 18,75 cm

79. Un lente de −10 dioptría es ubicada a 2 cm de un objeto de 36 cm de altura. ¿Qué altura tiene su imagen?

A) 42 cm B) 30 cm C) 48 cm
D) 18 cm E) 12 cm

80. ¿A qué distancia de una lente de poder óptico −4,0 dioptrías será necesario colocar un objeto de 60 cm de altura para que su imagen tenga 10 cm de altura?

A) 10 cm B) 175 cm C) 40 cm
D) 80 cm E) 125 cm

81. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa respecto a la reflexión?

A) La medida del ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.
B) Lo anterior es válido solo en la reflexión regular.
C) El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal son coplanares.
D) Cuando un haz de luz incide sobre un espejo esférico no se produce reflexión regular.
E) En la reflexión difusa los rayos reflejados siguen direcciones no paralelas

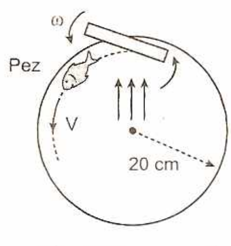
82. En una reflexión regular, el rayo incidente y su respectivo rayo reflejado forman entre si un ángulo 2α. Si la superficie de reflexión gira un ángulo α, permaneciendo invariable la dirección del rayo incidente, ¿Qué ángulo forman los rayos incidente y reflejado?

A) 2α B) 3α C) 4α
D) 5α E) $180 - 2\alpha$

83. Dos espejos planos forman un ángulo de 15°. Determine el ángulo de incidencia de un rayo en uno de los espejos para que después de reflejarse en el segundo sea paralelo al primer espejo.

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

84. Se tiene una pecera de forma esférica cuyo radio es 20 cm, en la parte superior de la pecera se tiene un pequeño espejo plano giratorio. Si desde la parte inferior se ilumina el espejo con rayos paralelos, ¿con qué rapidez angular debe girar el espejo?, sabiendo que siempre se debe iluminar un pequeño pez que se mueve bordeando la pecera con 2,4 m/s.

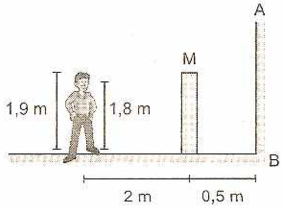


A) 5 rad/s B) 2 rad/s C) 3 rad/s
D) N. A. E) 4 rad/s

85. Un objeto se encuentra a 8 cm frente a un espejo plano, si el objeto se acerca al espejo en línea recta a 2 cm/s y el espejo en el mismo instante se aleja del objeto a razón de 6 cm/s, determine la distancia que avanza la imagen en 2 s, respecto al espejo.

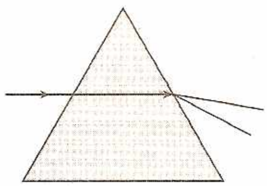
A) 2 cm B) 6 cm C) 10 cm
D) 4 cm E) 8 cm

86. Una persona de 1,9 m de altura se encuentra frente a un espejo plano vertical AB. ¿Qué altura como máximo puede tener el muro M de tal manera que la persona todavía pueda ver completamente la imagen de dicho muro?



A) 20 cm B) 30 cm C) 40 cm
D) 50 cm E) 60 cm

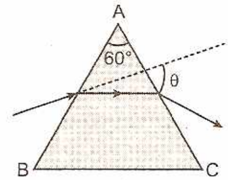
87. Cuando el haz de luz blanca incide en una cara de prisma mostrado, se descompone en siete colores dispersión, esto se debe a que



A) La radiación de cada color tiene diferente ángulo de incidencia.
B) El índice de refracción del vidrio depende del color de la radiación.
C) La rapidez del haz de luz aumenta.
D) El vidrio emite radiaciones de otros colores.
E) No se ve tal fenómeno.

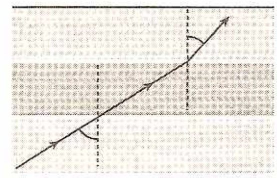
88. Un rayo luminoso incide sobre un prisma equilátero de cristal ABC. Luego de la incidencia del rayo, se refracta en forma paralela a BC. Si el índice de refracción de la sustancia del prisma es 1,6; determine el ángulo θ de desplazamiento del rayo.

A) 60°
B) 45°
C) 46°
D) 38°
E) 66°



89. Un rayo de luz sigue la trayectoria que se indica en la figura y pasa por tres medios diferentes ($n_1 = 1{,}6n$). Determine el valor de θ.

A) 16°
B) 23°
C) 30°
D) 37°
E) 45°

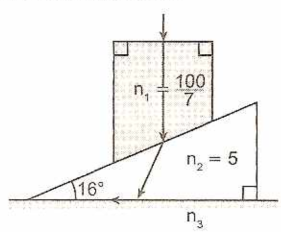


90. ¿Qué sucederá con la imagen de una fuente puntual en un espejo plano, si entre la fuente y el espejo se coloca paralelamente al espejo una placa de vidrio con grosor h e índice de refracción n?

A) Se desplaza en $2h(1 - 1/n)$ en dirección del plano del espejo.
B) Se desplaza en $2h(1/n - 1)$ en dirección del plano del espejo.
C) Se desplaza en $2h(1/n)$ en dirección al espejo.
D) Se desplaza en $2h(2 - n)$ en dirección al espejo.
E) Se desplaza en $(1 - n/2)h$ en dirección al espejo.

91. ¿Qué rapidez tiene la luz en el medio 3?

A) 3×10^8 m/s
B) 2×10^8 m/s
C) 10^8 m/s
D) $2{,}5 \times 10^8$ m/s
E) $3{,}5 \times 10^8$ m/sw



CLAVES

1. C	13. D	25. D	37. A	49. B	61. E	73. C	85. E
2. C	14. A	26. E	38. D	50. B	62. B	74. A	86. E
3. E	15. A	27. B	39. B	51. C	63. C	75. B	87. B
4. D	16. C	28. C	40. C	52. E	64. B	76. A	88. C
5. C	17. E	29. D	41. B	53. C	65. E	77. E	89. D
6. B	18. E	30. B	42. D	54. E	66. E	78. E	90. A
7. A	19. A	31. A	43. C	55. C	67. A	79. B	91. C
8. D	20. B	32. B	44. E	56. D	68. C	80. B	
9. A	21. D	33. B	45. B	57. E	69. B	81. B	
10. D	22. A	34. D	46. A	58. A	70. A	82. C	
11. A	23. B	35. C	47. A	59. D	71. C	83. D	
12. E	24. C	36. C	48. C	60. E	72. C	84. C	

Física moderna

20 capítulo

Max Karl Ernest Ludwig Planck (Kiel, Alemania, 23 de abril de 1858-Gotinga, Alemania, 4 de octubre de 1947) fue un físico y matemático alemán considerado el fundador de la teoría cuántica y galardonado con el Premio Nobel de Física en 1918. Aunque en un principio fue ignorado por la comunidad científica, profundizó en el estudio de la teoría del calor y descubrió, uno tras otro, los mismos principios que ya había enunciado Josiah Willard Gibbs (sin conocerlos previamente, pues no habían sido divulgados). Las ideas de Clausius sobre la entropía ocuparon un espacio central en sus pensamientos.

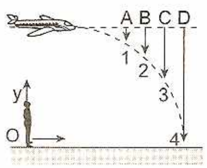
En 1900 descubrió una constante fundamental, la denominada constante de Planck, usada para calcular la energía de un fotón. Esto significa que la radiación no puede ser emitida ni absorbida de forma continua, sino solo en determinados momentos y pequeñas cantidades denominadas cuantos o fotones. Un año después descubrió la ley de la radiación electromagnética emitida por un cuerpo a una temperatura dada, denominada ley de Planck, que explica el espectro de emisión de un cuerpo negro. Esta ley se convirtió en una de las bases de la mecánica cuántica, que emergió unos años más tarde con la colaboración de Albert Einstein y Niels Bohr, entre otros.

RELATIVIDAD

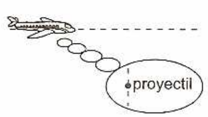
Por relatividad queremos decir la apariencia que presenta la naturaleza a un observador y su relación con la apariencia que presenta la naturaleza a otro observador, que puede estar en movimiento con respecto al primero.

Ejemplo:

Un avión de guerra se desplaza a velocidad constante respecto a la tierra, si el piloto abandona una bomba respecto al avión, la trayectoria que describe el proyectil es diferente para el piloto y un observador en la tierra.



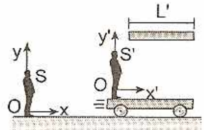
El hombre en tierra observa la trayectoria parabólica que describe el proyectil.



El piloto de avión o bserva que el proyectil cae en línea recta.
La trayectoria que describe un cuerpo o partícula es relativa.

Contracción de la longitud

Sea que la barra se mueve con relación al sistema S de referencia a velocidad constante "v" en línea recta y que la longitud de la barra en el sistema de referencia S', ligado con ella, es igual a L'.



Nuestro problema es determinar la longitud L de la barra desde el sistema S.
Luego:

$$\boxed{L = L'\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ...(20.1)$$

Donde: $\beta = \frac{v}{c} < 1$

La longitud L', medida en el sistema de referencia S', donde la barra está inmóvil, se denomina longitud propia.

Como: $\sqrt{1-\beta^2} < 1$

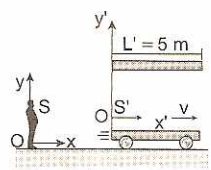
De este modo, la longitud de la barra en movimiento resulta ser menor que su longitud propia:

$L < L'$

Esta transformación de coordenadas del sistema S' a S es denominado Transformada de Lorentz debido a que fue obtenido por primera vez por el físico holandés Hendrik Lorentz, en 1890, en conexión con el problema del campo electromagnético de una carga eléctrica en movimiento.
Que la barra se mueve con velocidad constante "v" respecto al sistema S de referencia o que el sistema de referencia S se mueve respecto a la barra con una velocidad constante $-v$ es físicamente idéntico.

Ejemplos:

1. La barra en el sistema de referencia S', ligado con la barra, su longitud propia es L' = 5 m, en tanto que el sistema S, con relación al cual la barra se mueve a la velocidad $v = \frac{4}{5}c$. Hallar su longitud en movimiento, respecto al sistema de referencia S.



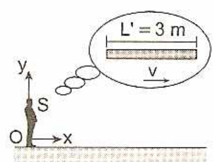
Resolución:

Usando la transformada de Lorentz:

$$L = L'\sqrt{1-\beta^2} \qquad ...(1)$$

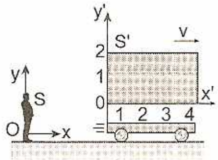
Pero: $\beta = \frac{v}{c}$; para nuestro caso: $\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta^2 = \frac{16}{25}$

Reemplazando en (1): $L = 5\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow L = 3$ m



Entonces, la longitud de una misma barra resulta diferente en distintos sistemas inerciales de referencia. Es decir, la longitud es un concepto relativo que tiene sentido solo respecto a uno u otro sistema de referencia.

2. Una lámina de forma rectangular en el sistema de referencia S', ligado al rectángulo, tiene longitudes propias x' = 4 m; y' = 2 m. El sistema S' se mueve respecto al sistema S con una velocidad constante $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ en el eje X. Hallar las dimensiones de la lámina respecto al sistema inercial S.



Resolución:

Señalamos, que la contracción se refiere solo a las medidas longitudinales de los cuerpos en la dirección del movimiento, las medidas transversales no varían, por lo tanto: $y = y' = 2$ m

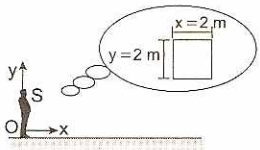
La contracción de la longitud se da en el eje X paralelo al movimiento. Usando la transformación de Lorentz:

$x = x'\sqrt{1-\beta^2}$ ...(1)

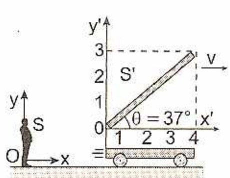
Pero: $\beta = \frac{v}{c}$; para nuestro caso: $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{3}{4}$

Reemplazando en (1): $x = 4\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 2$ m

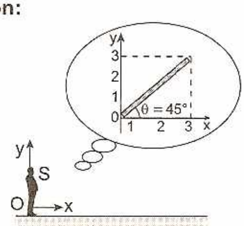
Para el sistema de referencia S, la lámina tiene forma cuadrada: $x = 2$ m; $y = 2$ m



3. En el sistema S' de referencia se encuentra una barra inmóvil de L'= 5 m de longitud, orientada un ángulo $\theta' = 37°$, respeto al eje x'. Encontrar su longitud L y el ángulo θ, correspondiente al sistema S de referencia, sabiendo que S' se mueve a velocidad constante en el eje X con $v = \frac{\sqrt{7}}{4}c$ respecto al sistema S.



Resolución:



No hay contracción de la componente perpendicular al movimiento, por lo tanto: $y = y' = 3$ m

Existe contracción de la componente paralela al movimiento: $x = x'\sqrt{1-\beta^2}$ ...(1)

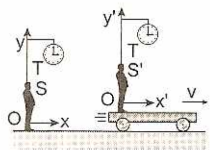
$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \beta^2 = \frac{7}{16}$

Reemplazando en (1): $x = 4\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow x = 3$ m

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras determinamos la longitud de la barra: $L = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2}$ m

Para el observador S la barra forma un ángulo $\theta = 45°$, respecto del eje X. La medida del ángulo también es relativa.

Dilatación del tiempo

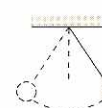


En la teoría de la relatividad se acostumbra a hablar de la comparación de la marcha de los relojes idénticos en diferentes sistemas inerciales de referencia.

Un intervalo de tiempo puede definirse como el tiempo que transcurre entre dos eventos, medido por un observador.

Un evento es una ocurrencia específica que sucede en un punto particular del espacio y en un tiempo particular.

Así, en función de estas definiciones, cuando la masa de un péndulo alcanza su máxima altura durante una oscilación, esto constituye un evento. Después de un cierto periodo de tiempo retornará a la misma posición, esto es un segundo evento.



El tiempo transcurrido entre dos eventos es entonces un intervalo. Así un intervalo es el tiempo que toma hacer algo: oscilar para un péndulo, girar alrededor del núcleo para un electrón, latir para un corazón, etc.

El reloj asociado al sistema de referencia S' se mueve con velocidad constante "v" en línea recta respecto al sistema S de referencia.

Supongamos que, estamos midiendo el período de un péndulo oscilatorio respecto al sistema de referencia S' el cual nos da un valor T', el mismo fenómeno medido con un reloj en el sistema S indicará T igual a:

$$\boxed{T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad ...(20.2)$$

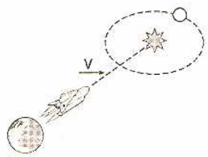
Donde: $\beta = \frac{v}{c} < 1$

Además: $1 - \beta^2 < 1 \Rightarrow T_{reposo} > T_{movimiento}$

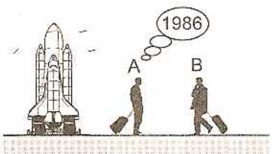
Es decir, el mismo reloj en diferentes sistemas inerciales de referencia marcha de modo distinto.

El reloj en movimiento marcha más lentamente que el que está en reposo.

Ejemplo:



Dos hermanos mellizos a la edad de 20 años se separan. Uno de ellos, A sale en un cohete hacia una estrella, con velocidad constante $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, y el hermano B, se queda en el planeta Tierra llevando una vida normal.



Cuando el hermano A llega al otro sistema estelar, otro planeta, su reloj indica un intervalo de tiempo igual a 30 años. ¿Qué edad tienen los mellizos?

Resolución:

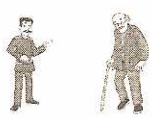
Los hermanos A y B se despiden en 1986, cuando ambos tienen la misma edad, 20 años, y tienen relojes idénticos. El mellizo A llega al otro planeta en el año 2016, respecto al sistema de referencia inercial S' ligado al cohete T' = 30 años.

Según la transformación de Lorentz, el tiempo transcurrido para el hermano B será:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{... (1)}$$

En este caso: $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{3}{4}$

Reemplazando en (1): $T = \frac{30}{0,5} \Rightarrow T = 60$ años



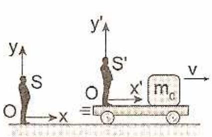
A: 50 años B: 80 años

Cuando A llegó al otro planeta, B en la Tierra tiene 80 años, respecto a S. En el otro planeta, bajo otro cielo, el hermano A tiene 50 años.

A: 50 años B: 80 años

La masa aumenta

La masa en reposo de una partícula es m_0, respecto al sistema de referencia inercial S'.



La masa aumenta cuando se mueve respecto a un sistema de referencia, en este caso el sistema S de referencia, el valor de la masa en movimiento es:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \text{...(20.3)}$$

Donde, m: masa de la partícula en movimiento

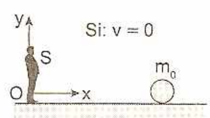
$\beta = \frac{v}{c} < 1$

- La masa "m" se denomina relativista.
- Esta última, como se ve en la ecuación anterior es mayor que la masa en reposo y depende de la velocidad "v" de la partícula.
- De este modo, llegamos a una importante deducción: la masa relativista de la partícula depende de su velocidad.
- Con otras palabras, la masa de una misma partícula será diferente en los distintos sistemas inerciales de referencia.
- A diferencia de la masa relativista, la masa en reposo m_0 de la partícula es una magnitud invariable, es decir, igual en todos los sistemas de referencia.
- Por esta causa se puede afirmar que precisamente la masa en reposo m_0 es la característica de una partícula.
- Cuando la velocidad de la partícula "v" es despreciable comparado con la velocidad C, de la luz en el vacío, la masa relativista tiende a la masa en reposo.

  Si: $\frac{v}{c} = 0 \Rightarrow m = m_0$

  Este es el caso de la mecánica clásica, movimientos lentos comparado con la velocidad de la luz.

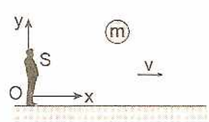
Ejemplo:



Una partícula cuya masa en reposo es $m_0 = 15$ gramos se mueve con una velocidad constante $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ respecto a un sistema de referencia S. Hallar la masa relativista respecto al sistema S.

Resolución:

Sabemos que la masa en reposo respecto al sistema S, es $m_0 = 15$ g.



De la ecuación que relaciona la masa en reposo con la masa relativista: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ...(1)

Para nuestro caso: $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{3}{4}$

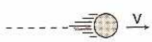
Reemplazando en (1): $m = \frac{15}{0,5} \Rightarrow m = 30$ g

La masa relativista es el doble de la masa de la partícula en reposo.

Energía cinética de la partícula relativista

La energía cinética de una partícula en movimiento con una velocidad v comparable con la velocidad de la luz, "c", en el vacío es:

$$\boxed{E_C = (m - m_0)\, c^2} \qquad \text{...(20.4)}$$



Esta es la expresión de la energía cinética relativista.
Donde:
m_0: masa de la partícula en reposo
m: masa relativista de la partícula.
c: velocidad de la luz en el vacío
La masa relativista de la partícula en reposo es igual a: $m = m_0$
Por consiguiente, en (20.4), la energía cinética en reposo es igual a cero: $E_C = 0$
La masa relativista en función de la masa en reposo:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \text{...(20.5)}$$

Reemplazando (20.5) en (20.4) tenemos:

$$\boxed{E_C = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} \qquad \text{...(20.6)}$$

Donde: $\beta = \frac{v}{c}$

Debemos recordar que en mecánica clásica la energía cinética es:

$$\boxed{E_C = m_0\frac{v^2}{c}} \qquad \text{...(20.7)}$$

Si la velocidad de la partícula es pequeña comparada con "c", entonces, la fórmula (20.6) pasa a ser igual a la fórmula (20.7); cerciorémonos si: $\frac{v}{c} << 1 \Rightarrow \beta << 1$

Para esto, hacemos uso de la fórmula del binomio de Newton, según la cual:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + ...$$

Cuando $\beta << 1$ podemos limitarnos a los dos primeros términos de la serie y, entonces, reemplazamos en (20.6):

$$E_C = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) \Rightarrow E_C = m_0c^2\frac{1}{2}\beta^2$$

Pero: $\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow E_C = m_0c^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$

Finalmente: $E_C = \frac{1}{2}m_0v^2$

Por lo tanto, a grandes velocidades la energía cinética de la partícula se determina por la fórmula (20.6) relativista diferente a: $\frac{1}{2}m_0v^2$

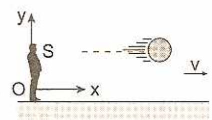
Señalemos que no se puede escribir la fórmula:

$$\boxed{E_C = \frac{mv^2}{2}} \qquad \text{...(20.8)}$$

Donde "m" es la masa relativista.

Ejemplos:

1.



Una partícula en reposo tiene una masa $m_0 = 1,0$ kg, si la partícula se mueve con una velocidad constante $v = \frac{\sqrt{3}c}{2}$, ¿cuál es el valor de su energía cinética, respecto al observador (S)?

Resolución:

Masa en reposo: $m_0 = 1,0$ kg
Fórmula de la energía relativista:
$E_C = (m - m_0)c^2$ ...(1)

Cálculo de la masa relativista: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ...(2)

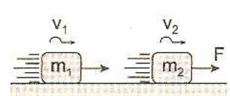
Donde: $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{3}{4}$

Reemplazando datos en (2): $m = \frac{1}{\sqrt{1 - 3/4}} = 2$ kg

La masa se duplica respecto a m_0 y $c = 3 \times 10^8$ m/s

Reemplazando en (1):
$E_C = (2 - 1)(3^2 \times 10^{16}) \Rightarrow E_C = 9 \times 10^{16}$ J

2.



¿Qué trabajo es necesario realizar para aumentar la velocidad de una partícula de masa en reposo $m_0 = 1$ g, desde $v_1 = 0,6c$ hasta $v_2 = 0,8c$?

Resolución:

Aplicando el teorema de la energía cinética conocido en mecánica clásica: el trabajo realizando por todas las fuerzas es igual a la variación de la energía cinética.
$W = E_{C(final)} - E_{C(inicial)}$ ...(1)

Pero la energía cinética relativista es:
$E_C = (m - m_0)c^2$

Reemplazando en (1):

$W = (m_2 - m_0)c^2 - (m_1 - m_0)c^2$

$\Rightarrow W = (m_2 - m_1)c^2$ ... (2)

Cálculo de la masa relativista:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{m_0}{0,8}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,64}} = \frac{m_0}{0,6}$$

$$\beta_1^2 = \frac{v_1^2}{c^2} = 0,36 \ \wedge \ \beta^2 = \frac{v_2^2}{c^2} = 0,64$$

Reemplazando en (2): $W = 0,42m_0c^2$

$W = 0,42(10^{-3})(9 \times 10^{16}) \Rightarrow W = 378 \times 10^{11}$ J

Ley de interacción de la masa y la energía

Albert Einstein llegó a la siguiente deducción fundamental:

La energía total del cuerpo (o sistema de cuerpos), independientemente de qué tipo de energía ella se componga (cinética, electrostática, química, etc), se liga con la masa de este cuerpo por la relación:

$$\boxed{E = mc^2} \quad ... (20.9)$$

E: energía total del cuerpo

m: masa relativista del cuerpo

c: velocidad de la luz en el vacío

Para evitar incomprensiones prestamos atención que en la energía total E no se incluye la energía potencial del cuerpo en el campo externo, si tal actúa sobre el cuerpo.

Esta fórmula expresa una de las leyes más fundamentales de la naturaleza.

Se puede escribir de otro modo la energía total del cuerpo:

$$\boxed{E = m_0c^2 + E_C} \quad ...(20.10)$$

m_0: masa en reposo del cuerpo

E_C: energía cinética del cuerpo

De aquí (20.10) se deduce directamente, que el cuerpo en reposo ($E_C = 0$) también posee energía:

$$\boxed{E_0 = m_0C^2} \quad ...(20.11)$$

Esta energía se denomina, energía de reposo o energía propia.

Vemos, que la masa de un cuerpo que en mecánica clásica actuaba como medida de la inercia (en la segunda ley de Newton) o como medida de acción de gravitación (en la ley de gravitación universal), actúa como una nueva función, o sea, como la medida del contenido de energía del cuerpo.

Incluso el cuerpo en reposo posee, según la teoría de la relatividad, reserva de energía, es decir, la energía de reposo.

Ejemplo:

¿Qué energía de reposo posee una partícula cuya masa en reposo es $m_0 = 1$ g?

Resolución:

Datos: $m_0 = 1 \text{ g} = 10^{-3}$ kg; $c = 3 \times 10^8$ m/s

Reemplazamos en la ecuación:

$E_0 = m_0c^2 = (10^{-3})(9 \times 10^{16}) \Rightarrow E_0 = 9 \times 10^{13}$ J

Es la energía en reposo, imagínate.

VARIACIÓN DE LA MASA

La variación de la energía total del cuerpo (o del sistema de partículas) va acompañada por la variación equivalente de su masa:

$$\boxed{\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}} \quad ...(20.12)$$

En general: $(m_f - m_0) = \dfrac{(E_f - E_0)}{c^2}$

Durante los procesos macroscópicos comunes de variación de la masa del cuerpo es extraordinariamente pequeña, inaccesible para la medición.

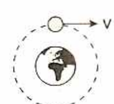
Esto se puede ilustrar en los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1. Para lograr poner un satélite de masa $m_0 = 100$ kg a la órbita alrededor de la Tierra, le comunicamos la velocidad de $v = 8$ km/s, ¿en cuánto aumenta la masa?

   Resolución:

   La energía aumenta en: $\Delta E = \frac{1}{2}m_0v^2$



   El aumento correspondiente de la masa del satélite será: $\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2} = \dfrac{m_0v^2}{2c^2}$ ...(1)

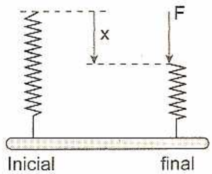
   Reemplazando datos numéricos en la ecuación (1) tenemos: $\Delta m = 3,5 \times 10^{-8}$ kg

   La masa del satélite ha aumentado debido al aumento de energía, se puede ver:

   $E_{total} = m_0c^2 + E_C \Rightarrow E_{total} = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$

2. Un resorte con coeficiente de elasticidad $k = 1000$ N/cm, se comprime en $x = 1$ cm. ¿En cuánto aumenta la masa?

Resolución:



El resorte adquiere la energía: $\Delta E = \frac{1}{2}kx^2$ ...(1)

El aumento correspondiente de su masa será:

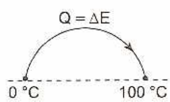
$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $\Delta m = \frac{1}{2}\left(\frac{kx^2}{c^2}\right)$

De los datos: $\Delta m = 0{,}50 \times 10^{-16}$ kg
La masa del resorte ha aumentado.

3. Para calentar un litro de agua desde 0 hasta 100 °C se le comunica la energía. ¿En cuánto aumenta la masa?

Resolución:



La energía de la sustancia es:
$\Delta E = mC_p\Delta t$ ...(1)

Donde: $C_p = 4{,}2 \ \frac{J}{g°C}$

Es la capacidad calorífica del agua a presión constante, Δt es la diferencia de temperaturas.
El aumento correspondiente de la masa del agua será:

$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ ...(2)

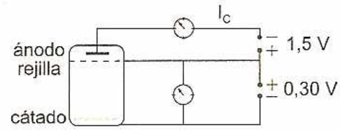
Reemplazando (1) en (2): $\Delta m = \frac{mC_p\Delta t}{c^2}$

De los datos numéricos: $\Delta m = 0{,}47 \times 10^{-10}$ kg
La masa del agua ha aumentado.

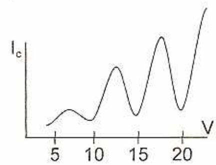
LA CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

La experiencia que realizaron Frank y Hertz en 1914, es uno de los experimentos claves que ayudaron a establecer la teoría atómica moderna. Nos muestra que los átomos absorben energía en pequeñas porciones o cuantos de energía, confirmando los postulados de Bohr. Mediante una simulación se tratará de explicar las características esenciales de este sencillo experimento, observando el movimiento de los electrones y sus choques con los átomos de mercurio, e investigando el comportamiento de la corriente I_c con la diferencia de potencial U que se establece entre el cátodo y la rejilla.

Descripción



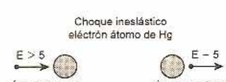
En la figura se muestra un esquema del tubo que contiene vapor de mercurio a baja presión con el que se realiza el experimento. El cátodo caliente emite electrones con una energía cinética casi nula. Ganan energía cinética debido a la diferencia de potencial existente entre el cátodo y la rejilla, ver el movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico.
Durante el viaje chocan con los átomos de vapor de mercurio y pueden perder energía. Los electrones que lleguen a la rejilla con una energía cinética de 1,5 eV o más, impactarán en el ánodo y darán lugar a una corriente I_c. Los electrones que lleguen a la rejilla con una energía menor que 1,5 eV no podrán alcanzar el ánodo y regresarán a la rejilla. Estos electrones no contribuirán a la corriente I_c.



La corriente I_c presenta varios picos espaciados aproximadamente 4,9 eV.

- El primer valle, corresponde a los electrones que han perdido toda su energía cinética después de una colisión inelástica con un átomo de mercurio.
- El segundo valle, corresponde a electrones que han experimentado dos colisiones inelásticas consecutivas con átomos de mercurio, y así sucesivamente.

Cuando un electrón experimenta una colisión inelástica con un átomo de mercurio lo deja en un estado excitado, volviendo al estado normal después de emitir un fotón de 2536 A de longitud de onda, que corresponde a una energía:
$E = hf = hc/\lambda$ de aproximadamente 4,9 eV.
Esta radiación se puede observar durante el paso del haz de electrones a través del vapor de mercurio. En la simulación aproximaremos el valor de esta energía a 5 eV.
La energía del fotón $hf = E_2 - E_1$ es igual a la diferencia entre dos niveles de energía E_2 y E_1 del átomo de mercurio. Esta energía es la que pierde el electrón en su choque inelástico con el átomo de mercurio.



En la simulación, empleamos un número limitado de átomos de Hg y de electrones, en el experimento real el número de átomos y electrones es muy grande, esto hace que para las diferencias de potencial (ddp) para las cuales la corriente presenta un mínimo se produzcan ciertas variaciones en el valor medido de la corriente para la misma ddp.

Fuentes de información

- Ángel Franco. *Física por ordenador.*
- Portal educativo: www.didactika.com

EL EFECTO FOTOELÉCTRICO

La emisión de electrones por metales iluminados con luz de determinada frecuencia fue observada a finales del siglo XIX, por Hertz y Hallwachs. El proceso por el cual se liberan electrones de un material por la acción de la radiación se denomina efecto fotoeléctrico o emisión fotoeléctrica. Sus características esenciales son:

- Para cada sustancia hay una frecuencia mínima o umbral de la radiación electromagnética por debajo de la cual no se producen fotoelectrones por más intensa que sea la radiación.
- La emisión electrónica aumenta cuando se incrementa la intensidad de la radiación que incide sobre la superficie del metal, ya que hay más energía disponible para liberar electrones.

En los metales hay electrones que se mueven más o menos libremente a través de la red cristalina, estos electrones no escapan del metal a temperaturas normales por que no tienen energía suficiente. Calentando el metal es una manera de aumentar su energía. Los electrones evaporados se denominan termoelectrones, este es el tipo de emisión que hay en las válvulas electrónicas. Vamos a ver que también se pueden liberar electrones (fotoelectrones) mediante la absorción por el metal de la energía de radiación electromagnética.
El objetivo de la práctica simulada es la determinación de la energía de arranque de los electrones de un metal, y el valor de la constante de Planck. Para ello, disponemos de un conjunto de lámparas que emiten luz de distintas frecuencias y placas de distintos metales que van a ser iluminadas por la luz emitida por esas lámparas especiales.

Descripción

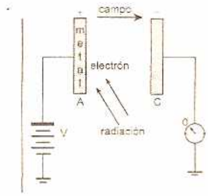
Sea ϕ la energía mínima necesaria para que un electrón escape del metal. Si el electrón absorbe una energía E, la diferencia $E - \phi$, será la energía cinética del electrón emitido:

$$E_C = E - \phi$$

Einstein explicó las características del efecto fotoeléctrico, suponiendo que cada electrón absorbía un cuanto de radiación o fotón. La energía de un fotón se obtiene multiplicando la constante "h" de Planck por la frecuencia "f" de la radiación electromagnética.

$$E = hf$$

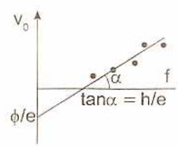
Si la energía del fotón E, es menor que la energía de arranque ϕ, no hay emisión fotoeléctrica. En caso contrario, si hay emisión y el electrón sale del metal con una energía cinética E_C igual a $E - \phi$.



Por otra parte, cuando la placa de área S se ilumina con cierta intensidad "I", absorbe una energía en la unidad de tiempo proporcional a IS, basta dividir dicha energía entre la cantidad hf para obtener el número de fotones que inciden sobre la placa en la unidad de tiempo. Como cada electrón emitido toma la energía de un único fotón, concluimos que el número de electrones emitidos en la unidad de tiempo es proporcional a la intensidad de la luz que ilumina la placa.
Mediante una fuente de potencial variable, tal como se ve en la figura podemos medir la energía cinética máxima de los electrones emitidos, ver el movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico.
Aplicando una diferencia de potencial V entre las placas A y C se frena el movimiento de los fotoelectrones emitidos. Para un voltaje V_0 determinado, el amperímetro no marca el paso de corriente, lo que significa que ni aún los electrones más rápidos llegan a la placa C. En ese momento, la energía potencial de los electrones se hace igual a la energía cinética:

$$eV_0 = hf - \phi$$

Variando la frecuencia "f", (o la longitud de onda de la radiación que ilumina la placa) obtenemos un conjunto de valores del potencial de detención V_0. Llevados a un gráfico obtenemos una serie de puntos (potencial de detención, frecuencia) que se aproximan a una línea recta.
La ordenada en el origen mide la energía de arranque en electrón-voltios ϕ/e. Y la pendiente de la recta es h/e. Midiendo el ángulo de dicha pendiente y usando el valor de la carga del electrón $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, obtendremos el valor de la constante de Planck, $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js.



EL EFECTO COMPTON

Cuando se analiza la radiación electromagnética que ha pasado por una región en la que hay electrones li-

bres, se observa que además de la radiación incidente, hay otra de frecuencia menor. La frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada dependen de la dirección de la dispersión.

Sea λ la longitud de onda de la radiación incidente, y λ' la longitud de onda de la radiación dispersada. Compton encontró que la diferencia entre ambas longitudes de onda estaba determinada únicamente por el ángulo θ de dispersión, del siguiente modo:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

donde λ_c es una constante que vale $2{,}4262 \times 10^{-12}$ m

Se explica el efecto Compton en términos de la interacción de la radiación electromagnética con electrones libres, que suponemos inicialmente en reposo en el sistema de referencia del observador.

Fundamentos físicos

En el efecto fotoeléctrico solamente hemos considerado que el fotón tiene una energía $E = hf$. Ahora bien, un fotón también tiene un momento lineal $p = E/c$.

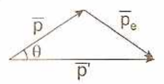
Esta relación no es nueva, sino que surge al plantear las ecuaciones que describen las ondas electromagnéticas. La radiación electromagnética tiene momento y energía. Cuando analicemos cualquier proceso en el que la radiación electromagnética interactúa con las partículas cargadas debemos de aplicar las leyes de conservación de la energía y del momento lineal.

En el caso del efecto fotoeléctrico, no se aplicó la ley de conservación del momento lineal por que el electrón estaba ligado a un átomo, a una molécula o a un sólido, la energía y el momento absorbidos están compartidos por el electrón y el átomo, la molécula o el sólido con los que está ligado.

Vamos a obtener la fórmula del efecto Compton a partir del estudio de un choque elástico entre un fotón y un electrón inicialmente en reposo.

1. **Principio de conservación del momento lineal**
   - Sea "p" el momento lineal del fotón incidente, $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
   - Sea p' el momento lineal del fotón difundido, $p' = \frac{E'}{c} = \frac{hf'}{c} = \frac{h}{\lambda'}$
   - Sea p_e el momento lineal del electrón después del choque, se verificará que:

     $p = p' + p_e$ ...(1)



2. **Principio de conservación de la energía**
   - La energía del fotón incidente es $E = hf$.
   - La energía del fotón dispersado es $E' = hf'$.
   - La energía cinética del electrón después del choque no la podemos escribir como $m_e v^2/2$ ya que el electrón de retroceso alcanza velocidades cercanas a la de la luz, tenemos que reemplazarla por la fórmula relativista equivalente:

     $$E_c = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_ec^2$$

     donde m_e es la masa en reposo del electrón y es igual a $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

El principio de conservación de la energía se escribe:

$E = E' + c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_ec^2$ ...(2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_ec^2}(1 - \cos\theta)$$

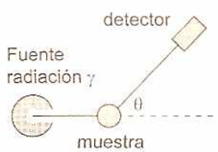
Teniendo en cuenta la relación entre frecuencia y longitud de onda se convierte en la expresión equivalente:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)$$

Hemos obtenido el valor de la constante de proporcionalidad λ_c a partir de las constantes fundamentales h, m_e y c.

Llegamos entonces a la conclusión de que podemos explicar la dispersión de la radiación electromagnética por los electrones libres como una colisión elástica entre un fotón y un electrón en reposo en el sistema de referencia del observador. A partir de las ecuaciones de conservación del momento lineal y de la energía, llegamos a la ecuación que nos relaciona la longitud de onda de la radiación incidente λ con la longitud de onda de la radiación dispersada λ' y con el ángulo de dispersión θ.

Actividades



En la experiencia real, el detector es un cristal de INa, la fuente de rayos gamma está producida por el isótopo Cs-137, que tiene un pico muy agudo centrado en 661,6 keV, o en la longitud de onda $1{,}878 \times 10^{-12}$ m, (0,01878 A). Los electrones libres los proporciona un trozo de metal que puede ser una varilla de hierro.

Midiendo la diferencia de longitudes de onda entre la radiación dispersada y la radiación incidente se pide calcular la constante λ_c. A partir del valor de esta constante, y conocido los valores de las constantes fundamentales, velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8$ m/s y la masa del electrón $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, se

pide calcular el valor de la constante "h" de Planck, comprobando que está cerca del valor $6{,}63 \times 10^{-34}$ Js.

Se pulsa el botón titulado Nuevo.
Se cambia el ángulo θ del detector actuando con el ratón.
Se mide la longitud de onda de la radiación dispersada.

Ejemplo:

La longitud de onda de la radiación dispersada para el ángulo 60° es $\lambda' = 0{,}03091$ A. Calcular la constante λ_c y a continuación, la constante "h" de Planck.

Resolución:

$0{,}03091 - 0{,}01878 = \lambda_c(1 - \cos 60°)$
$\lambda_c = 0{,}02426 \text{ A} = 2{,}426 \times 10^{-12}$ m

$$2{,}426 \times 10^{-12} = \frac{h}{(9{,}1 \times 10^{-3})(3 \times 10^{8})}$$

$\Rightarrow h = 6{,}623 \times 10^{-34}$ Js

En la parte inferior izquierda del *applet*, se representa la intensidad de la radiación gamma que registra el detector en función de la longitud de onda. En el programa interactivo, la fuente de rayos gamma emite ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda están centradas en 0,01878 A. La forma del pico se ha representado mediante la gaussiana:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

centrada en dicha longitud de onda "a", y cuyo valor sigma σ se ha ajustado para dar la apariencia de un pico agudo (en color azul). La radiación registrada por el detector se ha representado por medio de otra gaussiana (en color rojo) centrada en la longitud de onda dispersada cuyo valor de sigma σ va creciendo con el ángulo de dispersión.
En la parte superior derecha del applet, se muestran los valores numéricos de las longitudes de onda en angstrong (10^{-10} m) de la radiación incidente y dispersada.
En la parte derecha del *applet*, podemos ver de forma animada el choque elástico entre un fotón y un electrón en reposo. Podemos apreciar gráficamente cómo cambia la longitud de onda de la radiación dispersada a medida que aumenta el ángulo de dispersión.
Podemos ver también que el electrón retrocede adquiriendo un momento lineal p_e y formando un ángulo que se puede calcular a partir de las ecuaciones de conservación del momento lineal (1) y de la energía (2). Para calcular la velocidad "v" del electrón, necesitamos la expresión relativista del momento lineal:

$$P_e = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Actuar con el puntero del ratón sobre el detector para cambiar de ángulo de observación.

Fuentes de información:

- Ángel Franco. *Física por ordenador.*
- La descripción de la experiencia real se encuentra en University Laboratory. Experiments. Physics. Volumen N.° 3. PHYWE.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Haga un estimado de la longitud de onda de la radiancia espectral máxima e identifique la zona del espectro para:

a) Un cuerpo humano.
$T = 37°\text{ C} = 310$ K
Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{310} \Rightarrow \lambda_{máx} = 9348 \text{ nm}$$

Para un ojo humano, la zona infrarroja.

b) La radiación cósmica relicta.
$T = 3$ K
Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{3} \Rightarrow \lambda_{máx} = 10\,350 \text{ nm}$$

Zona infrarroja.

c) El filamento de tungsteno de una lámpara incandescente.
$T = 1500$ K
Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{1500} \Rightarrow \lambda_{máx} = 1932 \text{ nm}$$

Zona infrarroja.

d) Un dispositivo termonuclear en explosión.
$T = 10^7$ K
Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{10^7} \Rightarrow \lambda_{máx} = 0{,}2898 \text{ nm}$$

Zona rayos X/rayos gamma.

e) El Universo inmediatamente después del Big Bang.

$T = 10^{38}\,K$

Aplicando la ley de Wien:

$$\lambda = \frac{2,898\times 10^{-3}}{10^{38}} \Rightarrow \lambda = 3\times 10^{-32}\,nm$$

Zona rayos cósmicos.

2. Un termógrafo es un instrumento médico empleado para medir la radiación térmica de la piel. La piel que cubre un tumor irradia a una temperatura ligeramente más alta que la normal. Deduzca una expresión aproximada para la diferencia fraccionaria $\Delta I/I$ de la intensidad de radiación entre áreas adyacentes que están a temperaturas ligeramente diferentes y evalúe para una diferencia de 1,3 °C.

Resolución:

$I = \delta T^4$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\sigma T_1^4} \Rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 - 1$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \left(\frac{301,3}{300}\right)^4 - 1 \Rightarrow \frac{\Delta I}{I} = 1,7\%$$

3. El filamento de una lámpara de 100 W es un alambre cilíndrico de tungsteno de 0,280 mm de diámetro y 1,8 cm de longitud. Calcule la temperatura de operación del filamento.

Resolución:

Datos: $P = 100\,W$; $2r = d = 0,280\,mm$; $L = 1,8\,cm$;

$$\sigma = 5,67\times 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4} \Rightarrow P = AI = A\sigma T^4 = 2\pi r l \sigma T^4$$

Despejando: $T = \sqrt[4]{\dfrac{P}{A\sigma}} \quad \therefore\ T = 3248,69\,K$

4. ¿A qué expresión se reduce la ley de Planck de la radiación térmica cuando la longitud de onda tiende al infinito?

Resolución:

Según Planck, la densidad de energía emitida por un cuerpo negro está dada por:

$$\rho = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}\right)$$

Esta fórmula explicaba perfectamente el fenómeno de radiación térmica emitida por un cuerpo negro. Pero para longitudes de onda largas ($I \rightarrow \infty$) el término exponencial tiende a cero. En este caso se puede hacer la siguiente aproximación:

$$e^x = 1 + x \Rightarrow e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda KT}$$

Reemplazando esta aproximación a la expresión de Planck y simplificando se obtiene la expresión de Rayleigh-Jeans:

$$\sigma = \frac{8\pi KT}{\lambda^4}$$

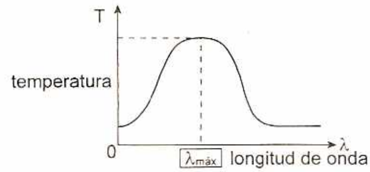
5. Obtenga la ley de Stefan-Boltzmann a partir de la ley de Planck de la radiación.

Resolución:

Según Planck, la densidad de energía emitida por un cuerpo negro está dada por:

$$\rho = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1}\right) \qquad ...(1)$$

y su gráfica (ρ-λ) para una temperatura dada tiene la siguiente forma:



Si deseamos determinar la energía emitida por un cuerpo negro por unidad de área y por unidad de tiempo, debemos integrar la fórmula de Planck desde $\lambda = 0$ hasta $\lambda = \infty$ (que geométricamente se interpreta como el área bajo la curva), es decir:

$$R = \int_0^\infty \rho\, d\lambda \qquad ...(2)$$

Haciendo el cambio de variable sugerido:

$$x = \frac{hc}{\lambda KT} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{xKT}$$

Por otro lado, de la relación anterior se deduce aplicando diferenciales que: $d\lambda = -\dfrac{hc}{x^2KT}dx$

Reemplazando en (2) y considerando (1):

$$R = \frac{8\pi hc}{\left(\frac{hc}{xKT}\right)^5}\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1}\right)\left(\frac{-hc}{x^2KT}\right)dx$$

$$\Rightarrow R = \frac{8\pi K^4T^4}{h^3c^3}\int_0^\infty \left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right)dx$$

Reemplazando la expresión integral dada:

$$R = \left(\frac{8\pi KT}{h^3c^3}\right)\left(\frac{\pi^4}{15}\right) \Rightarrow R = \left(\frac{8\pi^5K^4}{15h^3c^3}\right)T^4 \Rightarrow R = \sigma T^4$$

Que es la expresión de Stefan-Boltzmann.

6. Un cuerpo de masa 300 g unido a un resorte de constante 3,0 N/m oscila con una amplitud de 10 cm. Considere a este sistema como un oscilador cuántico. Hallar el intervalo de energía entre niveles energéticos contiguos y el número cuántico que describe el estado de ese oscilador.

Resolución:

Datos: $m = 0,3\,kg$; $k = 3\,N/m$; $A = 0,1\,m$

Cálculo de la energía:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(3)(0,1)^4 \Rightarrow E = 1,5\times 10^{-4}\,J$$

Cálculo de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2(314)}\sqrt{\frac{3}{0,3}} = 0,05\,Hz$$

Cálculo de n: $E = nh \Rightarrow n = \frac{E}{hf}$

Reemplazando datos: $n = 4{,}49 \times 10^{31}$
Diferencia de energías: $hf = 0{,}333 \times 10^{34}$ J

7. La mayoría de los procesos gaseosos de ionización requieren energías ($10^{-18} - 10^{-16}$). ¿Qué región del espectro electromagnético del Sol es principalmente responsable de la reacción de la ionosfera en la atmósfera terrestre?

Resolución:

$$E = hf \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{ch}{E}$$

Primer caso:
$E = 10^{-16}$ J $\Rightarrow \lambda = 1{,}9878$ nm $\longrightarrow$ Rayos gamma
Segundo caso:
$E = 10^{-18}$ J $\Rightarrow \lambda = 198{,}78$ nm $\longrightarrow$ Rayos ultravioleta

8. En una película fotográfica la sustancia activa (a la luz) son las moléculas de bromuro de plata abr que para asociarse necesitan energías de 0,60 eV. Halle la máxima longitud de onda que logrará impresionar la película. ¿En qué región del espectro se encuentra?

Resolución:
Datos: $E = 0{,}6\ \text{eV} = 0{,}96 \times 10^{-19}$ J

$h = 6{,}626 \times 10^{-24}\ \frac{J}{Hz}$; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $\lambda = \frac{hc}{E}$

Reemplazando: $\lambda = 2\ 070{,}6$ nm $\longrightarrow$ infrarrojo

9. En un tiempo se definió el metro como 1 650 763,73 longitudes de onda de la luz naranja emitida por una fuente luminosa que contiene átomos de kriptón 86. ¿Cuál es la energía del fotón correspondiente a esta radiación?

Resolución:
Datos: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \frac{J}{Hz}$; $c = 3 \times 10^8$ m/s

$$\lambda = \frac{1\text{m}}{1\ 650\ 763{,}73} = 605{,}9\ \text{nm} \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda}$$

Reemplazando tenemos: $E = 8{,}75 \times 10^{-19}$ J

10. El ojo humano tiene una respuesta espectral con un máximo de sensibilidad para la longitud de onda de 540 nm y registra sensación visual si los fotones incidentes se absorben a una frecuencia menor de 100 Hz. ¿A qué nivel de potencia corresponde esto?

Resolución:
Datos: $\lambda = 540$ nm; $\Delta t \geq 100$ s

$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \frac{J}{Hz}$; $c = 3 \times 10^8$ m/s

$$P = \frac{E}{t} = \frac{hc}{\lambda t} = \frac{hc}{\lambda \Delta T}$$

Reemplazando: $P = 3{,}68 \times 10^{-21}$ W

11. En la tabla se reportan distintos metales y su trabajo de extracción (función trabajo). ¿Cuál(es) de ellos escogería para construir una fotocelda que funcione con luz visible?

Resolución:
Datos: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \frac{J}{Hz}$; $c = 3 \times 10^8$ m/s; $eV = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J
En la fórmula: $\lambda = \frac{hc}{E}$, reemplazando tenemos:

	Metal	Trabajo de extracción
Tantalio	Ultravioleta: $\lambda = 295{,}43$ nm	4,2 eV
Tungsteno	Ultravioleta: $\lambda = 275{,}73$ nm	4,5 eV
Aluminio	Ultravioleta: $\lambda = 295{,}43$ nm	4,2 eV
Bario	Visible: $\lambda = 496{,}32$ nm	2,5 eV
Litio	Visible: $\lambda = 539{,}48$ nm	2,3 eV
Cesio	Visible: $\lambda = 653{,}06$ nm	1,9 eV

El rango de luz visible es 380 nm y 760 nm.

12. Luz de 200 nm incide sobre el cátodo de aluminio de una cierta fotocelda. ¿Qué potencial retardador es necesario aplicar para interrumpir la corriente en el circuito? ¿Cuál es la máxima energía cinética y la correspondiente rapidez de los fotoelectrones emitidos? ¿Cuál es el mínimo valor de estas magnitudes?

Resolución:
Sabemos: $\lambda = 200\ \text{nm} = 2 \times 10^{-7}$ m
Hallando f_{luz}: $\lambda f = c \Rightarrow 2 \times 10^{-7} f = 3 \times 10^8$
$f = 1{,}5 \times 10^{15}$ Hz

a) Para hallar el potencial retardador debemos conocer la función de trabajo (trabajo de extracción) para el aluminio.
Debe cumplirse: $V_0 = \frac{\phi}{e}$

Donde ϕ es la función de trabajo del aluminio ($4{,}2\ \text{eV} = 6{,}67 \times 10^{-19}$ J) y "e" es la carga de el electrón ($1{,}6 \times 10^{-19}$ C).
Reemplazando datos: $V_0 = 4{,}2$ V

b) Para hallar la energía cinética máxima de un fotoelectrón, sabemos que el electrón que absorbe el fotón se encuentra en la superficie del metal y, por tanto, su función de trabajo es cero.

Por tanto: $hf = E_C$
$\Rightarrow (6{,}62 \times 10^{-31})(1{,}5 \times 10^{15}) = E_C$
$\therefore E_C = 9{,}9 \times 10^{-19}$ J

c) Para hallar la máxima velocidad del electrón debemos conocer su masa ($9{,}11 \times 10^{-31}$ kg)

$$E_C = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} \Rightarrow v = 1{,}47 \times 10^6\ \text{m/s}$$

13. Un satélite en órbita en la Tierra mantiene desplegado un panel de celdas solares en ángulo recto con la

dirección de los rayos del Sol. Haga un estimado del área del panel para que cada minuto llegue un *mol* de fotones.

Resolución:

Se conoce que la intensidad de la radiación solar medida en la órbita de la Tierra es: $I = 1398\ W/m^2$

Pero esto indica la cantidad de energía W que incide en una superficie de área S en cada unidad de tiempo "t", es decir: $I = \dfrac{W}{St}$

Pero la cantidad de energía se puede expresar como un múltiplo de la energía de un cuanto de luz: $W = Nhf$
Como nos hablan de un mol de fotones:

$N = 6{,}023 \times 10^{23}$ fotones

Por otro lado, como no especifican el tipo de fotón que incide en la superficie, asumiremos que se trata de un fotón de luz visible: $f_{prom} = 10^{15}\ Hz$

De estas dos expresiones: $I = \dfrac{Nhf}{St} \Rightarrow S = \dfrac{Nhf}{It}$

$$S = \frac{(6{,}023 \times 10^{23})(6{,}63 \times 10^{-34})(10^{15})}{1398 \times 60} \quad \therefore S = 4{,}76\ m^2$$

14. Rayos X con longitud de onda de 71,0 pm desprenden electrones de una lámina se mueven en trayectorias circulares de radio R en una región donde existe un campo magnético uniforme de inducción B. El experimento muestra que $RB = 188\ \mu Tm$. Hallar la energía cinética de los fotoelectrones y el trabajo efectuado para desprenderlos.

Resolución:

Sabemos que la longitud de onda es: $\lambda = 71 \times 10^{-12}\ m$, luego su frecuencia será: $f = 42{,}25 \times 10^{17}\ Hz$
Se cumple que el radio de la trayectoria circular que describe una partícula de masa "m" y carga eléctrica "q" al moverse en un campo magnético de inducción B es:

$$R = \frac{mv}{Bq} \Rightarrow v = \frac{(RB)q}{m}$$

$$v = \frac{188 \times 10^{-6}(1{,}6 \times 10^{-19})}{9{,}11 \times 10^{-31}} \Rightarrow v = 33 \times 10^{6}\ m/s$$

Que es la velocidad con la que se mueve el electrón. La energía cinética de los fotoelectrones será:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31})(33 \times 10^{6})^2$$

$E_C = 4{,}96 \times 10^{16}\ J$

Según Einstein: $hf = \phi + E_C$
$(6{,}63 \times 10^{-34})(42{,}25 \times 10^{17}) = \phi + 4{,}96 \times 10^{-16}$
$28 \times 10^{-16} = \phi + 4{,}96 \times 10^{-16} \Rightarrow \phi = 23{,}04 \times 10^{-16}\ J$

15. Cierta lámpara emite luz monocromática de longitud de onda 630 nm, está especificada a 70,0 W y tiene una eficiencia de 93,2% para convertir energía eléctrica en luminosa. ¿Cuántos fotones emitirá la lámpara durante su tiempo de vida?

Resolución:

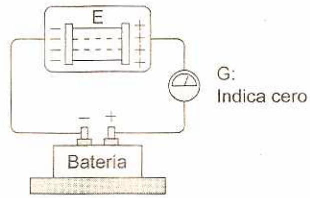
Datos: $\lambda = 630 \times 10^{-9}\ m$; $P = 70\ W$
$n = 93{,}2\%$; $t = 1000\ h = 36 \times 10^{5}\ s$

Sabemos: $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{Nnhf}{t} = \dfrac{Nnhc}{\lambda t} \Rightarrow N = \dfrac{P\lambda t}{nhc}$

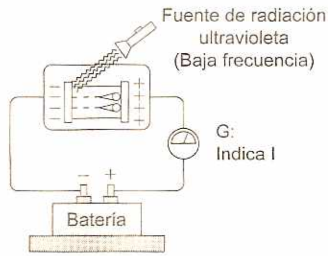
Reemplazando datos: $N = 17{,}25 \times 10^{26}$ fotones

EFECTO FOTOELÉCTRICO EXTERNO

Consiste en el desprendimiento de electrones de la superficie de un metal debido a la radiación electromagnética que incide sobre esta superficie.
Veamos:

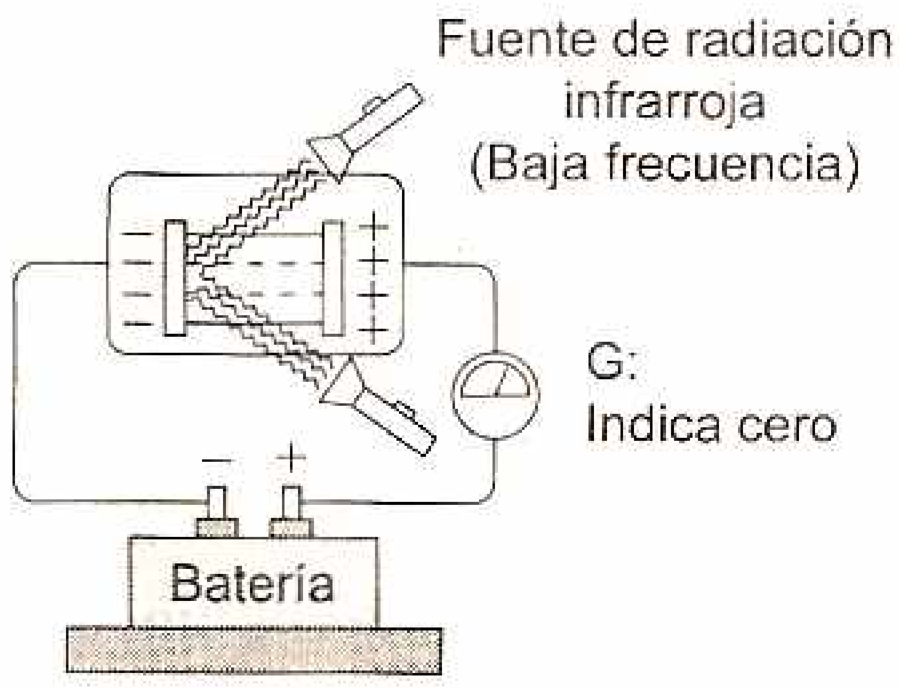


Se tiene un tubo de vacío y en el interior dos placas de zinc (muy pulidos), conectados a los extremos de una fuente y un galvanómetro (G) el cual permite detectar pequeñas intensidades de corriente eléctrica:
Al hacer incidir una radiación ultravioleta a la placa (−) de zinc, inmediatamente el galvanómetro detecta una corriente eléctrica esto quiere decir que se desprendieron electrones sin tiempo de retardo.
Por ello se dice que el efecto fotoeléctrico carece de inercia.

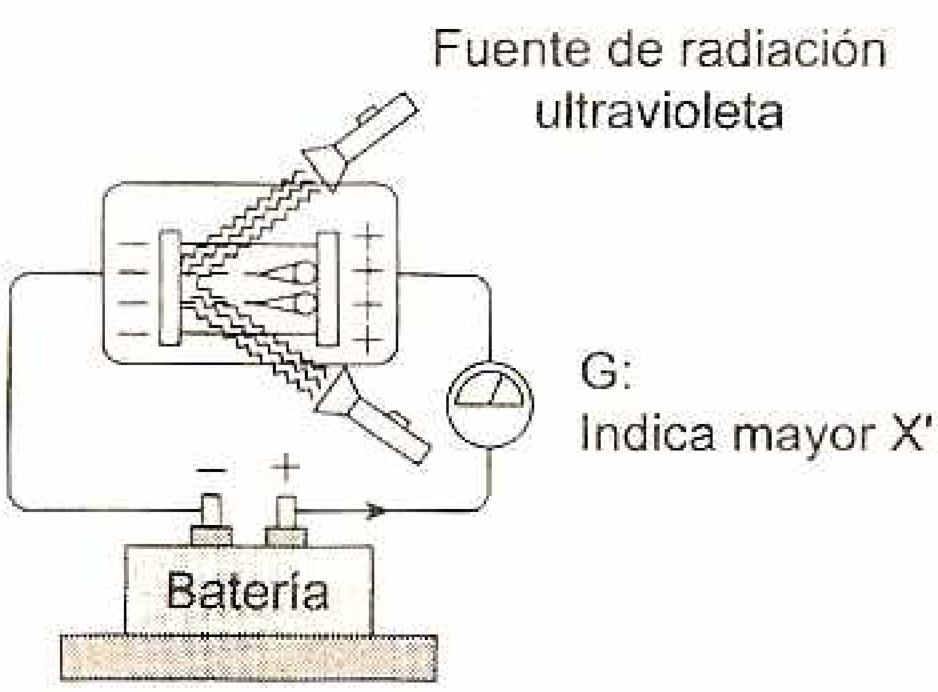


De este sistema, deducimos que:
El que las placas estén conectadas a una fuente no es una condición para que se dé el efecto fotoeléctrico, sino que una vez que sean arrancados los electrones el campo eléctrico los arrastrará hacia la otra placa y de esa manera el galvanómetro lo registra como corriente eléctrica.

1.° También se logró observar que al hacer incidir radiación infrarroja (radiación de baja frecuencia) no se daba el efecto fotoeléctrico, aun incrementando el número de fuentes (radiación más intensa).
En base a estas observaciones se concluye que el efecto fotoeléctrico, depende de la frecuencia de la radiación incidente y no de su intensidad (cantidad de fotones).



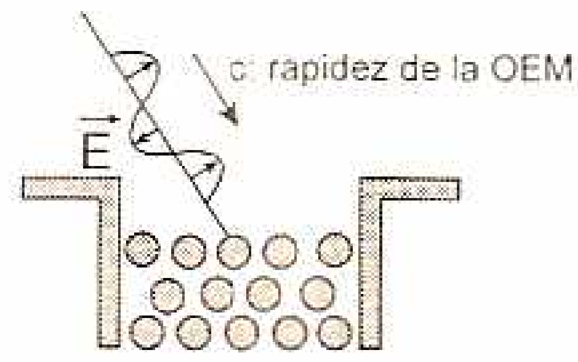
2.° Otra observación que se logra establecer fue que al incrementar la cantidad de fuentes de radiación ultravioleta (incremento de la intensidad) se logra incrementar el número de electrones emitidos, pero todos ellos escapan con la misma rapidez al igual que en el caso de una sola fuente.
Esta observación nos permite establecer que la intensidad de la radiación está relacionada con el número de electrones arrancados y no con la rapidez con que salen.



EXPLICACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA CLÁSICO

Para poder explicar el efecto fotoeléctrico, la mecánica clásica considera a la radiación electromagnética como ondas electromagnéticas los cuales van a arrancar a los electrones, de la misma manera en que las olas arrancan trozos de madera de un muelle en las orillas del mar.

Los campos eléctricos oscilantes le ejercen una fuerza eléctrica al electrón, el cual va a oscilar hasta ganar la energía suficiente para poder desprenderse del átomo, pero para ello debe transcurrir cierto intervalo de tiempo considerable, lo cual no ocurre en la experiencia. (Observación 1)



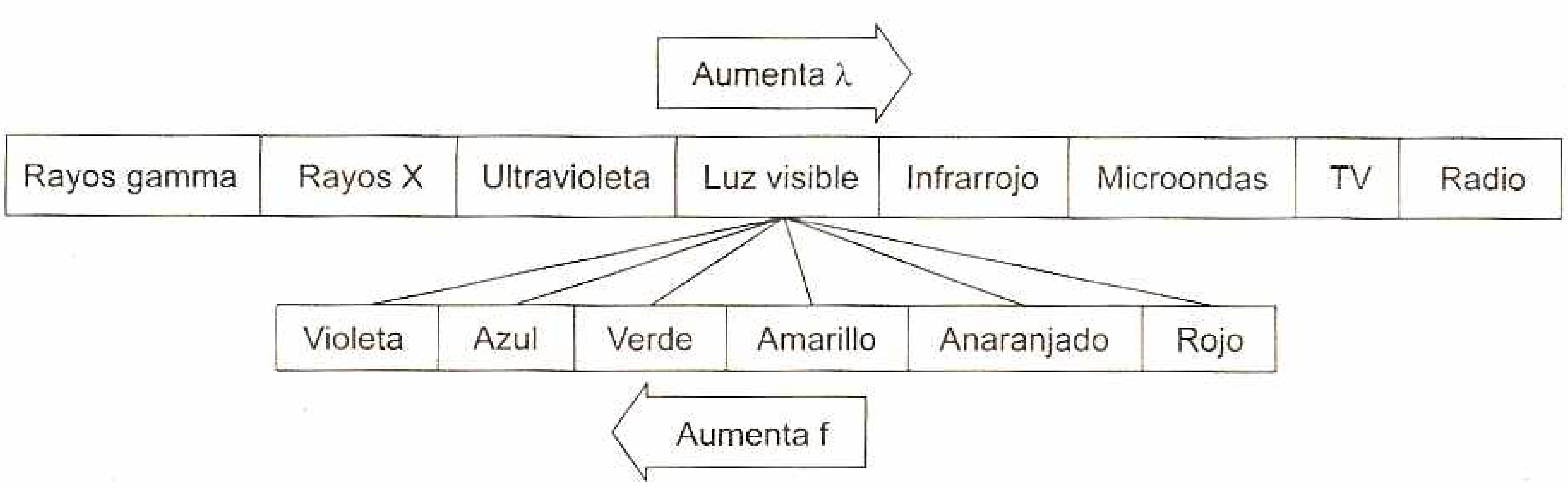
Además para el caso de la radiación infrarroja, al incrementar el número de fuentes se incrementa la intensidad del campo eléctrico y el electrón deberá experimentar una mayor fuerza eléctrica, por lo tanto en algún momento tendría que desprenderse del átomo lo cual no ocurría. (Observación 2)
¡Por lo tanto la Mecánica Clásica no podría explicar el efecto fotoeléctrico!

EXPLICACIÓN BASADA EN LA TEORÍA CUÁNTICA

Debido a las contradicciones en la argumentación de la Mecánica Clásica, Albert Einstein toma la hipótesis cuántica de Max Planck en la cual los osciladores atómicos emiten energía radiante en forma discontinua (la energía radiante se encuentra cuantizada) es por ello que a la radiación se le atribuyó una naturaleza corpuscular, pues al interactuar con las sustancias se comporta como un flujo de partículas (fotones).
Estos fotones viajan a la rapidez de la luz y su energía se encuentra cuantizada, es decir posee la energía de un cuanto de la radiación.

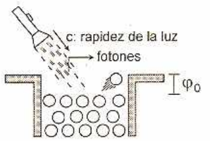
$$\boxed{E_{fotón} = hf} \qquad ...(20.13)$$

donde f: frecuencia de la radiación.
Si observamos el espectro electromagnético:



$$E_{fotón\ ultravioleta} > E_{fotón\ infrarrojo}$$

Entonces, en base a la hipótesis cuántica podemos plantear lo siguiente:



El electrón absorbe solo un fotón, y esta energía es empleada para poder vencer la atracción del núcleo y la de los otros átomos (para lograr escapar del material) y la parte que resta le permite adquirir cierta rapidez, entonces planteamos:

$$\boxed{E_{fotón} = \varphi_0 + E_C} \qquad ...(20.14)$$

Donde:
$E_{fotón}$: es la energía asociada al fotón incidente.
φ_0: es la energía necesaria para que el electrón pueda escapar del material.

A esta energía (φ_0) se le conoce como función trabajo y depende de cada material. Además la relación planteada se va a utilizar para los primeros electrones que logran escapar, por lo tanto son los que requieren menor energía y saldrán con mayor rapidez que los otros (máxima energía cinética).

Luego:

$$\boxed{E_{fotón} = \varphi_0 + E_{C(máx)}} \qquad ...(20.15)$$

(Ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico)

Cálculo de la función trabajo (φ_0)

Podemos hacer incidir una radiación cuya frecuencia sea f_0, de tal manera que los electrones desprendidos (fotoelectrones) logren escapar con las justas ($E_C = 0$).

$\Rightarrow$ Tendremos: $E_{fotón} = \varphi_0 + 0$

$$\boxed{hf_0 = \varphi_0} \qquad ...(20.16)$$

Aquella frecuencia que cumple con esta condición (20.16) se le conoce como frecuencia umbral (f_0).

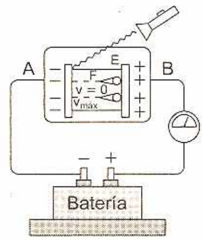
La frecuencia umbral es la frecuencia necesaria de la radiación para que se produzca el efecto fotoeléctrico.

Si la radiación incidente posee una frecuencia "f", se cumple que:

1. $f < f_0$ (no se da el efecto fotoeléctrico)
2. $f \geq f_0$ (se da el efecto fotoeléctrico)

Cálculo del potencial de frenado

Para ello empleamos la fuente, luego de incidir la radiación en una de las placas y desprender electrones invertimos rápidamente la polaridad de la fuente, con la intención de frenar al electrón y que llegue con las justas a la otra placa.



Donde: V_{AB} se denomina diferencia de potencial o voltaje de frenado (algunos lo llaman potencial de frenado).

Si reemplazamos (20.13) y (20.16) en la expresión (20.15), obtenemos:

$$E_{fotón\ incidente} = h f_0 + |q_0|\, V_{AB}$$

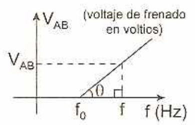
$$hf = h f_0 + |q_0|\, V_{AB} \Rightarrow V_{AB} = \frac{h}{|q_0|}(f - f_0)$$

Einstein dejó planteada esta ecuación donde f_0 depende del material y para una determinada frecuencia "f" debería de encontrarse una diferencia de potencial de frenado V_{AB}.

En efecto, en 1916, Millikan logró formar de sus experimentos la siguiente gráfica:
donde aproximadamente:

$$\tan\theta = \frac{h}{|q_0|} = 4{,}141 \times 10^{-25}$$

Por su aporte teórico al efecto fotoeléctrico, Albert Einstein ganó el Premio Nobel en 1921, mientras que R. Millikan lo ganó en 1923, por trabajos experimentales.



Conclusión

La luz presenta un doble comportamiento onda y partícula pero hay que tener presente lo siguiente:

- En los fenómenos de propagación manifiesta su comportamiento ondulatorio.
- En los fenómenos de interacción con las sustancias, manifiesta un comportamiento corpuscular.

Rayos X

En 1895, Guillermo Conrado Roentgen, profesor de Física de la Universidad de Wurzburgo (Alemania), descubrió el efecto más importante que originan los rayos catódicos (radiación de electrones en gases enrarecidos): la generación de rayos X.

Aquí transcribimos algunos de los párrafos de una entrevista que se le hizo al profesor Roentgen en el año 1896:

¿Podría contarme la historia de su descubrimiento, profesor?

"Mi descubrimiento no tiene historia" – replicó Roentgen –. "Desde hacía tiempo estaba interesado en el problema de los rayos catódicos. Seguí investigaciones realizadas por Hertz, Lenard y otros investigadores, y realicé investigaciones por mi cuenta cuando tuviera tiempo. Hacía algunos días que estaba trabajando sobre el tema, cuando descubrí algo nuevo".

¿Qué día fue?
"El 8 de noviembre de 1895".

¿Cuál fue el descubrimiento?
"Estaba trabajando con un tubo de Crookes, recubierto con un cartón negro; sobre la mesa había una hoja recubierta con platinocianuro de bario y estaba haciendo pasar una corriente a través del tubo cuando noté una línea brillante a lo largo del papel".

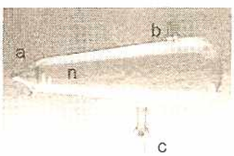
¿Qué era?
"El efecto solo podría ser producto del pasaje de luz; pero del tubo no podía venir luz porque la hoja de cartón que lo cubría era completamente opaca a cualquier luz conocida, aún la de un arco eléctrico".

¿Y usted que pensó?
"Yo no pensé: investigué. Supuse que el efecto debía de venir del lado del tubo, porque su carácter indicaba que no podía venir de otra parte. Probé. En pocos minutos no había duda; del tubo venían rayos que tenían un efecto luminoso sobre el papel fluorescente. Ensayé a distancias cada vez mayores, hasta dos metros. A primera vista parecía una nueva clase de luz invisible. Era, evidentemente, algo nuevo no registrado hasta entonces".

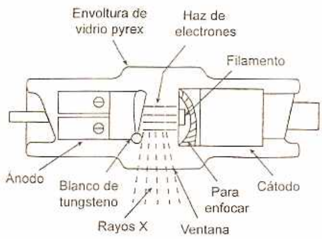
¿Es luz?
"No."

¿Es electricidad?
"No, en ninguna forma conocida, por lo menos."

Entonces, ¿qué es?
"No sé..."
Y los llamó rayos X. Actualmente también se les da el nombre de rayos Roentgen.
Pero:
¿Cómo se producen estos rayos X?
Cuando en los extremos de un tubo de descarga en el vacío la diferencia de potencial alcanza valores muy elevados (10^5 V; 10^6 V), los electrones son acelerados de tal manera que adquieren gran energía cinética y al impactar contra el ánodo, cada electrón pierde esa energía que es emitida en forma de energía radiante: rayos X.



Tubo semejante al empleado por Roentgen



Modelo de tubo de Coolidge, semejante a los empleados actualmente

y; ¿de qué naturaleza son estos rayos X?
Dentro de las propiedades más importantes que Roentgen dio a conocer sobre esta radiación tenemos:
- Todas las sustancias en mayor o menor medida son transparentes para los rayos X, estos las atraviesan con suma facilidad.
- Las placas fotográficas son sensibles a ellos.
- Los rayos X no son desviados por campos eléctricos o magnéticos.

Esto último descarta la posibilidad de que los rayos X sean partículas electrizadas. Entonces se propuso la hipótesis de que eran radiación del tipo de las luminosas, es decir: ¡los rayos X deben ser radiación electromagnética! Esto se comprobó posteriormente cuando Von Lane en el año 1912, logró que los rayos X experimenten difracción al incidir en cristales.
Actualmente sabemos que los rayos X son una parte del amplio espectro electromagnético cuya longitud de onda es del orden de la distancia interatómica en un cristal ($\approx 10^{-10}$ m ≈ 1 Å).

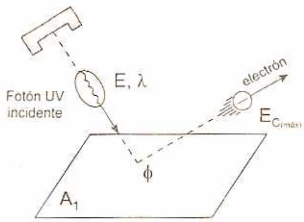
Su utilidad

- Hemos mencionado una de las más importantes utilidades que tienen los rayos X, ellos han permitido el estudio de los cristales, conocer su estructura interna y de esa manera conocer sus propiedades para su posterior utilidad. La difracción de rayos X es una de las técnicas más usadas en la cristalografía.
- Quizá la aplicación más conocida de los rayos X sea en radiografía que hoy en día son tan comunes con fines de diagnóstico. Se cuenta que a los 5 meses de su descubrimiento, se aplicaron rayos X con fines quirúrgicos en un hospital de Viena. Desde entonces, su difusión en medicina ha sido bastante amplia.
- Asimismo los rayos X tienen enorme importancia en las investigaciones en Física experimental y teórica, pues mediante ellos se han logrado importantísimos avances en el conocimiento de la estructura del átomo.

RESUMEN DE ECUACIONES

Efecto fotoeléctrico externo

Fuente de alta frecuencia



Metal fotosensible

1. **Ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico**

Energía del fotón incidente	=	Energía umbral o función trabajo	+	Energía cinética máxima del fotoelectrón.

$$E = \phi + E_{C(máx)}$$

Teniendo en cuenta que: $E = hf$ y $\phi = hf_0 = h\left(\frac{c}{\lambda_0}\right)$

Donde:

f_0: frecuencia umbral o frecuencia de corte.

λ_0: longitud de onda umbral o longitud de onda de corte.

$E_{C(máx)} = \frac{1}{2}m_e v^2_{máx}$: energía cinética clásica

$E_{C(máx)} = (m - m_e)/c^2 = \left(\frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{máx}}{c^2}}}\right)$

c^2 : energía cinética relativista

La ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico será: $hf = hf_0 + \frac{1}{2}m_e v^2_{máx}$

2. **Potencial retardador o voltaje de frenado (V_0)**

$V_0 q_e = E_{C(máx)} = \frac{1}{2}m_e v^2_{máx}$

3. **Relación entre el voltaje de frenado (V_0) y la frecuencia de la radiación incidente (f)**

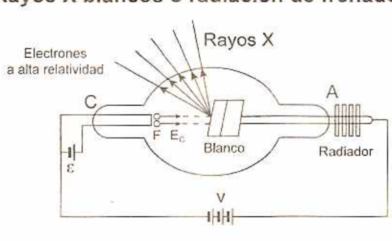
De la ecuación de Einstein:

$hf = hf_0 + V_0\, q_e \Rightarrow V_0 = \frac{h}{q_0}(f - f_0)$

Rayos X

Tipos de rayos X

1. **Rayos X blancos o radiación de frenado**



V = Diferencia de potencial o potencial acelerador.

Energía de los fotones X más energéticos emitidos en un tubo de rayos X debido al frenamiento de los electrones veloces: $E = E_C = Vq_e$

Ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein:

$$E = hf_{máx} = h\left(\frac{C}{\lambda_{min}}\right) = Vq_e$$

$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{vq_e}$ longitud de onda mínima de la radiación de frenado.

Relación de Duane y Hunt

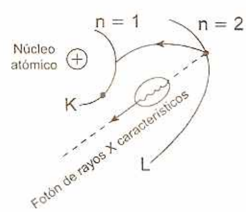
$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{V}$$

V: potencial acelerador o diferencia de potencial aplicada al tubo de rayos X.

2. **Rayos X característicos**

Estos rayos son producidos por las transiciones electrónicas en las capas más profundas de los átomos pesados (multielectrónicos) del blanco metálico en un tubo de rayos X.

La energía (E) de los rayos X característicos se calcula haciendo la diferencia de las energías del electrón en los dos estados estacionarios, por ejemplo, entre la capa L y K será:

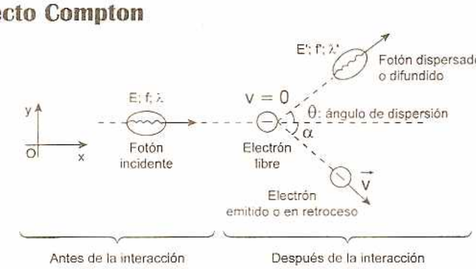


L y K será: $E = E_L - E_K$

La energía del electrón en cada capa o estado estacionario está dada por la ecuación: $E_n = \frac{-13{,}6}{n^2}(Z_{ef})$

Z_{ef} : número atómico efectivo.

Efecto Compton



Ecuación del corrimiento Compton (Δλ)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

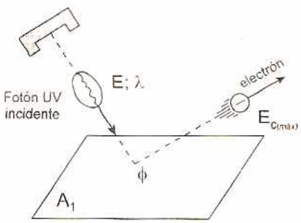
I. Efecto fotoeléctrico

1. Sobre la superficie limpia de una lámina de aluminio incide luz ultravioleta de 254 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones (en eV) si la frecuencia umbral del aluminio es $10{,}37 \times 10^{14}$ Hz?
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J
$c = 3 \times 10^{8}$ m/s; 1 nano = 1 n = 10^{-9}

Resolución:

Datos:
$\lambda = 254$ nm $= 254 \times 10^{-9}$ m (longitud de onda de la luz ultravioleta incidente)
$f_0 = 10{,}37 \times 10^{14}$ Hz (frecuencia umbral o de corte del aluminio)
$E_{C(máx)}$: energía cinética máxima de los fotoelectrones.

Esquema del fenómeno físico



Del gráfico se puede apreciar que parte de la energía del fotón incidente (E) se emplea en arrancar el electrón de la lámina de aluminio y la otra parte se usa para imprimirle determinada energía cinética máxima ($E_{C(máx)}$).
De la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico se tiene:

$$E = \phi + E_{C(máx)} \Rightarrow E_{C(máx)} = E - \phi \quad \dots (1)$$

Cálculo de la energía del fotón incidente (E)
En virtud a la ecuación de la teoría cuántica de Plank-Einstein, la energía del fotón incidente es igual a: $E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$

Reemplazando valores:

$$E = \left[\frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^{8})}{254 \times 10^{-9}}\right]\left[\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-19}}\right]$$

$$\Rightarrow E = 4{,}89 \text{ eV} \quad \dots (2)$$

Cálculo de la función trabajo (ϕ)
De la ecuación de la teoria cuántica de Planck-Einstein, la energía necesaria para arrancar un electrón de la lámina de aluminio denominada función trabajo, es igual a:

$$\phi = hf_0 = [(6{,}63 \times 10^{-34})(10{,}37 \times 10^{14})]\left(\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-19}}\right)$$

$$\Rightarrow \phi = 4{,}29 \text{ eV} \quad \dots (3)$$

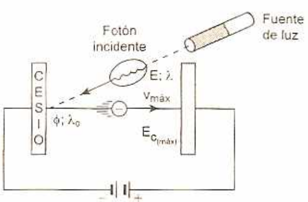
Reemplazando (2) y (3) en (1):
$E_{C(máx)} = 4{,}89 - 2{,}29 \quad \therefore E_{C(máx)} = 0{,}6$ eV

2. La longitud de onda umbral del cesio es 686 nm. Si una luz de longitud de onda de 470 nm ilumina la superficie de este metal, ¿cuál es la rapidez máxima (en m/s) de los electrones emitidos?
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^{8}$ m/s
$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; 1 nano = 1 n = 10^{-9}
No considere efectos relativistas.

Resolución:

Datos:
$\lambda_0 = 686$ nm $= 686 \times 10^{-9}$ m (longitud de onda umbral del cesio)
$\lambda = 470$ nm $= 470 \times 10^{-9}$ m (longitud de onda de la radiación incidente)
$v_{máx}$: rapidez máxima de los fotoelectrones.

Gráfico del fenómeno
En virtud de la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, se cumple que la energía (E) del fotón incidente es igual a la suma de la función trabajo (ϕ) definida como la energía necesaria para arrancar electrones del metal y la energía cinética máxima ($E_{C(máx)}$) adquirida por los fotoelectrones, esto es:



$$E = \phi + E_{C(máx)}\text{; pero: } E_{C(máx)} = \frac{1}{2}m_e v_{máx}^2 \text{ :}$$

Energía cinética clásica del fotoelectrón

$$\Rightarrow E = \phi + \frac{1}{2}m_e v_{máx}^2 \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{2(E - \phi)}{m_e}} \quad \dots (1)$$

Cálculo de E:
De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein, la energía del fotón incidente es igual a:

$$E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{470\times10^{-9}}\ J$$

$$\Rightarrow E = 4{,}23\times10^{-9}\ J \qquad \dots(2)$$

Cálculo de ϕ:

$$\phi = hf_0 = \left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = \frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{686\times10^{-9}}\ J$$

$$\Rightarrow \phi = 2{,}89\times10^{-19}\ J \qquad \dots(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2(4{,}23\times10^{-19}-2{,}89\times10^{-19})}{9{,}1\times10^{-31}}}$$

$$\Rightarrow v_{máx} = 5{,}4\times10^{5}\ m/s$$

Un haz de luz incide sobre un material cuya función trabajo es 2,3 eV, si la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es 0,8 eV, determine la longitud de onda (en Å) de la luz incidente.
$h = 6{,}63\times10^{-34}$ Js; 1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J
$c = 3\times10^{8}$ m/s

Resolución:
$\phi = 2{,}3\ eV = 2{,}3(1{,}6\times10^{-19}\ J) = 3{,}68\times10^{-19}\ J$
(función trabajo del material)
$E_{C(máx)} = 0{,}8\ eV = 0{,}8(1{,}6\times10^{-19}\ J) = 1{,}28\times10^{-19}\ J$
(energía cinética máxima de los fotoelectrones)
λ: longitud de onda de la luz incidente.
De la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico escribimos: $E = \phi + E_{C(máx)}$ ...(1)
Siendo: E = Energía del fotón de la luz incidente.
De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein: $E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \phi + E_{C(máx)}$

Despejando l: $\lambda = \dfrac{hc}{\phi + E_{C(máx)}}$

Reemplazando valores:

$$\lambda = \frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{3{,}68\times10^{-9}+1{,}28\times10^{-19}}$$

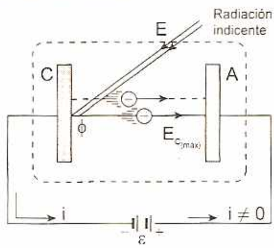
$$\Rightarrow \lambda = 4{,}010\times10^{-7}\ m = 4{,}010\times10^{-10}\ m$$

$$\therefore \lambda = 4010\ Å$$

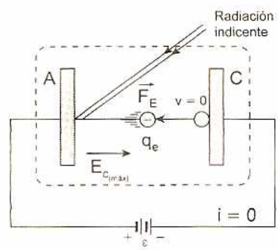
4. Sobre una superficie metálica (ϕ = 1,2 eV) incide una radiación (E = 1,3 eV). Si el metal es usado como cátodo en un fototubo, determinar el voltaje necesario para frenar a los electrones emitidos.
1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J; $q_e = 1{,}6\times10^{-19}$ C

Resolución:
$\phi = 1{,}2\ eV = 1{,}2(1{,}6\times10^{-19}\ J) = 1{,}92\times10^{-19}\ J$
(función trabajo del metal)
$E = 1{,}3\ eV = 1{,}3(1{,}6\times10^{-19}\ J) = 2{,}08\times10^{-19}\ J$
(energía del fotón de la radiación incidente)
V_0: voltaje de frenado de los fotoelectrones.

Gráfico del fenómeno:



Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico se tiene:
$E = \phi + E_{C(máx)}$ ...(1)
$E_{C(máx)}$: Energía cinética máxima de los electrones emitidos.
Para frenar a los electrones emitidos en el cátodo C tenemos que invertir la polaridad de la fuente. Observe el gráfico:
V_0: potencial o voltaje de frenado.



Del gráfico Ud. puede apreciar que el campo eléctrico uniforme establecido entre el cátodo (C) y el ánodo (A), interactúa con el campo de la carga del electrón (q_e) originándose una fuerza retardatriz ($\vec{F}_e$) que frena a los electrones.
En virtud al teorema del trabajo y la energía escribimos: $W^{Fe} = \Delta E_C$

Trabajo de $\vec{F}_e$:

$$\Rightarrow -q_eV_0 = E_Cf - E_{C(0)} \Rightarrow E_{C(0)} = E_{C(máx)}$$

El signo (−) indica que $\vec{F}_E$ y el desplazamiento de la carga tienen direcciones contrarias.
$\Rightarrow E_{C(máx)} = q_eV_0$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$E = \phi + q_eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{E-\phi}{q_e}$$

Reemplazando valores:

$$V_0 = \frac{2{,}08\times10^{-19}-1{,}92\times10^{-19}}{1{,}6\times10^{-19}} \Rightarrow V_0 = 0{,}1\ V$$

5. Un metal empieza a liberar fotoelectrones cuando la longitud de onda de la radiación incidente es de 450 nm. Calcular (en eV) la energía de los electro-

nes liberados por una luz de 350 nm de longitud de onda.

$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^{8}$ m/s

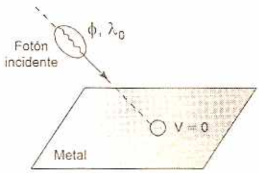
1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J; 1 nano $= 10^{-9}$

Resolución:

$\lambda_0 = 450$ nm $= 45 \times 10^{-8}$ m (longitud de onda umbral)

$\lambda = 350$ nm $= 35 \times 10^{-8}$ m (longitud de onda de la radiación incidente)

$E_{C(máx)}$: energía cinética de los electrones liberados.



Cálculo de la función trabajo del metal (ϕ)

La función trabajo o energía umbral del metal es la energía que absorbe el electrón para trascender a la superficie a las justas (V = 0), en este caso se cumple:

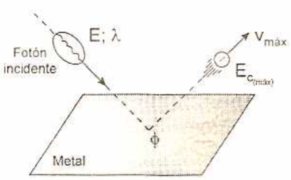
ϕ : energía del fotón incidente

$$\phi = hf_0 = h\left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = \left[\frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{45\times10^{-8}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6\times10^{-19}}\right)$$

$\Rightarrow \phi = 2{,}76$ eV

Cálculo de la energía cinética de los electrones liberados del metal cuando sobre su superficie incide luz de $\lambda = 350$ nm de longitud de onda. Aplicando la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico.

$E = \phi + E_{C(máx)} \Rightarrow E_{C(máx)} = E - \phi$ ...(1)



En virtud a la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Eistein, la energía del fotón incidente es igual a:

$$E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \left[\frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{35\times10^{-8}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6\times10^{-19}}\right)$$

$\Rightarrow E = 3{,}55$ eV

Reemplazando los valores de ϕ y E en (1):

$E_{C(máx)} = 3{,}55 - 2{,}76 \quad \therefore E_{C(máx)} = 0{,}79$ eV

6. Un haz luminoso monocromático uniforme al 4×10^{-7} m de longitud de onda incide sobre un material cuya energía de arranque es 2,5 eV. El haz tiene una intensidad de 3×10^{-9} w/m^2. Hallar el número de electrones emitidos por m^2 y por segundo.

$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^{8}$ m/s

1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J

Resolución:

$\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m (longitud de onda de la radiación incidente)

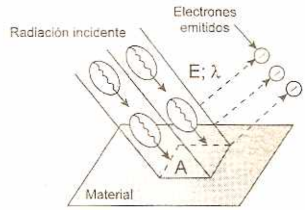
$\phi = 2{,}5$ eV (energía de arranque o función trabajo del material)

$I = 3 \times 10^{-9}$ W/m^2 (intensidad de la radiación incidente.

$A = 1$ m^2: área de la superficie)

$\Delta t = 1$ s (intervalo de tiempo de iluminación)

Esquema del fenómeno físico:



Para que se produzca emisión de electrones de la superficie del material, la energía (E) de los fotones de la radiación incidente debe ser mayor que la energía de arranque o función trabajo (ϕ).

$$E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \left[\frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{4\times10^{7}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6\times10^{-14}}\right)$$

$\Rightarrow E = 4{,}9725 \times 10^{-19}$ J $= 3{,}1$ eV

Como $E > \phi = 2{,}5$ eV, entonces sí se produce emisión de electrones.

Cálculo del número de fotones (h), que inciden en una superficie de área $A = 1$ m^2 del material en $\Delta t = 1$ s.

De la ecuación de la intensidad de la radiación incidente:

$$I = \frac{\text{Potencia}}{\text{Área}} = \frac{P}{A} \quad ...(1)$$

Por otro lado:

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Energía total}}{\text{Int. de tiempo}} = \frac{E_T}{\Delta t} \quad ...(2)$$

De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein la energía de un fotón de la radiación incidente es igual a E, entonces, la energía total de "n" fotones será:

$E_T = nE$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2):

$$\text{Potencia} = P = \frac{nE}{\Delta t} \quad ...(4)$$

Reemplazando (4) en (1):

$$I = \frac{\frac{nE}{\Delta t}}{A} = \frac{nE}{A\Delta t} \Rightarrow n = \frac{IA\Delta t}{E}$$

Reemplazando valores:

$$n = \frac{(3\times10^{-9})(1)(1)}{4,9725\times10^{-19}} \text{ fotones} \Rightarrow n \approx 6\times10^{9} \text{ fotones}$$

como cada electrón absorbe íntegramente la energía de un fotón incidente entonces el número de electrones emitidos será: 6×10^{9}

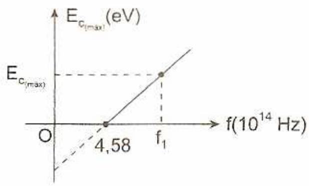
7. A partir de la gráfica energía cinética máxima ($E_{C(máx)}$) versus frecuencia (f) de la radiación incidente, determinar el tipo de metal del que está hecho la muestra usada en el experimento de efecto Compton. Use la tabla.

metal	litio	cesio	zinc	cobre
función trabajo ϕ(eV)	2,3	1,9	4,3	4,2

Resolución:

$1\text{ eV} = 1,6\times10^{-19}$ J; $h = 6,63\times10^{-34}$ J s

ϕ: función trabajo del metal buscado



Del gráfico se puede apreciar que para una radiación incidente de frecuencia $f_0 = 4,58\times10^{14}$ Hz llamada frecuencia umbral, la energía cinética de los electrones emitidos es cero, es decir los electrones trascienden a las justas a la superficie (V = 0).

De la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, la energía del fotón incidente (E_0) es igual a:

$$E_0 = \phi + E_{C(máx)}$$

Donde, ϕ: función del trabajo, $E_{C(máx)} = 0$

De la teoría cuántica de Planck-Einstein:

$$\phi = E_0 = hf_0 = (6,63\times10^{-34})(4,58\times10^{14})\left(\frac{1}{1,6\times10^{-19}}\right)$$

$$\Rightarrow \phi = 1,89 \text{ eV} \approx 1,9 \text{ eV}$$

Usando la tabla, se concluye que la muestra usada en el experimento está hecho de metal cesio.

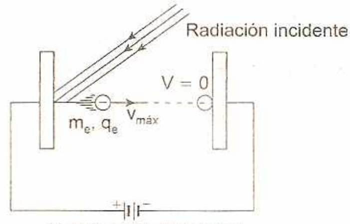
8. En un experimento de efecto fotoeléctrico se comprueba que el potencial de frenado es de 1,35 V, determinar la rapidez máxima (en 10^5 m/s) de un fotoelectrón emitida por el cátodo.
$m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg; $q_e = 1,6\times10^{-19}$ C

Resolución:

$V_0 = 1,35$ V (potencial de frenado)

$v_{máx}$: rapidez máxima de los fotoelectrones

Esquema del fenómeno en el momento que se aplica el voltaje inverso



V_0:Potencial de frenado

El potencial de frenado y la energía cinética máxima ($E_{C(máx)}$) de los electrones emitidos en el cátodo están relacionados por la ecuación: $V_0q_e = E_{C(máx)}$

La energía cinética clásica está determinada por la ecuación:

$$E_{C(máx)} = \frac{1}{2}m_e v_{máx}^2 = V_0q_e \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{2V_0q_e}{m_e}}$$

Reemplazando valores:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2(135)(1,6\times10^{-19})}{9,1\times10^{-31}}} \text{ m/s} \quad \therefore v_{máx} \approx 7\times10^{5} \text{ m/s}$$

9. En relación al fenómeno de efecto fotoeléctrico analice la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
   I. La emisión termoiónica es un efecto fotoeléctrico.
   II. Cuánto mayor es la función trabajo, mayor es la frecuencia mínima necesaria para emitir fotoelectrones.
   III. $(\frac{1}{2}m_e v^2)_{máx}$ es independiente del número de fotones que inciden sobre la superficie metálica.

Resolución:

Análisis de las proposiciones:

I. El fenómeno de emisión termoiónica conocida también como efecto Edison consiste en la emisión de electrones de la superficie de un metal cuando este se calienta hasta alcanzar elevadas temperaturas. En cambio el fenómeno de efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones de la superficie limpia de un metal, cuando sobre ella incide una radiación electromagnética de alta frecuencia.
Proposición: Falsa.

II. Si la función trabajo (ϕ) de un metal es grande, implica que el electrón está fuertemente ligado al sistema atómico, entonces se necesita mayor energía para arrancarlo, en consecuencia la frecuencia mínima necesaria (f_0) que debe tener la radiación incidente para emitir fotoelectrones debe ser mayor.
Da la ecuación de la función trabajo:
$\phi = hf_0$
donde: f_0 = frecuencia mínima o umbral.
h = constante de Planck

Se puede apreciar que a mayor función trabajo, se requiere mayor frecuencia mínima.
Proposición: Verdadera.

III. $(\frac{1}{2}m_ev^2)_{máx}$ es la energía cinética máxima de los electrones emitidos cuando una radiación incide sobre la superficie de un metal.

$E_{C(máx)} = (\frac{1}{2}mv^2)_{máx}$

Se ha comprobado que la energía cinética máxima de los electrones emitidos depende exclusivamente de la frecuencia de los fotones incidentes y no del número de ellos; puesto que un fotón interactúa únicamente con un electrón y en este proceso este último absorbe toda la energía del fotón.
Proposición: Verdadera.

10. Una radiación electromagnética incide sobre la superficie limpia de un metal. Los electrones más energéticos expulsados se desvían describiendo circunferencias o 0,4 m de radio, debido a la interacción con un campo magnético uniforme de inducción $B = 10^{-5}$ T. Si la longitud de onda de la radiación incidente es 451 nm, la función trabajo (en eV) del metal es:

$m_e = 9,1 \times 10^{-3}$ kg; $q_e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^8$ m/s
1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J; 1 nano = 1 n = 10^{-9}

Resolución:

$\lambda = 451$ nm $= 451 \times 10^{-9}$ m (longitud de onda de la radiación incidente)
R = 0,4 m (radio de la circunferencia descrita por un electrón en el campo magnético)
$B = 10^{-5}$ T (inducción magnética)
ϕ: función trabajo del metal.

De la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, la energía (E) del fotón incidente es igual a:

$$E = \underbrace{\phi}_{\text{función trabajo}} + \underbrace{E_{C(max)}}_{\text{energía cinética máxima}}$$

$$\Rightarrow \phi = E - E_{C(máx)} \qquad \text{... (1)}$$

Cálculo de E:

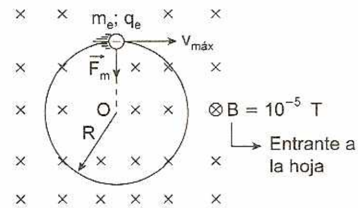
De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein: $E = hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$

Reemplazando valores:

$$E = \left[\frac{(6,63\times10^{-34})(3\times10^8)}{451\times10^{-9}}\right]\left(\frac{1}{1,6\times10^{-19}}\right) = 2,75 \text{ eV}$$

Cálculo de $E_{C(máx)}$:

Si el electrón describe una circunferencia en el campo magnético, entonces, la fuerza magnética $(\vec{F}_m)$ es perpendicular a la velocidad $(\vec{v}_{máx})$.



Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial del electrón en el campo magnético:

Fuerza magnética = (masa de "e")(aceleración centrípeta)

$$\Rightarrow F_m = m_e\frac{v_{máx}^2}{R} \qquad \text{...(2)}$$

La fuerza magnética está determinada por la ecuación: $F_m = q_ev_{máx}B$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2): $q_ev_{máx}B = m_e\left(\frac{v_{máx}^2}{R}\right)$

Ordenando la expresión: $\frac{q_e^2B^2R^2}{2m^e} = \frac{1}{2}m_ev_{máx}^2$

El segundo miembro de la expresión resulta ser la energía cinética máxima ($E_{C(máx)}$) de los electrones emitidos: $E_{C(máx)} = \frac{q_0BR}{2m_e}$

Reemplazando valores:

$$E_{C(máx)} = \frac{(1,6\times10^{-19})^2(10^{-5})^2(0,4)^2}{2(9,1\times10^{-31})}\left(\frac{1}{1,6\times10^{-19}}\right)$$

$\Rightarrow E_{C(máx)} = 1,40$ eV

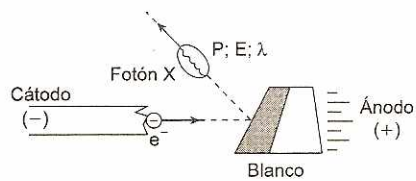
En (1): $\phi = 2,75 - 1,40 \quad \therefore \ \phi = 1,35$ eV

II. Rayos X

1. ¿Cuál es la energía (en eV) de rayos X cuyo momentum es $1,3 \times 10^{-23}$ kgm/s?
$c = 3 \times 10^8$ m/s; 1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J

Resolución:

$P = 1,3 \times 10^{-23}$ kgm/s (módulo de la cantidad de movimiento del fotón de rayos X)
E: energía del fotón X.
Esquema de la producción de un fotón de rayos X:



El módulo de la cantidad de movimiento o *momentum* (P) del fotón x está relacionado con su longitud de onda (λ) por la ecuación: $P = \frac{h}{\lambda}$, siendo h: constante de Planck

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{P} \qquad \text{...(1)}$$

De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein, la energía (E) del fotón de rayos X es igual a:

$E = hf = h\left(\frac{h}{P}\right)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $E = h\left(\frac{c}{\frac{h}{P}}\right) = Pc$

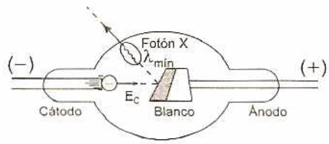
$$E = Pc = (1{,}3\times 10^{-23})(3\times 10^{8})\left(\frac{1}{1{,}6\times 10^{-19}}\right)$$

$\therefore\ E = 24\ 375\ eV$

2. Calcular la longitud de onda mínima (en Å) de los rayos X emitidos en un tubo de rayos catódicos, si los electrones tienen una energía cinética de 12 keV antes de chocar con el blanco.
$h = 6{,}63\times 10^{-34}$ Js; $1\ eV = 1{,}6\times 10^{-19}$ J
$1\ Å = 10^{-10}$ m

Resolución:
$E_C = 12\ keV = 12\times 10^{3}(1{,}6\times 10^{-19}) = 19{,}2\times 10^{-16}$ J
(energía cinética de los electrones acelerados)
λ_{min}: longitud de onda de los rayos X más energéticos emitidos.

Esquema del fenómeno físico



El fotón de rayos X generado por el frenamiento del electrón, tendrá longitud de onda mínima (λ_{min}) si toda la energía cinética de electrón se transforma en energía electromagnética, es decir:

$$\begin{array}{c}\text{Energía cinética}\\ \text{del electrón}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Energía del foton X}\\ \text{de longitud de onda mínima}\end{array}$$

De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein escribimos: $E_C = h\left(\frac{c}{\lambda_{min}}\right)$

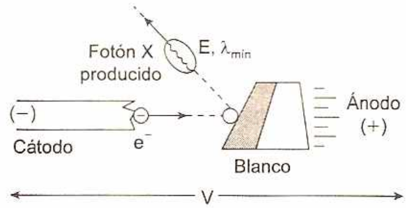
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{E_C} = \frac{(6{,}63\times 10^{-34})(3\times 10^{8})}{192\times 10^{-16}} = 1{,}035\times 10^{-10}\ m$$

$\lambda_{min} \approx 1\ Å$

3. Determinar el potencial acelerador (en kV) de trabajo de un tubo de rayos X para producir fotones x de $\lambda_{min} = 0{,}8\ Å$
$h = 6{,}63\times 10^{-34}$ Js; $c = 3\times 10^{8}$ m/s
$q_e = 1{,}6\times 10^{-19}$ C; $1\ Å = 10^{-10}$ m

Resolución:
Datos: $\lambda_{min} = 0{,}8\ Å = 0{,}8\times 10^{-10}$ m (longitud de onda mínima del fotón X producido)
V: potencial acelerador de trabajo del tubo de rayos X.

Gráfico del fenómeno:



Para producir fotones X de longitud de onda mínima, se requiere que toda la energía cinética (E_C), del electrón se transforme en energía electromagnética. En virtud al teorema del trabajo y la energía escribimos:

$$W^{campo\ eléctrico} = \Delta E_C = E_{fotón\ X\ producido}$$

$$\Rightarrow q_eV = h\left(\frac{c}{\lambda_{min}}\right) \Rightarrow V = \frac{hc}{q_e\lambda_{min}}$$

Reemplazando valores:

$$V = \frac{(6{,}63\times 10^{-34})(3\times 10^{8})}{(16\times 10^{-19})(0{,}8\times 10^{-10})}\quad V = 15\ 539\ V \approx 15{,}5\ kV$$

Nota: Otro método sería aplicando la relación de Duane y Hunt.
Duane y Hunt demostraron que la longitud de onda mínima (λ_{min}) de los fotones X producidos es inversamente proporcional al potencial acelerador (V) del tubo de rayos X, su relación es:

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24\times 10^{-6}\,(\text{voltios})(\text{m})}{V}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1{,}24\times 10^{-6}\,(\text{voltios})(\text{m})}{\lambda_{min}} = \frac{1{,}24\times 10^{-6}\,(\text{voltios})(\text{m})}{0{,}8\times 10^{-10}\text{m}}$$

$\therefore\ V = 15{,}5$ kV

4. ¿Cuál es la longitud de onda (en Å) más corta (λ_{min}) del Bremsstranlung que se observa cuando un electrón acelerado en una diferencia de potencial de 40 kV se detiene repentinamente en el anticátodo de un tubo de rayos X? ($1\ Å = 10^{-10}$ m)

Resolución:
$V = 40\ kV = 4\times 10^{3}$ V (potencial acelerador del tubo de rayos X)
λ_{min}: longitud de onda mínima de Bremsstrahlung producido.
Nota: Bremsstrahlung es un vocablo en el idioma alemán que significa radiación de frenado, es decir:
Bremsstrahlung = Radiación de frenado = Rayos X
Aplicando la relación de Duane y Hunt:

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24\times 10^{-6}\ Vm}{V}$$

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24\times 10^{-6}\ Vm}{40\times 10^{3}\ V} = 0{,}031\times 10^{-9}\ m$$

$\lambda_{min} = 0{,}31\times 10^{-10}\ m = 0{,}31\ Å$

5. Un tubo de rayos X opera a una tensión de 15 kV. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F)?

I. La longitud de onda del fotón energético es igual a 0,8 Å.

II. El fotón más energético tiene una energía igual a 15 keV.

III. La energía cinética de los electrones veloces antes de colisionar con el blanco o ánodo es igual a 15 eV.

Resolución:

Análisis de las proposiciones:

I. Si $V = 15\ kV = 15 \times 10^3$ voltios es la tensión de trabajo del tubo de rayos X, entonces, el fotón X más energético producido es aquél cuya energía es igual a la energía cinética del electrón justo antes del choque (es decir, el electrón pierde toda su energía en una sola colisión con el blanco) y su longitud de onda es la más corta (λ_{min}).

De la relación de Duane y Hunt escribimos:

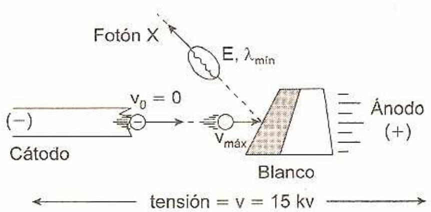
$$\lambda_{min} = \frac{1,24 \times 10^{-6}}{V} = \frac{1,24 \times 10^{-6}}{5 \times 10^3}$$

$$\lambda_{min} = 0,0826 \times 10^{-9}\ m = 0,826 \times 10^{-10}\ m \approx 0,8\ A$$

Proposición: Verdadera.

II. **Energía (E) del fotón X más energético**

Aplicando el teorema del trabajo y la energía para el electrón acelerado escribimos:



$$\underset{\substack{\downarrow \\ q_eV}}{\text{Trabajo desarrollado por el campo eléctrico}} = \text{Variación de la } E_C \text{ del } e^- = \text{Energía del fotón X más enérgetico}$$

$$W^{campo} = E_{C(f)} - E_{C(0)} = E_{fotón\ X}$$

E_C = Energía cinética antes del choque con el ánodo.

$$\Rightarrow E_{fotón\ X} = E_C = q_eV$$

Como, $q_e = e \Rightarrow E_{fotón\ X} = E_C = eV = e(15)$

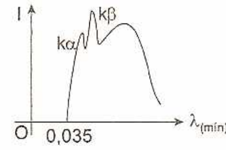
$\therefore E_{fotón\ x} = E_C = 15\ keV$

Proposición: Verdadera.

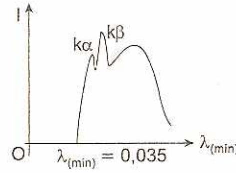
III. Del análisis de la proposición II se concluyó que la energía cinética de los electrones veloces antes de colisionar con el ánodo (blanco) es igual a 15 keV.

Proposición: Verdadera.

6. En la figura se muestra la distribución espectral de la comisión continua de rayos X: calcular la diferencia del potencial (en kV) aplicado al tubo de rayos catódicos.



Resolución:



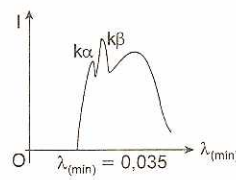
Del gráfico I versus λ se puede apreciar que la mínima longitud de onda es: $\lambda_{mín} = 0,035\ nm = 0,035 \times 10^{-9}\ m$

El fotón X producido de mínima longitud de onda (λ_{min}) es el más energético, es decir:

$E_{C(electrón)}$: energía del fotón X más energético

$$q_eV = h\left(\frac{c}{\lambda_{mín}}\right)$$

V: diferencia de potencial aplicado al tubo de rayos catódicos.



$$\Rightarrow V = \frac{hc}{q_e\lambda_{min}} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})(0,035 \times 10^{-9})}$$

$V = 35,5 \times 10^3\ V \quad \therefore V = 35,5\ kV$

7. Si entre el ánodo y el cátodo de un tubo de rayos X se tiene un diferencia de potencial de 31 000 V y si los electrones al chocar con el ánodo pierden el 15% de su energía cinética como calor, calcule la frecuencia (en 10^{18} Hz) de los rayos X producidos. $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s; $q_e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Resolución:

V = 31 000 V (diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo del tubo de rayos X)

f: frecuencia de los fotones X producidos.

En virtud al principio de conservación de energía se cumple:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ E_C}}{\text{Energía cinética del electrón acelerado}} = \underset{\substack{\downarrow \\ E_{fotón\ X}}}{\text{Energía del Fotón X producido}} + \underset{\substack{\downarrow \\ Q}}{\text{Energía pérdida en forma de calor}}$$

Por dato: $Q = 15\%\ E_C = \frac{15}{100}E_C = \frac{3}{20}E_C$

$$\Rightarrow E_C = E_{fotón\,X} + \frac{3}{20}E_C \Rightarrow E_{fotón\,X} = \frac{17}{20}E_C \quad ...(1)$$

De la teoría cuántica de Planck-Einstein:

$E_{fotón\,X} = hf$ ...(2)

Del teorema del trabajo y la energía:

$W^{campo} = E_C = q_eV$ ...(3)

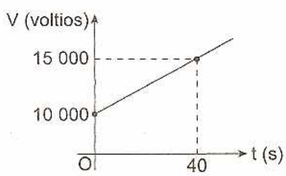
Reemplazando (2) y (3) en (1): $hf = \frac{17}{20}(q_eV)$

$$\Rightarrow f = \frac{17q_eV}{20\,h} = \frac{17(16\times10^{-19})(31\,000)}{20(6{,}63\times10^{-34})}$$

$\therefore\ f = 6{,}36\times10^{13}$ Hz

8. El voltaje de operación de un tubo de rayos X varía linealmente con el tiempo, tal como muestra la gráfica V versus "t" . Determinar el instante (en s) en que longitud de onda de los rayos X producidos sea 1 Å.

$1\,Å = 10^{-10}$ m



Resolución:

$\lambda_0 = 1\,Å = 10^{-10}$ m (longitud de onda de los rayos X producidos en el instante t_0)

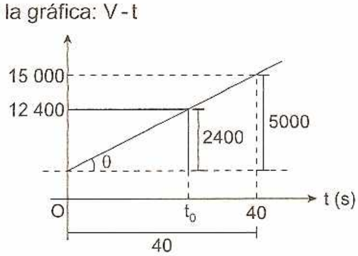
Cálculo del voltaje (V_0) de operación en el instante t_0 cuando la longitud de onda del fotón X producido es $\lambda_0 = \lambda_{min} = 10^{-10}$ m

De la relación de Duane y Hunt:

$$\lambda_0 = \lambda_{min} = \frac{1{,}24\times10^{-6}}{V_0}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{1{,}24\times10^{-6}}{\lambda_{min}} = \frac{1{,}24\times10^{-6}}{10^{-10}} \Rightarrow V_0 = 12\,400\ \text{V}$$

En la gráfica: V - t



De la gráfica, pendiente de la recta:

$$\frac{2400}{t_0} = \frac{5000}{40} \quad \therefore\ t_0 = 19{,}2\ \text{s}$$

9. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F)?

I. Los rayos X se generan por la desaceleración de electrones altamente veloces (alta energía) al chocar contra un obstáculo metálico.

II. La longitud de onda mínima (λ_{min}) del fotón x producido depende del material que está hecho el blanco.

III. Si V es la tensión del tubo de rayos X, entonces, no puede generarse radiación con:

$$\lambda < \frac{1{,}24\times10^{-6}\,(\text{voltios})(\text{m})}{V(\text{en voltios})}$$

IV. A mayor diferencia de potencial de aceleración de los electrones, más pequeña será la longitud de onda mínima o de corte (λ_{min}) del espectro continuo de los rayos X.

Resolución:

Análisis de las proposiciones:

I. Una de las formas de producción de rayos X es por la desaceleración o frenamiento de electrones altamente veloces y energéticos (emitidos por el cátodo de un tubo de rayos X) al chocar contra un metal pesado que actúa como blanco (obstáculo) en el ánodo.

En el proceso de frenamiento, la energía cinética del electrón es transformada total o parcialmente en energía radiante (fotones) denominado rayos X, radiación de frenado o Bremsstrahlung.

Proposición: verdadera.

II. De la relación de Duane y Hunt: $\lambda_{min} = \frac{1{,}24\times10^{-6}}{V}$

Donde: V: diferencia de potencial a la cual está sometida el tubo de rayos X.

De esta relación se deduce que la longitud de onda mínima (λ_{min}) de los fotones X producidos depende exclusivamente de la diferencia de potencial o potencial acelerador, es decir, λ_{min} es independiente del material que está hecho el blanco.

Proposición: Falsa.

III. Si V es el voltaje de trabajo o potencial acelerador de un tubo de rayos X, entonces, los rayos X más energéticos se producen cuando toda la energía cinética ($E_C = q_eV$) de los electrones se transforman en fotones de rayos X de energía (E), es decir la energía de estos fotones X no pueden ser mayor que E_C, esto es: $E \le E_C = q_eV$

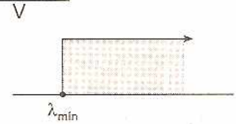
Como: $E = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) \Rightarrow h\left(\frac{c}{\lambda}\right) \le q_eV$

$\Rightarrow \lambda \ge \frac{hc}{q_eV}$, reemplazando los valores de h, c y q_e

$$\lambda = \frac{(6{,}63\times10^{-34})(3\times10^{8})}{(16\times10^{-19})V} \Rightarrow \lambda \ge \frac{1{,}24\times10^{-6}}{V}$$

De esta relación se puede deducir que el mínimo valor de la longitud de onda de los rayos X producidos es:

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24\times10^{-6}}{V}$$



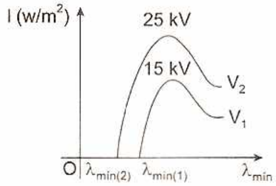
Por lo tanto, no pueden generarse rayos X con:

$$\lambda < \frac{1{,}24\times10^{-6}}{V} = \lambda_{min}$$

Proposición: Verdadera.

IV. De la relación Duane y Hunt: $\lambda_{min} = \dfrac{1{,}24\times10^{-6}}{V}$

donde: V: diferencia de potencial o potencial acelerador. De la relación de Duane y Hunt se puede apreciar que, entre la longitud de onda mínima (λ_{min}) o de corte y la diferencia de potencial (V), hay una relación inversa, es decir a mayor diferencia de potencial menor será la longitud de onda mínima. En el gráfico del espectro continuo de los rayos X para dos voltajes se cumple:



Si: $V > V_1 \Rightarrow \lambda_{min(2)} < \lambda_{min(1)}$

Proposición: Verdadera.

10. En un tubo de rayos X los electrones que parten del reposo del cátodo alcanzan una rapidez máxima de 10^8 m/s, justo antes de chocar con el blanco. Calcular la frecuencia (en Hz) de los fotones X más energéticos producidos: debido al frenamiento de los electrones.
$m_e = 9{,}1\times10^{31}$ kg; $c = 3\times10^8$ m/s
$h = 6{,}63\times10^{-34}$ Js

Resolución:

$v = 10^8$ m/s (rapidez máxima de los electrones)
$m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg (masa en reposo del electrón)
f: frecuencia de los fotones X más energéticos.
Los fotones X más energéticos se producen cuando toda la energía cinética (E_C) de los electrones justo antes de chocar con el blanco se transforman en energía radiante (rayos X), esto es:

Energía cinética del electrón acelerado	=	Energía del fotón X más energético producido	
E_C	=	$E_{fotón\ X}$	...(1)

Ahora usamos la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein para calcular la energía del fotón X:
$E_{fotón\ X} = hf$ ...(2)

Por otro lado la energía cinética del electrón está determinada por la ecuación: $E_C = (m - m_e)c^2$...(3)

Esta es la energía cinética relativista del electrón y la usamos porque la rapidez del electrón en el tubo de rayos X es $v = 10^8$ m/s, que constituye más de 30% de la rapidez de la luz en el vacío. ($c = 3\times10^8$ m/s)

En virtud a la teoría de la relatividad especial de Einstein a velocidades grandes la masa sufre un incremento. Para nuestro caso la masa relativista del electrón (m) será: $m = \dfrac{m_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3):

$$E_c = \left(\frac{m_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_e\right) = m_ec^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad ...(5)$$

Reemplazamos la relación (2) y (5) en (1):

$$m_ec^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = hf \Rightarrow f = \frac{m_ec^2}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

Reemplazando valores:

$$f = \frac{(9{,}1\times10^{-31})(3\times10^8)^2}{6{,}63\times10^{-34}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(10^8)^2}{(3\times10^8)^2}}} - 1\right)$$

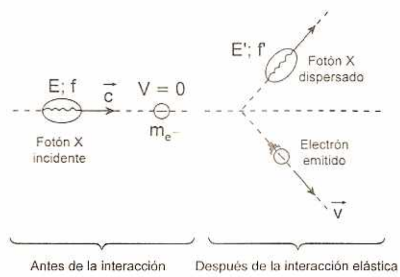
$\therefore\ f = 7{,}49\times10^{18}$ Hz

III. EFECTO COMPTON

1. Un fotón de rayos X de frecuencia $f = 2{,}5\times10^{18}$ Hz incide sobre un electrón libre en reposo. Después de la interacción fotón-electrón se observa que la energía del fotón dispersado es igual al 60% de la energía del fotón incidente, calcular la rapidez (en m/s) del electrón emitido. No considere efectos relativistas.
$m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63\times10^{-34}$ Js

Resolución:

$f = 2{,}5\times10^{18}$ Hz (frecuencia del fotón X incidente)
v: rapidez del electrón emitido después de la interacción fotón-electrón.
Para mayor comprensión hagamos un esquema del fenómeno de efecto Compton:



Cálculo de la energía (E) del fotón incidente

Para ello usamos la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein: $E = hf = (6{,}63\times10^{-34})(2{,}5\times10^{18})$
$\Rightarrow E = 16{,}575\times10^{-16}$ J

Ahora, calculemos la energía del fotón dispersado (E'):

Por dato: $E' = 60\%E = \dfrac{60}{100}(16{,}75\times10^{-16})$

$\Rightarrow E = 9{,}945\times10^{-16}$ J

Del gráfico se puede apreciar que parte de la energía del fotón incidente es cedida al electrón, adquiriendo este último determinada energía cinética (E_C), donde: $E_C = \frac{1}{2}m_ev^2$: energía cinética clásica

de modo que el balance de energía:

$$E_{\text{fotón incidente}} = E_{\text{fotón dispersado}} + E_{C(\text{electrón})}$$

$$E = E' + \frac{1}{2}m_ev^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E-E')}{m_e}}$$

Reemplazando valores:

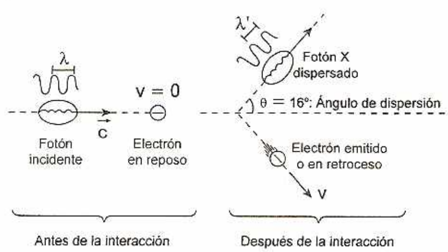
$$v = \sqrt{\frac{2(16,575\times10^{-16} - 9,945\times10^{-16})}{9,1\times10^{-31}}}$$

$\therefore\ v = 3,8 \times 10^7$ m/s

2. Un fotón de rayos X de longitud de onda $\lambda = 1,05$ Å incide sobre una muestra de carbono. Determinar el corrimiento Compton $\Delta\lambda$ en (nm), si la radiación dispersada sigue la dirección $\theta = 16°$.
$\lambda_c = 0,00243$ nm (longitud de onda de Compton)

Resolución:

$\lambda_c = 0,00243$ nm (longitud de onda de Compton)
$\theta = 16°$ (dirección que sigue la radiación dispersada)
$\Delta\lambda$: corrimiento Compton
Cuando un fotón incide sobre un electrón en reposo, este cede parte de su energía al electrón, su dirección cambia, su energía disminuye y su longitud de onda aumenta. Observe detalladamente el gráfico.



El corrimiento Compton ($\Delta\lambda$) está definido como el cambio de longitud de onda que experimenta la radiación, esto es:
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$
De la ecuación llamada ecuación del corrimiento Compton se puede apreciar que $\Delta\lambda$ no depende de la longitud de onda de la radiación incidente, sino que solo depende del ángulo de dispersión θ.
$\Rightarrow \Delta\lambda = (0,00243)(1 - \cos16°)$
Por trigonometría elemental: $\cos16° = \frac{24}{25}$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = (0,00243)\left(1 - \frac{24}{25}\right)$$

$\Rightarrow \Delta\lambda = 0,0000972$ nm

3. Un fotón de rayos X de longitud de onda 2,01 Å interactúa con un electrón en reposo, calcular:

a) La cantidad de movimiento del fotón incidente (en kgm/s).
b) La cantidad de movimiento del fotón dispersado (en kgm/s).

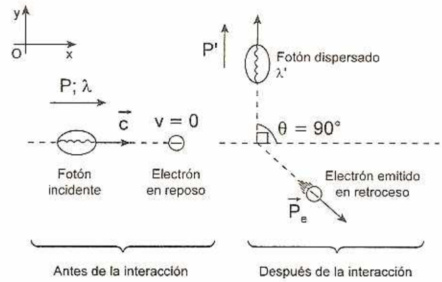
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js
$\lambda_c = 0,0024$ nm (longitud de onda de Compton)
$\theta = 90°$ (ángulo de dispersión)
$1\,\text{Å} = 10^{-10}$ m; 1 nano $= 10^{-9}$

Resolución:

$\lambda = 2,01\,\text{Å} = 2,01 \times 10^{-10}$ m (longitud de onda del fotón incidente)

$\vec{P}$: cantidad de movimiento del fotón incidente.
$\vec{P}'$: cantidad de movimiento del fotón dispersado.

Hagamos un gráfico para visualizar mejor el fenómeno físico:



a) **Cálculo de la cantidad de movimiento del fotón incidente ($\vec{P}$)**
Los fotones de la radiación electromagnética incidente tienen comportamiento corpuscular de cantidad de movimiento dada por la ecuación:

$$\vec{P} = \frac{h}{\lambda}\hat{i} = \left(\frac{6,63\times10^{-34}}{2,01\times10^{-10}}\right)\hat{i}\ \therefore\ \vec{P} = 3,3\times10^{-24}\hat{i}\ \text{kgm/s}$$

b) **Cálculo de la cantidad de movimiento del fotón dispersado (P')**
El fotón dispersado tiene una cantidad de movimiento igual a: $\vec{P}' = \left(\frac{h}{\lambda}\right)\hat{j}$ ...(1)

Para calcular la longitud de onda (λ') del fotón dispersado usamos la ecuación del corrimiento Compton, esto es:
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$
$\lambda' = \lambda_c(1 - \cos\theta) + \lambda$
Reemplazando valores:
$\Rightarrow \lambda' = 0,00243(1 - \cos90°) + 2,01 \times 10^{-10}$
Teniendo en cuenta que: $\cos90° = 0$
$\Rightarrow \lambda' = 0,00243 \times 10^{-9}(1 - 0) + 2,01 \times 10^{-10}$
$\Rightarrow \lambda' = 2,0343 \times 10^{-10}$ m

Finalmente reemplazamos el valor de λ' en (1):

$$\vec{P}' = \left(\frac{6,63\times10^{-34}}{2,0343\times10^{-10}}\right)\hat{j}\ \therefore\ \vec{P}' = 3,25\times10^{-24}\hat{j}\ \text{kgm/s}$$

4. Sobre una lámina de cobre incide un haz de fotones monocromáticos de longitud de onda $\lambda = 10$ Å.

Determinar la mínima energía de un fotón dispersado (en eV).
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $\lambda_c = 0{,}00243$ nm
$c = 3 \times 10^8$ m/s; 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J

Resolución:

$\lambda = 10\,\text{Å} = 10 \times 10^{-10}$ m $= 10^{-9}$ m (longitud de onda de un fotón incidente)
$\lambda_c = 0{,}00243$ nm $= 0{,}00243 \times 10^{-9}$ m (longitud de onda de Compton)
$E'_{mín}$: energía mínima del fotón dispersado.
De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein, la energía del fotón dispersado (E') es igual a:

$$E' = hf = h\left(\frac{c}{\lambda'}\right)$$

Siendo λ' longitud de onda del fotón dispersado
De la ecuación se puede apreciar que la energía del fotón dispersado (E') será mínima cuando la longitud de onda (λ') es máxima, esto es:

$$E'_{mín} = \frac{hc}{\lambda'_{máx}} \qquad ...(1)$$

Ahora calculemos $\lambda'_{máx.}$, para ello usamos la ecuación del corrimiento Compton:
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta)$
λ' será máxima cuando el término $(1 - \cos\theta)$ es máximo y esto ocurre cuando el $\cos\theta$ toma su mínimo valor, es decir: $\cos\theta = -1 \wedge \theta = 180°$

Nota: recordar que $\cos\theta \in [-1; 1]$
$\Rightarrow \lambda'_{máx.} = \lambda + \lambda_c[1 - (-1)] = \lambda + 2\lambda_c$
$\Rightarrow \lambda'_{máx.} = 10^{-9}$ m $+ 2\,(0{,}00243 \times 10^{-9})$
$\Rightarrow \lambda'_{máx.} = 1{,}00486 \times 10^{-9}$ m

Reemplazando los valores de $\lambda_{máx}$, h y c en (1):

$$E'_{mín} = \left[\frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{1{,}00486 \times 10^{-9}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-19}}\right)$$

$\therefore E'_{mín} = 1\,237{,}1$ eV

5. En el laboratorio de física se efectúa un experimento de dispersión electromagnética. Para qué ángulo de dispersión el corrimiento Compton ($\Delta\lambda$) es igual a la mitad de la longitud de onda de Compton (λ_c).

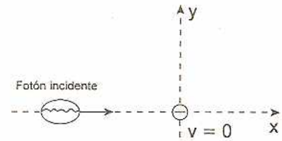
Resolución:

$\Delta\lambda_c$: longitud de onda de Compton
$\Delta\lambda$: $\frac{\lambda_c}{2}$ (corrimiento Compton)
θ: ángulo de dispersión
A partir de la ecuación del corrimiento Compton escribimos: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_0}{2} = \lambda_c(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \cos\theta$$

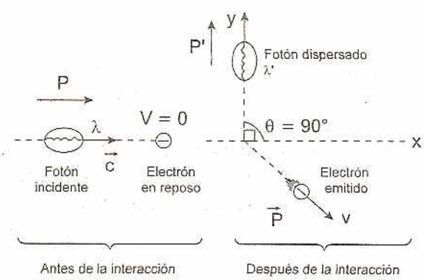
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \theta = 60°$$

6. Un fotón de rayos X de longitud de onda $\lambda = 10$ Å se mueve en la dirección x^+ tal como muestra el gráfico. Después de la interacción fotón-electrón, el fotón dispersado sigue la dirección $\theta = 90°$, determinar el módulo de la cantidad de movimiento del electrón emitido (en kgm/s).
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; 1 Å $= 10^{-10}$ m
$\lambda_c = 0{,}00243$ nm; 1 nano $= 10^{-9}$



Resolución:

$\lambda = 10\,\text{Å} = 10 \times 10^{-10}$ m $= 10^{-9}$ m (longitud de onda del fotón incidente)
$\theta = 90°$ (ángulo de dispersión)
P_e: módulo de la cantidad de movimiento del electrón emitido.
Para mayor comprensión hagamos un esquema del fenómeno físico que está ocurriendo.



El fotón incidente de longitud de onda (λ) tiene una cantidad de movimiento (P) cuyo valor es igual a:

$$P = \frac{h}{\lambda} = \left(\frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{10^{-9}}\right) \Rightarrow P = 6{,}63 \times 10^{-25} \text{ kgm/s}$$

Ahora, para calcular la cantidad de movimiento (P') de valor: $P' = \frac{h}{\lambda'}$ ...(1)

se requiere conocer la longitud de onda del fotón dispersado (λ'), para ello usamos la ecuación del corrimiento Compton: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$
Reemplazando valores:
$\lambda' = 10^{-9} + (0{,}00243 \times 10^{-9})\,(1 - \cos 90°)$
$\Rightarrow \lambda' = 1{,}00243 \times 10^{-19}$ m
Reemplazando el valor de λ' en (1):

$$P' = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{1{,}00243 \times 10^{-9}} \Rightarrow P' = 6{,}61 \times 10^{-25} \text{ kgm/s}$$

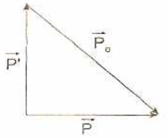
Ahora en virtud al principio de conservación de la cantidad de movimiento escribimos:

$$\vec{P}_{\text{antes de la interacción}} = \vec{P}_{\text{después de la interacción}}$$

$$\vec{P}_{\text{protón incidente}} + \vec{P}_{\text{electrón en reposo}} = \vec{P}_{\text{fotón dispersado}} + \vec{P}_{\text{electrón emitido}}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{P'} + \vec{P}_e$$

Usando la regla del triángulo vectorial:



En el triángulo rectángulo se cumple:

$P_e^{\,2} = P^2 + (P')^2 \Rightarrow P_e = \sqrt{P^2 + (P')^2}$

$P_e = \sqrt{(6{,}63 \times 10^{-25})^2 + (6{,}61 \times 10^{-25})^2}$

$P_e = 0{,}36 \times 10^{-25}$ kgm/s

7. En un experimento de dispersión Compton, fotones incidentes de 0,2 MeV producen fotones dispersados en un ángulo de 60° con respecto al haz incidente. La energía (en MeV) de los electrones, dispersados es:
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; 1 nano $= 10^{-9}$
1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J; $\lambda_c = 0{,}00243$ nm
$c = 3 \times 10^8$ m/s; 1 mega = 1 M $= 10^6$

Resolución:

$E = 0{,}2$ MeV $= (0{,}2)(16^6)(1{,}6 \times 10^{-19}$ J)
$\Rightarrow E = 0{,}32 \times 10^{-13}$ J (energía del fotón incidente)
$\theta = 60°$ (ángulo de dispersión)
E_C: energía cinética de un electrón dispersado.
En virtud al principio de conservación de la energía, la energía (E) del fotón incidente es igual a la suma de la energía del fotón dispersado (E') y la energía cinética (E_C) del electrón dispersado, esto es: $E = E' + E_C$
$\Rightarrow E_C = E - E'$ ...(1)

Cálculo de la energía del fotón dispersado (E'):
Si λ' es la longitud de onda del fotón dispersado, entonces su energía será: $E' = h\left(\frac{c}{\lambda'}\right)$ ...(2)

Ahora usamos la ecuación del corrimiento Compton para calcular λ': $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c\,(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_c\,(1 - \cos\theta)$ ...(3)

La longitud de onda (λ) del fotón incidente se puede calcular a partir de: $E = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{0{,}32 \times 10^{-13}}$$

$\lambda = 6{,}156 \times 10^{-13} = 0{,}000621 \times 10^{-9}$ m

Reemplazando valores de λ y θ:

$\lambda_c = 0{,}00243$ nm $= 0{,}00243 \times 10^{-9}$ m

$\lambda' = 0{,}00621 \times 10^{-9} + 0{,}00243 \times 10^{-9}\,(1 - \cos 60°)$

Por trigonometría: $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda' = 0{,}00621 \times 10^{-9} + 0{,}00243 \times 10^{-9}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \lambda' = 0{,}007425 \times 10^{-9}$ m

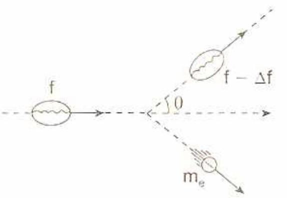
Ahora reemplazamos λ' en (2):

$$E' = \left[\frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{0{,}007425 \times 10^{-9}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-19}}\right)$$

$\Rightarrow E' = 0{,}167 \times 10^6$ eV $= 0{,}167$ MeV

Finalmente reemplazamos el valor de E' en (1):
$E_C = 0{,}2 - 0{,}167 \quad \therefore E_C = 0{,}03$ MeV

8. Un fotón con frecuencia "f" se dispersa debido a la interacción con un electrón en reposo. Determinar la variación de la frecuencia del fotón dispersado bajo un ángulo θ como muestra el gráfico.
considere: $hf << m_e c^2$
m_e: masa del electrón.
h: constante de Planck.
c: rapidez de la luz en el vacío.



Resolución:

Partiendo de la ecuación del corrimiento Compton ($\Delta\lambda$)

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ ...(1)

λ': longitud de onda del fotón dispersado
λ: longitud de onda del fotón incidente
Ahora aplicamos la ecuación de la onda electromagnética:
Para el fotón incidente: $\lambda f = c \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$
f: frecuencia del fotón incidente
Para el fotón dispersado: $\lambda' f' = c \Rightarrow \lambda' = \frac{c}{f'}$
f': frecuencia del fotón dispersado
Volviendo a la expresión (1) :

$$\frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{c(f - f')}{f'f} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

La variación de la frecuencia del fotón denotado por Δf es igual a: $\Delta f = f - f' \Rightarrow f' = f - \Delta f$

$$\Rightarrow \frac{c\,\Delta f}{(f - \Delta f)f} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

La ecuación equivalente será:

$$\Delta f = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)(f^2 - f\Delta f)$$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{hf^2}{m_e c^2}(1 - \cos\theta) - \left(\frac{hf}{m_e c^2}\right)\Delta f(1 - \cos\theta)$$

Por dato: $hf << m_e c^2 \Rightarrow \frac{hf}{m_e c^2} << 1$

Es decir, el término: $\frac{hf}{m_e c^2} \approx 0$. Luego, la variación de la frecuencia será: $\Delta f \approx \frac{hf^2}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$

9. Un fotón interactúa con un electrón en reposo según efecto Compton. Después de la colisión el electrón en retroceso tiene una rapidez v, determinar $\frac{\lambda_b}{\lambda_c}$.

Siendo:
λ_b: longitud de onda De Broglie
λ_c: longitud de onda de Compton:
c: rapidez de la luz en el vacío.

Resolución:

A partir de la ecuación del corrimiento Compton:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

El término $\left(\frac{h}{m_e c}\right)$ es conocido como longitud de onda de Compton (λ_c), es decir: $\Rightarrow \lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ ...(1)

De Broglie demostró que toda partícula material en movimiento posee comportamiento ondulatorio, en este caso el electrón en retroceso con rapidez "v" tendrá una longitud de onda (λ_b) igual a: $\lambda_b = \frac{h}{mv}$ ...(2)

Siendo "m" la masa relativista del electrón, que está determinada por la ecuación: $m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

m_e: masa en reposo del electrón.
c: rapidez de la luz en el vacío
Reemplazando "m" en (2):

$$\lambda_b = \frac{h}{\frac{m_e v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Rightarrow \lambda_b = \frac{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_e v} \quad ...(3)$$

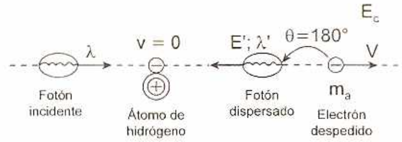
Dividiendo la relación (3) entre (1):

$$\frac{\lambda_b}{\lambda_c} = \frac{\frac{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_e v}}{\frac{h}{m_e c}} = \frac{c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \therefore \frac{\lambda_b}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}$$

10. Un átomo de hidrógeno en reposo interactúa con un fotón de 10^4 eV de energía. Como consecuencia el electrón sale despedido en la misma dirección que la radiación incidente. Despreciando la energía necesaria para separar al electrón (16,6 eV), determinar su energía cinética (en eV).
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^8$ m/s
$\lambda_c = 0{,}00243$ nm; 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J; 1 nm $= 10^{-9}$ m

Resolución:

$E = 10^4$ eV $= 10^4(1{,}6 \times 10^{-19})$ J $= 1{,}6 \times 10^{-15}$ J (energía del fotón incidente)
E_C: energía cinética del fotón despedido
Para mayor comprensión hagamos un esquema del fenómeno físico:



En virtud el principio de conservación de la energía se cumple que la energía del fotón incidente (E) es igual a la suma de la energía del fotón dispersado o difundido (E') y la energía cinética (E_C) del electrón despedido del átomo del hidrógeno. La energía para arrancar al electrón (13,6 eV) llamada también energía de ionización no entra en el balance de energía por ser muy pequeña, en este caso consideramos al electrón como si estuviera libre y en reposo, es decir: $E = E' + E_C$

$\Rightarrow E_C = E - E'$ ...(1)

Ahora aplicamos la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein para calcular la energía del fotón dispensado (E'), para ello escribimos: $E' = h\left(\frac{c}{\lambda'}\right)$ ...(2)

Para calcular la longitud de onda del fotón dispersado usamos la ecuación del corrimiento Compton:
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$
$\Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta)$ ...(3)

Por dato, si el electrón sale despedido en la misma dirección del fotón incidente, entonces el fotón dispersado se mueve bajo un ángulo de dispersión $\theta = 180°$; o sea, en dirección contraria al incidente. Para calcular la longitud de onda (λ) del fotón incidente usamos la ecuación: $E = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$

Reemplazando valores:

$$\lambda = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{1{,}6 \times 10^{-15}} m \Rightarrow \lambda = 0{,}1243 \times 10^{-9}\ m$$

Reemplazando los valores de λ, θ y λ_c en (3):
$\Rightarrow \lambda' = 0{,}1243 \times 10^{-9} + 0{,}00243 \times 10^{-9}(1 - \cos 180°)$
Pero: $\cos 180° = -1$
$\Rightarrow \lambda' = 0{,}1243 \times 10^{-9} + 0{,}00243 \times 10^{-9}(2)$
$\Rightarrow \lambda' = 0{,}129 \times 10^{-9}$ m
Reemplazando el valor de λ' en (2):

$$E = \left[\frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{0{,}129 \times 10^{-9}}\right]\left(\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-19}}\right)$$

$E' = 0{,}96 \times 10^4$ eV
Finalmente, en (1): $E_C = 10^4 - 0{,}96 \times 10^4$
$\therefore E_C = 0{,}04 \times 10^4$ eV

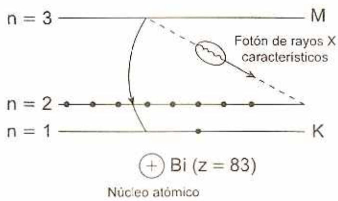
11. En un tubo de rayos X tipo Olidge, se disparan electrones sobre un blanco de bismuto, determinar:
a) La energía (en keV) del fotón de rayos X característicos, cuando un electrón experimenta una transición dela capa M (estado n = 3) a un espacio libre en la capa K (estado n = 1) de un átomo de bismuto.

b) La frecuencia (en Hz) de los rayos X característicos emitidos cuando un electrón desciende de la capa M a L.
Z_{Bi}= 83 (número atómico del bismuto)
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J

Sugerencia: Use la ecuación que permite determinar la energía (E_n) de un electrón en un estado estacionario de número cuántico principal "n" de un átomo multielectrónico: $E_n = \dfrac{-13{,}6\text{ eV}}{n^2}(Z_{ef})^2$

Z_{ef}: número atómico efectivo.

Resolución:



a) Hagamos un esquema que nos permita comprender mejor el mecanismo de producción de un fotón de rayos X característicos cuando un electrón efectúa un salto de la capa M (n = 3) a un espacio libre en la capa K (n = 1).
La energía del fotón de rayos X característico (E) emitido en la transición electrónica de M a K será:
$E = E_M - E_K$ ...(1)
Cálculo de E_K: energía del electrón en la capa K con n = 1.
Aplicando la ecuación que permite calcular la energía de un electrón en un estado estacionario para un átomo multielectrónico:

$$E_K = \frac{-13{,}6\text{ eV}}{n^2}(Z_{ef})^2 \qquad ...(2)$$

Cálculo del número atómico efectivo
Consideremos dos electrones en la capa K de un átomo de bismuto de número atómico Z_{Bi}, cada electrón protege parcialmente al otro de la carga del núcleo, es decir cada electrón se somete a una carga nuclear efectiva de:

$$q_eZ_{ef} = q_e(Z_{Bi} - 1) \Rightarrow Z_{ef} = Z_{Bi} - 1 = 83 - 1 = 82$$

Ahora reemplazamos los valores de Z_{ef} y "n" en (2):

$$E_K = \frac{-13{,}6\text{ eV}}{1^2}(82)^2 \Rightarrow E_K = -91\,446{,}4\text{ eV}$$

Cálculo de E_M: energía del electrón en la capa M con n = 3.
Aplicando la ecuación:

$$E_M = \frac{-13{,}6\text{ eV}}{n^2}(Z_{ef})^2 \qquad ...(3)$$

Cálculo de Z_{ef}
Cuando un electrón en la capa M interactúa con el núcleo, en total hay 9 electrones, 8 en la capa L y uno en la capa K (recuerde que en esta capa hay un espacio libre) como se puede apreciar en el gráfico que se interponen entre el núcleo y el electrón. Estos electrones interpuestos ejercen algo así como un efecto de pantalla puesto que cancela o tapa parte de la carga nuclear, de modo que la carga nuclear efectiva que actúa sobre el electrón en la capa M será:

$$q_eZ_{ef} = q_e(Z_{Bi} - 9) \Rightarrow Z_{ef} = Z_{Bi} - 9 = 83 - 9 = 74$$

Ahora reemplazamos los valores de Z_{ef} y "n" en (3):

$$E_M = \frac{-13{,}6\text{ eV}}{3^2}(74)^2 \Rightarrow E_M = -8\,274{,}8\text{ eV}$$

Al reemplazar los valores de E_K y E_M en (1), la energía del fotón X característico emitido será:
$E = -8274{,}8 - (-91\,446{,}4)$
$\therefore E = 83\,171{,}6$ eV

b) Cálculo de la frecuencia (f) del fotón de rayos X característico, emitido en la transmisión electrónica de capa M a K.
De la ecuación de la teoría cuántica de Planck-Einstein: $E = hf \Rightarrow f = \dfrac{E}{h}$

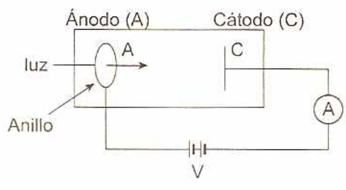
reemplazando los valores de E calculado en la parte (a) y $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s

$$f = \frac{83\,171{,}6\text{ eV}}{6{,}63 \times 10^{-34}\text{ Js}}\left(\frac{1{,}6 \times 10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}}\right)$$

$\Rightarrow f = 20 \times 10^{18}\text{ s}^{-1}$
$\therefore f = 20 \times 10^{18}$ Hz

EFECTO FOTOELÉCTRICO

El efecto fotoeléctrico fue descubierto en 1887, por Heinrich Hertz, quien observó que una chispa saltaba más fácilmente entre dos esferas cuando sus superficies eran iluminadas por la luz de otra chispa. Posteriormente, Hallwachs investigó el efecto más detenidamente; por ello es conocido a veces por su nombre.



En esta experimentación se obtuvieron resultados de gran importancia:

1. La proporcionalidad directa entre la corriente máxima y la intensidad de la luz indica que el número de

electrones emitidos por segundo sobre la superficie C es directamente proporcional a la intensidad del rayo de luz incidente.

2. La energía cinética de los electrones emitidos por la superficie no excede de cierto valor máximo, dado por:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2_{máx} = eV \qquad ...(1)$$

3. Una luz que llegue a la superficie del cátodo con frecuencia igual o menor que f_0 no puede liberar electrones del metal, por intenso que sea el haz luminoso. Esta frecuencia crítica f_0 recibe el nombre de frecuencia umbral para el metal usado como cátodo.

Por estos hechos experimentales estaban en desacuerdo con la teoría de Maxwell, según la cual la energía estaria distribuida uniforme y continuamente en un frente de onda.

Albert Einstein extendió la idea de la cuantificación de Planck a la propagación de la radiación electromagnética. Supuso que el cuanto de energía emitido por un oscilador no se distribuía sobre el frente de onda, sino que seguía siendo un cuanto o paquete de energía E = hf. A este cuanto de energía se le dio el nombre de fotón.

Aplicando el principio de la conservación de la energía: $hf = \phi + \frac{1}{2}mV^2 \qquad ...(2)$

Siendo: $\phi = hf_0$. Luego, combinando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = eV = hf - hf_0 \qquad ...(3)$$

$$\begin{bmatrix}\text{energía}\\ \text{de}\\ \text{fotón}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{energía necesaria}\\ \text{para extraer el electrón}\\ \text{de la superficie}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{energóa cinética}\\ \text{del fotoelectrón}\\ \text{cinético}\end{bmatrix}$$

$$E = hf = \phi + E_C$$

Leyes del efecto fotoeléctrico

Leyes de Lenard

1. La velocidad de los fotoelectrones es independiente de la iluminación.
2. La velocidad de los fotoelectrones es directamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente.
3. Para cada metal existe una frecuencia mínima de emisión de fotoelectrones llamada frecuencia umbral.

Leyes de Einstein

1. El cuanto de energía de un fotón es directamente proporcional a la velocidad de su fotoelectrón que lo desprende.
2. El número de fotoelectrones desprendido en cada unidad de tiempo es directamente proporcional al número de fotones incidentes.

Ejemplos:

1. Para extraer un fotoelectrón de la superficie de un metal se requiere una energía de 2,1 eV. ¿Cuál es la frecuencia umbral del material?

Resolución:

$$E = hf_0 \Rightarrow f_0 = \frac{E}{h} = \frac{3,1}{4,14 \times 10^{-15}}$$

$$f_0 = 0,507 \times 10^{15}\,\text{Hz}$$
$$\Rightarrow f_0 = 5 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

2. La función trabajo para el litio es de 2,28 eV. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones cuando la superficie es iluminada con luz de longitud de onda de 500 nm? ($h = 4,14 \times 10^{-15}$ eVs)

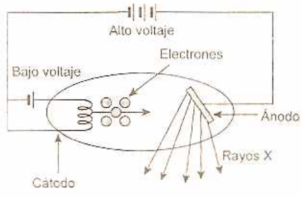
Resolución:

$$E = \phi + E_C \Rightarrow E_C = E - \phi$$
$$E_C = hc/\lambda - \phi \Rightarrow E_C = 2,484 - 2,28$$
$$E_C = 0,204\text{ eV} \approx 0,2\text{ eV}$$

RAYOS X

Wilhelm Conrad Roentgen (1895) encontró que una radiación altamente penetrante era emitida cuando electrones con alta velocidad golpeaban los materiales. Su naturaleza era totalmente desconocida, por lo que se le llamó rayos X.

Los rayos X forman parte del espectro de las radiaciones electromagnéticas cuya longitud de onda es del orden de los 10^{-8} cm. Por tener, longitudes de onda muy cortas son altamente penetrantes en la materia, siendo ésta su característica fundamental. Los rayos X se producen al chocar una corriente de electrones que se mueven a gran velocidad contra una placa metálica o punto focal; tras este choque, su energía cinética se transforma una parte en calor (90%) y otra en rayos X.



Esquema del tubo de rayos X

Un tubo de rayos X consta de:

- Un filamento incandescente (cátodo), el cual actúa como fuente de electrones. Dependiendo de la variación de la corriente (mA) se produce la variación en la cantidad de rayos X producidos.
- Una pieza metálica que actúa como ánodo y que es el blanco que va a frenar a los electrones acelerados; su superficie constituye el foco del tubo.
- Un dispositivo o tubo en el que se mantiene en alto vacío y donde se encuentran tanto el ánodo como el cátodo. La tensión aplicada en el interior del tubo, entre ánodo y cátodo, dependerá la fuerza

que aceleran los electrones. La tensión se mide en kilovoltios (kV) y de ella depende la calidad de los rayos X.

- Un estuche plomado que encierra el tubo y que está provisto de una ventana por donde únicamente pasa el haz de los rayos X útil.
- Sistema de enfriamiento (recuerde que el 90% se transforma en calor).

En el esquema del tubo de rayos X, el tubo está al vacío y los electrones salen por emisión termoiónica. Para una tensión dada, existe un valor de λ_{min} para el cual I = 0, más allá de ese valor el espectro es continuo (varias I), podemos interpretar este resultado experimental diciendo que la energía cinética E_C de los electrones es gastada parte en el anticátodo en la forma de radiación X. Si E'_C es la energía de un electrón después de la formación de un fotón (rayos X), aplicando la ley de la conservación de la energía, tenemos:

$E_C - E'_C = hf = hc/\lambda \Rightarrow E_C = E'_C + hc/\lambda$

Como $E_C = e(V)$, entonces es necesario que: $E'_c < E_c$,

por lo que: $hc/\lambda < e(V)$, de donde: $\lambda \geq hc/e \times V$

siendo: $\lambda_{min} = hc/e(V)$

e: carga del electrón; V: potencial de frenado

h: constante de Planck; c: velocidad de la luz

Ejemplos:

1. Calcular la diferencia de potencial con que ha de ser acelerado un electrón para producir rayos X de 10^{-10} m de longitud de onda. Se asume que el electrón queda en reposo después del frenado. ($h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js)

Resolución:

$$V = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^{-10}}$$

2. Un tubo de rayos X produce radiación X de frecuencia máxima de 10^{19} Hz. Calcular el voltaje que requiere el haz de electrones para producir los rayos x mencionados. ($h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J s)

Resolución:

$$V = \frac{hf}{e} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34} \times 10^{19}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 41{,}250 \text{ V}$$

Propiedades de los rayos X

1. Son capaces de penetrar en la materia orgánica y absorberse en mayor o menor proporción según el número atómico, la densidad y el espesor de los elementos atravesados.
2. Producen luminiscencia (emisión de luz) al incidir sobre algunas sustancias.
3. Producen un efecto fotoquímico al actuar sobre la emulsión de las películas fotográficas.
4. Pueden producir ionización cuando chocan con suficiente energía contra la materia.
5. Producen efectos biológicos, son los efectos más importantes para el hombre; se estudian desde el aspecto beneficioso para el ser humano (radioterapia) y desde el negativo, intentando conocer sus efectos perjudiciales.

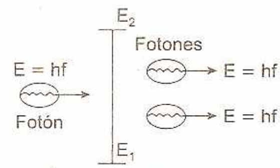
LÁSER

El término láser denota en lengua inglesa *light amplification by stimulated emision of radiation* (ampliación lumínica por emisión estimulada de radiación).

La luz láser posee tres características que la diferencian de la luz ordinaria:

- Es monocromática.
- Es coherente.
- Está bien colimada.

La emisión estimulada, que es crucial en la generación de los rayos láser, podemos entenderla utilizando el siguiente esquema:



Átomo excitado

Tenemos un fotón de energía $E = hf = E_2 - E_1$ que va a interaccionar con un átomo que ya se encuentra en el estado excitado E_2. El fotón incidente estimula al átomo para que emita un fotón, de forma tal que la energía, fase y dirección de propagación de este segundo fotón, sean iguales a las del fotón incidente; es decir que el estado cuántico del fotón emitido es idéntico al del fotón incidente.

Si estos dos fotones interaccionan de nuevo con dos átomos excitados estimulan la emisión de otros dos nuevos fotones idénticos. El proceso de emisión estimulada puede repetirse sucesivamente, produciéndose de esta forma una ampliación del número de fotones. ¿Los fotones del resultado de la primera interacción, siempre interaccionarán con átomos excitados?, la respuesta es que no, ya que normalmente la mayoría de los átomos de un medio están en su estado fundamental. Por lo que, un fotón incidente con la energía adecuada interaccionará más probablemente con un átomo en el estado fundamental que con uno en el estado excitado, por lo que es más probable que sea absorbido a que estimule una emisión. Para que la emisión estimulada sea posible, y el medio presente amplificación láser, se necesita que haya más átomos en el estado excitado que en el fundamental. Cuando se consigue esta situación podemos decir que se ha realizado la inversión de población del medio.

El primer láser fue construido en 1960, y desde entonces, ha tenido un desarrollo muy grande; es muy usado en microscopia, en mediciones de precisión, en fusión nuclear, en cortes de precisión, en cirugía, en terapia, en comunicaciones telefónicas vía fibras ópticas, etcétera.

Ejemplos:

1. El láser He-Ne emite radiación de longitud de onda igual a $6325\,\text{Å}$, ¿cuál es la energía aproximada del fotón? ($hc = 12,4 \times 10^3$ eVÅ).

   Resolución:

   $$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12,4 \times 10^3}{6325}$$

2. Se emite radiación láser con longitud de onda de 561 nm. Si el número de fotones emitidos en un segundo es de $8,5 \times 10^{18}$, ¿cuál es la potencia de esta radiación?

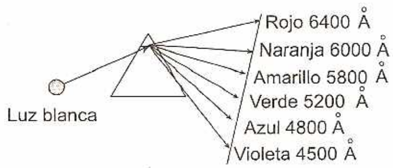
   Resolución:

   $$P = \frac{N}{t}(E) = \frac{N}{t}\left(\frac{hc}{\lambda}\right) = \frac{8,85 \times 10^{18}}{1} \times \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 10^{8}}{561 \times 10^{-9}}$$

   $P = 0,3014 \times 10 \approx 3$ W

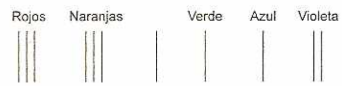
ESPECTRO ATÓMICO DEL SODIO Y DEL MERCURIO

En 1666, Isaac Newton descubrió que al hacer pasar un rayo de luz a través de un prisma éste era refractado a diferentes ángulos, produciéndose una banda de colores. En el caso de luz solar, a esta banda de colores Newton la llamó espectro (spectrum). Cada uno de estos colores tiene una determinada longitud de onda.

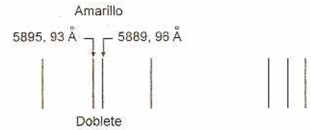


Si la luz proviene de un arco o de una descarga eléctrica a través de un tubo de gas, se produce un espectro de líneas que aparece en una placa fotográfica. Cada una de estas líneas tiene una longitud de onda. Todos y cada uno de los elementos exhiben un espectro único de líneas, de manera que es posible reconocer los elementos que componen una molécula o una sustancia. En la siguiente figura se muestra las líneas espectrales del átomo de sodio y de mercurio con el valor de su longitud de onda correspondiente.

Líneas espectrales del átomo de mercurio



Líneas espectrales del átomo de sodio



El espectro del átomo de sodio muestra una característica particular: cuando se le observa con un instrumento de alto poder de resolución se encuentra que muchas de sus líneas son dos juntas, llamadas dobletes. Se dice que estas líneas presentan la estructura fina; por ejemplo, la conocida línea D, amarilla intensa, formada por dos líneas de longitudes de onda de $5889,96\,\text{Å}$ y $5895,93\,\text{Å}$; su separación es aproximadamente $6\,\text{Å}$.

En el caso del espectro de gas de mercurio se distingue la línea correspondiente al verde, intensa y definida, que es usada para calibrar equipos, como por ejemplo, los interferómetros y los espectrómetros.

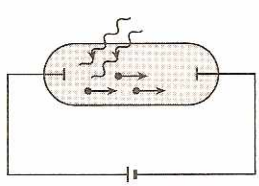
PROBLEMAS RESUELTOS

1. La función trabajo del potasio es 2,24 eV. Si incide sobre un blanco de potación luz de $3,6 \times 10^{-7}$ m.

I. El potencial de frenado del potasio es $V_o = 2$ volt.

II. La energía cinética máxima de los fotoelectrones es 1,45 eV.

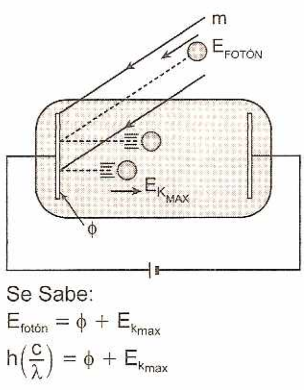
III. La velocidad máxima de los fotoelectrones es 2×10^6 m/s.



Resolución:

$\phi = 2,24$ eV

$\lambda = 3,6 \times 10^{-7}$ m



Se Sabe:

$E_{fotón} = \phi + E_{k_{max}}$

$h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \phi + E_{k_{max}}$

$$(6,62 \times 10^{-34})\left(\frac{3 \times 10^{8}}{3,6 \times 10^{-7}}\text{J}\right)\left(\frac{1\text{eV}}{1,6 \times 10^{-19}\text{J}}\right) =$$

$$2,24 \text{ eV} + E_{k_{max}}$$

$\Rightarrow E_{k_{max}} = 1,2\text{ eV}$

I. Se sabe:

$V_o q_e = E_{k_{max}}$

$\uparrow$

Potencial de frenado

$V_0(\cancel{e}) = 1,2\cancel{e}v$

$V_0 = 1,2\text{ v}$

PROPOSICIÓN: FALSA

II. Se hallado que:

$E_{k_{max}} = 1,2\text{ eV}$

PROPOSICIÓN: FALSA

III. Como:

$\underbrace{E_{k_{max}}} = 1,2\text{ eV} = 1,2 \times 1,6 \times 10^{-19}\text{ J}$

$\frac{1}{2} m_e V_{max}^2 = 1,92 \times 10^{-19}$

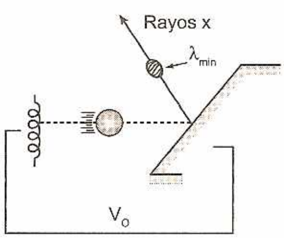
$\frac{1}{2}(9,1 \times 10^{-31}) V_{max}^2 = 1,92 \times 10^{-19}$

$\therefore V_{max} = 0,65 \times 10^6 \frac{m}{s}$

PROPOSICIÓN: FALSA

2. Las imágenes en los televisores convencionales se generan en tubos de rayos catódicos que operan a diferencias de potencial de varios kilovolt. Calcule la mínima longitud de onda (en nm) de los rayos X producidos por un tubo de televisión que funciona a 15,0 kV; $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js; $C = 3,10^8$ m/s; $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Resolución:



$V_0 = 15\text{ kV} = 15 \times 10^3\text{ V}$

Se sabe:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{V_o q_e} = \frac{1,24 \times 10^{-6}}{V_o}$$

$$\lambda_{min} = \frac{1,24 \times 10^{-6}}{V_o} = \frac{\left(1,24 \times 10^{-6}\right)}{\left(15 \times 10^3\right)}$$

$$l_{min} = 0,0829 \times \underbrace{10^{-9}}_{n}\text{ m}$$

$\therefore \lambda_{min} = 0,0829\text{ nm}$

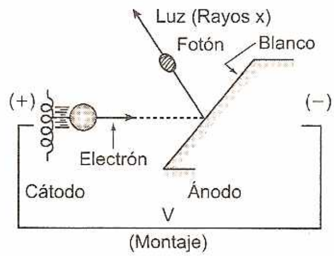
3. Respecto de la generación de Rayos X, indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones siguientes.

I. Todos los electrones acelerados por el campo eléctrico, que impactan sobre el blanco generan rayos X.

II. A mayor diferencia de potencial para acelerar los electrones, será mayor la longitud de onda de los rayos X generados.

III. Todos los fotones emitidos por el ángulo que corresponden a la radiación de rayos X, tienen igual energía.

Resolución:



I. Falso. Solo los más energéticos.

II. Falso. A mayor voltaje (V) menor es la longitud de onda, porque la frecuencia aumenta.

III. Falso. No todos.

4. Señale las afirmaciones correctas.

I. En el efecto fotoeléctrico una mayor intensidad de la radiación incidente sobre un metal aumentará la energía cinética de los electrones extraídos del material.

II. Los rayos X están formados por electrones que se mueven a gran velocidad.

III. Según el modelo de Planck, la energía de la radiación electromagnética es un múltiplo entero de hf donde "h" es la constante de Planck y "f" es la frecuencia de la radiación.

Resolución:

I. Incorrecta.

El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones de un metal cuando sobre su superficie incide una radiación cuya frecuencia es mayor o igual que la frecuencia umbral del metal.

La intensidad de la radiación incidente es proporcional al número de fotones que lleva consigo la radiación y como cada fotón puede ser absorbido por un electrón del metal, entonces podemos concluir que a mayor intensidad solo habrá un mayor número de electores arrancados.

Ahora si deseamos arrancar electrones con una mayor E_C es necesario que los electrones ligados al metal absorban una mayor

energía por parte de la radiación incidente; pero como la energía de la radiación es proporcional a la frecuencia podemos concluir que para tener fotoelectrones más energéticos debemos aumentar la frecuencia de la radiación incidente.

II. Incorrecta:
Los rayos X, se deben a procesos que ocurren en las capas electrónicas de los átomos. Cuando los electrones saltan de un nivel energético mayor a otro menos se emiten fotones que conforman a estos rayos.

III. Correcta:
Max Planck plantea que la energía de una radiación electromagnética, es un múltiplo entero de hf, siendo hf la energía de un fotón, "h" la constante de Planck y la "f" la frecuencia de la radiación.

5. El efecto fotoeléctrico es descrito por la ecuación $f(v - v_0) = 1/2\ mv^2$, donde "v" es la frecuencia de la radiación incidente, v_0 es la frecuencia umbral del material, "m" es la masa del electrón, "h" es la constante de Planck, y $\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética máxima de los electrones eyectados. Si se extraen electrones del mismo material con una velocidad ligeramente mayor, $v + \Delta v$, entonces la frecuencia de la radiación incidente debe variar en Δv. Considerando $(\Delta v.)^2 \sim 0$, entonces Δv. tiene el valor de:

Resolución:

El material con frecuencia umbral (μ_0)

Aplicamos la ecuación de Einstein para ambos casos.

$$h(\mu - \mu_0) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(I)$$

$$h[(\mu + \Delta\mu) - \mu_0] = \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 \qquad ...(II)$$

Restando (II) – (I): $h\Delta\mu = mv\Delta v$

$$\Delta\mu = \frac{mv\Delta v}{h}$$

6. Respecto a los rayos X señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Fueron descubiertos en forma casual por el físico alemán Wilhem Conral Roentgen en 1895.
II. Roentgen llamó X a los rayos descubiertos por su naturaleza desconocida.
III. Los rayos X tiene longitudes de onda que van desde 10 nm hasta 10^{-3} nm, lo cual explica su alta penetración.

Resolución:

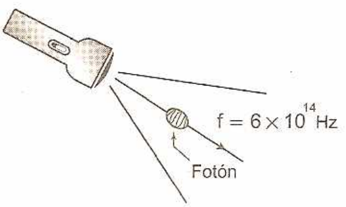
I. Verdadero.
II. Verdadero. Roentgen llamó X porque le era desconocido.
III. Verdadero. Los rayos X son del orden 10^{-10} m ó 0,1 nm

7. Respecto a la hipótesis de Planck, señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Las moléculas absorben o emiten energía en cantidades discretas.
II. Un fotón es una partícula de masa 2 veces la masa del electrón.
III. La energía que transporta un foton de una radiación cuya frecuencia es igual a 6×10^{14} Hz es 4,5 eV (1 eV $\cong 1,6 \times 10^{-19}$ J).

Resolución:

I. Las moléculas, que emiten radiación solo pueden tener valores discretos de energía (En = nhf); es decir emiten o absorben energía en forma discontinua.
Proposición verdadera
II. Un fotón no tiene masa ni carga eléctrica.
Proposición falsa.
III.



Se sabe: $E_{Fotón} = hf$

$E_{Fotón} = (6,63 \times 10^{-34} Js)(6 \times 10^{14}\ s^{-1})$

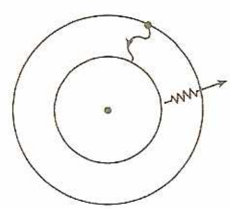
$$E_{Fotón} = (6,63 \times 6 \times 10^{-20}\ J)\left(\frac{1\ eV}{1,6 \times 10^{-19}\ J}\right)$$

$\Rightarrow E_{Fotón} = 2,5$ eV

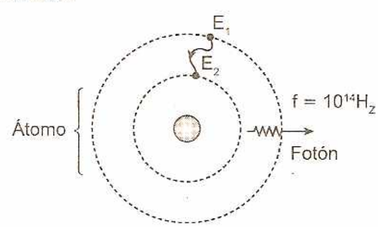
Proposicion: Falsa

$\therefore$ VFF

8. Cuando un electrón pasa de una órbita a otra contigua, el átomo emite un fotón de 10^{14} Hz de frecuencia. ¿Cuál es, aproximadamente, la diferencia de energía (en eV) entre estas orbitas?
($h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js; 1 eV $= 1,6 \times 10^{-19}$ J)



Resolución:



Por la conservación de la energía:

$E_1 - E_2 = \Delta E = E_{\text{DEL FOTÓN EMITIDO}}$

$\Delta E = hf$

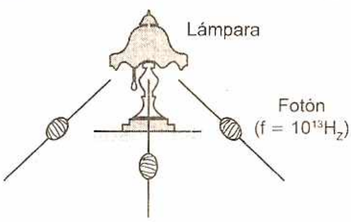
$\Rightarrow E = (6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{Js})(10^{14}\,\text{s}^{-1})$

$\Rightarrow E = (6{,}63 \times 10^{-20}\,\text{J})\left(\dfrac{1\,\text{eV}}{1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}}\right)$

$\therefore E = 0{,}4\,\text{eV}$

9. Una lámpara emite fotones en la zona de infrarrojo ($v = 10^{13}$ Hz) determine la energía de un fotón en eV.

Resolución:



Según Max Planck: $E_{\text{FOTÓN}} = hf$

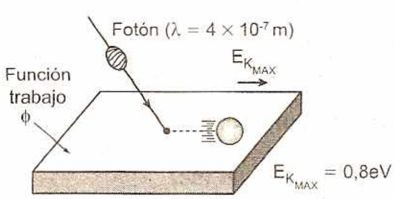
$E_{\text{FOTÓN}} = (6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{Js})(10^{13}\,\text{s}^{-1})$

$\Rightarrow E_{\text{FOTÓN}} = 6{,}63 \times 10^{-21}\left(\dfrac{1\,\text{eV}}{1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}}\right)$

$\therefore E_{\text{FOTÓN}} = 0{,}04\,\text{eV}$

10. Si se ilumina la superficie de cierto material con luz de longitud de onda $\lambda = 400$ nm la energía cinética máxima de los foto electrones es 0,8 eV, determine la función trabajo del material en eV.

Resolución:



Según Planck: $E_{\text{FOTÓN}} = hf$

$\Rightarrow E_{\text{FOTÓN}} = h\left(\dfrac{c}{\lambda}\right)$

$E_{\text{FOTÓN}} = 6{,}63 \times 10^{-34}\left(\dfrac{3 \times 10^{8}}{4 \times 10^{-7}}\right)$

$\Rightarrow E_{\text{FOTÓN}} = \dfrac{6{,}63 \times 3 \times 10^{-19}}{4}\left(\dfrac{1\,\text{eV}}{1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}}\right)$

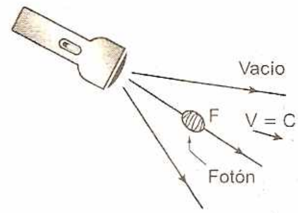
$\therefore E_{\text{FOTÓN}} = 3{,}1\,\text{eV}$

Según Einstein: $E_{\text{FOTÓN}} = \phi + E_{k_{max}}$

$3{,}1\,\text{eV} = \phi + 0{,}8\,\text{eV}$

$\therefore \phi = 2{,}3\,\text{eV}$

11. Una fuente luminosa emite 600×10^{19} fotones correspondientes a luz roja ($\lambda = 650$ nm) durante 1 hora. Determine su potencia (en W)



Resolución

Según Max Planck; se sabe:

$E_{n\,\text{fotones}} = nhf$

Donde:

n = N.° de fotones

h = constante de Planck

$h = 6{,}625 \times 10^{-34}$ Js

f = frecuencia de la radiación.

Luego:

$E_{n\,\text{fotones}} = nhf$

$P\Delta t = nh\left(\dfrac{c}{\lambda}\right)$

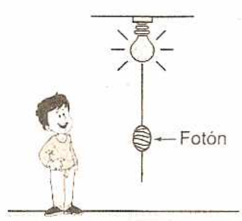
$\Rightarrow p = \dfrac{nhc}{\Delta t\lambda}$; $\Delta t = 3600$ s

$p = \dfrac{(600 \times 10^{19})(6{,}625 \times 10^{-34})(3 \times 10^{8})}{(3600)(650 \times 10^{-9})}$

$\therefore P = 0{,}5$ W

12. Una bombilla eléctrica de 50 W emite 9×10^{21} fotones en cada minuto. Determine la longitud de onda asociada a la radiación (en nm).

Resolución:



Según Max Planck:

$\underbrace{E_{n\,\text{fotones}}}_{P\Delta t} = nhf$

$P\Delta t = nh\left(\dfrac{c}{\lambda}\right)$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{nhc}{P\Delta t}$; $\Delta t = 60$ s

$\lambda = \dfrac{(9 \times 10^{21})(6{,}625 \times 10^{-34})(3 \times 10^{8})}{(50)(60)}$

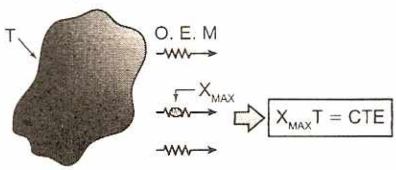
$\Rightarrow \lambda \approx 600 \times 10^{-9}$ m

$\therefore \lambda = 600$ nm

13. A la temperatura T_1 un cuerpo negro emite un espectro de radiación electromagnética con frecuencia mínima v_1, considerando que "c" es la velocidad de la luz en el vacío, entonces a la temperatura $T_2 = 2T_1$ el mismo cuerpo emitirá un espectro con longitud de onda máxima?

Resolución:

Según la Ley de Wien:



Cuerpo negro

Para dos casos: $(T_2 = 2T_1)$

$$\lambda_{MAX_1}T_1 = \lambda_{MAX_2}T_2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{c}{v_1}\right)\cancel{T_1} = \lambda_{MAX_2}(2\cancel{T_1})$$

$$\uparrow$$

Frecuencia mínima

$$\therefore\ \lambda_{MAX_2} = \frac{c}{2v_1}$$

14. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) acerca de los rayos X.

I. Radiación de frecuencia $v = 3 \times 10^{15}\ s^{-1}$ pertenece a la región de rayos X.

II. Si el potencial acelerador es $V_o = 10$ kV, la mínima longitud de onda de los rayos X emitidos es $\lambda_{min} = 1{,}24\ \text{Å}$.

III. Con un potencial acelerador de $V_o = 100$ v no se emiten rayos X.

Resolución:

I. Si, puede pertenecer a los rayos X
Proposición verdadera

II. Si: $V_o = 10kV = 10^4$ V

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{V_o q_e} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{V_o} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{10^4}$$

$$\lambda_{min} = 1{,}24 \times \underbrace{10^{-10}\,m}_{\text{Å}}$$

$$\therefore\ \lambda_{min} = 124\ \text{Å}$$

Proposición verdadera

III. Si: $V_o = 100$ v

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{V_o} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{100}$$

$$\lambda_{min} = 0{,}124 \times \underbrace{10^{-9}\,m}_{n}$$

$$\lambda_{min} = 0{,}124\ nm$$

Pertenece a los rayos X (si se emiten)
Proposición falsa

15. Con respecto al modelo de Planck, cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F):

I. Planck buscó una solución matemática que describiera con exactitud las curvas de distribución de la energía radiada por un cuerpo negro obtenidas experimentalmente y luego planteó una hipótesis física que explicara dicha solución matemática.

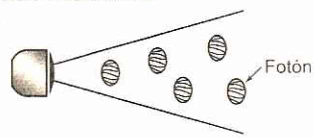
II. La hipótesis del Planck fue que la energía es radiada en paquetes llamados "cuantos".

III. En el modelo planteado por Planck la energía de un cuanto es proporcional a la frecuencia de la radiación.

Resolución:

I. En 1900 Max Planck descubrió una fórmula para la radiación del cuerpo negro.
Proposición verdadera

II. Claro.



Proposición verdadera.

III. Efectivamente, ya que: $E_{FOTÓN} = hf$

f = Frecuencia
Proposición verdadera

16. Con respecto al efecto fotoeléctrico, señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Fue descubierto por Hertz en 1887.

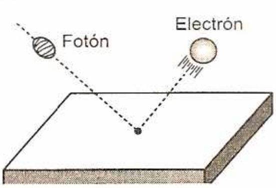
II. En 1905 Albert Einstein explicó el efecto fotoeléctrico usando las ideas de Planck, señalando que solo los fotones suficientemente energéticos arrancan electrones de la superficie de un metal.

III. Un fotón pueden arrancar dos o más electrones si tiene la energía suficiente.

Resolución:

I. Verdadero. Fue descubierto en forma casual por H. Hertz en 1887.

II. Verdadero:



III. Un fotón solo puede arrancar un electrón.
Proposición falsa

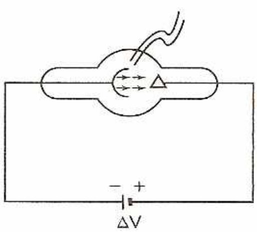
17. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F) acerca del modelo de Planck:

I. Cada átomo oscilante puede absorber o emitir energía radiante (radiación) solo en cantidades proporcionales a su frecuencia.
II. La energía de los osciladores atómicos están cuantizadas.
III. El modelo de Planck fue formulado para explicar el efecto fotoeléctrico.

Resolución:

I. En cantidades proporcionales a su frecuencia y al número de fotones ya que: $E = n(hf)$
Proposición falsa.
II. Efectivamente: $E = n(hf)$
Proposición verdadera.
III. El modelo de Planck fue formulado para explicar la radiación de un cuerpo negro.
Proposición falsa.

18. Un haz de electrones en el tubo es acelerado por una diferencia de potenciales de 20 kV al impactar contra el blanco metálico. Determine la gráfica de la intensidad relativa respeto de la longitud de onda de los fotones de los rayos X.



Resolución:

Dato: $V_o = 20\text{ kV} \Rightarrow V_o = 2 \times 10^4\text{ V}$
Se sabe:

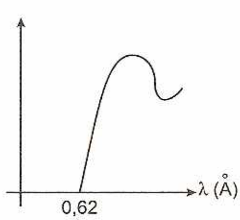
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{V_o q_e}$$

Reduciendo:

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{V_o} = \frac{1{,}24 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{4}}$$

$$\lambda_{min} = 0{,}62 \times \underbrace{10^{-10}\text{ m}}_{\text{Å}} = 0{,}62\text{ Å}$$

Graficando:

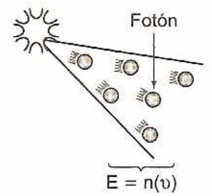


19. Respecto al modelo corpuscular de Planck, señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones siguientes:

I. Los átomos radiantes se comportan como osciladores armónicos que pueden absorber o emitir energía en una cantidad proporcional a su energía.
II. Los osciladores atómicos irradian energía en forma continua.
III. La energía de un haz luminoso que contiene "n" fotones es (nhv).

Resolución:

I. Los átomos osciladores emiten energía en una cantidad proporcional al número de fotones o cuantos emitidos.
Proposición falsa.
II. No. Los osciladores atómicos irradian energía en cantidades discretas llamados cuantos o fotones.
Proposición falsa
III. Efectivamente



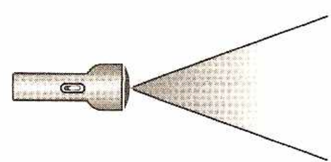
$\upsilon \longrightarrow$ Frecuencia

Proposición verdadera.

20. Una fuente de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 6000$ Å, emite 12 W de radiación electromagnética. El número aproximado de fotones emitidos por segundo es:
(Constante de Planck: $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ Js)

Resolución:

$$\lambda = 6000\text{ Å} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7}\text{ m}$$



P=12 W

Se sabe:

$$E = n(hf)$$
$$\downarrow$$
$$Pt = n\left(h\frac{c}{\lambda}\right)$$

$$\frac{n}{t} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{(12)(6 \times 10^{-7})}{(6{,}62 \times 10^{-34})(3 \times 10^{8})}$$

$$\therefore\ \frac{n}{t} = 3{,}62 \times 10^{19}\ \text{Fotones/s}$$

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Determine aproximadamente el número de fotones por segundo que emite un láser He-Ne de longitud de onda de 632 nm y cuya potencia es de 3 mW.
($h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^{8}$ m/s; 1 nm $= 10^{-9}$ m)

A) $34{,}26 \times 10^{3}$ B) $67{,}21 \times 10^{7}$ C) $95{,}32 \times 10^{14}$
D) $134{,}26 \times 10^{26}$ E) $235{,}01 \times 10^{34}$

Resolución:

Sabemos que la energía de una radiación es:
$E = Nhf$

$$P\Delta t = Nh\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

$$N = \frac{P\Delta t\lambda}{hc}$$

$$N = \frac{3\times10^{-3}\times1{,}632\times10^{-9}}{6{,}63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}$$

$$N = 95{,}32\times10^{14}$$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

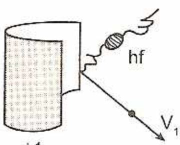
Se realizan experiencias de efecto fotoeléctrico sobre tres placas de metales diferentes (placas P_1, P_2 y P_3) utilizando luz de igual longitud de onda $\lambda = 630$ nm. Sean V_{1m}, V_{2m} y V_{3m} las velocidades máximas de los electrones que son emitidos de las placas P_1, P_2 y P_3, respectivamente.
Si: $V_{2m} = 2V_{1m}$ y $V_{3m} = 3V_{1m}$
Calcule el cociente:

$\dfrac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}$; donde ϕ_1; ϕ_2 y ϕ_3 son las funciones trabajo de las placas metálicas P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

A) 1/3 B) 2/3 C) 1
D) 4/3 E) 5/3

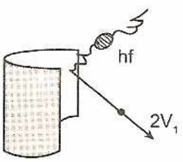
Resolución:

Dibujando el efecto fotoeléctrico y aplicando la ecuación de Einstein en cada caso:



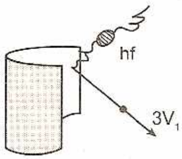
$\phi 1$

$$hf = \phi_1 + Ec_1$$
$$\phi_1 = hf - Ec_1$$



$\phi 2$

$$hf = \phi_2 + 4Ec_1$$
$$\phi_2 = hf - 4Ec_1$$



$\phi 3$

$$hf = \phi_3 + 9Ec_1$$
$$\phi_3 = hf - 9Ec_1$$

Como nos piden:

$$\frac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{(hf - 9Ec_1) - (hf - 4Ec_1)}{(hf - 4Ec_1) - (hf - Ec_1)} \Rightarrow \frac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{5}{3}$$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

En relación a las propiedades del fotón, se tienen las siguientes propiedades:

I. Viaja a la velocidad de la luz en cualquier medio.
II. Posee una masa muy pequeña, comparable con la del electrón.
III. No tiene masa pero transporta energía.

Son correctas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I y II

Resolución:

De las proposiciones:

I. Falso.
Considerando la frase "velocidad de la luz" ($c = 3 \times 10^{8}$ m/s) el fotón puede viajar a velocidades menores que está en otro medio de propagación distinto al vacío.
II. Falso.
La masa en reposo del fotón es invariante, cero.
III. Verdadero.
De acuerdo al modelo de Planck todo fotón transporta una cantidad de energía equivalente a:

$$E_F = hf$$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Dadas las siguientes proposiciones con respecto al efecto fotoeléctrico:

I. La función trabajo de un material tiene unidades de energía.
II. El efecto fotoeléctrico ocurre solamente cuando una onda electromagnética con frecuencia en el rango visible incide sobre cierto material:
III. Cuando una onda electromagnética incide sobre un material, solamente un fotón de luz llega al material para generar una corriente eléctrica.

Son correctas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

Resolución:

Para cada una de las proposiciones:

I. Verdadero. La función de trabajo en el SI se mide en Joule.

II. Falso. El efecto fotoeléctrico no solo ocurre con radiaciones electromagnéticas de rango visible.

III. Falso. Cuando una radiación electromagnética llega al material, inciden gran cantidad de fotones.

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Se ilumina dos superficies metálicas, una de plomo y otra de platino con luz de igual longitud de onda. Determine aproximadamente la longitud de onda, en nm, necesaria para que los electrones más energéticos obtenidos por efecto fotoeléctrico en la superficie de plomo tengan el doble de velocidad que los obtenidos en la superficie de platino.

La función trabajo del plomo es $6{,}665 \times 10^{-19}$ J y la del platino es $10{,}224 \times 10^{-19}$ J.

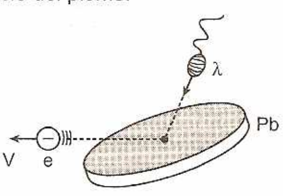
(Constante de Planck = $6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; velocidad de la luz = 3×10^{8} ms^{-1}; masa del electrón = $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg)

A) 94 B) 114 C) 134
D) 174 E) 244

Resolución:

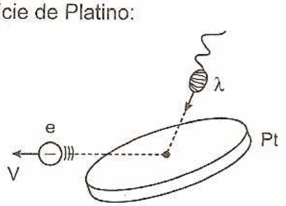
Analizando ambas situaciones, tenemos:

En la superficie del plomo:



$$E_{KPb}^{máx} = E_F - \varnothing_{Pb}$$

En la superficie de Platino:



$$E_{KPt}^{máx} = E_F - \varnothing_{Pt}$$

Como la rapidez de los fotoelectrones en el plomo tienen el doble de rapidez que los emitidos por el platino, se cumple que:

$$E_{KPb}^{máx} = 4E_{KPt}^{máx}$$

$$E_F - \varnothing_{Pb} = 4(E_F - \varnothing_{Pt})$$

$$E_F = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4\varnothing_{Pt} - \varnothing_{Pb}}{3}$$

$$\lambda = \frac{3hc}{4\varnothing_{Pt} - \varnothing_{Pb}} = 174 \times 10^{-9}\ \text{m}$$

Clave: D

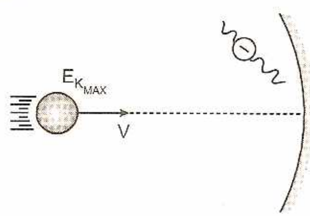
PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

Un tubo de rayos X trabaja con 35 kV, calcule el valor de las longitudes de onda más cortas de los rayos X producidos en Å.

($1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m; $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ Js
$c = 3 \times 10^{8}$ m/s, $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J)

A) 0,15 B) 0,25 C) 0,35
D) 0,45 E) 0,55

Resolución:



$$E_{K_{MAX}} = q\Delta V = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

De donde:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{q\Delta V}$$

Reemplazando:

$$\lambda_{min} = \frac{6{,}62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 35 \times 10^{3}}$$

$$\lambda_{min} = 0{,}35\ \text{Å}$$

Clave: C

1. Según el modelo del Planck, la intensidad de la radiación de un cuerpo negro.

A) Tiende a cero a altas frecuencias.
B) Tiende a cero solo a bajas frecuencias.
C) Es independiente de la frecuencia.
D) Es proporcional al cuadrado de la frecuencia.
E) Es independiente de la temperatura.

2. Señale verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones sobre el efecto eléctrico:

I. Si una superficie metálica se ilumina con luz ultravioleta se liberan electrones.
II. El potencial de frenado depende de la intensidad de corriente fotoeléctrica.
III. La frecuencia umbral crítica depende de la intensidad de corriente fotoeléctrica.

A) FVF B) VFV C) FFF
D) VVF E) FFV

3. El campo eléctrico de una OEM se expresa mediante $E_y = E_0\text{sen}(kx - \omega t)$.
Calcule (E)(B).

A) $\frac{E_0^2}{c}\text{sen}^2(kx - \omega t)$

B) $cE_0^2\text{sen}^2(kx - \omega t)$

C) $cE_0^2\text{sen}(kx - \omega t)\cos(kx - \omega t)$

D) $\mu_0 E_0^2\text{sen}^2(kx - \omega t)$

E) $\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kx - \omega t)$

4. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El campo eléctrico de los OEMs es de muy pequeña magnitud, dado que $E = \frac{B}{C}$
II. La frecuencia de los OEMs es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas en la fuente que las produce.
III. Una OEM de $\lambda = 400$ nm está en la región visible del espectro.

A) VFF B) FVV C) FFF
D) VVV E) FFV

5. Con respecto a la ley de radiación de Planck, indique cuales de las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

I. Fue enunciada en el año 1900.
II. Para enunciarla Planck supuso que los osciladores atómicos solo podían tener ciertos valores de energía iguales a nh y en donde n = 0, 1, 2,... y h = cte de Planck.
III. Inicialmente Planck no tenía mucha confianza en su posición a la que consideraba como una "urgencia de cálculo".

A) VVV B) VFV C) FVF
D) FFV E) FFF

6. Señale verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones sobre ondas electromagnéticas.

I. Las OEM se propagan solo a través del espacio vacío.
II. Las longitudes de onda de los rayos X son del mismo orden en magnitud de las dimensiones de los átomos.
III. La frecuencia de radiación de la luz amarilla emitida por una lámpara de vapor de sodio cuya longitud de onda es 590 nm es $4{,}8\times10^{12}$ Hz.

A) FFF B) FVF C) VVF
D) VFV E) FFV

7. De las siguientes proposiciones señale cual(es) son correctas con respecto a los rayos X.

I. Tiene carga negativa y solo se pueden mover en el vacío.
II. Tienen carga positiva y se pueden mover en el vacío o el aire.
III. Es una radiación electromagnética de menor energía que las microondas.

A) Solo I B) Solo II C) I y III
D) II y III E) Ninguna

8. Una onda electromagnética se propaga en el vacío en la dirección +Y con una longitud de onda de 300 nm, si la amplitud del vector campo eléctrico es de 6 mN/C, calcule la ecuación de E (en N/C).

A) $6\times10^{-3}\text{sen}(\frac{2\pi}{3}\times10^7\ y - 2\pi\times10^{15}t)$

B) $6\times10^{-3}\text{sen}(\frac{2\pi}{3}\times10^7\ y - 2\pi\times10^{10}t)$

C) $6\times10^{-3}\text{sen}(\frac{2\pi}{3}\times10^5\ y - 2\pi\times10^{16}t)$

D) $6\times10^{-3}\text{sen}(\frac{2\pi}{3}\times10^5\ y - 2\pi\times10^{19}t)$

E) $6\times10^{-3}\text{sen}(\frac{2\pi}{3}\times10^7\ y - 2\pi\times10^{14}t)$

9. Señale cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F).

I. La magnitud del campo magnético aumenta cuando la magnitud del campo eléctrico disminuye.

II. Toda carga de movimiento genera OEM.
III. La frecuencia de una OEM depende del medio por el cual se propaga.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVF E) FFF

10. Un haz monocromático de longitud de onda $\lambda = 3000\,\mathring{A}$ incide sobre una superficie metálica y se observa que los fotoelectrones salen con una energía cinética es 2,5 eV. Determine la frecuencia umbral (en unidades de 10^{15} Hz) a la cual los electrones pueden ser extraídos.
($1\,\mathring{A} = 10^{-10}$ m; $h = 4{,}14 \times 10^{-15}$ eVs)

A) 0,40 B) 0,50 C) 0,60
D) 0,70 E) 0,79

11. Sobre una cuerda de 10 m de longitud y 1 kg de masa, sometida a una tensión de 40 N, se generan pulsos a razón de 5 cada segundo. Si la potencia que se transfiere es 100 W. ¿Cuál es la amplitud de los pulsos? (En m.)

A) $1/2\pi$ B) $\pi/2$ C) π
D) $2\pi/3$ E) $1/\pi$

12. Una fuente emite luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 480$ nm con una potencia de 0,4 W; considerando que esta luz incide sobre una superficie. Determine el número de fotones (en 10^{18}) que llegan sobre esta durante 2 s.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

13. Para la OEM que se propaga en un medio diferente al vacío y cuyo vector campo eléctrico está dada por: $E = 10\text{sen}4\pi(10^{-4}\,y - 2 \times 10^{4}t)$ kV/m
Calcule el índice de refracción del medio y la velocidad de propagación de la onda (en 10^{8} m/s)

A) 1,5; 0,5 j
B) 1,5; 2 k
C) 1,5; 2 j
D) 1,5; −2 j
E) 1,5; −2 k

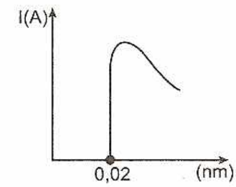
14. Indique las afirmaciones correctas respecto de las ondas consideradas en el espectro electromagnético:
I. Las ondas de radio son de mayor longitud de onda que las de radiación visible.
II. Las microondas son de mayor frecuencia que las ondas de radio.
III. Los rayos X tienen mayor longitud de onda que las microondas.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

15. ¿Cuál es la longitud de onda umbral del tungsteno, si el trabajo de extracción es 4,42 eV?

A) 2500 Å B) 2750 Å C) 3000 Å
D) 3500 Å E) 3750 Å

16. La figura muestra la distribución espectral de la emisión continua de rayos X. Determine (en kV) el voltaje acelerador de los electrones.



A) 62 B) 31 C) 28
D) 55 E) 52

17. Indicar cuales de las proposiciones siguientes son correctas:
I. Al incidir electrones acelerados por potenciales eléctricos del orden de las decenas de kV, en un blanco, se producen rayos X de muchas longitudes de onda.
II. La mínima longitud (o de corte) de los rayos X producidos es:
$$\lambda_{min} = \frac{eV_0}{hc}$$
III. La longitud de onda de los rayos X es del orden de 1 Å a 0,01 Å

A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) I y III E) Todas

18. Se tiene un sistema de franjas producidas por dos líneas luminosas paralelas que emiten luz monocromática coherente cuya longitud de onda es de 4920 Å. ¿Calcular la diferencia de marcha de las ondas luminosas para la quinta franja brillante, en el patrón de interferencia?

A) 1,24 μm B) 2,46 μm C) 5,09 μm
D) 3,95 μm E) 7,23 μm

19. En experimento de Young las rendijas distan entre si 2 mm y la pantalla está a 2 m de ellas. Si las rendijas se iluminan con luz compuesta de dos radiaciones cuyas longitudes de onda son 4800 Å y 6500 Å, ¿calcular la distancia entre las dos franjas brillantes de primer orden de cada radiación?

A) 0,17 mm B) 0,56 mm C) 0,87 mm
D) 2,07 mm E) 076 mm

20. Se tiene una red, en la cual la desviación angular respecto a lo normal de la franja brillante de segundo orden de una cierta radiación monocromática es de 5°. Si para otro color la desviación de tercer orden tiene igual valor, ¿cuál es la relación entre sus longitudes de onda?

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/3
D) 6/5 E) 4/3

21. Dos rendijas separadas 0,125 mm están iluminadas por luz compuesta de dos longitudes de ondas, 6000 Å y 5000 Å a 120 cm de las rendijas se encuentra una pantalla. ¿A qué distancia del eje del sistema coincidirán una franja brillante del espectro de interferencia de una de las radiaciones con una franja brillante de la otra?

A) 24,0 mm B) 12,2 mm C) 36,6 mm
D) 28,8 mm E) 48,9 mm

22. Dos rendijas están iluminadas por luz constituida por dos longitudes de onda, se sabe que una longitud de onda es 6000 Å, sobre una pantalla la cuarta franja oscura de la imagen de la longitud de onda 6000 Å coincide con la quinta franja brillante de la otra longitud de onda. ¿Cuál es la longitud de onda desconocida?

A) 4200 Å B) 2100 Å C) 6400 Å
D) 8400 Å E) 5200 Å

23. La desviación de la imagen difractada de segundo orden formada por una red (reja de difracción) de 6000 líneas/cm es de 30°. ¿Calcular la longitud de onda de la luz empleada?

A) 2976 Å B) 7920 Å C) 5000 Å
D) 4167 Å E) 9376 Å

24. Un muchacho mira a través de su pañuelo la luz emitida por el sodio ($\lambda = 5890$ Å) procedente de una lampara situada a 2,50 m. Las dos imágenes difractadas de primer orden están situadas a uno y otro lado del eje del sistema y distan entre sí. 0,50 cm. ¿Cuál es la distancia media entre los hilos del pañuelo?

A) 0,67 mm B) 0,34 mm C) 0,99 mm
D) 0,59 mm E) 0,39 mm

25. Un haz de luz monocromática de longitud de onda 6250 Å, que índice normalmente sobre una reja de difracción, da una imagen de primer orden a un ángulo de 30°. Hallar la característica de la red.

A) 2000 líneas/cm B) 4000 líneas/cm
C) 6000 líneas/cm D) 8000 líneas/cm
E) 9000 líneas/cm

26. Haz de la luz monocromática $l = 6300$ Å, atraviesa una rendija de 0,070 cm de anchura y produce una imagen de difracción sobre una pantalla situada a 2 m. ¿Cuál es la distancia del eje del sistema a la tercera banda oscura sobre la pantalla?

A) 0,9 mm B) 1,8 mm C) 2,7 mm
D) 3,6 mm E) 5,4 mm

27. En un experimento de Young, las dos rendijas paralelas estas separadas 0,15 mm. Las franjas de interferencia se forman sobre una pantalla situada a 75 cm. La tercera banda oscura se halla a 0,55 cm del eje del sistema. ¿A qué distancia del eje se encuentra la primera franja brillante?

A) 0,45 cm B) 0,44 cm C) 0,67 cm
D) 0,22 cm E) 0,78 cm

28. Para detener los fotoelectrones emitidos por la plata, cuando se ilumina con luz ultravioleta de 2536 Å es necesario un voltaje de 0,11 voltios. Halle la función trabajo de la plata.

A) 4,79 eV B) 3,78 eV C) 1,45 eV
D) 6,07 eV E) 5,17 eV

29. Halle el número de fotones emitidos por segundo, por una bombilla roja de 60 W, siendo la longitud de onda emitida 6000 Å.

A) $4{,}8 \times 10^{21}$ B) 1.8×10^{20} C) $4{,}8 \times 10^{19}$
D) $3{,}9 \times 10^{17}$ E) $4{,}0 \times 10^{22}$

30. ¿Qué diferencia de potencial eléctrico se necesita para detener los electrones que se obtienen al iluminar una superficie metálica con luz ultravioleta de 2000 Å, si el trabajo de extracción del metal es 5 eV?

A) 1,6 V B) 1,5 V C) 1,4 V
D) 1,3 V E) 1,2 V

31. Hallar la longitud de onda de De Broglie de un electrón cuya velocidad es 10^3 m/s. Masa en reposo del electrón $m_o = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

A) $6{,}8 \times 10^{-7}$ m B) $7{,}3 \times 10^{-7}$ m C) $3{,}8 \times 10^{-7}$ m
D) $3{,}8 \times 10^{-6}$ m E) $6{,}0 \times 10^{-7}$ m

32. Se necesita potencial eléctrico $V_{01} = 0{,}5$ V para detener los electrones más veloces emitidos al incidir luz de $\lambda_1 = 6000$ Å sobre una superficie metálica. ¿Qué potencial V_{02} se necesitara para detener los electrones más veloces que se emiten cuando la misma superficie se ilumina con luz de $\lambda_2 = 4000$ Å?

A) 1,54 V B) 2,56 V C) 5,89 V
D) 4,78 V E) 9,52 V

33. ¿Cuál es la mínima longitud de onda de la luz que puede incidir sobre una superficie metálica de sodio, cuya función trabajo es 1,8 eV, sin que emita los electrones?

A) 4683 Å B) 4873 Å C) 5063 Å
D) 6906 Å E) 2803 Å

34. ¿Calcular el cambio porcentual en la longitud de onda de un haz de rayos X de longitud de onda 0,40 Å, si el haz sufre una dispersión de Compton de 90°?

A) 3,03% B) 4,04% C) 6,06%
D) 2,4% E) 4,9%

35. Un haz de rayos X de longitud de onda 0,30 Å sufre una dispersión de Compton de 60°. Hallar la longitud de onda del fotón dispersado y la energía cinética del electrón después de la dispersión.

A) 0,312 Å y 1593,7 eV
B) 0,654 Å y 4623,9 eV
C) 0,752 Å y 7451,8 eV
D) 0,654 Å y 1652,4 eV
E) 0,752 Å y 2965,8 eV

36. En un experimento de Compton, un electrón alcanza una energía cinética de 0,10 eV cuando un haz de rayos X de 0,50 MeV incide sobre él. Calcular la longitud de onda del fotón dispersado, si el electrón estaba inicialmente en reposo.

A) 0,62 Å B) 0,926 Å C) 0,827 Å
D) 0,031 Å E) 0,754 Å

37. Un fotón cuya longitud de onda es igual a la longitud de onda de Compton ($\lambda_C = h/m_oc$), choca frontalmente con un electrón en reposo. Halle la energía cinética del electrón después del choque.

A) $7,356 \times 10^{-14}$ J B) $3,736 \times 10^{-14}$ J
C) $5,466 \times 10^{-14}$ J D) $8,873 \times 10^{-14}$ J
E) $6,932 \times 10^{-14}$ J

38. Dos ondas luminosas coherentes cuya longitud de onda es 5000 Å se propagan en la misma dirección y se encuentran en un punto en el cual la diferencia de marcha de las ondas es 0,02 mm. ¿Qué tipo de interferencia ocurre en este punto?

A) Destructiva.
B) Constructiva
C) No se puede determinar.
D) Las ondas no interfieren.
E) El resultado depende de la fuente emisora de ondas.

39. En el problema anterior, que habría sucedido si la diferencia de marcha de las ondas de luz hubiera sido 0,00125 mm.

A) Destructiva.
B) Constructiva
C) No se puede determinar.
D) Las ondas no interfieren.
E) El resultado depende de la fuente emisora de ondas.

40. Sobre un plano en el que se han practicado dos ranuras distancias 0,5 mm incide normalmente luz monocromática cuya longitud de onda se desea calcular. Para ello, se observan las bandas de interferencia en una pantalla situada a 2,5 m de distancia, resultando que la interfranja es de 1,8 mm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

A) 2400 Å B) 3600 Å C) 4800 Å
D) 1200 Å E) 2800 Å

41. Al efectuar una experiencia de Young usando luz monocromática, se encontró que la separación de los orificios era 0,02 cm y que la distancia de estos a la pantalla era 130 cm, midiendo la separación entre dos franjas oscuras se obtuvo 0,35 cm. Calcular la longitud de onda de la luz empleada.

A) 5380 Å B) 4502 Å C) 7925 Å
D) 3950 Å E) 6900 Å

42. En un dispositivo de doble abertura, la distancia entre las aberturas es de 5 mm y estas se encuentran alejadas de la pantalla 5 m. Pueden verse en la pantalla dos formas de interferencia, una debida a la luz de 4800 Å y la otra causada por la luz de 6000 Å. ¿Cuál es la separación en la pantalla entre las franjas de interferencia constructiva de tercer orden, de las dos formas de interferencia?

A) 0,24 mm B) 0,12 mm C) 0,06 mm
D) 0,36 mm E) 0,48 mm

43. En un experimento de Young, la posición en la pantalla de la franja brillante de quinto orden es 8 mm respecto del eje del sistema; determinar la posición de la franja oscura de tercer orden en dicha pantalla.

A) 1 mm B) 2 mm C) 3 mm
D) 4 mm E) 5 mm

44. En un experimento de interferencia de doble rendija, se observa en la pantalla que la distancia entre dos franjas brillantes consecutivas es 2mm. ¿Calcular la posición de la franja oscura de quinto orden respecto del eje del sistema en la pantalla?

A) 7 mm B) 8 mm C) 9 mm
D) 10 mm E) 12 mm

45. La distancia entre dos hendiduras paralelas es 1,5 mm sobre ellas incide luz monocromática cuya longitud de onda es de 75 cien milésimas de milímetros; calcular:

A. La interfranja, cuando las interferencias se observan a 3 m de las hendiduras.
B. ¿Cuál sería la interfranja, si el sistema se sumerge en agua?

A) 1,6 mm; 1,255 mm
B) 1,5 mm; 1,125 mm
C) 1,4 mm; 1,725 mm
D) 1,7 mm; 1,025 mm
E) 1,8 mm; 1,625 mm

46. La posición angular de la franja brillante de segundo orden producida por una red de 500 líneas/cm

es de 30°. ¿Calcular la longitud de onda de la luz empleada?

A) 3000 Å B) 4000 Å C) 5000 Å
D) 6000 Å E) 8000 Å

47. Un haz de luz monocromática de $\lambda = 4800$ Å incide sobre una rendija de difracción de anchura 4λ. Hallar la posición angular de la franja oscura del segundo orden que se obtiene.

A) 15° B) 16° C) 22,5°
D) 26,5° E) 30°

48. Una línea de emisión espectral, importante en radioastronomía tiene una longitud de onda de 21 cm. ¿A qué energía de fotón corresponde esta onda?

A) 5,9 μeV B) 4,5 μeV C) 8,5 μeV
D) 4,9 μeV E) 3,8 μeV

49. Imagínese una fuente ideal que emite 100 W de luz verde con una longitud de onda de 5×10^{-7} metros. ¿Cuántos fotones por segundo están saliendo de la fuente?

A) $7,9 \times 10^{20}$ B) $6,1 \times 10^{20}$ C) $2,5 \times 10^{20}$
D) $5,8 \times 10^{20}$ E) $4,9 \times 10^{20}$

50. Determine la longitud de onda en el vacío que corresponde a un rayo gamma de energía 10^{19} eV.

A) $4,87 \times 10^{-24}$ m B) $5,78 \times 10^{-22}$ m
C) $9,56 \times 10^{-26}$ m D) $1,24 \times 10^{-25}$ m
E) $5,98 \times 10^{-27}$ m

51. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un solo fotón de luz roja $f = 4 \times 10^{14}$ Hz, que se mueve a través del espacio libre?

A) $2,3 \times 10^{-24}$ kgm/s B) $3,4 \times 10^{-26}$ kgm/s
C) $8,8 \times 10^{-28}$ kgm/s D) $5,8 \times 10^{-17}$ kgm/s
E) $9,4 \times 10^{-21}$ kgm/s

52. Cuando un material se ilumina con luz 3000 Å, la máxima energía cinética de los fotoelectrones emitidos es 1,2 eV. Hallar la función trabajo del material.

A) 1,6 eV B) 2,4 eV C) 2,9 eV
D) 3,7 eV E) 6,8 eV

53. Suponga que un fotón de 600 Å de longitud de onda es absorbido por un átomo de hidrogeno, cuyo potencial de ionización es 13,6 eV. ¿Cuál es la energía cinética del electrón expedido?

A) 5,7 eV B) 7,1 eV C) 4,8 eV
D) 1,6 eV E) 6,2 eV

54. Cuando se ilumina una superficie con luz de 4500 Å, se encuentra que el potencial de frenado para los fotoelectrones emitidos es de 0,75 V. ¿Cuál será el potencial de frenado para los fotoelectrones, si la luz incidente tiene 3000 Å de longitud de onda?

A) 1,23 eV B) 3,76 eV C) 5,89 eV
D) 3,92 eV E) 2,13 eV

55. En una dispersión de Compton, se detectaron el fotón y el electrón dispersados, Se encontró que la energía cinética del electrón era 75 keV y la energía del fotón de 200 keV. ¿Cuál era la longitud de onda inicial del fotón?

A) 0,2321 Å B) 0,0452 Å
C) 07262 Å D) 0,2722 Å
E) 0,9798 Å

56. ¿Calcular la máxima energía cinética comunicada a un electrón en un experimento de Compton, si los fotones incidentes de rayos X tienen una longitud de onda de 0,50 Å?

A) $6,252 \times 10^{-16}$ J B) $5,666 \times 10^{-16}$ J
C) $3,524 \times 10^{-16}$ J D) $9,326 \times 10^{-16}$ J
E) $4,822 \times 10^{-16}$ J

57. Halle la longitud de onda de De Broglie para un electrón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 100 V.

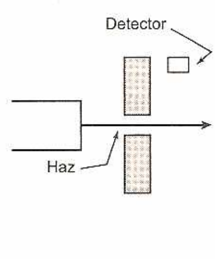
A) 1,23 Å B) 4,28 Å C) 4,88 Å
D) 8,38 Å E) 2,76 Å

58. En el modelo atómico de Bohr. Diga cuál de los siguientes enunciados es incorrecto.

A. En un átomo de muchos electrones, cualquier modificación en el movimiento de uno de los electrones afectará el movimiento de los otros.
B. En un átomo que emite energía, hay un electrón que pasa a una órbita exterior.
C. Un átomo de hidrógeno absorbe energía cuando su electrón disminuye su velocidad.
D. En un átomo de muchos electrones, el electrón de menor radio necesita de mayor energía para ser retirado del átomo.
E. El estado de equilibrio del electrón del átomo de hidrógeno es aquel en el cual su energía total es la menor.

59. Un haz de electrones con velocidad 5×10^{5} m/s incide sobre una rendija muy delgada como se muestra. El detector mide la probabilidad de presencia de electrones. Si este percibe "algo" en la posición que se muestra se dice que los electrones en este caso tienen un comportamiento:

A) Ondulatorio
B) Corpuscular
C) Relativismo
D) Clásico
E) Fotonico



60. Analice las siguientes afirmaciones:

I. El efecto fotoeléctrico se puede explicar como una consecuencia de la propiedad ondulatoria de la luz.

II. Los espectros de emisión atómicos se caracterizan por ser únicos para cada átomo.

III. Los rayos X tienen mayor energía que las ondas de luz en el rango visible. Diga si son verdaderas (V) o falsas (F):

A) FVV B) FVF C) VFF
D) VVF E) VVV

61. El efecto fotoeléctrico es descrito por la ecuación: $h(v - v_o) = (1/2)mv^2$, donde "v" es la frecuencia de la radiación incidente, "v_o es la frecuencia umbral del material, "m" es la masa del electrón, "h" es la constante de Planck, y $\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética máxima de los electrones eyectados. Si se quiere extraer electrones del mismo material con una velocidad ligeramente mayor, $v + \Delta v$, entonces la frecuencia de la radiación incidente debe variar en $\Delta\gamma$. Considerando $(\Delta\gamma)^2 \sim 0$, entonces $\Delta\gamma$, tiene el valor de:

A) $\dfrac{2V\Delta V(v - v_o)}{V^2}$ B) $\dfrac{V\Delta V(v - v_o)}{V^2}$

C) $\dfrac{V\Delta V(v - v_o)}{2V^2}$ D) $\dfrac{V\Delta V(v - v_o)}{4V^2}$

E) $\dfrac{4V\Delta V(v - v_o)}{V^2}$

62. Escoja la proposición correcta:

A) El modelo de Planck permite explicar la emisión de electrones de un metal cuando se ilumina con luz.

B) Los rayos X se generan cuando electrones suficientemente energéticos en movimiento son frenados por una superficie metálica.

C) La teoría de Bohr asocia una energía a cada onda electromagnética, proporcional a su frecuencia.

D) El efecto fotoeléctrico es la generación de luz por medio de los electrones.

E) La relatividad se aprecia en todos los fenómenos físicos de la vida cotidiana.

63. Señale la o las afirmaciones correctas.

I. En el efecto fotoeléctrico una mayor intensidad de la radiación incidente sobre un metal aumentará la energía cinética de los electrones extraídos del material.

II. Los rayos X están formados por electrones que se mueven a gran velocidad.

III. Según el modelo de Planck, la energía de la radiación electromagnética es un múltiplo entero de hf donde "h" es la constante de Planck y "f" es la frecuencia de radiación.

A) I B) II C) III
D) I, II E) I, III

64. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?

A) La radiación electromagnética solo tiene naturaleza corpuscular.

B) Las ondas ultravioletas son menos energéticos que las infrarrojas.

C) En el vacío, la velocidad de la luz infrarroja es menor que la luz ultravioleta.

D) Un cuerpo con alta temperatura irradia energía continuamente.

E) En equilibrio térmico una esfera metálica a alta temperatura irradia más energía de la que absorbe.

65. Indique la afirmación correcta:

A) Cualquiera que sea la frecuencia de la luz, es posible que sean arrancados electrones de un metal.

B) Los electrones en el interior de un metal tienen la misma energía.

C) Cuando los electrones son arrancados de un metal, cuando mayor es la frecuencia de la luz incidente, mayores son las energías cinéticas máximas de los electrones que abandonan el metal.

D) Cuanto mayor sea la intensidad de la luz de una frecuencia dada que incide sobre una superficie metálica, mayores son las energías cinéticas máximas de los electrones que abandonan la superficie.

E) Cuanto mayor es la energía de un fotón, mayor es el número de electrones que él puede arrancar del metal.

66. Diga cuál es la palabra que completa correctamente la siguiente frase: "Las radiografías, que permiten a un médico tener imágenes de los huesos del cuerpo humano, son posibles gracias esencialmente al fenómeno de la ... de los rayos X por los huesos".

A) difracción B) refracción
C) interferencia D) absorción
E) superposición

67. Un fotón de $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m interactúan con un electrón que se encuentra en reposo, entregándole la milésima parte de su energía. Si toda la energía que recibe el electrón, se transforma en energía cinética entonces la magnitud de la velocidad del electrón, en m/s, sabiendo que, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3 \times 10^8$ m/s, será aproximadamente igual a:

A) $2{,}95 \times 10^4$ B) $1{,}36 \times 10^4$ C) $2{,}99 \times 10^2$
D) 29,97 E) $3{,}18 \times 10^{-3}$

68. Un experimento de efecto fotoeléctrico se encuentra que para anular la fotocorriente se requiere aplicar un potencial de 1,44 V. Si el fotón incidente tiene una energía de 3,44 eV, ¿Cuál es la función trabajo (en eV) del material?

A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5
D) 2,0 E) 2,5

69. Un haz de luz de longitud de onda $\lambda = 4400$ Å se hace incidir sobre la superficie de un metal, cuya función trabajo es 2 eV. Hallar la magnitud de la velocidad (en m/s) con que se desprenden los electrones de la superficie del metal.

A) $6,3 \times 10^5$ B) $7,1 \times 10^5$ C) $6,2 \times 10^5$
D) $5,9 \times 10^5$ E) $5,3 \times 10^5$

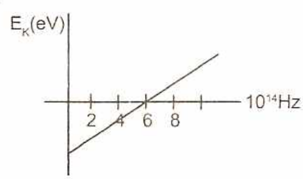
70. La longitud de onda umbral para el cesio es 686 nm. Si una luz de longitud de onda de 470 nm ilumina una superficie de este metal, ¿Cuál será la rapidez máxima (en m/s de los fotoelectrones?

A) $5,4 \times 10^5$ B) $6,2 \times 10^5$ C) $4,8 \times 10^5$
D) $3,2 \times 10^5$ E) $7,2 \times 10^5$

71. Un metal empieza a liberar fotoelectrones cuando la longitud de onda es de 400 nm. Calcular (en eV) la energía cinética máxima de los electrones liberados por una luz de 300 nm de longitud de onda.

A) 1,30 B) 1,20 C) 1,03
D) 1,09 E) 1,12

72. La máxima energía cinética de los fotoelectrones emitidos desde una superficie, varia con la frecuencia de la luz incidente según se ilustra en la gráfica ¿Cuál es la función trabajo (en eV) de la muestra?



A) 1,24 B) 1,79 C) 2,31
D) 2,48 E) 2,75

73. Se tiene una superficie de sodio que es iluminada con una luz cuya frecuencia es 10^{12} kHz. La función de onda del metal es ϕ=2,46 eV. Determine la energía cinética (en eV) de los electrones más energéticos que son arrancados.

A) 4,42 B) 3,27 C) 2,82
D) 1,68 E) 0,27

74. Se trata de identificar una superficie metálica mediante el efecto fotoeléctrico, iluminándola con luz de frecuencia $\gamma = 1,6 \times 10^{15}$ Hz, obteniéndose un potencial de frenado de 1,9 V. Determine la función trabajo (en eV) del metal.

A) 1,27 B) 2,37 C) 3,22
D) 4,73 E) 5,28

75. Para un proceso de generación de rayos X se da un conjunto de 5 proposiciones. Identifique la incorrecta.

A. Los electrones se emiten por un filamento a alta temperatura en un tubo al vacío.
B. Estos electrones se aceleran por un alto voltaje dentro del tubo.
C. Tales electrones al impactar sobre un blanco, se emiten rayos X.
D. Los núcleos positivos del blanco desaceleran al electrón incidente.
E. Cada fotón X emitido tiene una energía igual a la energía cinética del electrón incidente.

76. Respecto a la generación de rayos X, señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. λ_{min} depende del material del que está hecho el blanco.
II. λ_{min} es independiente del material del blanco.
III. Cada electrón que choca con el blanco, genera solo un fotón de rayos X.

A) FVF B) FVV C) VVV
D) FFF E) VFV

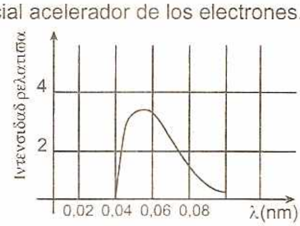
77. Un electrón sale de un tubo de rayos catódicos y justo antes de chocar con el ánodo tiene una energía de 10^5 eV. Si en el choque pierde la mitad de su energía, halle (en nm) la longitud de onda de los rayos X que se originan.

A) 0,050 B) 0,025 C) 0,075
D) 0,020 E) 0,070

78. Determinar (en kV) la diferencia de potencial entre el filamento y el ánodo de un tubo de rayos X, con que debe ser acelerado un electrón para que el límite de las ondas cortas en el espacio continuo de rayos X sea de 0,6 nm.

A) 3,15 B) 3,05 C) 3,07
D) 2,07 E) 2,87

79. En la figura, se muestra la distribución espectral de la emisión continua de rayos X. Determinar (en kV) el potencial acelerador de los electrones.



A) 42 B) 22 C) 42
D) 15 E) 31

80. Una bombilla eléctrica de 50 W emite 9×10^{21} fotones en cada minuto. Determine la longitud de onda asociada a la radiación (en nm).

A) 600 B) 700 C) 596,7
D) 500 E) 400

81. A la temperatura T, un cuerpo negro emite un espectro de radiación electromagnética con frecuencia máxima "v_1", considerando que "c" es la velocidad de la luz en el vacío, entonces a la temperatura $T_2 = 2T_1$ el mismo cuerpo emitirá un espectro con longitud de onda máxima?

A) $\frac{4c}{v_1}$ B) $\frac{c}{v_1}$ C) $\frac{c}{v_1}$
D) $\frac{c}{2v_1}$ E) $\frac{c}{4v_1}$

82. Respecto a la hipótesis de Planck, señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
I. Las moléculas absorben o emiten energía en cantidades discretas.
II. Un fotón es una partícula de masa 2 veces la masa del electrón.
III. La energía que transporta un fotón de una radiación cuya frecuencia es igual a 6×10^{14} Hz es 4,5 eV. (1 eV $\cong 1,6 \times 10^{-19}$J)

A) FFF B) VVV C) VFF
D) VVF E) FFV

83. Se ha determinado que cierta fuente monocromática emite 36×10^{21} fotones en un minuto. Si la potencia de la fuente es 50 W. Halle la longitud de onda (en nm) aproximadamente de la luz que emite esta fuente.

A) 300,42 B) 4501,6 C) 2386,8
D) 7503,28 E) 9000,28

84. Con respecto al efecto fotoeléctrico. Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):
I. Para que se produzca el efecto fotoelectrico es imprescindible que exista una diferencia de potencial grande.
II. La velocidad de los fotoelectrones aumenta con la intensidad de la luz incidente.
III. La función trabajo (ϕ) es una constante independiente del material sobre el que incide la luz.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFF

85. Si se ilumina de cierto material con luz de longitud de onda $\lambda = 400$ nm, la energía cinética máxima de los fotoelectrones es 0,8 eV. Determine la función trabajo del material en eV.

A) 1,3 B) 3,2 C) 4,1
D) 5,2 E) 2,3

86. En el efecto fotoeléctrico, se triplica la intensidad entonces:

A) La energía cinética de los fotoelectrones se duplica.
B) La energía cinética de los fotoelectrones se triplica.
C) La energía cinética de los fotoelectrones se cuadruplica.
D) La energía cinética de los fotoelectrones se reduce a la mitad.
E) El número de fotoelectrones se triplica.

87. Sobre una superficie metálica limpia incide radiación con una frecuencia $v \geq v_o$, donde v_o es la frecuencia umbral. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas (F) o verdaderas (V)?
I. La energía cinética máxima de los fotoelectrones depende de la intensidad de la radiación incidente.
II. Si $v = v_o$, no se da el efecto fotoeléctrico.
III. El potencial de frenado solo depende de la frecuencia de la radiación incidente.

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VFV E) VVF

88. Señale verdadero (V) o falso (F) a los siguientes:
I. La generación de rayos X es un fenómeno inverso al efecto fotoeléctrico.
II. Se producen rayos X cuando electrones veloces chocan con un blanco metálico.
III. Se puede considerar que la energía cinética de retroceso es nula.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVF E) FFF

89. El fenómeno de emisión de los rayos X se tienen las cantidades:
$\frac{1}{2}mv^2$: energía cinética (máxima) del electrón acelerado.
eV: energía del fotón emitido.
Identifique la veracidad (V) o falsedad (F) de las proposiciones:

I. $\frac{1}{2}mv^2 = eV$

II. $\frac{1}{2}mv^2 = hv_{max}$

III. $eV = \frac{1}{2}mv^2 = hv_{max}$

A) VFF B) FVF C) FFF
D) VVF E) VVV

90. En el fenómeno de los rayos X se presenta la igualdad:

$$\frac{1}{2}mv^2 = hv = eV$$

Según la cual, identifique la proposición falsa:

A) La energía cinética del fotón emitido es $\frac{1}{2}mv^2$.

B) La máxima energía del fotón emitido es hv.

C) La energía potencial eléctrica que adquiere el electrón que se acelera es eV.

D) $hv = \frac{1}{2}mv^2$, significa que la máxima energía del fotón emitido, es igual a la pérdida de la energía cinética del electrón:

E) $\frac{1}{2}mv^2 = eV$, significa que la energía cinética del electrón es la que le proporciona el voltaje acelerador.

91. Un piloto de una nave espacial que se aleja de la Tierra a 0,86c, envía una señal de rayos laser a ella. El piloto mide la velocidad "v" de la señal laser y descubre que es:

A) $v < c$ B) $v = c$ C) $v > c$
D) $v = c/2$ E) $v \approx c/100$

92. Las personas en la Tierra al medir la velocidad "v" del haz laser. Encuentran que es:

A) $v < c$ B) $v = c$ C) $v > c$
D) $v = c/2$ E) $v \approx c/100$

93. Con el siguiente enunciado, responda las siguientes preguntas:
Una nave espacial de 20 m de largo (medida por un piloto de ella), pasa a una velocidad constante por una plataforma espacial de 40 m de largo (medida por un trabajador en ella). El trabajo mide la longitud de la nave cuando esta pasa, y descubre que tiene 18 m de largo. ¿Con que rapidez pasa la nave por la plataforma?

A) $v \approx c/100$ B) $v \approx c/10$ C) $v = c/2$
D) $v = c$ E) $v > c$

94. El piloto obtiene las siguientes medidas de la longitud de la plataforma:

A) 36 m B) 38 m C) 42 m
D) 44 m E) 50 m

95. El piloto observa un reloj en la plataforma por un mismo (según el reloj de la nave).Pero este reloj indicará que el tiempo transcurrido es:

A) 49 s B) 54 s C) 60 s
D) 67 s E) 70 s

96. El trabajador observa un reloj en la nave por un minute (según el reloj de la plataforma). Pero el reloj de la nave indicará que el tiempo transcurrido es:

A) 54 s B) 60 s C) 67 s
D) 78 s E) 80 s

97. El piloto lanza un misil con una velocidad de 0,9c respecto a la nave. En la relación con la plataforma, su velocidad es:

A) Mayor que c
B) Igual que c
C) Menor que c
D) Mayor a la velocidad del misil.
D) Mayor a la velocidad de la nave.

98. Una nave espacial se leja de la Tierra a 0,90 c. La velocidad de la Tierra medida por la nave es:

A) 0 B) 0,45c C) 0,90c
D) 1,9c E) 2,0c

99. Con el siguiente enunciado, marcar la alternativa correcta en las siguientes preguntas:
Una nave espacial que se aleja a 0,60c de la tierra, dispara dos misiles, uno hacia atrás y el otro hacia adelante. Se disparan ambos misiles con una rapidez de 0,80c en relación con la nave.
La velocidad del misil disparado hacia la Tierra, tiene una velocidad v_1 respecto a ella, donde:

A) $v_1 < 0{,}6c$ B) $0{,}6c < v_1 < 0{,}8c$
C) $0{,}8c < v_1 < c$ D) $v_1 = 1{,}4c$
E) $v_1 > 1{,}4c$

100. El misil disparado hacia la Tierra tiene una velocidad v_2 respecto a ella, donde:

A) $v_2 < 0{,}2c$ B) $v_2 = 0{,}2c$
C) $0{,}2c < v_2 < 0{,}6c$ D) $0{,}6c < v_2 < 1{,}6c$
E) $0{,}8c < v_2 < c$

101. La velocidad del misil que se dispara alejándose de la Tierra, medida por el otro misil es v_3, donde:

A) $v_3 < 0{,}6c$ B) $0{,}6c < v_3 < 0{,}8c$
C) $0{,}8c < v_3 < c$ D) $v_3 = 1{,}6c$
E) $v_3 > 1{,}6c$

102. Dos eventos A y B ocurren simultáneamente, pero en distinto sitio dentro del marco S. En otro marco S'.

A) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente y en el mismo sitio.
B) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente, o en el mismo sitio pero no en ambas formas.
C) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente, pero no en el mismo sitio.
D) Los eventos no podrían ocurrir simultáneamente, pero si en el mismo sitio.
E) Los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, y tampoco en el mismo sitio.

103. Dos eventos A y B no son simultáneamente o en el mismo sitio. dentro del marco S. En otro marco S'.

A) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente y en el mismo sitio.
B) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente, o en el mismo sitio pero no en ambas formas.
C) Los eventos podrían ocurrir simultáneamente, pero no en el mismo sitio.
D) Los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, pero si en el mismo sitio.
E) Los eventos no pueden ocurrir simultáneamente, y tampoco en el mismo sitio.

104. Con el siguiente enunciado, responder las siguientes preguntas:
Una partícula de masa "m" y con un momento de magnitud 2mc, choca con otra de masa "m", la cual se encuentra en reposo. Las dos se mantienen juntas después de la colisión.
Antes de la colisión, la velocidad de la partícula en movimiento es:

A) Menor que c/2
B) Entre c/2 y c
C) Entre c y 2c
D) 2c
E) igual a c/2

105. La magnitud del momento total después de la colisión es:

A) Menor que 2mc
B) Igual a 2mc
C) Entre 2mc y 3mc
D) Mayor que 3mc
E) Menor que c

106. La velocidad de las dos partículas después de la colisión es:

A) Menor que c/2
B) Igual a c/2
C) Entre c/2 y c
D) Mayor que c
E) Mayor que c/2

107. ¿Cuál de los siguientes decaimientos está prohibido por la conversación de la energía.

A) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$
B) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$
C) $p \rightarrow n + e^+ + \bar{v}_e$
D) $p^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$
E) b y d

108. ¿Cuál será la velocidad de un electrón cuya energía cinética es 4k?

A) Entre v_1 y c
B) Menos de $2v_1$
C) Igual a $2v_1$
D) Mayor que $2v_1$
E) Tanto a como "c" son correctas

109. En el efecto fotoeléctrico, la longitud de onda de los fotones que inciden se cambia por fotones de longitud de onda menor.
Por lo tanto:
A) La energía cinética de los fotoelectrones aumenta.
B) La energía cinética de los fotoelectrones disminuye.
C) La energía cinética de los fotoelectrones no varía.
D) El número de fotoelectrones disminuye.
E) El número de fotoelectrones aumenta.

CLAVES

1. A	15. B	29. B	43. D	57. A	71. C	85. E	99. A
2. C	16. A	30. E	44. C	58. C	72. D	86. E	100. C
3. A	17. A	31. B	45. B	59. A	73. D	87. A	101. B
4. B	18. B	32. A	46. C	60. A	74. D	88. C	102. D
5. A	19. A	33. D	47. E	61. A	75. E	89. E	103. C
6. B	20. B	34. C	48. A	62. B	76. E	90. A	104. B
7. E	21. D	35. A	49. C	63. C	77. B	91. B	105. B
8. A	22. A	36. D	50. D	64. D	78. D	92. B	106. C
9. E	23. D	37. C	51. C	65. C	79. E	93. C	107. A
10. A	24. D	38. B	52. C	66. D	80. C	94. A	108. A
11. E	25. D	39. A	53. B	67. A	81. A	95. D	109. A
12. B	26. E	40. B	54. E	68. D	82. A	96. A	
13. C	27. D	41. A	55. B	69. E	83. C	97. C	
14. D	28. A	42. D	56. C	70. A	84. E	98. C	

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
situados en av. Las Lomas 1600, urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344